МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

(СКЛАДОВІ ЗАГАЛЬНОІНЖЕНЕРНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ)

Навчальний посібник

Частина 1

Харків 2023

УДК 531.8(075)
Т 38

Рекомендовано вченою радою Українського державного університету залізничного транспорту як навчальний посібник (витяг з протоколу № 6 від 30 листопада 2022 р.)

Рецензенти

професори А. В. Гайдамака (НТУ «ХПІ»),
М. А. Подригало (ХНАДУ)

Авторський колектив:

В. І. Мороз, О. В. Братченко, В. І. Громов, О. А. Логвіненко

Т 38 Технічна механіка (складові загальноінженерної компетентності): Навч. посібник / В. І. Мороз, О. В. Братченко, В. І. Громов та ін. – Харків: УкрДУЗТ, 2023. – 135 с., рис. 41, табл. 4.

ISBN

Повнота і сучасний науково-методичний рівень висвітлених матеріалів спрямовані на ефективне використання навчального посібника в навчальному процесі для забезпечення якісної загальноінженерної підготовки, однієї з важливих складових фахової (спеціальної) компетентності випускників університету.

Призначається для здобувачів вищої освіти, а також аспірантів інженерно-транспортних спеціальностей закладів вищої освіти.

УДК 531.8(075)

© Український державний університет залізничного транспорту, 2023.
© В. І. Мороз, О. В. Братченко, В. І. Громов, О. А. Логвіненко

ISBN

ЗМІСТ

Передмова…… 4
Вступ…… 6
Перелік основних скорочень……. 9
1. Описання загального устрою технічних засобів……. 10
1.1. Складові структури механізмів…….. 10
1.2. Побудова кінематичних схем важільних механізмів 15
1.3. Структурна будова і класифікація важільних механізмів…… 17
1.4. Загальний устрій зубчастих механізмів……. 20
1.5. Загальний устрій кулачкових механізмів……... 30
Питання для самоконтролю до розділу 1…….. 36
2. Визначення основних характеристик руху механізмів… 37
2.1. Визначення кінематичних характеристик важільних механізмів…… 37
2.2. Особливості проведення силових розрахунків механізмів…… 44
2.3. Дослідження динаміки механізмів……. 49
2.4. Основні параметри і характеристики руху евольвентних зубчастих передач…… 58
2.5. Особливості дослідження руху кулачкових механізмів……. 69
Питання для самоконтролю до розділу 2……. 73
3. Використання розглянутих у розділах 1 і 2 елементів ЗІК при аналізі загального устрою та основних характеристик важільного механізму привода конвеєра… 75
Бібліографічний список ……. 99
Додаток 1. Основні поняття і визначення теоретичної механіки…… 101
Предметний покажчик…… 133

ПЕРЕДМОВА

Однією з основних тенденцій розвитку світової та вітчизняної вищих шкіл є зростання вимог до рівня інженерної освіти, що поєднує загальноінженерну та спеціальну підготовку з ґрунтовною методологічною підготовкою в галузі техніки, створення, експлуатації та ремонту технічних засобів, складних технічних систем.

Як показник такої підготовки інженера може розглядатися відповідна фахова (спеціальна) компетентність (ФК), у межах якої доцільно виділити загальноінженерну компетентність (ЗІК). В узагальненому описанні ЗІК це здатність чітко уявляти і формалізувати інженерні завдання, формулювати відповідні завдання, виділяти етапи і послідовність їх вирішення; обирати сучасні методи і засоби для удосконалення конструкції технічних засобів, отримання і покращення характеристик їхнього функціонування, надійності, технологій технічного обслуговування та ремонту; конструювати деталі, обирати матеріали і технології для їх виготовлення.

Для набуття більшості з наведених складових ЗІК здобувачами вищої освіти першого (бакалаврського) рівня освіти в Українському державному університеті залізничного транспорту за чисельними освітніми програмами спеціальностей 275 «Транспортні технології», 144 «Теплоенергетика», 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», 273 «Залізничний транспорт» у відповідних навчальних планах передбачено вивчення дисципліни «Технічна механіка».

Разом з цим на сьогодні для підготовки здобувачів вищої освіти за виділеними складовими відсутні сучасні підручники з технічної механіки. Це означає певні труднощі, пов’язані з необхідністю використання для висвітлення тем багатьох наявних підручників з теоретичної механіки, теорії механізмів і машин, деталей машин, основ конструювання, опору матеріалів, САПР та ін. Додаткові труднощі пов’язані з тим, що структура, базові приклади та обсяги викладення матеріалу орієнтовані на підготовку інженерів-конструкторів за спеціальними програмами. Це потребує додаткових витрат часу для наближення

теоретичних матеріалів до використання в дослідженнях типових інженерних об’єктів за профілем обраної освітньої програми, має певний негативний вплив на якість навчального процесу.

З метою усунення розглянутих труднощів авторським колективом викладачів кафедри механіки і проектування машин Українського державного університету залізничного транспорту написано цей навчальний посібник.

Порівняно з існуючими підручниками з вивчення окремих загальноінженерних дисциплін головною особливістю навчального посібника є його цільова спрямованість на формування здобувачами вищої освіти за обраною освітньою програмою основних складових ЗІК. Це забезпечується тим, що зміст основних розділів навчального посібника безпосередньо прив’язаний до відповідних складових ЗІК і за своєю структурою ґрунтується на послідовному описанні характерних інженерних завдань щодо профільних типових технічних засобів, сучасних підходів, теоретичних положень і розрахункових методів для їх виконання, а також прикладів їхнього практичного використання.

Основу змісту навчального посібника складають попередні і видані раніше навчально-методичні розробки авторів з дисциплін «Технічна механіка», «Теорія механізмів і машин», «Деталі машин і основи конструювання», «Основи розрахунків на міцність», «Основи конструювання і САПР», що протягом останніх років активно використовувались при викладанні дисципліни «Технічна механіка».

Висловлюємо глибоку вдячність шановним рецензентам – доктору технічних наук, професору А. В. Гайдамаці і доктору технічних наук, професору М. А. Подригало за творче спілкування і цінні побажання при рецензуванні навчального посібника. Автори висловлюють свою вдячність усім, хто сприяв підготовці до видання цього навчального посібника.

Зауваження і побажання щодо покращення навчального посібника просимо направляти за адресою: 61050, Харків, майдан Фейєрбаха, 7, Український державний університет залізничного транспорту, кафедра механіки і проектування машин.

Автори
Харків
2022

ВСТУП

Актуальність формування загальноінженерних компетенцій у майбутніх фахівців, які навчаються в університеті за освітніми програмами виділених спеціальностей, визначається тим, що їхня інженерна діяльність буде пов'язана з процесами експлуатації, модернізації, технічного обслуговування і ремонту широкого спектра складних за конструкцією технічних засобів (ТЗ), механізмів, пристроїв та устаткування. Це, наприклад, теплоенергетичні об'єкти на підприємствах залізниць; енергетичні установки локомотивів; дизелі, електричні генератори і двигуни, компресори, редуктори; тягові приводи рухомого складу; гіркові та паркові уповільнювачі вагонів; електромеханічні стрілочні переводи; крани та підйомно-транспортне обладнання контейнерних майданчиків і ремонтних підприємств; механічні пристрої натягнення дротів силових електромереж та ін. Тому базовою вимогою до загальноінженерної компетентності фахівця є його здатність якісно вирішувати комплексні інженерні завдання стосовно сучасних технічних засобів. Це підтверджується наявним досвідом авторів посібника, набутим при організації проведення і виконанні комплексних інженерних завдань з удосконалення конструкції уповільнювачів вагонів на залізничних гірках, енергетичних установок тепловозів, локомотивних дизелів і компресорів, тягових приводів рухомого складу та ін.

При проведенні таких досліджень виникає необхідність поетапного вирішення певних інженерних завдань. До основних з них належать компонування всіх модулів і елементів конструкції в єдиному агрегаті; дослідження характеристик руху – проведення кінематичних, силових і динамічних розрахунків окремих механізмів і механічних передач; проведення необхідних розрахунків на міцність і надійність; конструювання окремих деталей і вузлів, з'єднань, муфт, підшипників, ущільнень та ін.

Наведене вище обґрунтовує доцільність використання як основні складові ЗІК фахівця його здатність якісно виконувати розглянуті інженерні завдання на основі знань, умінь і навичок, надбаних при навчанні за певною освітньою програмою. На

отримання такого результату спрямований цей навчальний посібник з дисципліни «Технічна механіка».

На основі аналізу змісту, цілей і сучасних методів виконання комплексних інженерних завдань у навчальному посібнику виділено чотири основні розділи подання навчального матеріалу, орієнтовані на формування певних інтегральних складових ЗІК.

Як такі складові ЗІК фахівця виділено чотири наведених нижче складових, що забезпечують:

ЗУМ – визначення і формалізоване описання загальної побудови (устрою) конструкції ТЗ (механізмів і механічних систем машин);

ХРМ – визначення основних характеристик руху механізмів і машин;

ІРМ – проведення інженерних розрахунків на міцність;

КДМ – конструювання деталей машин.

Вимогам формування у здобувачів вищої освіти наведених вище складових ЗІК підпорядкована відповідна загальна структура навчального посібника. До того ж особливістю побудови кожного зі складових підрозділів в основних розділах посібника є дотримання єдиної схеми послідовності висвітлення навчальних матеріалів. Вона передбачає конкретизацію відповідних до підрозділу інженерних задач у прив’язці до відповідних ТЗ; використання необхідного теоретичного матеріалу для їх розв’язання; приклад практичного використання таких рішень для конкретних ТЗ.

З урахуванням значного обсягу базових матеріалів навчальний посібник видається в трьох частинах. При цьому головні розділи кожної частини безпосередньо спрямовані на викладання матеріалів стосовно відповідної складової ЗІК. Додаткові розділи містять приклади їхнього послідовного використання при вирішенні комплексних інженерних завдань.

Так, перша частина навчального посібника містить базові матеріали і рекомендації, спрямовані на формування у здобувачів вищої освіти складових ЗУМ і ХРМ.

Друга частина містить базові матеріали, які забезпечують формування складової ІРМ. Розглядаються наближені до цільового практичного використання випадки, методи і засоби

проведення інженерних розрахунків деталей і елементів конструкції ТЗ на міцність.

У третій частині концентровано подано матеріали для формування складової КДМ. Вони охоплюють важливі напрями інженерної діяльності, пов'язані з обиранням конструкційних матеріалів, призначенням технічних умов на виготовлення, читанням і розробленням робочих креслень деталей, вузлів, механічних передач сучасних ТЗ.

У розглядуваному виданні подано першу частину навчального посібника, базові матеріали якої розміщені в трьох основних розділах і додатку.

У першому розділі наведено базові положення, необхідні для формування складової ЗУМ. Вони охоплюють сучасні підходи і методи для схематичного описання конструкції ТЗ, структури основних механізмів, класифікації, визначення їхніх ступенів рухомостей, побудови необхідних для подальших досліджень руху механізмів відповідних кінематичних схем.

У другому розділі наведено матеріали, спрямовані на формування у здобувачів вищої освіти складової ХРМ. Концентровано викладено сучасні уявлення про цілі та методи розрахунків з визначення кінематичних, силових і динамічних показників руху різних важільних, зубчастих і кулачкових механізмів типових за профілем освіти ТЗ.

У третьому розділі розглянуто прикладні питання практичного використання складових ЗУМ і ХРМ при аналізі загального устрою і основних характеристик руху важільних механізмів (на прикладі механізму привода конвеєра).

Основні розділи навчального посібника доповнюються додатком, у якому наведено певні необхідні відомості, що доповнюють викладення матеріалів в основних розділах (поняття і визначення з «Теоретичної механіки», що розглядалися раніше в курсах фізики та інших загальноосвітніх дисциплін).

Повнота і сучасний науково-методичний рівень висвітлених матеріалів спрямовані на ефективне використання навчального посібника для формування у здобувачів вищої освіти загальноінженерної компетенції за профілем фахової освіти.

ПЕРЕЛІК ОСНОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

БЗМ – багатоланковий зубчатий механізм
ГЗМ – гіперболоїдний зубчастий механізм
ДМ – динамічна модель
ЗІК – загальноінженерна компетентність
ЗК – зубчасте колесо
ЗМ – зубчастий механізм
ЗУМ – загальний устрій машин
ІРМ – інженерні розрахунки на міцність
КА – кінематичний аналіз
КДМ – конструювання деталей машин
КЗМ – конічний зубчастий механізм
КЛ – кінематичний ланцюг
КМ – кулачковий механізм
КП – кінематична пара
КШМ – кривошипно-шатунний механізм
СГ – структурна група
СРМ – силовий розрахунок механізму
ТЗ – технічний засіб
ФК – фахова (спеціальна) компетентність
ХРМ – характеристики руху механізмів (машин)
ЦЗМ – циліндричний зубчастий механізм

1. ОПИСАННЯ ЗАГАЛЬНОГО УСТРОЮ ТЕХНІЧНИХ ЗАСОБІВ

Загальна конструкція сучасних ТЗ передбачає використання у своєму складі багатьох основних і допоміжних механізмів. Більшість з них містить чисельні, пов'язані між собою, деталі, що забезпечують потрібні перетворення і передачі визначених кінематичних і силових параметрів, формування відповідних характеристик роботи. Для отримання таких характеристик використовуються розрахункові методи, у яких для спрощення необхідних описань реальна конструкція механізму заміняється еквівалентною кінематичною схемою.

У кінематичних схемах механізмів при збереженні умов передачі руху і навантажень реальні деталі подаються у вигляді простих ланок, а їхнє взаємне з'єднання – у вигляді відповідних кінематичних пар. Базою їхньої побудови є подані в розділі теоретичні положення з сучасних підходів до описання структури механізмів [1, 2, 4].

Набуті знання і вміння для побудови кінематичних схем різних механізмів є важливими елементами формування складової ЗУМ загальноінженерної компетентності здобувачів вищої освіти за обраним профілем навчання. Тому при висвітленні матеріалу як об'єкти (приклади) в основному розглядалися механізми типових за профілем спеціальності ТЗ – теплових та електричних двигунів, струмоприймачів електричного транспорту, компресорів, редукторів, стрілочних приводів.

1.1. Складові структури механізмів

Загальні методи аналізу конструкції механізмів і проєктування їхніх відповідних схем науково узагальнює «Теорія механізмів і машин», у якій різні ТЗ розглядаються як машини певного призначення.

Машина – це пристрій, що виконує механічний рух для перетворення енергії (**енергетичні машини**), матеріалів (**робочі машини**), інформації з метою підвищення продуктивності, а також заміни або полегшення праці людини.

З урахуванням цього до енергетичних і робочих машин належать теплові та електричні двигуни, генератори, локомотивні

енергетичні установки, технологічне та підйомно-транспортне обладнання підприємств залізничного транспорту, усі названі раніше ТЗ.

Поєднання енергетичної та робочої машин називається **машинним агрегатом**.

Машина, що функціонує без втручання людини, називається **машиною-автоматом**, а поєднання таких машин для виконання певного технологічного процесу – **автоматичною лінією**.

Для необхідного перетворення рухів деталей (фізичних тіл) у конструкції машин використовуються відповідні механізми.

Механізм – це система фізичних тіл, яка перетворює рух, що підводиться до одного чи декількох тіл у потрібні (за видами або параметрами) рухи інших тіл.

Конструкція машин передбачає використання різних видів механізмів. Так, коли виникає необхідність перетворення одного виду руху деталей в інший (обертального – у зворотно-поступальний, зворотно-поступального – у поступальний, обертального – у плоский та ін.), використовують більш складні за конструкцією перетворювальні механізми зі складною (нелінійною) передавальною функцією положень [2]. До них належать різні важільні і кулачкові механізми енергетичних, робочих, транспортних і транспортуючих машин та ін.

У разі потреб зміни тільки параметрів руху (його напрямку, швидкості обертання) використовують відповідні передавальні механізми (механізми з лінійною передавальною функцією положень [2]) з постійним передаточним відношенням. До них у першу чергу відносять багатоланкові зубчасті механізми (диференціальні, планетарні), рядові зубчасті передачі та ін.

Прикладом механізму, що перетворює вид і параметри руху, є кривошипно-шатунний механізм тепловозного дизеля, який перетворює зворотно-поступальний рух поршнів у циліндрах в обертальний рух колінчастого вала (КВ). У той же час передавальний зубчастий механізм використовується для забезпечення привода розподільного вала дизеля від КВ, не перетворює вид обертального руху, а тільки змінює його кінематичні і силові параметри.

При описанні структури механізмів система твердих тіл (його конструкція) подається як система ланок. Кожна **ланка** – це одна або декілька жорстко з’єднаних між собою деталей

(наприклад колінчастий вал або шатун дизеля в зборі з приєднаною частиною нижньої головки шатуна).

Відповідно до конструкції механізму визначають **рухомі** і **нерухомі** (або відносно нерухомі) ланки.

Усі нерухомі ланки (блоки циліндрів теплових двигунів, корпуси компресорів, редукторів, стрілочних переводів) використовуються для розміщення необхідних елементів забезпечення руху деталей (напрямних, осей обертання та ін.) і називаються **стійками**.

Рухомі ланки поділяються на **вхідні** (до них підводиться наявний рух для перетворення у визначений рух інших ланок), **вихідні** (здійснюють потрібний за призначенням механізму рух) і **з'єднувальні** (забезпечують проміжне перетворення руху від вхідного до потрібного).

З погляду на особливості свого руху при роботі механізмів незалежно від конструктивних особливостей рухомі ланки мають свої назви:

- кривошипи – здійснюють повний оберт, обертаються навколо нерухомої осі (як правило, вхідні або вихідні ланки);
- шатуни – здійснюють плоский рух (з'єднувальні ланки);
- повзуни – здійснюють прямолінійний поступальний (дод. 1) або зворотно-поступальний рух (частіше вхідні або вихідні ланки);
- коромисла – здійснюють неповний оберт (або коливання) навколо нерухомої осі (вхідні ланки конвеєрів, що коливаються, або як рухомі напрямні кулісних механізмів).

У механізмах усі ланки певним чином з'єднуються між собою.

Рухоме з'єднання двох контактуючих ланок називається **кінематичною парою** (КП).

Поверхня, лінія або точка, по яких контактують ланки в КП, називається **елементом КП**. За видом елемента (класифікація Ф. Рело) розрізняють **нижчі КП**, що мають елементи у вигляді поверхонь, і **вищі КП**, у яких елементами є лінії або точки. При цьому нижчі КП забезпечують (порівняно з вищими КП) передачу більш значних навантажень. У свою чергу застосування вищих КП забезпечує зменшення тертя (у підшипниках кочення) і можливість отримувати необхідні складні закони руху вихідних ланок (у кулачкових і зубчастих механізмах).

Однією з умов потрібного перетворення і передачі рухів при роботі механізмів є **замикання КП** (забезпечення постійного контакту ланок по елементу КП). Для більшості нижчих КП здійснюється **геометричне замикання** (за рахунок відповідних геометричних форм контактуючих поверхонь). Для складних за контактуючими поверхнями вищих КП використовують **силове замикання** (контакт забезпечується за рахунок використання дії сил пружин, ваги ланок, різних натискачів).

Важливе місце при розгляданні структури, головним чином, важільних механізмів займає **класифікація КП за кількістю обмежень, які вони накладають на відносний рух ланок**.

Кожна вільна ланка у просторі має шість ступенів вільності, які визначаються шістьма координатами (трьома лінійними f_X, f_Y, f_Z і трьома кутовими φ_X, φ_Y, φ_Z відносно осей *OX*, *OY*, *OZ*). При їх об'єднанні в різні КП кожна з них може накладати від одного до п'яти обмежень на вільний рух ланок, залишаючи відповідну кількість ступенів вільності *H* для кожної ланки. Тоді клас КП дорівнює

$$S_{КП} = 6 - H \,. \tag{1.1}$$

Наприклад, цікаву для розуміння певну КП (рис. 1.1) утворює куля (ланка 1) з площиною *ZOX* (ланка 2) з силовим замиканням силою *P*.

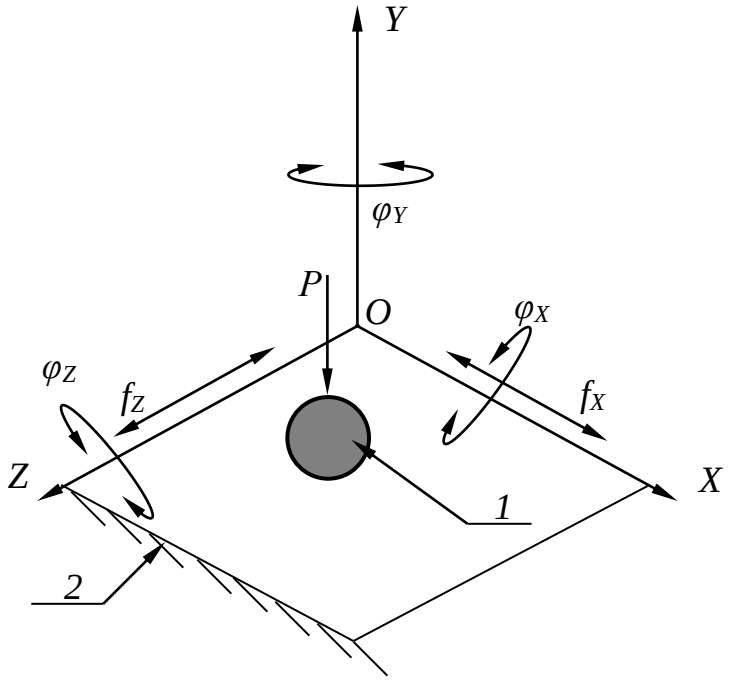


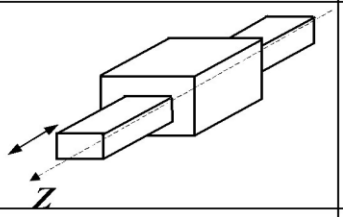
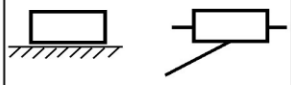
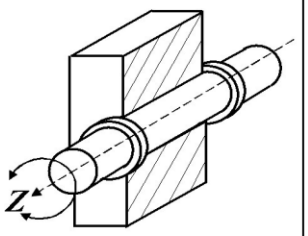
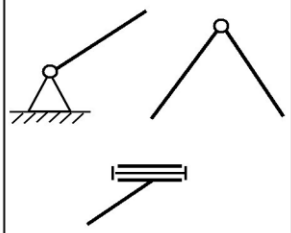
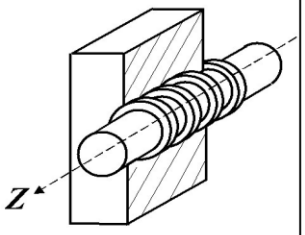
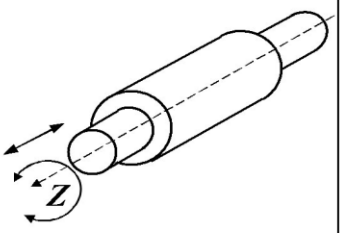
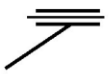
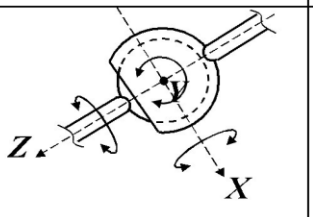
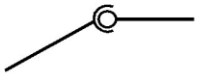
Рис. 1.1. До визначення класу кінематичної пари куля – площина

Не порушуючи умови замикання, куля зберігає можливість відносного руху за координатами f_X, f_Z, φ_X, φ_Y, φ_Z (окрім f_Y). Тобто для певної КП $H=5$ і $S_{КП}=1$ – КП 1 класу.

У табл. 1.1 наведено приклади (назви, види, умовні позначення) найбільш розповсюджених у конструкціях механізмів нижчих КП 5, 4 і 3 класів.

Таблиця 1.1

Умовні позначення кінематичних пар

Назва КП	Рисунок	Клас КП	Умовні позначення
Поступальна		5	
Обертальна		5	
Гвинтова		5	
Циліндрична		4	
Сферична		3	

1.2. Побудова кінематичних схем важільних механізмів

Подання конструкції важільних механізмів у вигляді відповідних кінематичних схем має суттєве значення для проведення кінематичних і силових розрахунків при виконанні комплексних інженерних завдань. **Кінематична схема** – це масштабне зображення з використанням умовних позначень його ланок і КП. За загальними правилами, ланки позначаються цифрами, а КП – заголовними літерами з цифровим позначенням класу КП. На ланках можуть також застосовуватися позначення літерами окремих точок (наприклад центрів мас ланок та ін.).

На кінематичній схемі механізму сукупність ланок та утворених ними КП розглядається як **кінематичний ланцюг** (КЛ). Тому механізм розглядається як КЛ, у якому положення (лінійні або кутові координати) усіх ланок визначається положенням **початкової** (як правило, вхідної) **ланки**, що відповідає значенням **узагальненої координати механізму** (визначає положення всіх ланок механізму відносно стійки).

При цьому, якщо всі точки ланок рухаються в одній або паралельних площинах, кінематичний ланцюг (механізм) називають **плоским КЛ**, якщо в різних непаралельних площинах – **просторовим КЛ**.

На рис. 1.2 наведено приклад плоского КЛ кінематичної схеми механізму привода конвеєра, що коливається. Видно, що в розглянутому плоскому КЛ ланки утворюють тільки КП 5-го класу (можуть бути тільки 5-го і 4-го класів, що забезпечують плоский рух ланок).

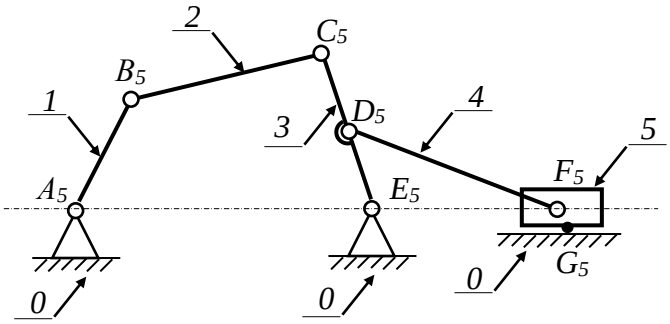


Рис. 1.2. Кінематична схема механізму привода конвеєра:
ланки: *0* – стійка; *1* – кривошип; *2, 4* – шатуни; *3* – коромисло; *5* – повзун; КП: A_5, B_5, C_5, E_5, D_5, F_5 – обертальні КП 5-го класу; G_5 – поступальна КП 5-го класу

У прикладі просторового КЛ (рис. 1.3) наявність КП 3-го класу (пара D_3) і пари 5-го класу (пара C_5, рухомість φ_Y) не забезпечує плоского руху.

У прив'язці до наведених прикладів КЛ поділяються на **прості КЛ** (у яких кожна ланка утворює не більше двох КП (рис. 1.3)) і **складні КЛ** (у яких є навіть одна ланка, що утворює більше двох КП (рис. 1.2)).

До того ж якщо в КЛ є хоча б одна ланка, що утворює тільки одну КП (рис. 1.3, ланка 1), то такий КЛ називається **відкритим КЛ**. Якщо таких ланок нема – **замкненим КЛ**.

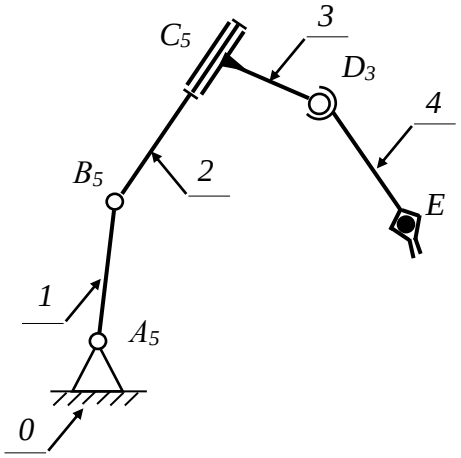


Рис. 1.3. Кінематична схема механізму маніпулятора:
ланки: *0* – стійка; *1* – коромисло; *2* – шатун; *3, 4* – ланки, що рухаються в різних площинах у просторі; *E* – захоплювальний пристрій;
КП: A_5, B_5 – обертальні КП 5-го класу; C_5 – обертальна КП 5-го класу (рухомість φ_Y); D_3 – сферична КП (рухомості $\varphi_X, \varphi_Y, \varphi_Z$)

При проєктуванні механізмів в окремих випадках виникає потреба або покращити умови тертя в нижчих КП 5-го класу, або замінити складну за конструкцією та умовами керування рухами КП 3-го та 2-го класів (наприклад КП 3-го класу D_3 (рис. 1.3)). У першому випадку конструкція вільних елементів ланок, що з'єднуються і утворюють КП, передбачає розміщення відповідного підшипника кочення (заміну тертя ковзання в елементі КП на тертя тіл кочення – шариків або роликів підшипника).

У другому випадку визначена КП заміняється еквівалентним **кінематичним з'єднанням** – відкритим кінематичним ланцюгом, ланки якого утворюють тільки КП 5-го класу.

На рис. 1.4 схематично показане таке кінематичне з'єднання для заміни сферичної КП 3-го класу. Видно, що КЛ містить чотири рухомі ланки, які утворюють три обертальні КП 5-го класу. Це забезпечує еквівалентність заміни.

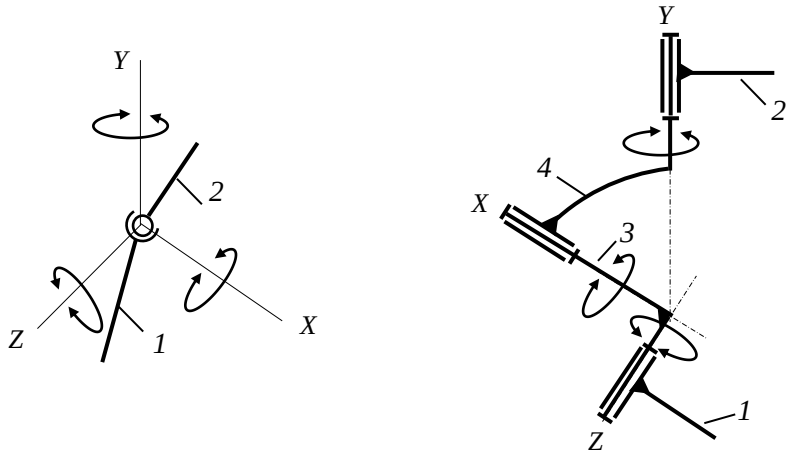


Рис. 1.4. Приклад утворення кінематичного з'єднання для заміни сферичної КП 3-го класу

1.3. Структурна будова і класифікація важільних механізмів

Загальна структурна будова різних механізмів характеризується кількістю наявних ланок, а також кількістю і класом утворюваних ними КП. Вона визначає відповідний **ступінь рухомості механізму** W – кількість ступенів вільності його кінематичного ланцюга відносно нерухомої стійки. Її значення співпадає з кількістю узагальнених координат (кількістю початкових ланок механізму).

Для визначення W плоских механізмів використовується структурна формула П. Л. Чебишева

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_5 - p_4, \qquad (1.2)$$

де n – кількість рухомих ланок КЛ;

p_5, p_4 – кількість КП 5-го і 4-го класів, що утворюють ланки.

Наприклад, для кінематичної схеми, поданої на рис. 1.2, маємо $n=5$, $p_5=7$. Тоді W=1.

Для визначення W просторових механізмів використовують структурну формулу А. П. Малишева [3]. Для таких механізмів величина W дорівнює сумі можливих рухомостей у просторі усіх КП. Наприклад, для механізму маніпулятора (рис. 1.3) $W=6$ (це визначає необхідність по одному обертальному руху для 1, 2 і 3 ланок і трьох обертальних рухів для четвертої ланки – сферичного шарніра D_3).

Слід відзначити, що для утворення необхідних за призначенням (з визначеною величиною W) важільних механізмів реалізується єдиний підхід (запропонований у 1914 р. Л. В. Ассуром). Він передбачає використання з'єднаної з нерухомою стійкою обертальною КП 5-го класу початкової ланки. До цієї ланки приєднується відповідна структурна група (СГ), до ланок якої шляхом нашарування можуть приєднуватися і інші СГ, що також мають нульовий ступінь рухомості (не змінюють відповідну узагальненим координатам W механізму).

При цьому КЛ, утворений початковою ланкою і стійкою, розглядається як **механізм 1-го класу**, а **клас усього утвореного механізму** буде визначатися найвищим класом СГ, що входить до його складу.

Структурною групою (групою Ассура) називається кінематичний ланцюг, що після приєднання його вільними елементами до інших ланок механізму не змінює його ступінь рухомості і не може бути роз'єднаний на більш прості кінематичні ланцюги з нульовим ступенем рухомості.

Клас структурної групи визначається за найвищим класом контуру ланки, що входить до його складу. **Клас контуру ланки** визначається кількістю внутрішніх кінематичних пар, які його утворюють.

Порядок структурної групи визначається кількістю елементів, якими група приєднується до основного механізму.

На рис. 1.5 наведено приклади до визначення класів найбільш розповсюджених контурів, а також класів і порядків СГ.

Відповідно до зазначеного методу на рис. 1.6 розглянуто послідовність утворення наведеного на рис. 1.2 механізму привода конвеєра.

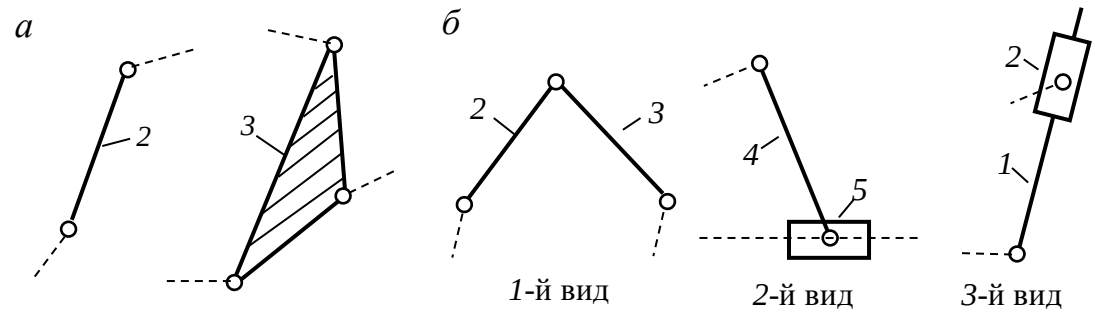


Рис. 1.5. Приклади визначення класу СГ:
а – контури 2-го і 3-го класів (ланки механізму на рис. 1.2);
б – приклади різних видів СГ 2-го класу, 2-го порядку

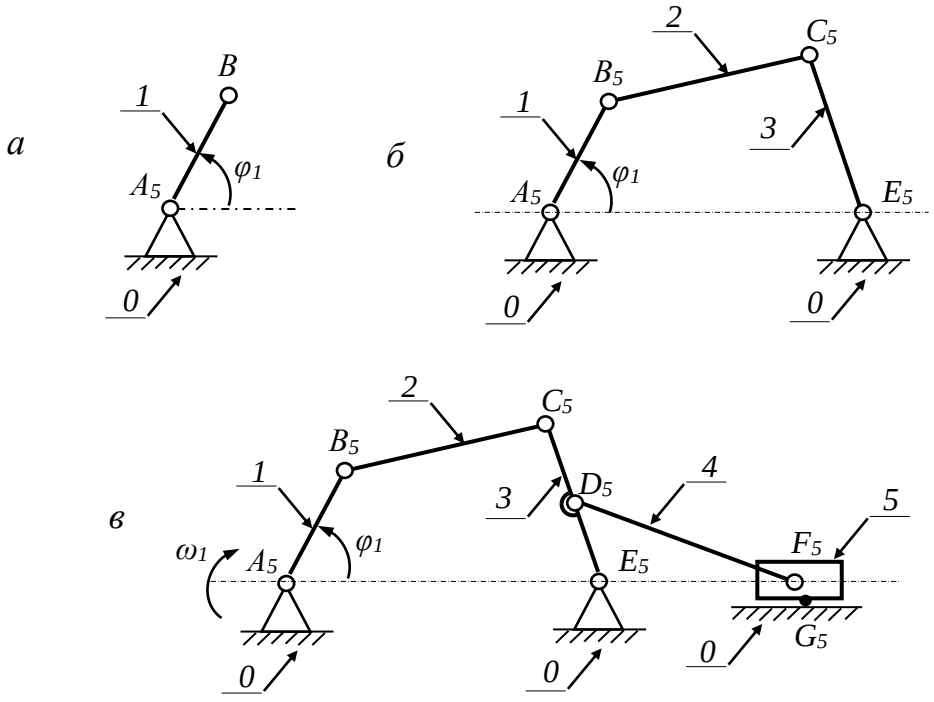


Рис. 1.6. Утворення механізму привода конвеєра

Реалізується послідовність: обрано механізм 1 класу (рис. 1.6, *а*); до нього приєднана структурна група (ланки 2-3) 2-го класу 1-го виду (рис. 1.6, *б*); до ланки 3 цієї групи приєднана група (ланки 4-5) 2-го класу 2-го виду (рис. 1.6, *в*). При цьому клас контуру ланки 3 і клас групи 2-3 змінився на 3-й. Отримано механізм 3-го класу.

Слід відзначити, що обмежені обсяги навчального посібника не дозволяють навести приклади більш складних кінематичних схем, розглянути структурну будову і визначення класу головних механізмів тепловозних дизелів, локомотивних компресорів, просторові багатоланкові схеми струмоприймачів електричного рухомого складу та ін. Їх достатньо повне описання наведено в доступних для здобувачів вищої освіти навчальних посібниках з дисциплін «Теорія механізмів і машин», «Основи конструювання і САПР» [2-4].

1.4. Загальний устрій зубчастих механізмів

У конструкції машин зубчасті механізми (ЗМ) переважно використовують як передавальні механізми безперервного обертального руху зі зміною його параметрів (виняток складають рейкові зубчасті механізми, у яких обертальний рух зубчастого колеса перетворюється в поступальний рух зубчастої рейки). З урахуванням того, що передача обертального руху забезпечується шляхом взаємодії відповідних пар зубців зубчастих коліс (ЗК), контактуючі поверхні яких (спряжені профілі) утворюють вищі КП, вони, на відміну від важільних механізмів, належать до механізмів з вищими КП.

Розповсюдженість таких механізмів визначається тим, що порівняно з іншими (наприклад фрикційними передачами) вони при відносно малих габаритах забезпечують задану передачу обертального руху (постійне передаточне відношення) у широкому діапазоні зміни швидкостей і потужностей.

Найпростіший зубчастий передавальний механізм (зубчаста передача) складається з трьох ланок – двох взаємодіючих зубчастих коліс і нерухомої стійки, у якій розміщуються осі їхнього обертання. При цьому останні утворюють зі стійкою нижчі КП (обертальні 5-го класу), а контактуючі в зачепленні профілі зубців – вищі КП (у плоских ЗМ розглядається як КП 4-го класу).

Якщо передача руху здійснюється від вхідного зубчастого колеса 1 (обертається з кутовою швидкістю ω_1) до вихідного ЗК 2 (обертається з кутовою швидкістю ω_2), то відповідне **передаточне відношення** визначається за формулою

$$i_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2}, \qquad (1.3)$$

де знак (+) приймається для ЗМ, у яких напрямки ω_1 і ω_2 співпадають (при внутрішньому зачепленні зубців);

знак (-) – для ЗМ, у яких з протилежними напрямками ω_1 і ω_2 (при зовнішньому зачепленні зубців).

При описані устрою ЗМ менше ЗК (з меншою кількістю зубців) називається **шестернею**, більше – **колесом**. При їхній однаковості шестернею називають вхідне зубчасте колесо.

Залежно від взаємного розташування у просторі осей обертання взаємодіючих зубчастих коліс (геометричних осей обертання валів, на яких вони встановлені) усі ЗМ поділяються на три класифікаційні групи. До першої належать **циліндричні ЗМ** (ЦЗМ), осі обертання яких паралельні. До другої – **конічні ЗМ** (КЗМ) – просторові передачі з конічними ЗК, осі яких перетинаються. До третьої – просторові **гіперболоїдні ЗМ** (ГЗМ), осі яких схрещуються. Серед них ЦЗМ об’єднують плоскі, а КЗМ і ГЗМ – просторові механізми.

Окрім відповідної форми, ЗК у різних передачах відрізняються ще спрямованістю ліній зубців. За цією ознакою ЗК поділяються на **прямозубі** (прямі лінії зубців, паралельні до осі колеса), **косозубі** (прямі лінії зубців розташовані під певним кутом до осі колеса), **шевронні** (конструктивне об’єднання двох косозубих колес з однаковими нахиленими симетрично до середини колеса зубцями), **гвинтові** та інші (з гвинтовими або іншими непрямими криволінійними зубцями, наприклад арочними).

Як приклад на рис. 1.7 показано різні плоскі циліндричні ЗМ.

Найбільше розповсюдження в конструкціях ТЗ отримали ЦЗМ з прямозубими (рис. 1.7, *а*) і косозубими (рис. 1.7, *б*) ЗК. При їх співставленні слід ураховувати, що при відносній простоті виготовлення прямозубих ЗК у такій передачі найбільші значення такого важливого показника, як коефіцієнт перекриття, ε складають $\varepsilon \le 2$. Узагальнено він характеризує якісні умови передачі руху і навантажень, кількість пар зубців, що одночасно беруть участь у зачепленні, що впливає на плавність при роботі і рівень шуму передачі.

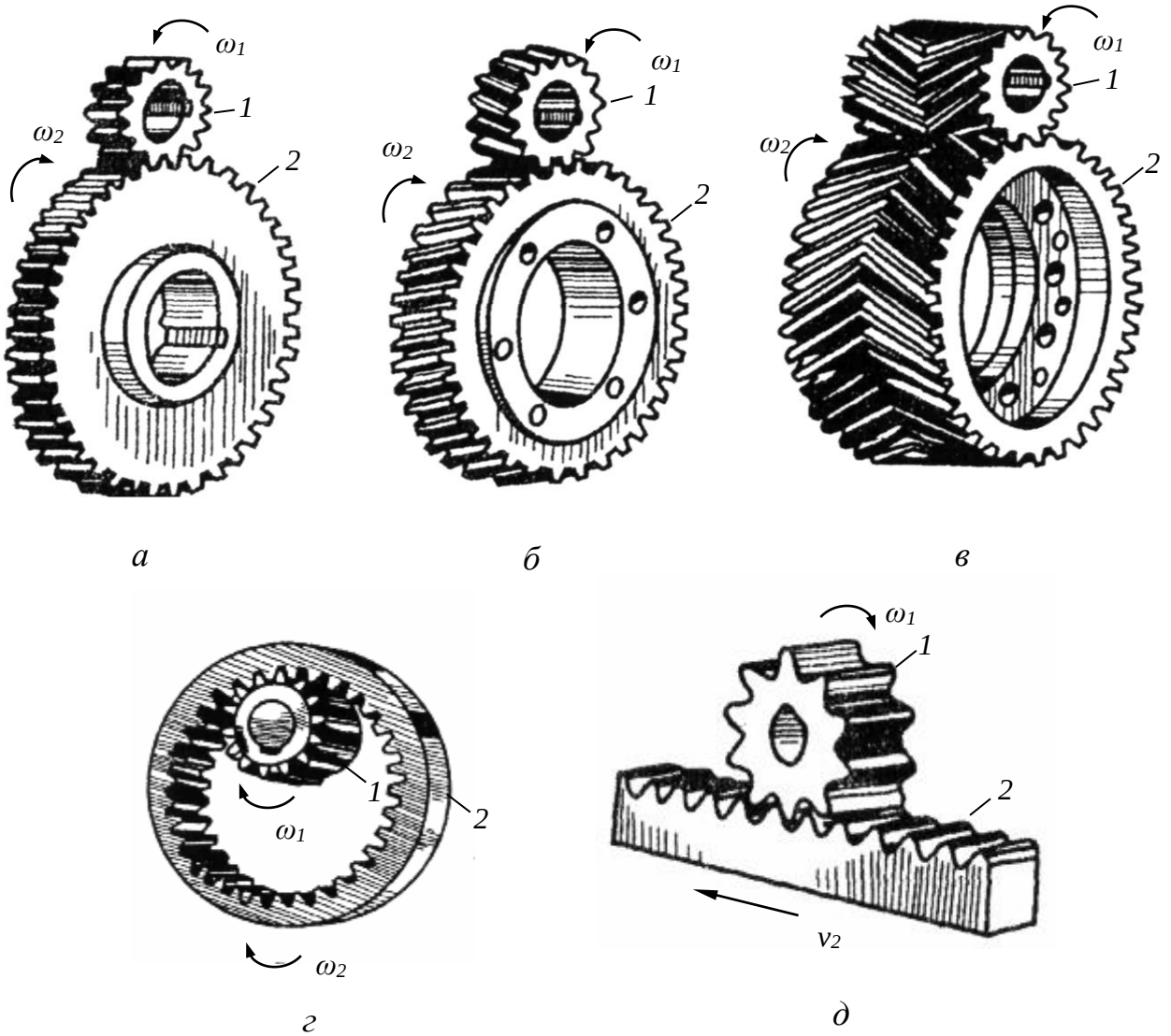


Рис. 1.7. Циліндричні зубчасті механізми:
а – з прямозубими ЗК; *б* – з косозубими ЗК; *в* з шевронними ЗК;
г – з внутрішнім зачепленням ЗК; *д* – рейкове зачеплення

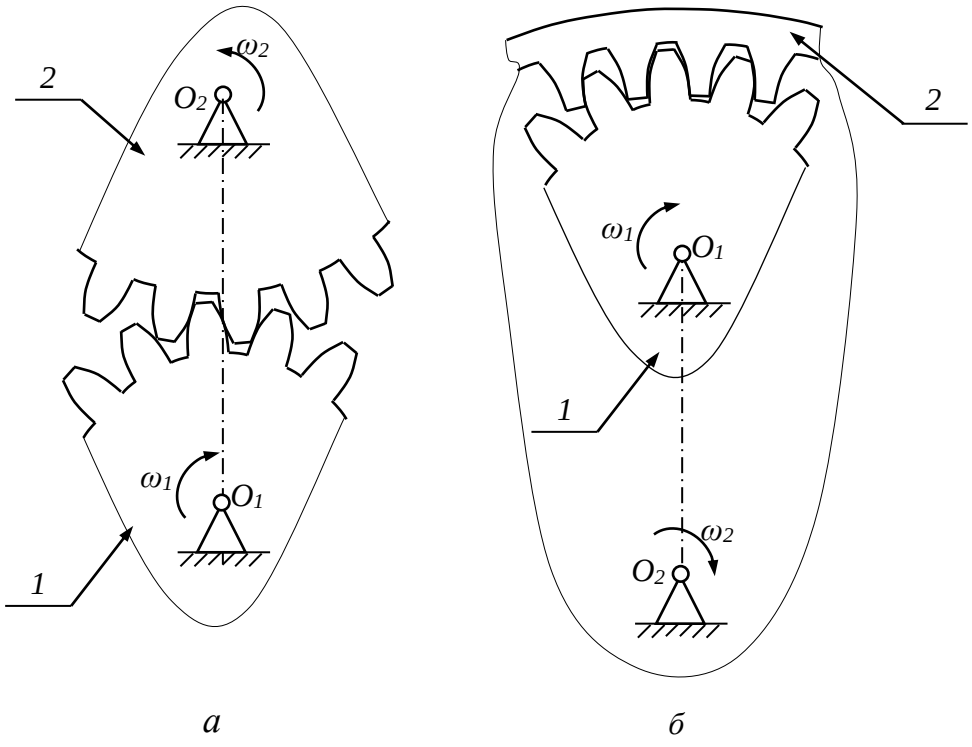
За цим показником більш переважні ЦЗМ з косозубими ЗК, у яких можуть досягатися вчетверо більші значення коефіцієнта ε. Разом з тим, якщо в прямозубій передачі вся передавана сила є корисною, то при косому положенні зубців передавана діє по нормалі до поверхні зубця і розкладається на корисну (окружну) і відповідну куту нахилу зубців бокову (осьову) силу. Для її компенсації і забезпечення нормальної роботи в конструкції таких ЗМ необхідні додаткові відповідні рішення.

Слід відзначити, що необхідна компенсація розглянутих додаткових осьових навантажень найбільш раціонально досягається за рахунок відповідної конструкції шевронних коліс

(рис. 1.7, *в*). При їх використанні корисні складові від лівої і правої частин колеса додаються, а відповідні осьові взаємно урівноважуються. Проте шевронні зубчасті колеса значно складніші та дорожчі у виробництві. Тому такі механізми використовують переважно в технічних засобах з високими ступенями навантажень і вимог щодо надійності (наприклад у приводах ескалаторів метрополітену).

Розглянуті ЦЗМ належать до передач з зовнішнім зачепленням зубців. В окремих випадках, коли виникає необхідність передачі обертального руху в умовах великих навантажень і обмежених значно менших габаритних розмірів (наприклад бортові передачі гусеничних машин), використовують ЦЗМ з внутрішнім зачепленням (рис. 1.7, *г*).

Видно, що габарити таких механізмів визначаються розмірами колеса 2, що має зубці на внутрішній поверхні. Вони за своєю увігнутою геометричною формою робочих поверхонь забезпечують спряжений контакт з опуклими поверхнями зубців колеса 1 (на відміну від контакту опуклих поверхонь зубців ЗК при зовнішньому контакті) (рис. 1.8). У таких механізмах це забезпечує можливість передачі значно більших навантажень з заданим додатним передаточним відношенням (без зміни напрямку обертання коліс ω_1 і ω_2).



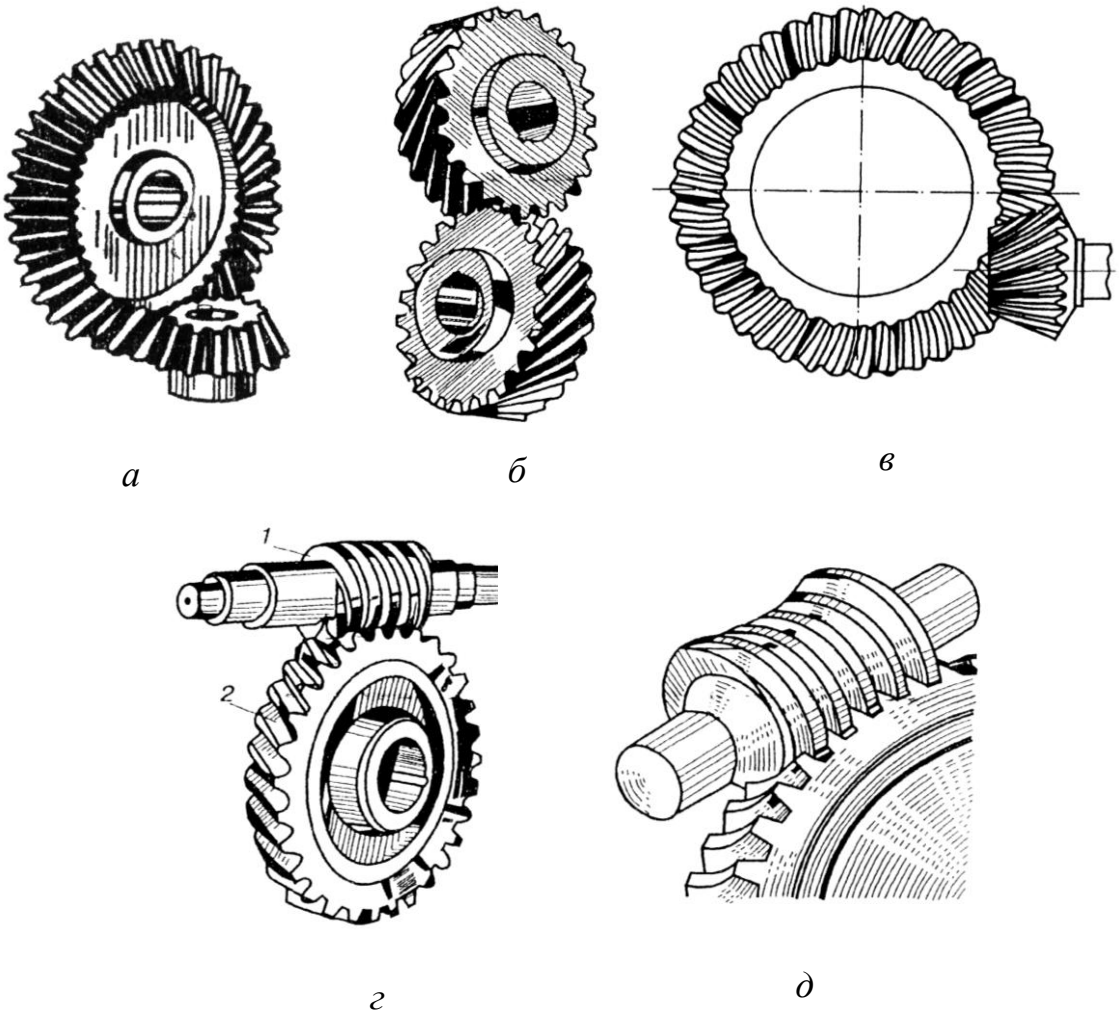
а *б*

Рис. 1.8. Схема контакту профілів зубців: *а* – при зовнішньому зачепленні ЗК; *б* – при внутрішньому зачепленні ЗК

Відрізняється від розглянутих показань на рис. 1.7, *д* рейковий ЦЗМ, у якому вхідний обертальний рух колеса 1 перетворюється в поступальний рух рейки 2 (з лінійною швидкістю v_2). Такі механізми отримали досить широке використання, у ТЗ яких рейка використовується як вихідна (шибер стрілочного електропривода) або вихідна (рейки індивідуальних паливних насосів тепловозних дизелів).

Слід відзначити, що за необхідності перетворення параметрів обертального руху між валами, осі яких перетинаються або схрещуються у просторі, використовують просторові конічні або гіперболоїдні ЗП.

На рис. 1.9, *а* показано конічний ЗМ, утворений колесами з прямими зубцями і кутом перетинання осей (міжосьовим кутом) 90^0 (найбільш розповсюджений ортогональний КЗМ).



а *б* *в* *г* *д*

Рис. 1.9. Приклади конічного і гіперболоїдних ЗМ:
а – конічна передача з конічними ЗК; *б* – гіперболоїдна передача з гвинтовими ЗК; *в* – гіперболоїдна передача з гепоїдними ЗК; *г* – черв'ячна передача з циліндричним черв'яком; *д* – черв'ячна передача з глобоїдним черв'яком

При збільшенні навантажень та швидкостей використовують КЗМ з косозубими ЗК або криволінійними зубцями (переваги і недоліки розглянуті в циліндричних ЗМ).

Зовнішній вигляд гіперболоїдних ЗМ має певні ознаки. Так, для передачі значних за навантаженнями і швидкостями рухів між валами, осі яких схрещуються у просторі під визначеними кутами використовують ЗМ з гвинтовими (рис. 1.9, *б*) або гепоїдними (рис. 1.9, *в*) ЗК.

Для отримання великих передаточних відношень (осі валів схрещуються під кутом 90^0) використовують **черв'ячні передачі** (черв'як – черв'ячне колесо) з циліндричним (рис. 1.9, г) або глобоїдним черв'яками.

Усі розглянуті види **ЗМ** належать до простих (триланкових) ЗМ, кожен з яких забезпечує передачу обертального руху з певним передаточним відношенням i_{12} (як правило, $i_{12} < 6$) між валами з визначеною конструкцією ЗК міжосьовою відстанню a_{12}. У разі необхідності отримання значно більших значень передаточних відношень ($i_{1n} \geq 10...12$) при відносно великих міжосьових відстанях ($a_{1n} > a_{12}$) використовують складні багатоланкові ЗМ (БЗМ), що утворюються на основі послідовного об'єднання простих ЗМ (як окремих ступенів зміни передаточного відношення) або використання додаткових важільних ланок і зубчастих коліс з рухомими осями. За цими ознаками БЗМ поділяються на **ступінчаті (рядові)** і **зубчасто-важільні механізми**.

Ступінчаті (рядові) ЗМ – це декілька пар зубчастих коліс, що знаходяться в послідовному попарному зачепленні і мають геометрично нерухомі осі обертання (розташовані в нерухомій стійці).

Як приклад на рис. 1.10, *а* наведена схема такого механізму, що складається з шести попарно працюючих ЗК (мають кількість зубців z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6). Вони утворюють три пари (ступені) зовнішнього зубчастого зачеплення з відповідними модулями передаточних відношень $i_{12} = \omega_1 / \omega_2 = z_2 / z_1$, $i_{34} = \omega_3 / \omega_4 = z_4 / z_3$, $i_{56} = \omega_5 / \omega_6 = z_6 / z_5$.

Зі схеми видно, що механізм забезпечує передачу обертального руху при значній величині міжосьової відстані між

вхідним і вихідним колесами ($a_{16} > a_{12}$). При цьому загальне передаточне відношення дорівнює добутку ступеневих передаточних відношень і визначається за формулою

$$i_{16} = (-1)^k (i_{12} \cdot i_{34} \cdot i_{56}). \qquad (1.4)$$

З урахуванням того, що для розглядуваного механізму кількість пар зовнішнього зачеплення дорівнює $k = 3$, отримувана величина i_{16} буде мати знак «-» (напрямок ω_6 протилежний ω_1).

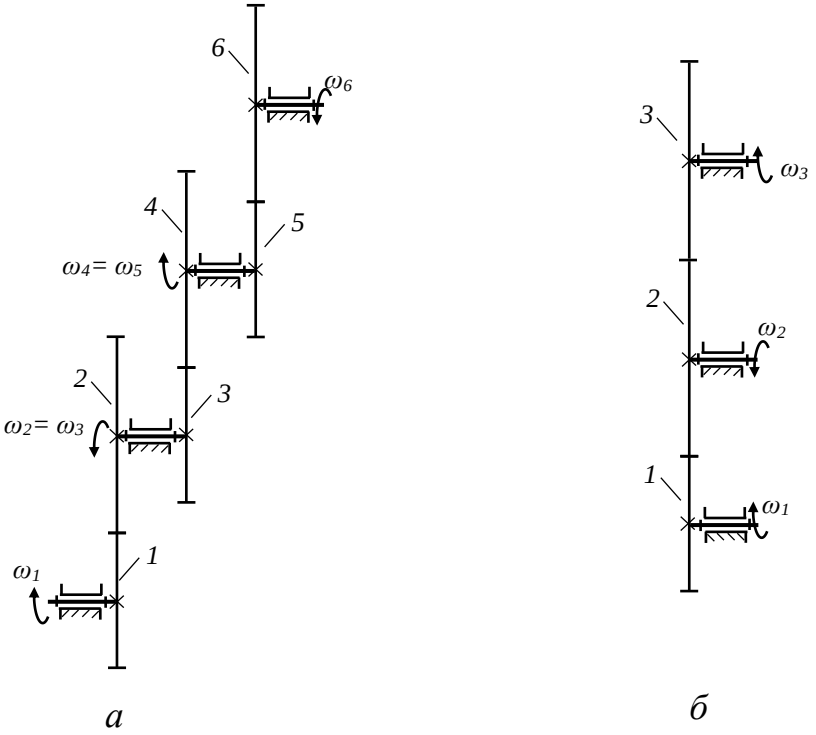


Рис. 1.10. Схеми рядових БЗМ

Якщо для визначення величини модулів ступеневих передаточних відношень використовувати кількість зубців коліс, то формулу (1.4) можна узагальнити для механізмів, що складаються з n – кількості ЗК, що попарно (послідовно) утворюють k пар зовнішнього зачеплення

$$i_{1-n} = (-1)^k \frac{\prod z_{вих}}{\prod z_{вх}}, \qquad (1.5)$$

де $\prod z_{вих}$ – добуток кількості зубців вихідних (ведених) коліс у парах зачеплення;

$\prod z_{вх}$ – добуток кількості зубців вхідних (ведучих) коліс.

Для розглянутого механізму

$$i_{16} = (-1)^3 \frac{z_2 \cdot z_4 \cdot z_6}{z_1 \cdot z_3 \cdot z_5}.$$

У ряді інженерних завдань при використанні ступінчатих механізмів виникає необхідність зміни або міжосьової відстані a_{1n} або напрямку обертання вихідного колеса. У таких випадках до складу рядового зубчастого механізму включають додаткове ЗК, що розміщується між визначеними вхідним і вихідним колесами певної пари і одночасно знаходиться з ними в зачепленні в ролях веденої і ведучої ланок.

Зубчасті колеса, що знаходяться одночасно в зачепленні з двома або більше ЗК як ведена і ведуча ланки, називаються **паразитними зубчастими колесами** (або шестернями).

Таке рішення показане на поданій на рис. 1.10, *б* схемі рядового ЗМ. До його складу входить паразитне ЗК, що одночасно знаходиться в зачепленні (і утворює дві зовнішні пари зачеплення) з колесами 1 (як ведуча ланка) і 3 (як ведена ланка). Для такого випадку за формулою (1.5)

$$i_{13} = (-1)^2 \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2} = \frac{z_3}{z_1} = i_{13}.$$

Тобто наявність колеса 2 змінює тільки напрямок обертання вихідного ЗК 3 і величину міжосьової відстані a_{13}.

Широке використання в конструкціях сучасних технічних засобів (транспортні трансмісії, бортові передачі підйомно-транспортних машин, технологічне обладнання підприємств технічного обслуговування і ремонту зі складними законами руху виконавчих ланок та ін.) отримали багатоланкові зубчасто-важільні механізми, до складу яких входять не тільки ЗК з геометрично нерухомими осями, а ще і ЗК з рухомими осями та важільними ланками, що забезпечують потрібний рух таких ЗК.

У таких механізмах ЗК з рухомими геометричними осями називають **сателітами** (або **планетарними** колесами), вони здійснюють складний рух – обертаються навколо своєї осі, що обертається навколо центральної нерухомої осі механізму.

Зубчасті колеса, що обертаються навколо нерухомої осі і з якими зачіплюються сателіти, називаються **центральними** (або **сонячними**), а нерухоме центральне ЗК – **опорним ЗК**.

У свою чергу зубчасто-важільні механізми поділяються на **диференціальні** і **планетарні** механізми.

На рис. 11, *а, б* наведена кінематична схема диференціального механізму. У ньому центральні ЗК *1* і *3* обертаються з кутовими швидкостями ω_1 і ω_3 навколо нерухомих осей O_1 і O_3. **Водило** H обертається з кутовою швидкістю ω_H навколо нерухомої осі O_H (осі O_1, O_3, O_H співпадають з центральною віссю механізму, що знаходиться в нерухомій ланці – стійці *0*). Сателіт – колесо *2* – знаходиться одночасно в зачепленні з *1* і *3* колесами і здійснює обертальний рух з кутовою швидкістю ω_2 навколо рухомої осі O_2, розташованої у водилі H і обертається разом з ним навколо центральної осі механізму з кутовою швидкістю ω_H.

Така схема дозволяє охарактеризувати структурну будову розглянутого механізму. Механізм має одну нерухому (стійку *0*) і чотири рухомих (зубчасті колеса *1, 2, 3*, водило *H*) ланки. Осі обертання ЗК *1, 3*, водила *H* зі стійкою *0*, а також ось обертання сателіту *2* з водилом *H* утворюють чотири обертальні КП 5-го класу ($P_5=4$). Зубці сателіту *2* утворюють у контакті з зубцями ЗК *1* і *3* дві КП 4-го класу ($P_4=2$). Ступінь рухомості диференціального механізму, визначений за формулою Чебишева (підрозд. 1.3, формула (1.2)), дорівнює $W=2$.

Це свідчить про те, що в диференціальних механізмах для їх визначеного руху необхідно мати дві вхідні (початкові) ланки.

В інженерній практиці для визначення загального передаточного відношення диференціальних механізмів з n зубчастими колесами використовують **формулу Вілліса**. В основі її отримання закладений Віллісом принцип **оборотності руху** - усім ланкам механізму умовно додається обертальний рух навколо осі O_1 з кутовою швидкістю «$-\omega_H$». Тоді водило умовно

загальмується (його кутова швидкість $\omega_H - \omega_H = 0$), диференціальний механізм умовно перетвориться в рядовий механізм з нерухомими осями зубчастих коліс, кутові швидкості обертання яких змінилися на величину «$-\omega_H$».

Формула Вілліса має вигляд

$$i_{1n}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_n - \omega_H}, \tag{1.6}$$

де $i_{1n}^{(H)}$ – передаточне відношення від *1* до *n* ланки при загальмованому водилі.

Наприклад, для розглянутого механізму за формулою (1.6) маємо

$$i_{13}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}.$$

При загальмованому водилі механізм розглядається як відповідний рядовий (як розглянутий на рис. 1.10, *б*, тільки колеса *2* і *3* утворюють пару внутрішнього зачеплення) і

$$i_{13}^{(H)} = (-1)^1 \cdot \frac{z_3}{z_1} = -\frac{z_3}{z_1}.$$

Не менш розповсюджений у конструкціях сучасних ТЗ є планетарні механізми, отримувані з диференціальних механізмів шляхом «відбирання» у них одного з двох ступенів рухомості (за рахунок одного з центральних зубчастих коліс). Наприклад, якщо в розглянутому диференціальному механізмі конструктивно загальмувати центральне ЗК *3* (стане опорним ЗК з $\omega_3 = 0$), то отримаємо показаний на рис. 1.11, *в* **планетарний механізм** (*n=3. P_5=3, P_4=2*), ступінь рухомості якого дорівнює *W=1*.

Для такого механізму ($\omega_3 = 0$) за формулою (1.6) отримуємо

$$i_{13}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H}. \tag{1.7}$$

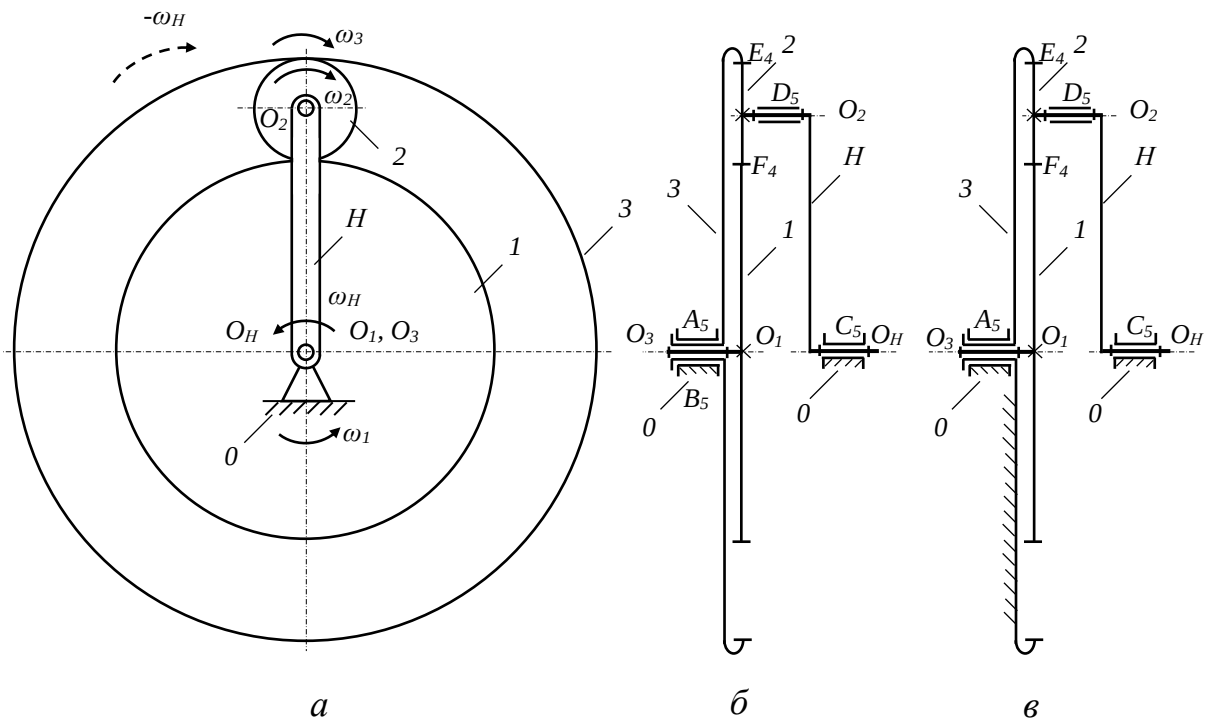


Рис. 1.11. Кінематичні схеми багатоланкових зубчасто-важільних механізмів

Позначаючи $\frac{\omega_1}{\omega_H} = i_{1H}^{(3)}$ – передаточне відношення від першої ланки до водила при загальмованому ЗК *3* з формули (1.7), маємо

$$i_{1H}^{(3)} = 1 - i_{13}^{H}, \tag{1.8}$$

де $i_{13}^{H} = \frac{z_3}{z_1}$.

З наведеного видно, що при високій компактності і здатності передавати великі навантаження планетарні передачі забезпечують можливість шляхом відповідного вибору кількості зубців коліс отримати різні передаточні відношення.

1.5. Загальний устрій кулачкових механізмів

У конструкції сучасних ТЗ (особливо теплових двигунів, машин-автоматів, обладнання автоматизованих ділянок і ліній підприємств обслуговування і ремонту тощо) виникла

необхідність у використанні механізмів з вищими КП, що забезпечують потрібні складні рухи виконавчих ланок, наприклад визначений періодичний рух (рух з вистоями) вихідної ланки при безперервному обертальному русі вхідної ланки. Достатньо повно цим вимогам відповідають **кулачкові механізми** (КМ). Відповідно до назви початковими (вхідними) ланками таких механізмів є **кулачки** – ланки, у яких робочі поверхні для утворення вищих КП (профілі кулачків) мають змінну кривизну. Вихідні ланки (називаються **штовхачами**) за рахунок утворення вищої КП з профілями кулачків здійснюють відповідні механічні рухи (у разі здійснення коливальних рухів штовхачі називаються коромисловими).

Найпростіший КМ за своїм устроєм об'єднує дві рухомі ланки (кулачок, штовхач) та одну нерухому – стійку, у якій розміщуються осі обертання та напрямні рухів рухомих ланок.

При відносній простоті конструкції КМ дозволяють отримувати необхідні складні рухи штовхачів. Але при цьому слід ураховувати певні складності у виготовленні самих кулачків (їхніх криволінійних профілів), а також з підвищеними питомими навантаженнями у вищій КП і необхідністю її надійного замикання при роботі механізму.

З урахуванням переважного використання в більшості конструкцій ТЗ плоских КМ на рис. 1.12 зображено основні типи таких механізмів, які згруповані залежно від видів рухів кулачків і контактуючих з ними штовхачів.

До **першої групи** належать КМ, у яких кулачок *1* здійснює вхідний обертальний рух, а штовхач *2* – вихідний зворотно-поступальний рух. Схеми таких механізмів показані на рис. 12, *а-г*. У межах групи вони відрізняються видами самих штовхачів за конструктивними особливостями їхнього контакту з робочими профілями кулачків. Так, у КМ за схемою на рис. 1.12, *а* використовують **гострокінцевий** штовхач, за схемою на рис. 1.12, *б* – **плоский** або **тарілчастий**, за схемами на рис. 1.12, *в, г* – **роликовий**. Останній вид штовхача покращує умови його контактування з робочою поверхнею кулачка (заміна тертя ковзання на тертя кочення). Але це визначає необхідність при проведенні теоретичних досліджень розгляду не робочого профілю, а відповідного **теоретичного (еквівалентного)**

профілю кулачка (траєкторія центра ролика при його обкочуванні по поверхні кулачка).

Ще одна особливість у конструкції таких КМ. Якщо вісь руху штовхача проходить через вісь обертання кулачка (схеми *а, б, в*), то механізм називається **центральним** (або без зміщення). Якщо в конструкції КМ вісь руху штовхача має зміщення відносно осі обертання кулачка на величину *е* (схема *г*), то КМ – **нецентральним КМ** (КМ зі зміщенням). З урахуванням того, що зміщення *е* в інженерній практиці ще називають дезаксажем, ексцентриситетом, такі механізми ще називають дезаксіальними, ексцентриковими.

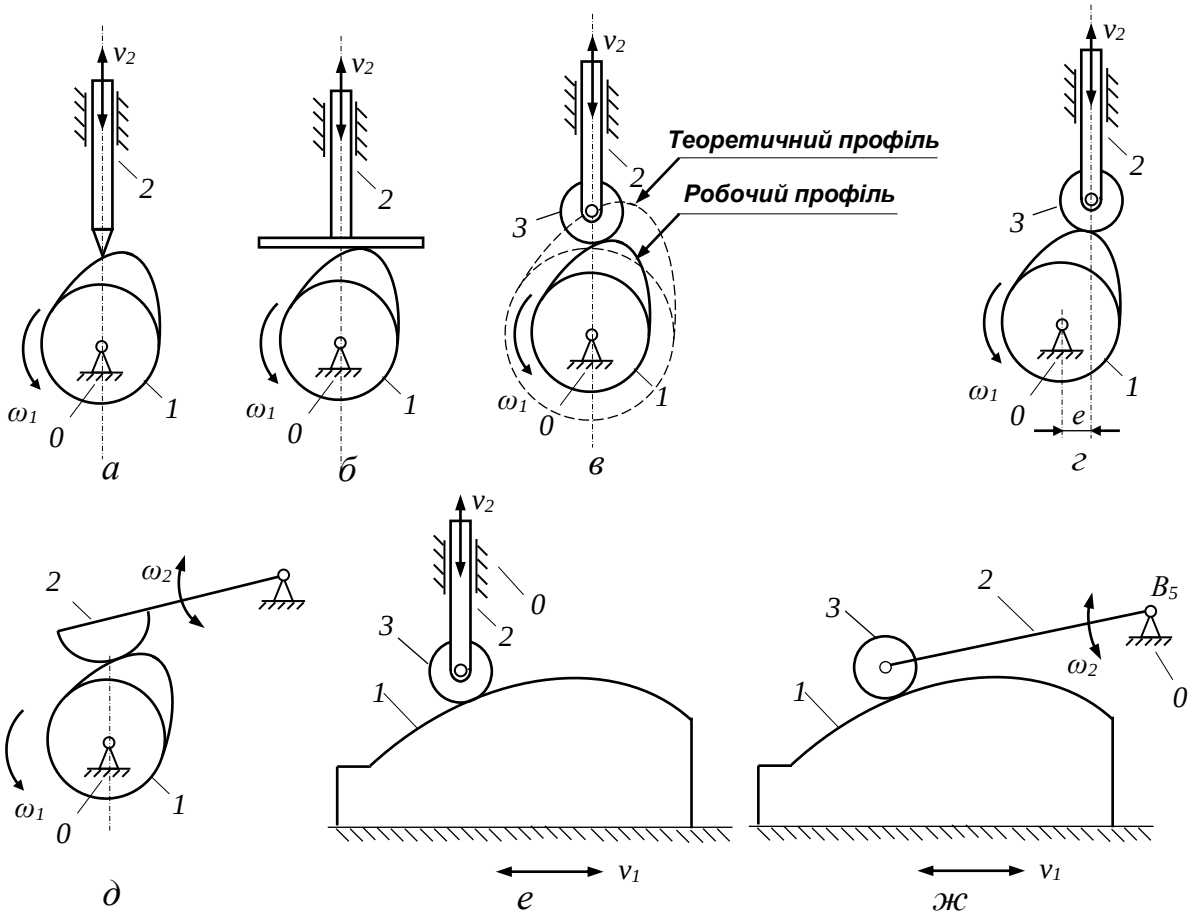


Рис. 1.12. Основні типи плоских КМ

До другої групи віднесені КМ, у яких кулачок *1* здійснює обертальний рух, а штовхач – коромисло *2* здійснює зворотно-обертальний рух. Ця група зображена як механізм зі схемою на рис. 12, *д*. Наявність сферичної контактної частини відносить вихідну ланку до виду **сферичних** штовхачів.

До **третьої групи** віднесені КМ, у яких кулачок *1* здійснює вхідний горизонтальний зворотно-поступальний рух, а штовхач *2* – вихідний вертикальний зворотно-поступальний рух. Такі механізми (рис. 12, *е*) широко використовують у пристроях керування машин-автоматів (наприклад у верстатах автоматах як базові копіри).

До **четвертої групи** віднесені КМ, у яких кулачок *1* здійснює зворотно-поступальний рух, а штовхач – коромисло *2* зворотно-обертальний рух. Такі механізми (рис. 12, *ж*) активно використовуються в різних запобіжних і аварійних системах сучасних ТЗ і виробничих системах.

Для надійної роботи розглянутих КМ необхідно забезпечити в їхніх конструкціях надійне замикання вищих КП.

У більшості випадків перевага віддається силовому замиканню, при якому постійний контакт робочих поверхонь кулачка і штовхача забезпечується відповідною дією сили пружини (рис. 13, *а*).

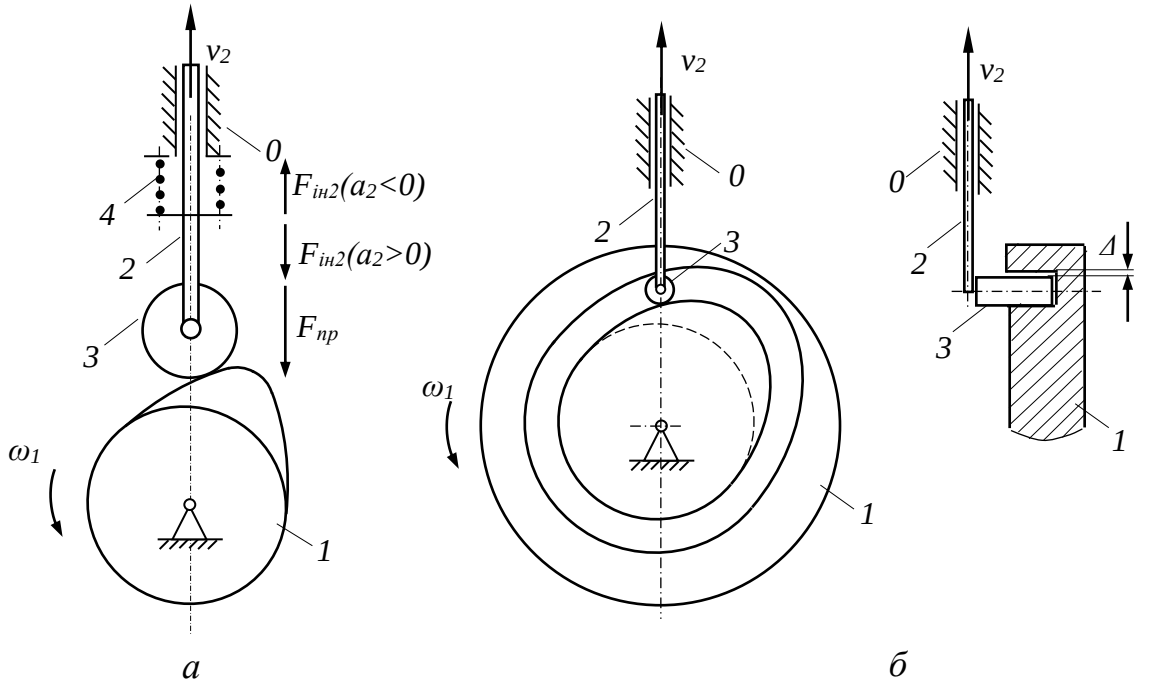


Рис. 1.13. Замикання вищих кінематичних пар у КМ:

а - силове замикання (*1* - кулачок, *2* – штовхач, *3* – ролик штовхача, *4* – пружина силового замикання); *б* – геометричне замикання (*1* – диск, у якому розташований кулачок з пазовим профілем, *2* – штовхач, *3* – ролик штовхача)

Таке замикання надає додаткові контактні навантаження в зоні контакту, суттєво знижує величину найбільших поступальних переміщень штовхача (пов'язані з довжиною пружини), але забезпечує надійне замикання при значних і підвищених швидкостях руху (важливо для механізмів транспортних, енергетичних і технологічних ТЗ).

Відносно рідкі випадки реалізації геометричного замикання, пов'язані з певними труднощами його конструктивної реалізації для забезпечення постійного кулачка і штовхача за рахунок відповідних форм геометричних поверхонь. У прикладі такого замикання (рис. 1.13, *б*) показано, що для цього кулачок *1* виконується в шайбі у вигляді профільного паза, у який встановлюється ролик *3* штовхача *2*. При цьому зміна знака необхідного монтажного зазора Δ при роботі навіть при малих швидкостях визначає відхилення від точного руху штовхача. Але при малих швидкостях у КМ з геометричним замиканням можуть реалізовуватись досить великі переміщення штовхача.

Слід підкреслити, що необхідний за призначенням КМ складний закон руху штовхача забезпечується відповідною конфігурацією (кривизною) окремих ділянок кулачка. Наприклад, на рис. 1.14, *а* показана узагальнена конструкція газорозподільного кулачка тепловозного дизеля, який забезпечує рух штовхача (клапанів) з вистоями (відповідно до фаз газорозподілу). На його робочому профілі виділені чотири ділянки, межі яких визначаються відповідними фазовими кутами. Переміщення ролика по кожній з них забезпечує певну фазу руху штовхача (рис. 1.14, *б*).

Так, ділянка *1-2* (фазовий кут $\varphi_в$) має змінну кривизну і визначає **фазу віддалення** штовхача (відкриття клапанів) від центра обертання кулачка. При цьому його переміщення збільшується від *0* до S_{2max}.

Ділянка *2-3* (фазовий кут $\varphi_{дв}$) має постійну кривизну (описана дугою радіуса *r*) і визначає **фазу дальнього вистою** штовхача (клапани повністю відкриті і нерухомі), коли його переміщення $S_2=S_{2max}$, а швидкість $v_2=0$.

Ділянка *3-4* (фазовий кут $\varphi_н$) має змінну кривизну і визначає **фазу наближення** штовхача (закриття клапанів) до центра обертання кулачка. Його переміщення зворотно змінюється від S_{2max} до *0*.

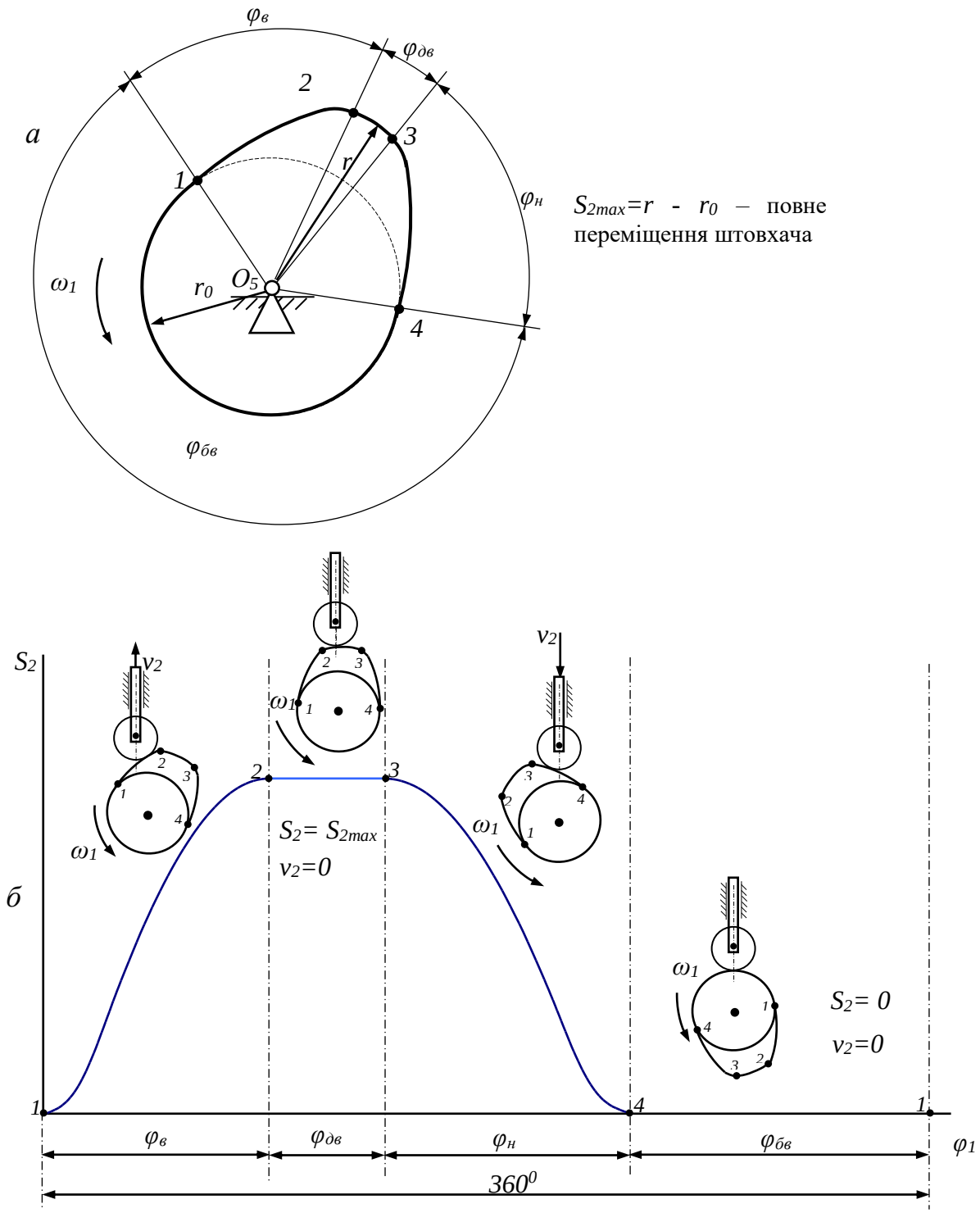


Рис. 1.14. Фази руху штовхача

Ділянка *4-1* (фазовий кут $\varphi_{бв}$) має постійну кривизну (описана дугою радіуса r_0) і визначає **фазу ближнього вистою** штовхача (клапани повністю закриті і нерухомі), коли його переміщення S_2 і швидкість дорівнюють нулю.

При загальній сумі чотирьох фазових кутів кулачка $\varphi_к=360^0$ як конструктивні параметри для газорозподільних кулачків

розглядається **кут дії кулачка**, що дорівнює $\varphi_д = \varphi_в + \varphi_{дв} + \varphi_н$. Його величина визначає, наприклад, величину часу відкриття клапанів, перекриття впускних і випускних клапанів форсованих транспортних дизелів, що важливо для удосконалення їхніх робочих процесів.

Питання для самоконтролю до розділу 1

1. За допомогою чого відбувається перетворення будь-якої енергії в механічну?
2. Яку назву мають тверді тіла, що входять до складу механізму?
3. Як називається рухоме з'єднання двох контактуючих ланок?
4. Яку назву отримала кінематична пара (залежно від виду її елементів), ланки якої стикаються по лінії або в точці?
5. Як називається система ланок, з'єднаних між собою кінематичними парами?
6. Як називаються механізми, у яких передача та перетворення руху від однієї ланки до другої здійснюються за допомогою виступів, виконаних на їхніх поверхнях?
7. Як називається процес передачі та перетворення руху від однієї ланки до другої за рахунок попарної взаємодії зубців?
8. Яка теорема закладена в основу проєктування зубчастих передач із сталим передаточним відношенням?
9. Як називаються ділянки профілів зубців, що контактують у процесі зачеплення?
10. Який показник якості характеризує плавність і безперервність зачеплення в зубчастій передачі?
11. Які механізми належать до багатоланкових зубчастих механізмів з нерухомими осями обертання всіх зубчастих коліс?
12. Яку назву в кулачковому механізмі отримав кут між нормаллю (проведеною через точку контакту штовхача з профілем кулачка) і вектором швидкості штовхача?
13. Як змінюються габарити кулачкового механізму зі збільшенням кута тиску?
14. Які види замкнення мають місце в кулачкових механізмах?
15. Що розуміють під ударами в кулачкових механізмах?

2. ВИЗНАЧЕННЯ ОСНОВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК РУХУ МЕХАНІЗМІВ

Важливе місце при виконанні комплексних інженерних завдань займає визначення основних кінематичних і силових характеристик руху важільних, зубчастих і кулачкових механізмів сучасних ТЗ. З урахуванням того, що рух більшості механізмів циклічний, це передбачає встановлення особливостей зміни (за один цикл руху) положень, швидкостей і прискорень різних конструктивних точок і ланок механізму, силових факторів, що виникають у КП при дії зовнішніх та інерційних навантажень. До того ж важливе місце займають питання необхідності врівноваження та регулювання ходу окремих механізмів.

Найбільш важливі з цих питань висвітлені у відповідних підрозділах цього (другого) розділу навчального посібника. Вони спрямовані на формування у здобувачів вищої освіти базових понять складової ХРМ загальноінженерної компетенції.

2.1. Визначення кінематичних характеристик важільних механізмів

З цією метою виконується **кінематичний аналіз механізмів** – визначення особливостей руху їхніх ланок відповідно до заданих законів руху початкових ланок ($\varphi_1 = f(t)$ – якщо початкова ланка здійснює обертальний рух; $S = f(t)$ – якщо поступальний рух).

Більшість механізмів сучасних ТЗ є циклічними – періодичний рух (цикли) з певним **періодом руху** (проміжком часу, по закінченню якого механізм повертається в початкове положення і починається такий самий наступний цикл руху. Тому дослідження кінематичних характеристик достатньо проводити для одного періоду руху.

Слід відзначити, що при проведенні кінематичного аналізу механізму не розглядаються діючі на його ланки зовнішні сили. Головна мета – це визначення особливостей переміщення рухомих ланок, траєкторій руху їхніх окремих точок, відповідних

швидкостей і прискорень, а також виникаючих у русі інерційних сил і моментів сил інерції ланок.

Головними умовами для проведення кінематичного (КА) механізму є наявність його кінематичної схеми (виконана в масштабі μ_l з усіма заданими довжинами ланок), заданого закону руху початкової ланки, розбиття механізму на структурні групи (виділення механізму 1-го класу – з'єднання початкової ланки зі стійкою і структурних груп, що до нього приєднуються і визначають клас механізму). Аналіз проводиться окремо за структурними групами, починаючи з найближчої до початкової ланки (відомі кінематичні параметри точки її з'єднання з механізмом 1-го класу).

В інженерній практиці для визначення кінематичних характеристик механізмів використовуються відповідні графічні, графоаналітичні і аналітичні методи. При проведенні науково-дослідних робіт використовують також і спеціальні методи визначення кінематичних параметрів.

У тих випадках, коли інженера цікавлять кінематичні параметри окремої (окремих) точки рухомої ланки (наприклад траєкторія центра мас шатуна тепловозного дизеля), доцільно використовувати **графічні** методи КА, наприклад метод побудови кінематичних діаграм – графіків переміщень, швидкостей і прискорень конкретної точки механізму за один цикл його руху залежно від часу або узагальненої координати.

Для їх отримання в обраному масштабі будується план положень механізму – суміщені кінематичні схеми механізму (усіх рухомих ланок) залежно від 10–12 положень вхідної ланки в межах одного періоду руху.

Як приклад на рис. 2.1, *а* показано план положень КШМ дизеля. При його побудові за нульове положення обрано дальнє положення механізму (кривошип і шатун на одній лінії). Період руху (один оберт кривошипа) розбито на 12 положень, у яких зафіксовано положення всіх рухомих ланок. Такий план дозволяє показати, наприклад, траєкторію руху центра мас шатуна точки *S* (шатунна крива, показана пунктиром). У разі необхідності можна визначити переміщення точки *C* за цикл руху і побудувати графік переміщень $S_C=f(\varphi_1)$. Використовуючи відносно прості методи графічного диференціювання (метод хорд або метод дотичних

[5]), можна отримати відповідні кінематичні діаграми для описання швидкостей і прискорень вигляду $V_C=f(\varphi_1)$ і $a_C=f(\varphi_1)$.

Разом з тим при відносній простоті та наочності графічні методи не забезпечують високої точності результатів, а також досить витратні при повному кінематичному аналізі механізму.

Більш точними і ширшими за можливостями є **графоаналітичні** методи КА, засновані на побудові для кожного з розглянутих положень відповідних **планів швидкостей і прискорень механізму**. Вони складають графічну частину цих методів, для виконання якої використовують відповідні аналітичні залежності.

Планом швидкостей (прискорень) механізму називається графічна побудова, що об'єднує вектори абсолютних швидкостей (прискорень) його різних точок, відкладених з однієї загальної точки – **полюса плану швидкостей** P_V (прискорень P_a).

При побудові планів швидкостей і прискорень використовують базові положення з теоретичної механіки [6, 7] про швидкості та прискорення матеріальних точок і твердих тіл в обертальному, поступальному та плоскому русі.

Розглянемо інженерні підходи до побудови таких планів на прикладі КШМ, який показано на рис. 2.1, *б*.

Маємо кінематичну схему механізму в другому ($\varphi_1=60^0$) розрахунковому положенні. Відомі довжини ланок (l_{AB}, l_{BC}), положення їхніх центрів мас (S_1, S_2, S_3), кутова швидкість $\omega_1=const$. Механізм утворений приєднанням до механізму 1-го класу (кривошип *1* – стійка *0*) структурної групи 2-3 (2-го класу, 2-го виду).

Завдання: знайти за величиною і напрямком лінійні швидкості точок *C*, S_2 (V_C, V_{S_2}, V_{S_3}), кутову швидкість другої ланки (ω_2), лінійні прискорення a_C, a_{S_2}, a_{S_3}, кутове прискорення ε_2.

Для побудови плану швидкостей складаємо векторні рівняння, які пов'язують швидкість точки С на 2-й і 3-й ланках.

Друга ланка (шатун) здійснює плоский рух. Тоді (дод. 1)

$$\overline{V}_C = \overline{V}_B + \overline{V}_{CB}, \qquad (2.1)$$

де $V_B = l_{AB} \cdot \omega_1$ – відома за величиною і напрямком ($\perp$до AB за напрямком ω_1);

V_{CB} – відома тільки за напрямком ($\perp$до BC).

Третя ланка здійснює поступальний рух. Тоді

$$\overline{V}_B = \overline{V}_{3-4}, \qquad (2.2)$$

де V_{3-4} – відома тільки за напрямком руху швидкість повзуна.

Для побудови плану швидкостей механізму необхідно обрати масштаб побудови μ_V і з полюса P_V послідовно відкласти вектори або провести напрямки швидкостей за рівняннями (2.1) і (2.2) (рис. 2.1, *в*) (за рівнянням (2.1) з полюса P_V відкладемо вектор $\overline{V}_B$, через його кінець проведемо напрямок вектора $\overline{V}_{CB}$; з полюса P_V за рівнянням (2.2) проведемо напрямок вектора $\overline{V}_{3-4}$). Точка перетинання векторів $\overline{V}_{CB}$ і $\overline{V}_{3-4}$ є шуканою точкою *C*. Тоді $V_C = P_V c \cdot \mu_V$, м/с; $V_{S_3} = V_C$.

Відрізок *cb* на плані швидкостей розглядається як план швидкостей ланки 2 (подібний ланці *BC* на схемі) – це визначає положення точки S_2 і V_{S_2} - $V_{S_2} = P_V s_2 \cdot \mu_V$, м/с; $V_{BA} = bc \cdot \mu_V$, м/с; $\omega_2 = V_{CB} / l_{BC}$, рад/с.

Для побудови плану прискорень механізму складаємо аналогічно векторні рівняння, що пов'язують прискорення точки *C* на 2-й та 3-й ланках (дод. 1):

$$\overline{a}_C = \overline{a}_B + \overline{a}^n_{CB} + \overline{a}^\tau_{CB}, \qquad (2.3)$$

де $a_B = a^n_B = \omega_1^2 \cdot l_{AB}$ – відоме за величиною і напрямком (по ланці 1 до центра обертання);

$a^n_{CB} = \omega_2^2 \cdot l_{BC}$ – відоме за величиною і напрямком (по ланці 2 до центра обертання точки *B*);

a^τ_{CB} – відоме тільки за напрямком ($\perp$ до *BC*).

$$\overline{a}_B = \overline{a}_{3-4}, \qquad (2.4)$$

де a_{3-4} – відоме тільки за напрямком прискорення повзуна.

Відкладаючи послідовно з полюса P_a вектори за рівняннями (2.3) і (2.4), отримуємо в масштабі μ_a план прискорень механізму (рис. 2.1, *г*). З нього $a_C = P_V c \cdot \mu_a$, м/с^2; $a_{S_3} = a_C$; $a_{S_2} = P_V s_2 \cdot \mu_a$, м/с^2; $a^\tau_{CB} = nc \cdot \mu_a$, м/с^2; $\varepsilon_2 = a^\tau_{CB} / l_{BC}$, рад/с^2.

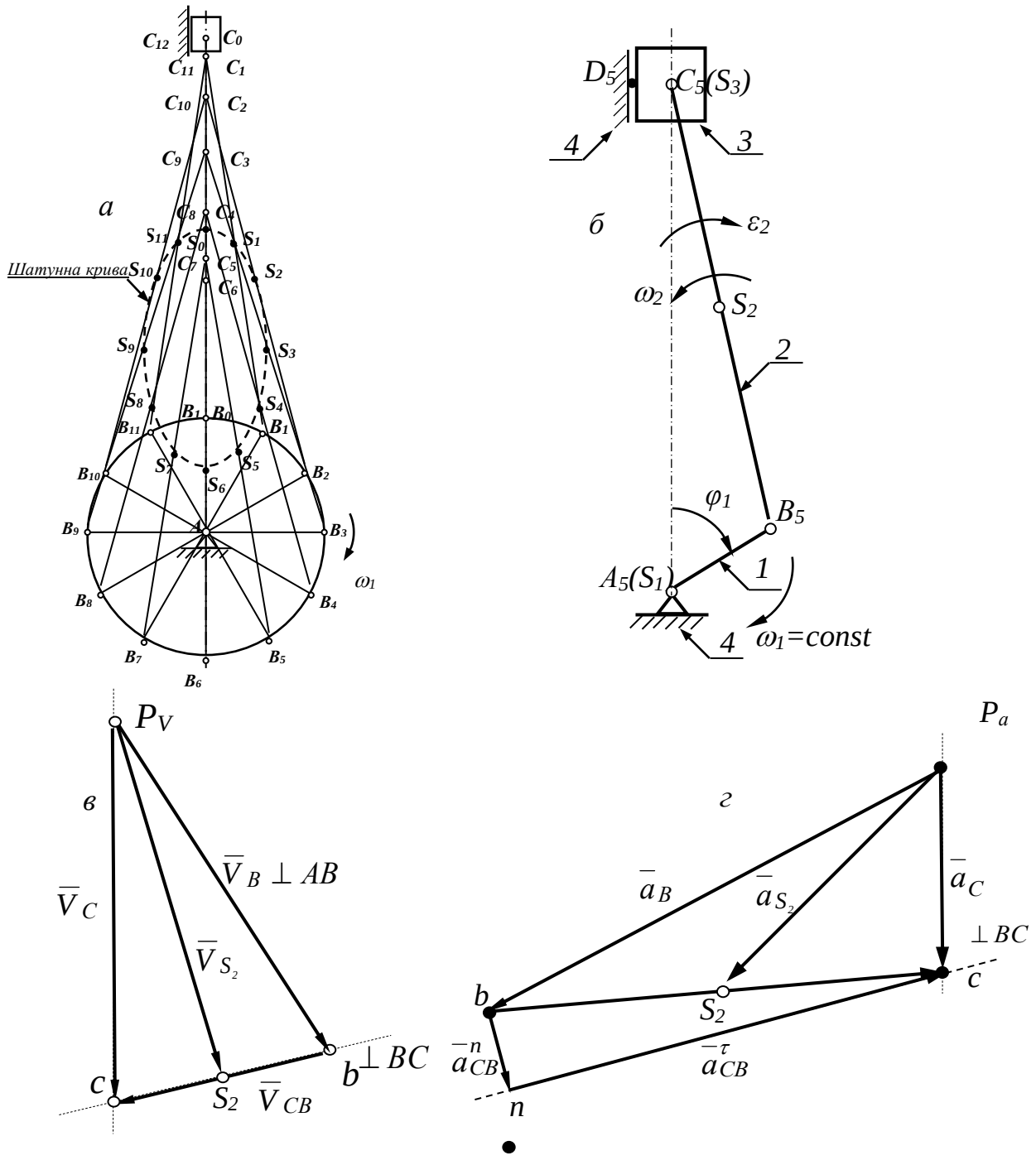


Рис. 2.1. До проведення кінематичного аналізу механізму: *а* – план положень КШМ дизеля; *б* – кінематична схема для побудови планів швидкостей і прискорень; *г* – план швидкостей механізму; *д* – план прискорень механізму

Видно, що до переваг розглянутого методу слід віднести можливість отримання не тільки величин, а і визначення напрямків діючих швидкостей і прискорень (важливо для

визначення інерційних навантажень). Разом з тим слід відзначити високу трудомісткість цього методу при проведенні досліджень за повний період руху механізму.

Найбільш сучасними та ефективними методами кінематичного аналізу механізмів є аналітичні методи, базовані на аналітичних описаннях зв'язків між узагальненими координатами і характеристиками руху ланок і точок у механізмах.

У свою чергу аналітичні методи КА доцільно поділити на дві групи.

До першої слід віднести методи дослідження відносно простих механізмів, для яких отримання аналітичних описань зв'язків між геометричними параметрами конструкції і кінематичними характеристиками здійснюється на основі відомих формул.

Наприклад, на рис. 2.2 показана кінематична схема синусного механізму (використовується в приладах та устроях автоматики), у якому обертання початкової ланки 1 (довжина ланки l_{AB}, узагальнена координата $\varphi_1 = f(t)$) перетворюється в поступальний рух (переміщення S_B) вихідної ланки 3.

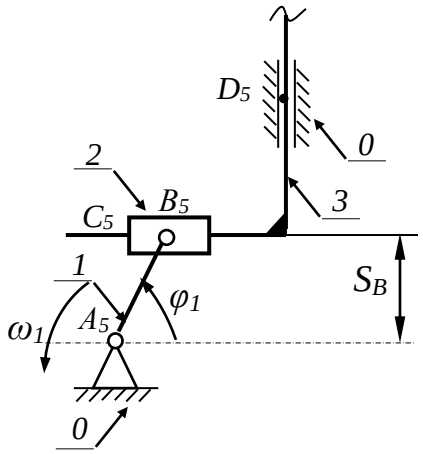


Рис. 2.2. Кінематична схема
синусного механізму

Для такого механізму отримання аналітичних описань для точного визначення переміщень, швидкостей і прискорень вихідної ланки (точки B) не викликає ускладнень. З аналізу схеми маємо

$$S_B = l_{AB} \cdot sin\varphi_1, \tag{2.5}$$

$$V_B = l_{AB} \cdot cos\,\varphi_1 \cdot \omega_1, \tag{2.6}$$

$$a_B = -l_{AB} \cdot sin\varphi_1 \cdot \omega_1^2. \tag{2.7}$$

До другої групи слід віднести аналітичні методи дослідження складних механізмів, базовані на використанні спеціальних підходів, наприклад методу проєціювання замкненого векторного контуру на визначені координатні осі (методу В. А. Зинов'єва [4]).

Відповідно до цього методу на кінематичній схемі рухомі ланки заміняються відповідними векторами, складається умова замкнення виділеного векторного контуру, що проєціюється на визначені координатні осі з отриманням аналітичних описань кінематичних параметрів механізму.

З урахуванням складності отримання таких описань і підвищення універсальності їх використання в дослідженнях різних швидкісних режимів роботи механізмів, кінцеві формули оперують поняттями аналогів швидкостей і прискорень.

Якщо прив'язати ці поняття до показаного на рис. 2.1, б КШМ і прийняти $\omega_1 = const$, то

$V_{qC} = \dfrac{dS_C}{d\varphi_1}$, м/рад – аналог лінійної швидкості точки C.

Тоді $V_C = V_{qC} \cdot \omega_1$, м/с;

$a_{qC} = \dfrac{d^2 S_C}{d\varphi_1^2}$, м/рад^2 – аналог лінійного прискорення точки C;

$a_C = a_{qC} \cdot \omega_1^2$, м/с^2;

$\omega_{q2} = \dfrac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$ – аналог кутової швидкості ω_2;

$\omega_2 = \omega_{q2} \cdot \omega_1$, рад/с;

$\varepsilon_{q2} = \dfrac{d^2\varphi_1}{d\varphi_1^2}$, 1/рад – аналог кутового прискорення ε_2;

$\varepsilon_2 = \varepsilon_{q2} \cdot \omega_1^2$, рад/с^2.

2.2. Особливості проведення силових розрахунків механізмів

При роботі механізму на його ланки діють різні силові фактори (сили, моменти сил), що визначає виникнення в КП відповідних внутрішніх навантажень – реакцій зв'язків (дод. 1). Визначення останніх є необхідною умовою для проведення інженерних розрахунків на міцність, тертя, зношування та надійність КП, а також знаходження величини врівноважувальної сили (або врівноважувального моменту) для вибору силових характеристик привода механізму. У купі це складає головну мету проведення силового розрахунку механізму (СРМ).

До особливостей його проведення слід віднести те, що СРМ проводять за структурними групами (починаючи з найбільш віддаленої від початкової ланки), що являють собою статично визначені кінематичні ланцюги (кількість невідомих реакцій дорівнює кількості рівнянь рівноваги).

До того ж для визначення реакцій у КП замість складних рівнянь динаміки при проведенні СРМ використовують відносно прості рівняння рівноваги статики [5-7] (кінетостатичні розрахунки). Це забезпечується використанням принципу Даламбера (дод. 1). Відповідно до силового дослідження він формулюється так: якщо до діючих на ланки зовнішніх сил ($\overline{P}$) і реакцій зв'язків ($\overline{R}$) умовно приєднати сили інерції ($\overline{P}_{ін}$), то отримана система сил буде знаходитися в стані умовної рівноваги:

$$\overline{P} + \overline{R} + \overline{P}_{ін} = 0 . \qquad (2.8)$$

У практичному плані при додаванні векторів (векторна сума за формулою (2.8)) усіх груп сил отримуваний багатокутник має бути замкненим.

Розглянемо порядок і зміст основних етапів СРМ на прикладі КШМ дизеля, для якого побудовані плани швидкостей і прискорень (рис. 2.1) для другого розрахункового положення початкової ланки.

На першому етапі виконується структурний і кінематичний аналіз механізму (виділяються структурні групи, визначається

клас механізму, будуються плани швидкостей і прискорень у його розрахункових положеннях, визначаються величини і напрямки швидкостей і прискорень усіх точок і рухомих ланок). Результати таких досліджень розглядуваного механізму у другому розрахунковому положенні подано в підрозд. 2.1 (рис. 2.1).

На другому етапі визначаються і проставляються на кінематичній схемі механізму (у розглянутому розрахунковому положенні) усі діючі на ланки зовнішні сили (включно і сили інерції).

У загальному випадку до зовнішніх сил відносять **рушійні сили** (P_p, M_p – прикладені до вхідних ланок, співпадають за напрямком з переміщенням точки прикладання або складають з ним гострий кут); **сили корисного опору** ($P_{ко}$, $M_{ко}$ – прикладені до вихідних ланок, протилежні переміщенню точки прикладання або складають з ним тупий кут); **сили шкідливого опору** (сили тертя, на подолання яких треба витратити додаткову роботу), **сили ваги ланок** (G - спрямовані завжди до низу); **сили інерції ланок** ($P_{ін}$, $M_{ін}$ – виникають при прискореному русі ланок з певними масами і моментами інерції мас).

Величини і напрямки дії цих сил при проведенні СРМ є заданими або визначаються за результатами проведеного кінематичного аналізу.

У нашому прикладі задана рушійна сила P_p (напрямок співпадає з $\bar{V}_c$); сили ваги данок: G_1, G_2, G_3; сили тертя не враховуються. Відомі довжини ланок 1 і 2 - l_{AB}, l_{BC}, момент інерції маси шатуна I_{S_2} відносно осі, що проходить через точку S_2. З урахуванням $\omega_1=const$ і $V_{S_1}=0$ сили інерції першої ланки $P_{ін1}=0$, $M_{ін2}=0$.

Сила інерції і момент сил інерції другої ланки $\bar{P}_{ін2}=-m_2\cdot\bar{a}_{S_2}$ - спрямована протилежно вектору $\bar{a}_{S_2}$; $\overline{M}_{ін2}=-I_{S_2}\cdot\bar{\varepsilon}_2$; спрямований протилежно ε_2.

Сила інерції 3-ї ланки $\bar{P}_{ін3}=-m_3\cdot\bar{a}_{S_3}$ - спрямована протилежно вектору $\bar{a}_{S3}$.

Розглянуті зовнішні сили проставлені (з зазначенням напрямку дії) на кінематичній схемі механізму, побудованій у масштабі μ_l (рис. 2.3, *а*).

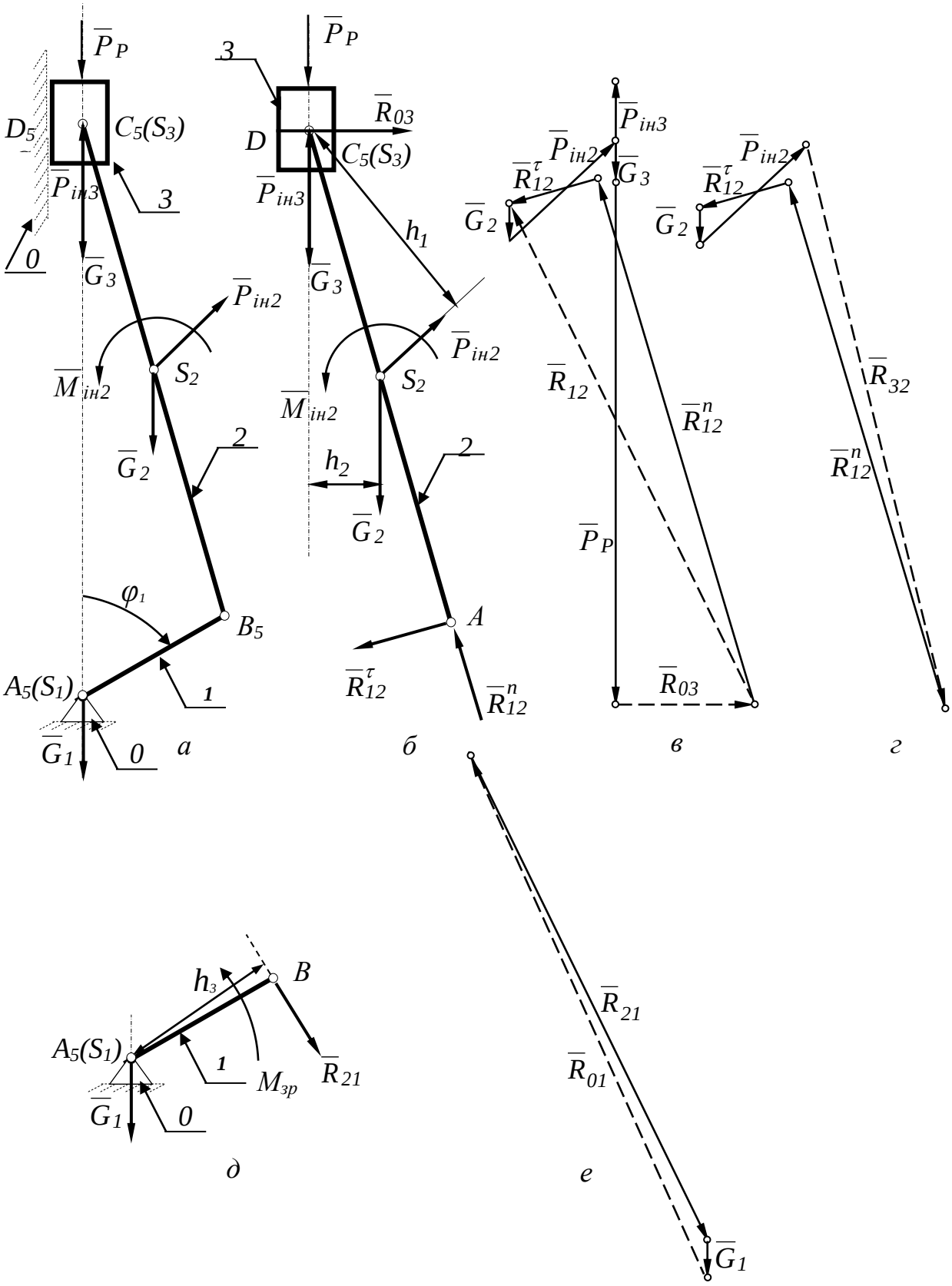


Рис. 2.3. До прикладу силового розрахунку механізму

На третьому етапі виконується силовий розрахунок СГ 2-3. Для цього (відповідно до аксіоми зв'язків (дод. 1)) ланки 2 і 3 вивільняються від ланок 1 і 0, а дія останніх на групу заміняється відповідними реакціями $\overline{R}_{12}$ і $\overline{R}_{03}$. При цьому реакція $\overline{R}_{12}$ подається у вигляді двох складових – нормальної $\overline{R}^n_{12}$ (спрямована по лінії ланки BC) і тангенціальної $\overline{R}^\tau_{12}$ (спрямована $\perp$ до BC), $\overline{R}_{12} = \overline{R}^n_{12} + \overline{R}^\tau_{12}$.

Реакція $\overline{R}_{03}$ проходить через точку C, перпендикулярно до напрямку руху ланки 3.

Вивільнена група 2-3 з усіма діючими зовнішніми силами і реакціями КП (її розрахункова схема) показана на рис. 2.3, *б*.

У прив'язці до розрахункової схеми визначається реакція $\overline{R}^\tau_{12}$. Для цього складається відповідне рівняння рівноваги для ланки 2 у формі $\sum M_{(C)} = 0$. Маємо

$$-R^\tau_{12} \cdot l_{BC} - G_2 \cdot h_2 \cdot \mu_l + P_{ін_2} \cdot h_1 \cdot \mu_l + M_{ін2} = 0.$$

Тоді

$$R^t_{12} = \frac{-G_2 \cdot h_2 \cdot \mu_l + P_{ін_2} \cdot h_1 \cdot \mu_l + M_{ін2}}{l_{BC}}. \qquad (2.9)$$

Для визначення реакцій $\overline{R}^n_{12}$ і $\overline{R}_{03}$ складаємо рівняння рівноваги у формі $\sum \overline{P} = 0$ для всієї групи 2-3. Маємо

$$.\overline{R}^n_{12} + \overline{R}^\tau_{12} + \overline{G}_2 + \overline{P}_{ін2} + \overline{G}_3 + \overline{P}_{ін3} + \overline{P}_p + \overline{R}_{43} = 0. \qquad (2.10)$$

В обраному масштабі μ_P будуємо за рівнянням (2.10) відповідний **план сил** (починаючи з $\overline{R}^\tau_{12}$). На ньому довжина і напрямок шуканих реакцій визначаються відомими за напрямком і умовою замкнення ліній дії реакцій $\overline{R}^n_{12}$ і $\overline{R}_{03}$. З плану сил величини реакцій R^n_{12} і R_{03} визначаються як добуток довжин відповідних векторів на величину масштабу плану сил μ_P.

Для визначення реакції у внутрішній КП - шарнірі C_5 – одну з ланок групи (ланку 3) умовно від'єднуємо, а її дію на ланку 2 заміняємо відповідною реакцією $\overline{R}_{32}$. Для такої системи сил складаємо рівняння рівноваги у формі $\sum \overline{P} = 0$. Маємо

$$\overline{R}_{12}^{n} + \overline{R}_{12}^{\tau} + \overline{G}_2 + \overline{P}_{ін2} + \overline{R}_{32} = 0. \qquad (2.11)$$

Відповідно до рівняння (2.11) побудований план сил (рис. 2.3, *г*), замикальний вектор якого визначає реакцію $\overline{R}_{32}$. Величина реакції R_{32} - добуток довжини вектора $\overline{R}_{32}$ на величину масштабу плану сил μ_P.

На четвертому етапі виконується силовий розрахунок початкової ланки. Він передбачає визначення величини врівноважувального моменту $M_{зр}$ (або врівноважувальної сили $P_{зр}$), а також величини і напрямку реакції в КП A_5 $\overline{R}_{01}$, що утворюються початковою ланкою 1 і нерухомою стійкою 0.

У нашому прикладі для визначення величини $M_{зр}$ (моменту, який потрібно прикласти до початкової ланки з метою врівноваження в русі дії всіх ланок механізму і забезпечення потрібних законів руху) розглядається тільки КП початкова ланка – стійка (механізм 1-го класу), а дію відкинутої групи 2-3 заміняють відповідною реакцією $\overline{R}_{21}$ ($\left|\overline{R}_{21}\right| = \left|\overline{R}_{12}\right|$ і їй протилежна за напрямком).

Відповідна розрахункова схема показана на рис. 2.3, г. З неї видно, що

$$M_{зр} = R_{21} \cdot h_3 \cdot \mu_l. \qquad (2.12)$$

Для визначення реакції $\overline{R}_{01}$, що характеризує дію механізму на стійку, умовно відкидаємо стійку 0 і складаємо рівняння рівноваги у формі $\sum \overline{P} = 0$:

$$\overline{R}_{21} + \overline{G}_1 + \overline{R}_{01} = 0. \qquad (2.13)$$

План сил, побудований за рівнянням (2.13), показаний на рис. 2.3, *е*. З нього величина реакції R_{01} визначається як добуток довжини вектора $\overline{R}_{01}$ на масштаб плану сил μ_P.

Слід зауважити, що в інженерній практиці досить часто виникає необхідність визначити величину врівноважувального моменту (або сили) у механізмі без розрахунку реакцій у КП. У цих випадках (а також при контролі правильності проведення

СРМ в повному обсязі) використовують теорему М. Є. Жуковського [1, 4]. Відповідно до неї сума моментів усіх діючих на ланки механізму зовнішніх сил, перенесених паралельно самим собі у відповідні точки повернутого на 90^0 плану швидкостей відносно його полюса P_V , дорівнює 0. Тобто

$$\sum_{i=1}^{n} M(P_V) = 0. \qquad (2.14)$$

Тоді

$$M_{зр} = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot h_i \cdot \mu_l = 0.$$

2.3. Дослідження динаміки механізмів

Важливу роль у формуванні ЗІК відіграє здатність фахівця виконувати важливі завдання за основними напрямами досліджень динаміки механізмів. З урахуванням складності конструкції та високої швидкохідності сучасних ТЗ до таких напрямів відносять вирішення завдань з урівноваження механізмів; визначення законів руху механізмів при відомих інерційних параметрах його ланок і прикладених до них сил (динамічний аналіз) або конструювання механізмів за умов забезпечення заданих законів руху (динамічний синтез); регулювання швидкостей механізмів (ТЗ) на різних експлуатаційних режимах.

У сучасних механізмах рух ланок (їхніх окремих точок) з великими прискореннями призводить до появи великих змінних за величинами і напрямками сил інерції. Вони визначають додаткові динамічні навантаження в КП і ланках, погіршують плавність руху та підвищують вібраційну активність механізмів. Це призводить до порушення їхньої нормальної роботи, збільшує імовірність відмов, має негативний вплив на довкілля і працівників.

Зменшення до задовільного рівня додаткових динамічних навантажень від сил інерції називається **урівноваженням**

механізмів. При цьому виділяють два завдання. Перше передбачає **урівноваження ланок, що здійснюють обертальний рух** (зменшення реакцій у КП). Друге спрямоване на **урівноваження механізму (ТЗ) на фундаменті** (зменшення шкідливого впливу на корпус ТЗ і фундамент, на якому він встановлений).

Розглянемо умови урівноваження показаної на рис. 2.4, а ланки, що здійснює обертальний рух з кутовою швидкістю $\omega=const$. На ній розміщені маси m_1, m_2, m_3 (m_i), положення яких від осі обертання задаються відповідними радіусами $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ ($\bar{r}_i$), а по довжині ланки – відстанями $\bar{l}_1$, $\bar{l}_2$, $\bar{l}_3$ ($\bar{l}_i$).

При обертанні розташованих на ланці мас виникають відповідні сили інерції $P_{ін_i} = -m_i \cdot a_{S_i}$, де $a_{S_i} = a^n_{S_i} = r_i \cdot \omega^2$ – нормальне прискорення центра мас і-ї ланки. Тобто

$$P_{ін_i} = -m_i \cdot r_i \cdot \omega^2 \qquad (2.15)$$

і спрямована протилежно $\bar{a}^n_{S_i}$.

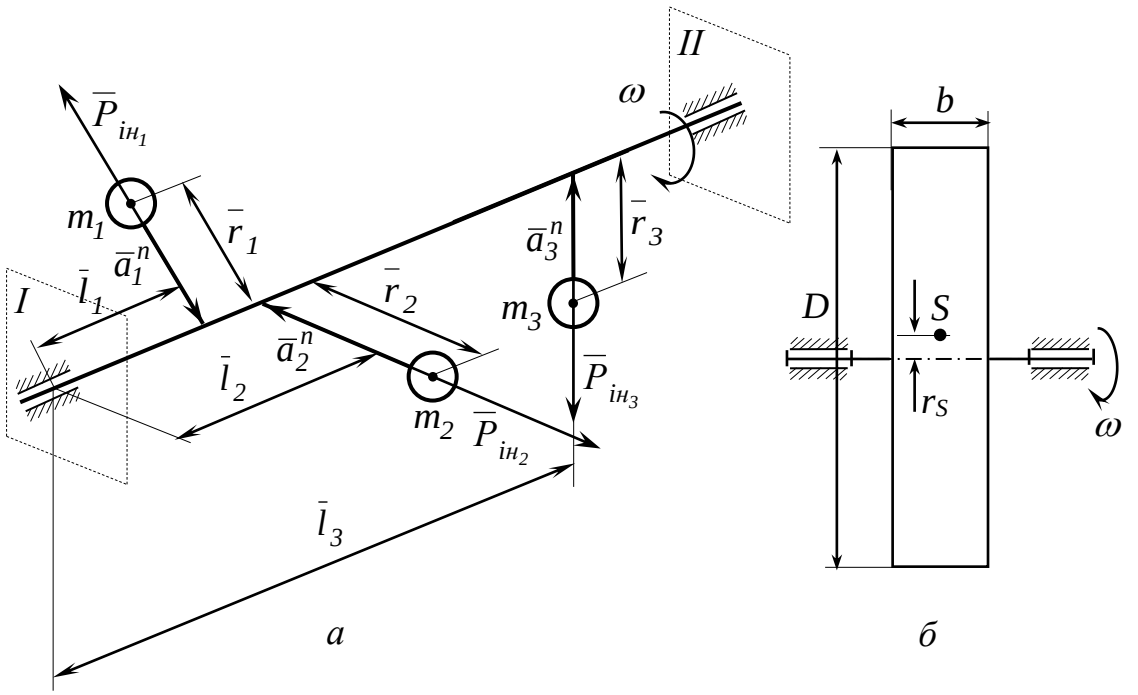


Рис. 2.4. До урівноваження ланок і механізмів:
а – ланка, що здійснює обертальний рух;
б – до балансування ротора

Замінимо сили інерції всіх мас еквівалентною системою (приведеною до площини *I*), що складається з головного вектора $\overline{P}_{ін}$ і головного моменту $\overline{M}_{ін}$ сил інерції

$$\overline{P}_{ін} = \sum_{i=1}^{3} \overline{P}_{ін_i} = \sum_{i=1}^{3} \overline{m_i \cdot r_i} \cdot \omega^2 ; \tag{2.16}$$

$$\overline{M}_{ін} = \sum_{i=1}^{3} \overline{M}_{ін_i} = \sum_{i=1}^{3} \overline{m_i \cdot r_i \cdot l_i} \cdot \omega^2 . \tag{2.17}$$

При такому підході умовою повного урівноваження розглянутої ланки буду умова $\overline{P}_{ін} = 0$, $\overline{M}_{ін} = 0$.

З урахуванням формул (2.16) і (2.17) (при $\omega \neq 0$ і кількості n мас) маємо

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{m_i \cdot r_i} = 0 ; \tag{2.18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{m_i \cdot r_i \cdot l_i} = 0 . \tag{2.19}$$

Слід відзначити, що умова (2.18) – **умова статичного урівноваження**. Вектор $\overline{m_i \cdot r_i}$ називається статичним моментом *i*-ї маси.

Умова (2.19) називається **умовою динамічного урівноваження** (по суті повного урівноваження, тому що статичне виконується поперед динамічного).

На практиці урівноваження таких ланок виконується за рахунок встановлених на них відповідних противаг (деталей, що створюють врівноважувальні інерційні сили). Їхні параметри (маси $m_П$, кути і радіуси встановлення $r_П$) визначаються за параметрами векторів $\overline{m_П \cdot r_П}$ і $\overline{m_П \cdot r_П \cdot l_П}$, що отримуються з відповідних багатокутників, побудованих за умовами (2.18) і (2.19).

Окремо розглядаються інженерні завдання, пов’язані з балансуванням роторів – урівноваження деталей роторів, що здійснюють обертальний рух навколо осі, яка співпадає з віссю

їхньої симетрії, і за своєю формою мають бути урівноваженими (ротори різних генераторів, електродвигунів, вентиляторів та ін.). Але внаслідок похибок при виготовленні і дефектів у конструкційних матеріалах, деформацій при збиранні вони стають неврівноваженими.

Міра їхньої неврівноваженості оцінюється величиною **дисбалансу** (Δ), а процес врівноваження (до допустимих величин Δ) називається балансуванням роторів.

Для роторів, що працюють при малих швидкостях обертання і мають відносно малу довжину (рис. 2.4, *б*, параметр $b/D \le 0{,}2$), виконують **статичне балансування** – забезпечують допустиму величину **статичного дисбалансу**

$$\Delta_C = \sum \overline{m_i \cdot r_i} = \overline{m \cdot r_S}\,, \qquad (2.20)$$

де m – маса ротора;

r_S – радіус, що визначає положення його центра мас відносно осі обертання.

Зменшення радіуса $\bar{r}_S$ досягається конструктивним збільшенням або зменшенням маси ротора у відповідних його частинах (наближення центра мас до осі обертання).

Для швидкохідних і довгих роторів виконують (на спеціальних верстатах) динамічне балансування – зменшення **динамічного дисбалансу**

$$\Delta_Д = \sum \overline{m_i \cdot r_i \cdot l_i}\,. \qquad (2.21)$$

Урівноваження різних рухомих ланок механізму складає основу вирішення складних завдань з урівноваження (ТЗ) на фундаменті (або рамі машини). При цьому сучасні інженерні рішення передбачають не тільки встановлення відповідних противаг (як правило, на вхідних і вихідних ланках) або використання симетричних конструкцій (наприклад опозитні теплові двигуни [8-10]). Найбільший ефект досягається при використанні в конструкції ТЗ сучасних систем динамічного врівноваження, що створюють керовані зустрічні (до інерційних) компенсуючі навантаження [2].

Суттєву складову ЗІК утворюють базові знання і вміння визначення закономірностей руху реальних механізмів під дією на їхні ланки заданих сил. Виконання таких завдань на основі складання та розв'язання відповідних рівнянь динаміки (що пов'язують чисельні геометричні, кінематичні, інерційні – маси та моменти інерції мас – і силові параметри ланок) являє собою складне витратне дослідницьке завдання. Тому в інженерній практиці при визначенні закономірностей руху реальні механізми заміняються відповідною **динамічною моделлю** (ДМ) – умовною початковою ланкою, якій притаманні силові та інерційні властивості (характеристики) усього механізму.

Розглянемо це питання на прикладі механізму поршневого компресора (рис. 2.5, *а*), що має ступінь рухомості $W=1$ (положення всіх ланок визначається однією узагальненою координатою q). Відомі довжини, маси (m_1, m_2, m_3) і моменти інерції мас (I_{S_1}, I_{S_2}) ланок, а також діючі на них сили (P_1, P_2) і моменти сил (M_1, M_2).

Для таких механізмів (з $W=1$) залежно від вибору початкової ланки можливі два види ДМ. Якщо як початкова ланка розглядається ланка 1 (кривошип), що має кутову узагальнену координату ($q = \varphi_1$), то ДМ має вигляд диска (рис. 2.5, б), який обертається навколо осі A (**роторна ДМ**) з кутовою швидкістю ω_1. На нього діє **приведений момент** $M_{пр}$ (заміняє дію усіх сил і моментів сил на ланки механізму), а його інерційні можливості характеризує **приведений момент інерції** $I_{пр}$ (еквівалентний інерційним властивостям усього механізму).

Якщо як початкова ланка розглядається ланка 3 (повзун), що має лінійну узагальнену координату ($q = S_C$), то ДМ має вигляд повзуна (рис. 2.5, в), який здійснює поступальний рух (**поступальна ДМ**) по напрямній (стійці) зі швидкістю V_C. На неї діє **приведена сила** $P_{пр}$, а інерційні можливості має **приведена маса** $m_{пр}$.

Використання поданих ДМ передбачає розрахункове визначення їхніх силових і інерційних параметрів ($M_{пр}$, $I_{пр}$ і $P_{пр}$, $m_{пр}$).

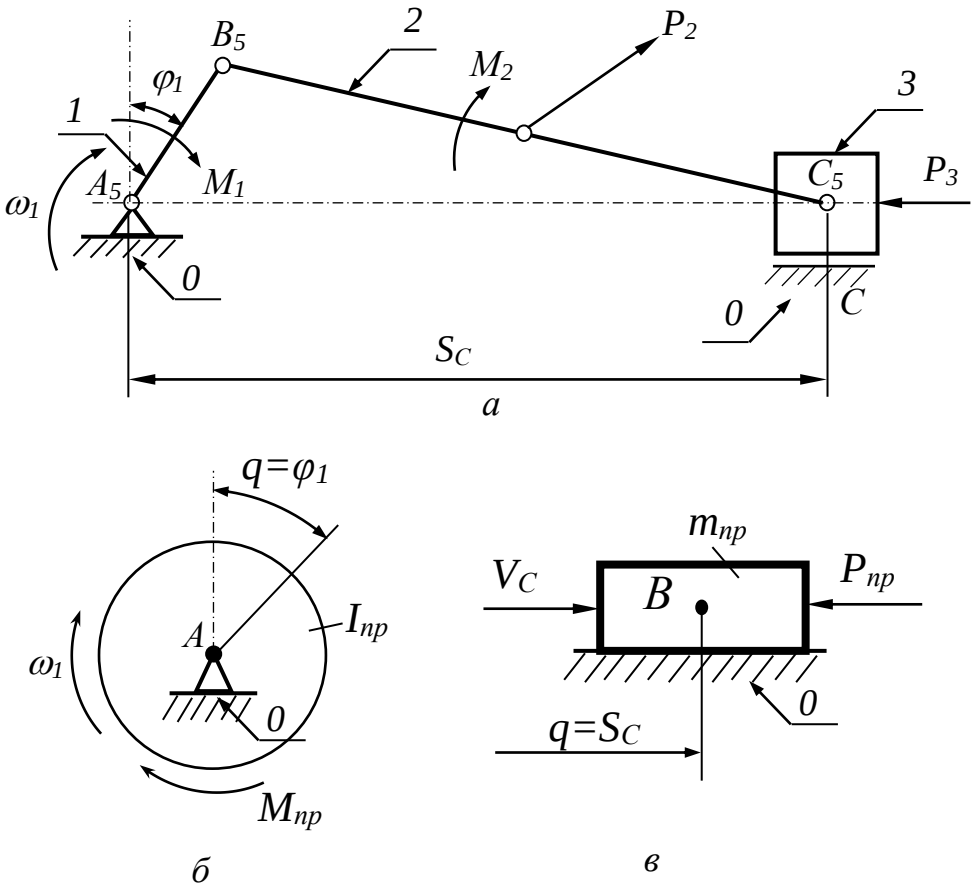


Рис. 2.5. Види динамічних моделей механізмів з *W=1*:
а – кінематична схема КШМ поршневого компресора;
б – обертальна (роторна) ДМ;
в – поступальна ДМ

Відповідні формули для розрахунку силових параметрів отримані на основі виконання умови – робота приведеного моменту $M_{пр}$ (сили $P_{пр}$) на заданому переміщенні початкової ланки $d\varphi_1$ (dS_C) дорівнює добутку відповідних робіт, прикладених до ланок механізму всіх заданих сил P_i, і моментів сил M_i. Вони мають вигляд

$$M_{пр} = \sum_{i=1}^{n}\left(P_i \cdot \frac{V_i}{\omega_1} \cdot \cos\alpha_i + M_i \cdot \frac{\omega_i}{\omega_1} \right), \qquad (2.22)$$

де V_i – швидкість точки прикладання сили P_i;

ω_i – кутова швидкість *i-ї* ланки;

α_i – кут між векторами сили P_i і переміщення dS_i її точки прикладання.

Значення цих параметрів визначаються за результатами кінематичного аналізу механізму.

$$P_{пр} = \sum_{i=1}^{n}\left(P_i \cdot \frac{V_i}{V_C} \cdot \cos\alpha_i + M_i \cdot \frac{\omega_i}{V_C} \right). \qquad (2.23)$$

З розгляду формул (2.22) і (2.23) можна зробити висновок, що величини $M_{пр}$ і $P_{пр}$ не залежать від рівня значень швидкостей початкової ланки ω_1 і V_C (до формул входять відношення швидкостей). Разом з тим за результатами кінематичного аналізу відомо, як при русі механізму в межах циклу руху відбуваються зміни швидкостей V_i і ω_i.

Тому величини $M_{пр}$ і $P_{пр}$ залежать від положень механізму (його узагальненої координати, тобто $M_{пр}=f(\varphi_1)$, $P_{пр}=f(S_C)$).

При отриманні формул для розрахунків інерційних параметрів ДМ використовувалася така умова: кінетична енергія початкової ланки, що має приведений момент інерції $I_{пр}$ (приведену масу $m_{пр}$), дорівнює добутку кінетичних усіх ланок механізму (з відповідними масами m_i і моментами інерції мас I_{Si}).

Вони мають вигляд

$$I_{зв} = \sum_{i=1}^{n}\left[m_i\left(\frac{V_{Si}}{\omega_1}\right)^2 + I_{si}\left(\frac{\omega_i}{\omega_1}\right)^2 \right], \qquad (2.24)$$

де V_{Si} – швидкість центра мас *i-ї* ланки;

I_{Si} – момент інерції маси *i-ї* ланки відносно осі, що проходить через центр мас.

$$m_{зв} = \sum_{i=1}^{n}\left[m_i\left(\frac{V_{Si}}{V_C}\right)^2 + I_{si}\left(\frac{\omega_i}{V_C}\right)^2 \right]. \qquad (2.25)$$

З розгляду формул (2.24) і (2.25) можна також зробити висновок про незалежність величин $I_{пр}$ і $m_{пр}$ від рівня значень швидкостей ω_1 і V_C. Вони також залежать від положень механізму в межах циклу його руху – $I_{пр}=f(\varphi_1)$, $m_{пр}=f(S_C)$.

За наявності ДМ з визначеними силовими та інерційними параметрами для визначення закономірностей руху механізму необхідно скласти, а потім розв'язати відповідне **рівняння руху** (РР). Для цього використовують різні підходи, що базуються на використанні відомої [6, 7, 11, 12] теореми про зміну кінетичної енергії, базових рівнянь на основі другого закону динаміки, диференціального рівняння Лагранжа другого роду.

Найчастіше для дослідження руху механізмів з *W=1* використовують РР, що складається для обраної динамічної моделі (наприклад роторної ДМ) на основі теореми про зміну кінетичної енергії (дод. 1).

Відповідно до неї зміна кінетичної енергії механізму (його ДМ) відбувається за рахунок роботи всіх сил і моментів сил, що діють на його ланки. Якщо роботу всіх сил поділити на роботу рушійних сил $A_{РС}$ і роботу корисних сил опору $A_{КС}$, а зміну кінетичної енергії подати як різність кінетичних енергій у кінці (T) і на початку (T_0) певного періоду, то відповідне РР для роторної ДМ набуде вигляду $T - T_0 = A_{PC} - A_{KC}$, або з параметрами ДМ

$$\frac{I_{np}\omega_1^2}{2} - \frac{I_{np_0}\omega_{1_0}^2}{2} = A_{PC} - A_{KC}. \qquad (2.26)$$

У деяких випадках різницю робіт подають як інтеграл відповідних частин приведеного моменту

$$A_{PC} - A_{KC} = \int_{\varphi_{10}}^{\varphi_1} \left(M_{np}^{PC} - M_{np}^{KC} \right) d\varphi_1 .$$

Тоді рівняння руху (2.26) називають РР у формі інтеграла енергії.

Розв'язання рівняння (2.26) відносно кутової швидкості ω_1 дозволяє отримати закон руху ДМ (механізму), який у загальному вигляді показаний (відповідна тахограма) на рис. 2.6.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2(A_{PC} - A_{KC}) + I_{np_0} \cdot \omega_{1_0}^2}{I_{np}}} . \qquad (2.27)$$

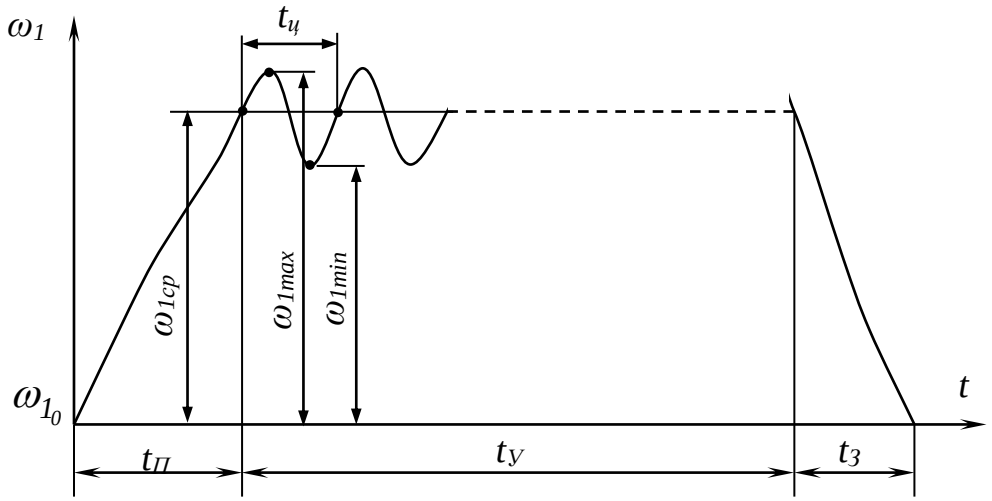


Рис. 2.6. Основні періоди руху механізмів

Видно, що в загальному випадку в роботі механізмів (ТЗ) можна виділити три періоди: **період пуску** (розгону $t_П$) – швидкість збільшується від ω_{1_0} до середньої кутової швидкості $\omega_{1_{CP}}$ за рахунок $A_{PC} > A_{KC}$, кінетична енергія зростає; **період сталого руху** ($t_У$) – швидкість періодично ($t_ц$ – період зміни кутової швидкості при сталому русі) змінюється навколо $\omega_{1_{CP}}$, $A^ц_{PC} = A^ц_{KC}$, відповідний рівень кінетичної енергії; **період зупинки** (вибігу $t_З$) – швидкість зменшується від $\omega_{1_{CP}}$ до ω_{1_0}, $A_{PC} = 0$, запас кінетичної енергії витрачається на подолання A_{KC}.

Слід відзначити, що коливання кутової швидкості ω_1 (відносно $\omega_{1_{CP}}$) визначаються циклічною зміною (відповідно до періоду руху механізму) величини $I_{пр}$. При цьому вони обумовлюють (при заданій величині $\omega_{1_{CP}}$) значні величини $\omega_{1_{max}}$ і $\omega_{1_{min}}$ (відповідні додаткові інерційні навантаження), що необхідно ураховувати в дослідженнях руху механізмів. Для цього в інженерній практиці введено поняття **коефіцієнта нерівномірності ходу машини** δ

$$\delta = \frac{\omega_{1max} - \omega_{1min}}{\omega_{1ср}}, \qquad (2.28)$$

де $\omega_{1cp} = \frac{\omega_{1max} + \omega_{1min}}{2}$.

Для сучасних ТЗ у довідковій літературі вказано відповідні допустимі значення δ. Наприклад, для електричних генераторів δ=0,003 – 0,005, для дизелів і поршневих компресорів – δ=0,005 – 0,015, для звичайних верстатів і насосів δ=0,02 – 0,05 [1].

Це дозволяє за необхідності визначити допустимі рівні $\omega_{1_{max}}$ і $\omega_{1_{min}}$

$$\omega_{1_{max}} = \omega_{1cp} \cdot (1 + \delta / 2); \qquad (2.29)$$

$$\omega_{1_{min}} = \omega_{1cp} \cdot (1 - \delta / 2). \qquad (2.30)$$

У випадках, коли в наявному механізмі не забезпечується при заданій величині швидкості $\omega_{1_{CP}}$ потрібне значення коефіцієнта δ, для необхідного регулювання коливань швидкості на сталому режимі до його конструкції додається **маховик**. Маховик являє собою диск, що здійснює обертальний рух і встановлюється (як правило) на одному валу з початковою ланкою. Він має відповідний (постійний) момент інерції I_M, що додається до величини $I_{пр}$ механізму і зменшує до потрібного рівня коливання швидкості на сталому режимі.

Для керування роботою ТЗ на різних експлуатаційних режимах, підтримки заданих режимів при зміні умов експлуатаційних навантажень у їхніх конструкціях використовують спеціальні пристрої – регулятори швидкості (наприклад всережимний регулятор швидкості тепловозних дизелів), що здійснюють керовані впливи на зміни роботи рушійних сил [1, 2].

2.4. Основні параметри і характеристики руху евольвентних зубчастих передач

Найбільшого поширення як передавальні механізми, що використовуються в конструкції сучасних ТЗ машинобудівного профілю, отримали евольвентні зубчасті передачі. Вони найповніше задовольняють вимоги передачі обертального руху при

забезпеченні постійного передаточного відношення ($i_{12} = const$), а також умови надійності і працездатності.

Теоретичною основою проєктування зубчастих передач, що забезпечують $i_{12} = const$, є **основна теорема плоского зачеплення** (теорема Р. Вілліса), відповідно до якої для забезпечення постійного передаточного відношення необхідно, щоб у будь-який момент зачеплення спряжених профілів загальна нормаль *n-n* у точку їхнього контакту перетинала полюс зачеплення *P*, що має незмінне розташування на міжосьовій лінії O_1O_2 відносно центрів обертання шестерні O_1 і колеса O_2.

З наведеного положення випливає

$$i_{12} = \pm\frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm\frac{PO_2}{PO_1} = \pm\frac{r_{w2}}{r_{w1}} = const, \qquad (2.31)$$

де PO_1, PO_2 – відстані від центрів обертання відповідно шестерні та колеса до полюса зачеплення *P*, розташованого на міжосьовій лінії O_1O_2;

$r_{W1}=PO_1$, $r_{W2}=PO_2$ – радіуси початкових кіл відповідно шестерні та колеса (початкові кола дотикаються в полюсі *P*).

Довжини початкових кіл шестерні (кількість зубців z_1) і колеса (кількість зубців z_1) при **початковому кроці** p_w (відстані між однойменними профілями двох сусідніх зубців за дугою початкового кола) - $p_w \cdot z_1 = 2 \cdot \pi \cdot r_{w_1}$ і $p_w \cdot z_2 = 2 \cdot \pi \cdot r_{w_2}$. Звідси $r_{w_1} = p_w \cdot z_1 /(2 \cdot \pi)$ і $r_{w_2} = p_w \cdot z_2 /(2 \cdot \pi)$. Якщо підставити останні формули до формули (2.31), то отримаємо залежність передаточного відношення зубчастої передачі від кількості зубців зубчастих коліс

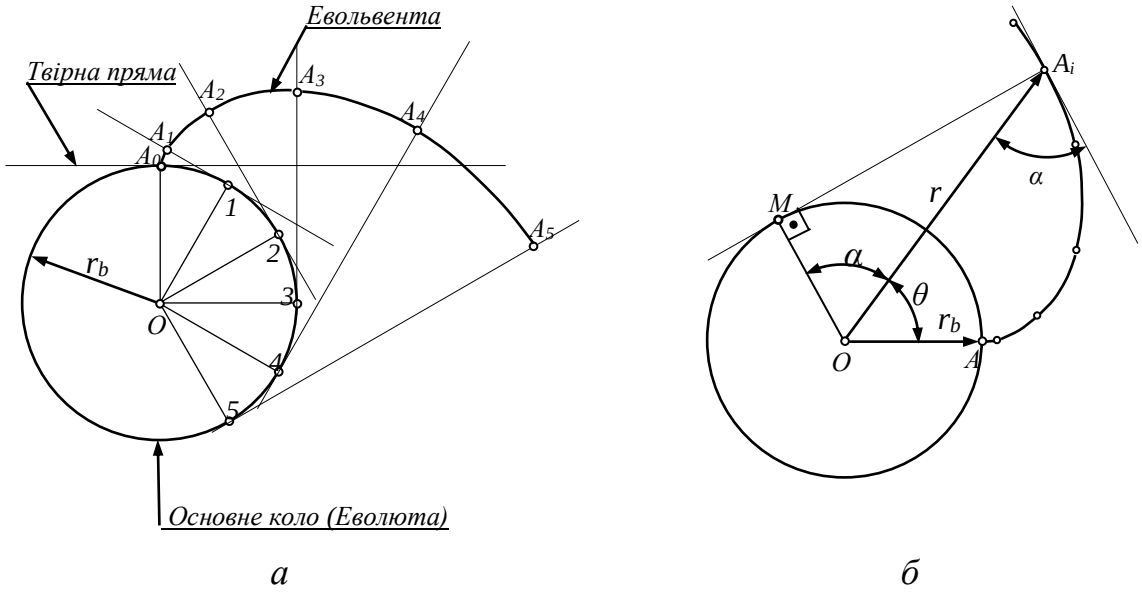
$$i_{12} = \pm\frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm\frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \pm\frac{2 \cdot \pi \cdot p_w \cdot z_2}{2 \cdot \pi \cdot p_w \cdot z_1} = \pm\frac{z_2}{z_1}. \qquad (2.32)$$

За ГОСТ 16530-83, модуль відношення кількості зубців відповідає **передаточному числу** зубчастої передачі - $u_{12} = z_2 / z_1$.

У розглянутих зубчастих передачах виконання умови $i_{12} = const$ забезпечується тим, що контактуючі в процесі

зачеплення профілі зубців шестерні і колеса (спряжені профілі) окреслені евольвентами кіл (**евольвентне зачеплення**).

Евольвентою кола називають траєкторію точки, що належить прямій лінії (**твірній прямій**), яка перекочується без ковзання по колу радіуса r_b (**основному колу**). Процес побудови евольвенти кола (далі використовується термін «евольвента») показаний на рис. 2.7, *а*.



а *б*

Рис. 2.7. Отримання евольвенти кола та її рівнянь в параметричному вигляді

Для отримання **рівнянь евольвенти в параметричному вигляді** розглядається довільне положення твірної прямої (рис. 2.7, *б*), що відповідає точці A_i евольвенти, полярними координатами якої є **радіус-вектор** $\boldsymbol{r}$ і **евольвентний кут** $\boldsymbol{\theta}$ (кут між радіусом r_b, який проводиться в початкову точку евольвенти, і радіусом-вектором розглянутої точки $\boldsymbol{r}$). Гострий кут між дотичною до евольвенти в розглянутій точці (A_i) і відповідним радіусом-вектором (r) **називається кутом профілю** $\boldsymbol{\alpha}$. З прямокутного трикутника ΔOMA_i

$$r_y = \frac{r_b}{\cos\alpha}. \qquad (2.33)$$

Формула для визначення евольвентного кута отримується за умовами перекочування твірної по основному колу без ковзання

$$\theta = tg\alpha - \alpha = inv\alpha, \qquad (2.34)$$

де $inv\alpha$ - тригонометрична функція, що називається **інволютою** кута α.

Використання рівнянь (2.33) і (2.34) дозволяють визначати полярні координати точок евольвенти при проведенні досліджень характеристик руху евольвентних зубчастих передач.

Основні властивості евольвенти:

1. Твірна пряма є радіусом кривизни евольвенти в розглянутій точці і відповідно нормаллю до неї.

2. Евольвента на всьому проміжку є плавною кривою без перегинів.

3. Форма евольвенти залежить тільки від величини радіуса основного кола r_b.

4. Евольвента починається з основного кола і розташована поза його межами (не має точок усередині основного кола).

Стандартні параметри зубчастих коліс з евольвентними профілями зубців розглядаються на прикладі циліндричного ЗК з кількістю зубців Z, фрагмент нормального перетину якого зображено на рис. 2.8. Причому такі параметри подаються прив'язка до характерних концентричних кіл – **кола вершин** *I* радіуса r_a, **початкового кола** *II* радіуса r_w, **основного кола** *III* радіуса r_b і **кола западин** *IV* радіуса r_f.

Початкове коло *II* радіуса r_w є параметром ЗП, яку утворює розглянуте зубчасте колесо з парним. У цьому випадку з початковим колом *II* співпадає інше коло радіуса r (r_w=r). Параметри, пов'язані з початковим колом, мають індекс «w» – початкова товщина зубця s_w, початкова ширина западини e_w, початковий крок $p_w = s_w + e_w$.

При проєктуванні ЗП розміри зубців зубчастих коліс зручно визначати в частках певної лінійної величини. Для пояснення вибору такої лінійної величини виразимо довжину кола *II* через діаметр $d = 2 \cdot r$ і кількість зубців z - $\pi \cdot d = p \cdot z$ (крок p – відстань між відповідними точками двох сусідніх зубців по дузі кола *II* радіуса r). Тоді

$$d = \frac{p}{\pi} \cdot z \qquad \text{або} \qquad d = m \cdot z,$$

де m – відношення колового кроку до числа π, що називається **модулем зубців,** мм.

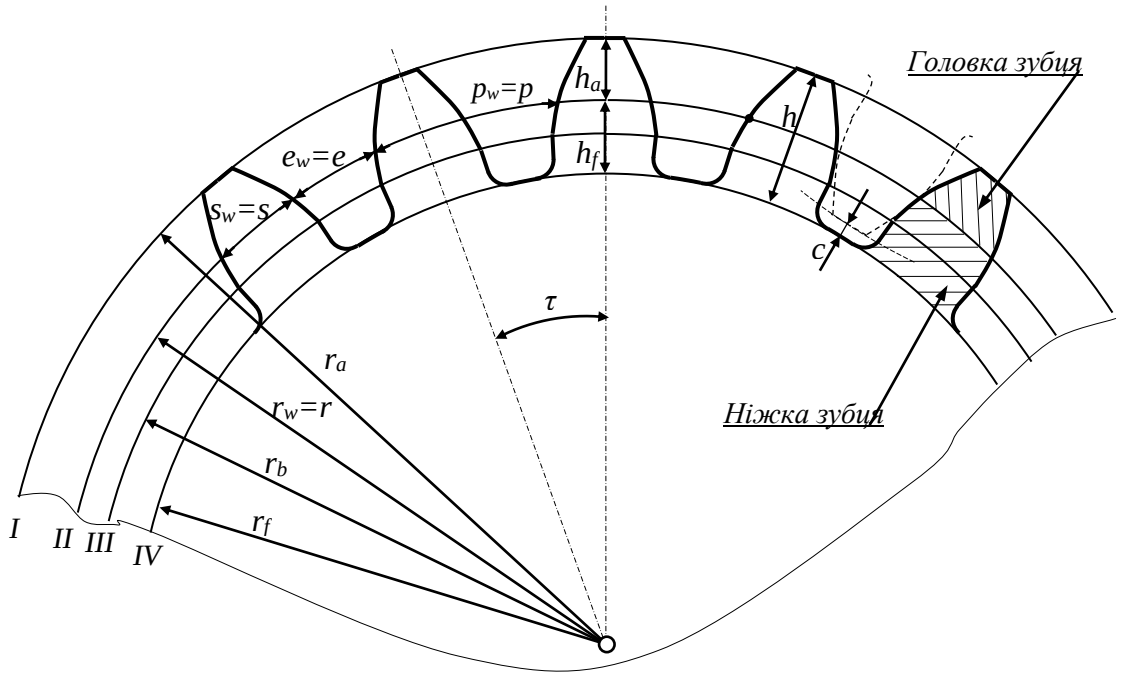


Рис. 2.8. До розгляду стандартних параметрів циліндричних зубчастих коліс

Для кола *II* радіуса r, що називається **ділильним**, модуль зубців призначається за ДСТУ ISO 1102:2006 з ряду визначених раціональних чисел від 0,05 до 100 мм (наприклад *m =2,5 мм, …, 4 мм,… , 12 мм)*. Отже, **ділильне коло** визначається як коло, для якого модуль має стандартну величину. До ділильного кола прив'язується стандартний кут профілю $\alpha = 20^0$ (ГОСТ 13755-81).

Ділильне коло ділить зубець висотою h на дві частини: **ділильну головку зубця** висотою h_a (частина зубця, розташована між ділильним колом і колом вершин) і **ділильну ніжку зубця** висотою h_f (частина зубця, розташована між ділильним колом і колом западин). Ділильна ніжка зубця більше за ділильну головку на величину **радіального зазора** *c* (параметр зубчастої передачі – відстань між колом вершин одного зубчастого колеса і колом западин другого). Такі параметри

визначаються за формулами $h_a = h_a^* \cdot m$; $h_f = h_f^* \cdot m$; $c = c^* \cdot m$. У формулах h_a^* – коефіцієнт висоти головки зубця, c^* – коефіцієнт радіального зазора. Ці коефіцієнти регламентуються ГОСТ 13755-81: $h_a^* = 1{,}0$; $c^* = 0{,}25$. Тоді коефіцієнт висоти ніжки зубця $h_f^* = h_a^* + c^* = 1{,}0 + 0{,}25 = 1{,}25$, а висота зубця $h = 2{,}25 \cdot m$.

Відношення довжини концентричних кіл – початкового (радіуса r_w), ділильного (радіуса r), основного (радіуса r_b) – до кількості зубців зубчастого колеса визначають відстань між профілями сусідніх зубців за дугою відповідного кола, що називається **кроком**. При цьому дуги p_w, p, p_b відповідають одному й тому самому **кутовому кроку** $\tau = 360^0/z$.

Для геометричного розрахунку циліндричної евольвентної зубчастої передачі (складається з шестерні *1* і колеса *2*) використовуються такі вихідні дані: модуль зубців m; кількості зубців зубчастих коліс z_1, z_2; стандартний кут профілю $\alpha = 20^0$; коефіцієнт висоти головки зубців $h_a^* = 1{,}0$; коефіцієнт радіального зазора $c^* = 0{,}25$. Нижче наводиться рекомендована послідовність такого розрахунку.

Визначаються параметри, однакові для шестерні та колеса:

- ділильна товщина зубців s і ділильна ширина западин e

$$s = e = \pi \cdot m / 2; \tag{2.35}$$

- ділильний крок

$$p = \pi \cdot m; \tag{2.36}$$

- висота зубців

$$h = m \cdot (h_a^* + h_f^*). \tag{2.37}$$

Радіуси ділильних кіл шестерні і колеса

$$r_{1,2} = \frac{m \cdot z_{1,2}}{2}. \tag{2.38}$$

Радіуси початкових кіл шестерні і колеса

$$r_{w1,2} = r_{1,2}. \tag{2.39}$$

Радіуси основних кіл шестерні і колеса

$$r_{b1,2} = \frac{m \cdot z_{1,2}}{2} \cdot \cos\alpha \,. \qquad (2.40)$$

Радіуси вершин шестерні і колеса

$$r_{a1,2} = m \cdot (z_{1,2} / 2 + h_a^*). \qquad (2.41)$$

Радіуси западин шестерні і колеса

$$r_{f1,2} = m \cdot (z_{1,2} / 2 - h_f^*). \qquad (2.42)$$

Міжосьова відстань O_1O_2

$$a = \frac{m \cdot (z_1 + z_2)}{2}. \qquad (2.43)$$

Дослідження руху ланок розглянутих зубчастих передач передбачає урахування основних геометричних характеристик їхнього зачеплення. Для розгляду таких характеристик на рис. 2.9 зображено фрагмент евольвентної зубчастої передачі, зубці шестерні *1* і колеса *2* якої знаходяться в зачепленні.

Подано по три зубці шестерні *1* і колеса *2*, що знаходяться в зачепленні. При цьому точка контакту пари зубців співпадає з полюсом зачеплення *P*. Центри обертання ланок O_1 і O_2 віддалені на міжосьову відстань *a*. Розташування полюса *P* на лінії O_1O_2 відповідно до формули (2.31) визначається передаточним відношенням зубчастої передачі. Через полюс *P* перпендикулярно до O_1O_2 проведено лінію *p-p*. Загальна нормаль *n-n* проходить під **кутом зачеплення** α_w (у розглянутому випадку $\alpha_w=\alpha=20^0$) до лінії *p-p*. Для кожної ланки проведено дуги всіх розглянутих вище характерних кіл.

З центрів обертання ланок O_1 і O_2 проведемо перпендикуляри до *n-n* , отримавши точки перетинання N_1 і N_2. Уявимо, що в полюсі Р контактують необмежені колами вершин r_{a1} і r_{a2} евольвенти (радіуси основних кіл відповідно r_{b1} і r_{b2}). Твірні евольвент для такого положення N_1P і N_2P складають

пряму N_1N_2, що є дотичною до двох основних кіл. З аналогічного розглядання нового положення евольвент, які контактують, видно, що пряма N_1N_2 є їхньою загальною нормаллю, а тому точка контакту знаходиться на цій прямій. Це свідчить про те, що пряму N_1N_2 можна розглядати як геометричне місце точок контакту сполучених необмежених евольвент. Отже, у процесі зачеплення двох евольвентних профілів зубців їхня загальна нормаль, як дотична до двох основних кіл, не змінює свого положення, а тому не змінює свого положення і полюс зачеплення P.

Пряма N_1N_2, що є траєкторією точки контакту необмежених колами вершин евольвентних профілів у її абсолютному русі, називається **теоретичною лінією зачеплення**.

У точках B_1 і B_2 теоретична лінія зачеплення N_1N_2 перетинається колами вершин зубців зубчастих коліс радіусів r_{a2} і r_{a1}. **У точці B_1 спряжені профілі зубців входять у зачеплення, а в точці B_2 виходять з зачеплення** (ці профілі показані пунктирними кривими). Процес взаємодії профілів спряжених зубців відбувається на ділянці B_1B_2 теоретичної лінії зачеплення, що називається **активною лінією зачеплення**. **Зубчасту передачу слід проєктувати так, щоб активна лінія зачеплення B_1B_2 була розташована в межах теоретичної лінії зачеплення N_1N_2.**

При заданих напрямках обертання в зачепленні беруть участь **активні (робочі) профілі зубців**, що розташовані на робочих сторонах зубців і відповідають активній лінії зачеплення B_1B_2. На рис. 2.9 активні профілі зубців зубчастих коліс, що контактують у полюсі зачеплення P, заштриховані (границі активних профілів обмежені дугами кіл радіусів $r_{O_1B_1}$ і $r_{O_2B_2}$).

До основних характеристик зачеплення евольвентної передачі також належать початкові дуги зачеплення і торцеві кути перекриття (на рис. 2.9 ці елементи показані для шестерні, для колеса отримуються аналогічно). **Початковими дугами зачеплення** ($l_w = \cup e_1 f_1 = \cup e_2 f_2$) називаються частини початкових кіл, що перекочуються одна по одній за час контакту пари зубців. **Торцевими кутами перекриття** ($\varphi_{\alpha 1}, \varphi_{\alpha 2}$) називаються кути повороту зубчастих коліс від положення входу зубців у зачеплення (точка контакту пари зубців співпадає з точкою B_1) до

їхнього виходу з зачеплення (точка контакту пари зубців співпадає з точкою B_2).

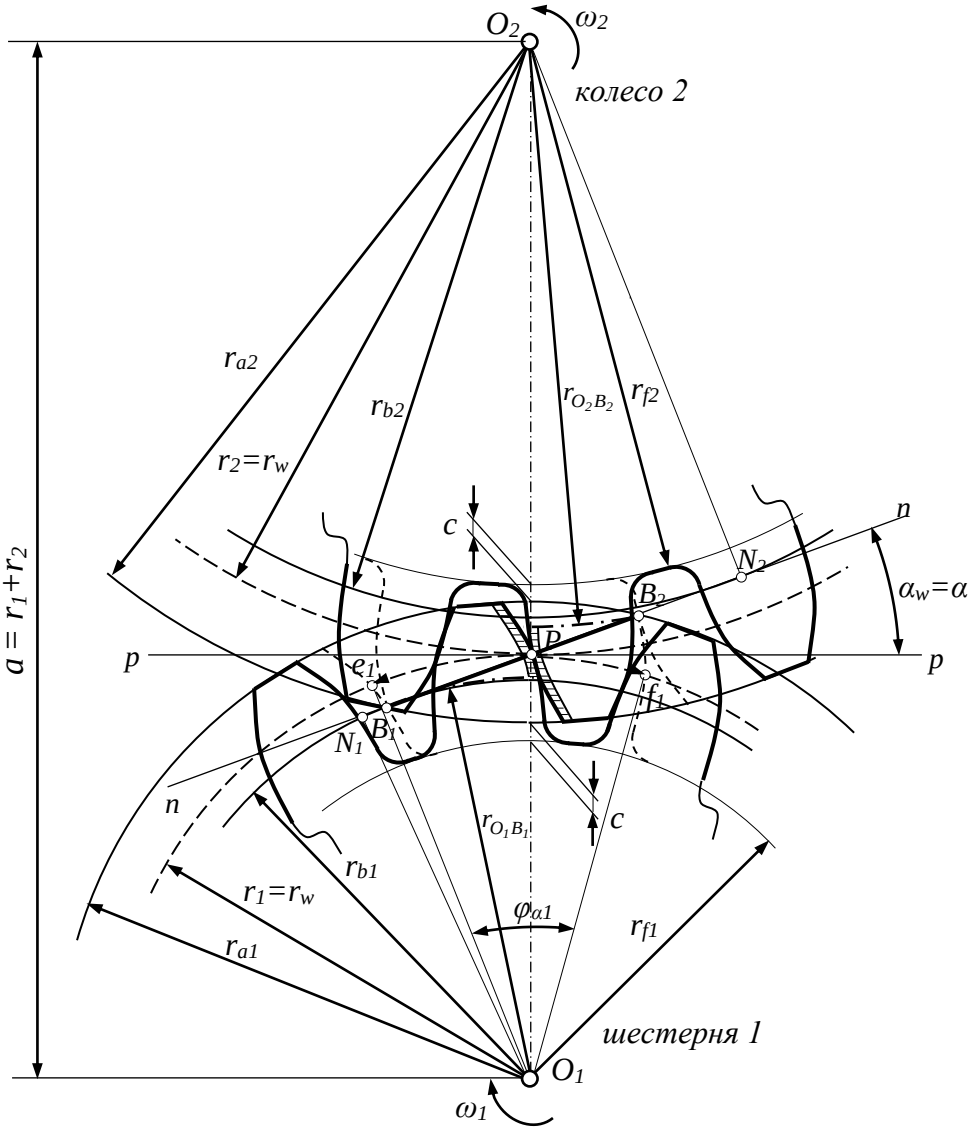


Рис. 2.9. Схема евольвентного зубчастого зачеплення

З урахуванням важких умов експлуатації зубчастих передач процес їхнього проєктування виконується при обов'язковому контролі відповідних показників якості. Їхні величини дають можливість оцінити зубчасту передачу щодо плавності та безшумності зачеплення, можливого зносу та міцності зубців, а також порівняти ряд ЗП за одними і тими самими показниками. До таких показників належать **коефіцієнти перекриття, питомих ковзань, питомого тиску, форми зубців** (два останні будуть розглядатися у відповідному розділі посібника).

Коефіцієнт перекриття ε кількісно показує кількість пар зубців передачі, що контактують одночасно. Наприклад, якщо $\varepsilon = 1{,}6$, то в зачепленні одночасно можуть перебувати дві пари зубців (60 % часу зачеплення) і одна пара (40 % часу).

Коефіцієнт перекриття ε характеризує безперервність і плавність зачеплення в зубчастій передачі, що забезпечуються перекриттям роботи однієї пари зубців роботою другої пари зубців – кожна наступна пара зубців має увійти в зачеплення ще до того, як попередня пара зубців вийде з зачеплення. В основному величина ε визначається за формулою

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varphi_{\alpha 1}}{\tau_1} = \frac{\varphi_{\alpha 2}}{\tau_2} = \frac{l_w}{p_w}. \qquad (2.44)$$

Для гарантованого забезпечення вимог безперервності зачеплення зубців проєктування евольвентних зубчастих передач загального призначення має відбуватися за умови $\varepsilon \geq 1{,}1$ (забезпечення безперервності процесу зачеплення з 10-відсотковим запасом). Для силових відповідальних зубчастих передач – $\varepsilon \geq 1{,}4$.

Коефіцієнти питомих ковзань λ_1 і λ_2 ураховують вплив геометричних і кінематичних факторів на величину проковзування профілів у процесі зачеплення. Наявність ковзання при одночасному натисканні зубця шестерні на зубець колеса призводить до зносу їхніх профілів. Такий знос в окремих частинах профілів буде різний, і його інтенсивність оцінюється величиною коефіцієнтів λ_1 і λ_2.

Порівняння інтенсивності зносу зубців шестерні і колеса ЗП, що проєктується, доцільно проводити за **діаграмами питомих ковзань** – графіками, що показують зміну коефіцієнтів λ_1 і λ_2 для різних точок спряжених профілів за період їхнього зачеплення.

Приклад діаграм питомих ковзань показаний на рис. 2.10. Для їхньої побудови поточні значення коефіцієнтів λ_1 і λ_2 розраховуються за поданими нижче формулами

$$\lambda_1 = 1 + \frac{1}{i_{12}} - \frac{W}{x} \cdot \frac{1}{i_{12}}; \qquad \lambda_2 = 1 + i_{12} - \frac{W}{W - x} \cdot i_{12}, \qquad (2.45)$$

де W –довжина теоретичної лінії зачеплення N_1N_2;

x – поточна відстань від точки N_1 до розглянутої точки спряжених профілів (K), що відраховується в напрямку точки N_2 $x \in N_1N_2\,[0;W\,]$.

Аналіз зображеної на рис. 2.10 діаграми питомих ковзань обґрунтовує такі висновки (лінії, проведені через точки B_1 і B_2 паралельно осі ординат, виділяють робочі ділянки діаграм):

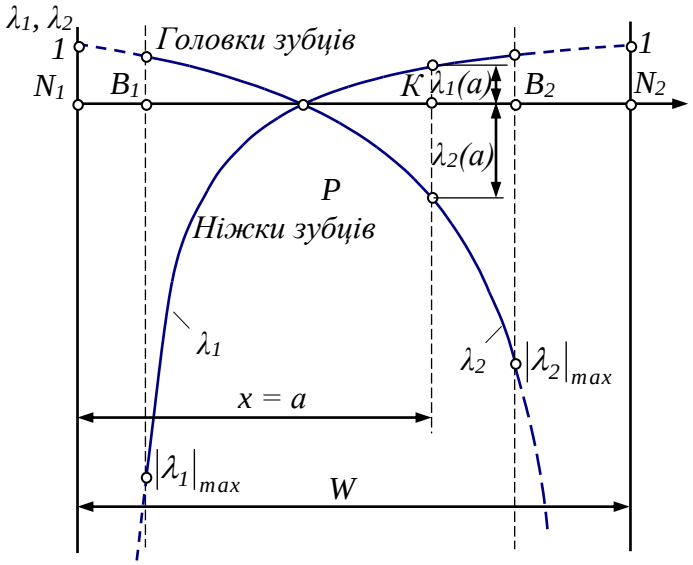


Рис. 2.10. Приклад діаграми питомих ковзань

1. У полюсі зачеплення P коефіцієнти питомих ковзань λ_1 і λ_2 дорівнюють нулю (кочення спряжених профілів один по одному без ковзання).

2. При віддаленні від полюса зачеплення коефіцієнти питомих ковзань λ_1 і λ_2 збільшуються, причому на ніжках зубців інтенсивніше, ніж на головках.

3. Відносну інтенсивність зношування зубців шестерні і колеса в експлуатації передачі оцінюють співставленням величин найбільших питомих ковзань на ніжках $|\lambda_{1\,max}|$ і $|\lambda_{2\,max}|$.

Слід відзначити, що вище розглядались передачі, утворені ЗК з кількістю зубців $z_1, z_2 \geq 17$. Створення евольвентних зубчастих передач з малими кількостями зубців ЗК (наприклад $z_1 < 17$) потребує використання спеціального підходу, який передбачає здійснення зміщення зуборізального інструменту відносно заготовки зубчастого колеса, що виготовляється (з метою уникання зменшенню розмірів перетинів ніжок зубців їхнього **підрізання**). При цьому передбачається його **додатне зміщення** – від центра обертання заготовки.

З урахуванням того, що застосування зміщення зуборізального інструменту при виготовленні ЗК суттєво змінює як параметри зубчастих коліс (порівняно з ЗК, виготовленими без зміщення, тобто з **нульовим зміщенням**), так і характеристики руху передачі, через уведення такого

технологічного заходу можна розв'язувати складні інженерні завдання. Крім згаданого, до них належать проєктування зубчастих передач максимальної контактної, міцності, збільшення згинної міцності шестерні або колеса, вписування зубчастої передачі в задану міжосьову відстань (коли міжосьова відстань $a \neq m \cdot (z_1 + z_2)/2$). При цьому для останнього завдання виготовлення колеса з великою кількістю зубців z_2 може здійснюватися з **від'ємним зміщенням** інструменту – до центра обертання заготовки.

Для вирішення наведених завдань на етапі проєктування зубчастих передач з використанням відповідних рекомендацій [1, 3] здійснюється обґрунтований вибір **коефіцієнтів зміщення** (тобто величини і напрямку зміщення інструменту для виготовлення шестерні і колеса).

2.5. Особливості дослідження руху кулачкових механізмів

У підрозд. 1.5 розглянуто загальний устрій різних КМ, відповідні профілям кулачків основні фази руху штовхачів. У той же час в інженерній практиці виникає необхідність в оцінюванні впливу окремих конструктивних рішень на величини змін силових і кінематичних параметрів і характеристик руху КМ. До особливостей проведення таких досліджень слід віднести урахування рекомендацій з обмеження кутів тиску в КМ; використання різних підходів і методів визначення кінематичних характеристик механізмів з різними профілями кулачків; забезпечення прийнятної (безударної) динаміки механізмів.

На рис. 2.11 показана кінематична схема центрального КМ з роликовим штовхачем (отримав широке розповсюдження в механізмах газорозподілу та паливних насосах високого тиску чотиритактних дизелів).

При передачі руху кулачок 1 діє на штовхач 2 силою $\overline{P}$, спрямованою по загальній нормалі *n-n* до профілю кулачка і прикладеною в точці його контакту з роликом штовхача 3 (вища КП). Її вертикальна (корисна) складова $\overline{P}_{вер}$ ($P_{вер} = P \cdot cos\beta$) за напрямком співпадає з переміщенням (вектором швидкості $\overline{V}_2$)

штовхача. Горизонтальна складова $\overline{P}_{гор}$ ($P_{гор} = P \cdot sin\beta$) спрямована перпендикулярно до напрямку руху штовхача і розглядається як шкідлива сила (викликає перекошування штовхача у напрямних (пара C_5), підвищення сил тертя, процесів зношування деталей).

Кут β, утворюваний нормаллю n-n до профілю кулачка в точці контакту з роликом і вектором швидкості штовхача $\overline{V}_2$, називається **кутом тиску в КМ** (кулачка на штовхач).

З урахуванням того, що при високих значеннях кута β збільшується відповідна шкідлива сила $\overline{P}_{гор}$ (сили тертя в поступальній кінематичній парі C_5 можуть призвести навіть до її заклинювання), для забезпечення надійної роботи КМ при їх конструюванні забезпечується виконання умови

$$\beta_{max} \le [\beta], \qquad (2.46)$$

де $[\beta]$ – допустимі значення кута тиску для розглядуваного механізму.

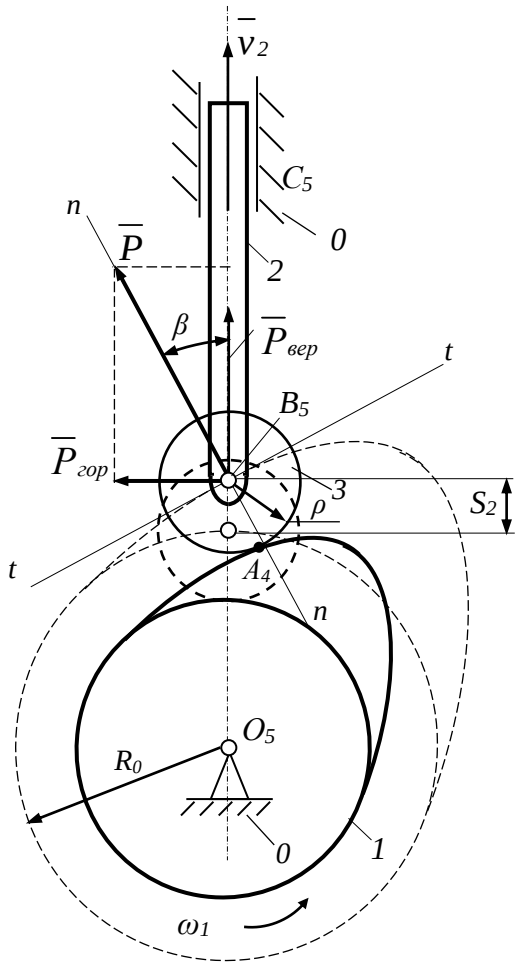


Рис. 2.11. До визначення кута тиску в кулачкових механізмах

Вони складають $[\beta] = 30^0$ для КМ зі штовхачами, що здійснюють зворотно-поступальний рух, і $[\beta] = 45^0$ – для КМ, у яких штовхачі здійснюють зворотно-обертальний рух.

Для контролю виконання умови (2.46) використовується формула

$$\beta_{max} = arctg\left(\frac{V_{2max} / \omega_1}{R_0 + S_{2V_{2max}}}\right) < [\beta], \qquad (2.47)$$

де V_{2max} – максимальна швидкість штовхача в циклі роботи КМ;

$S_{2V_{2max}}$ – переміщення штовхача, при якому досягається швидкість V_{2max};

R_0 – радіус основного кола теоретичного профілю кулачка.

Слід відзначити, що при проведенні кінематичного аналізу КМ використовуються розглянуті в підрозд. 2.1 графічні, графоаналітичні та аналітичні методи.

Використання графічних методів не потребує спеціальних рішень. Шляхом обертання (графічного або експериментального) кулачка на різні кути визначають відповідні переміщення штовхача, будують діаграму його переміщень, а на її основі (шляхом графічного диференціювання) – кінематичні діаграми швидкостей і прискорень штовхача.

Разом з тим при використанні графоаналітичних методів КА замість реальних кулачкових механізмів, як правило, розглядаються їхні еквівалентні **замінні механізми**. У таких механізмах вища КП (кулачок-штовхач) заміняється відповідним кінематичним ланцюгом, що об'єднує одну ланку і дві нижчих КП 5-го класу (розміщуються в центрах кривизни елементів ланок, що утворюють вищу КП). Приклади замінних механізмів показані на рис. 2.12. Для таких важільних механізмів у визначених положеннях будують плани швидкостей і прискорень, визначаються шукані кінематичні параметри.

За необхідності використання точних аналітичних методів слід ураховувати, що для більшості кулачкових механізмів (з дуговими – опуклими, увігнутими, тангенціальними, а також безударними кулачками) у довідковій літературі [4] наведено аналітичні залежності для розрахунків координат профілів кулачків, а також переміщень, швидкостей і прискорень штовхачів.

Разом з тим залежно від призначення та швидкохідності ТЗ вибір профілю кулачка (закони руху штовхача) слід обирати з урахуванням можливих динамічних проявів – **ударів у КМ**.

Під ударами в КМ слід розуміти різні миттєві стрибкоподібні зміни сил інерції внаслідок змін прискорень штовхача (деталей привода).

Залежно від сили прояву відрізняють «жорсткі» та «м'які» удари. Їх відсутність відносить кулачкові механізми до безударних КМ.

Наявність (чи відсутність) таких уларів при роботі КМ можна прогнозувати при аналізі характеристик руху (кінематичних діаграм) штовхача. Їхні фрагменти (переміщення S_2, швидкості V_2 та прискорення a_2 штовхача залежно від φ_1 для фази віддалення штовхача) показані на рис. 2.13.

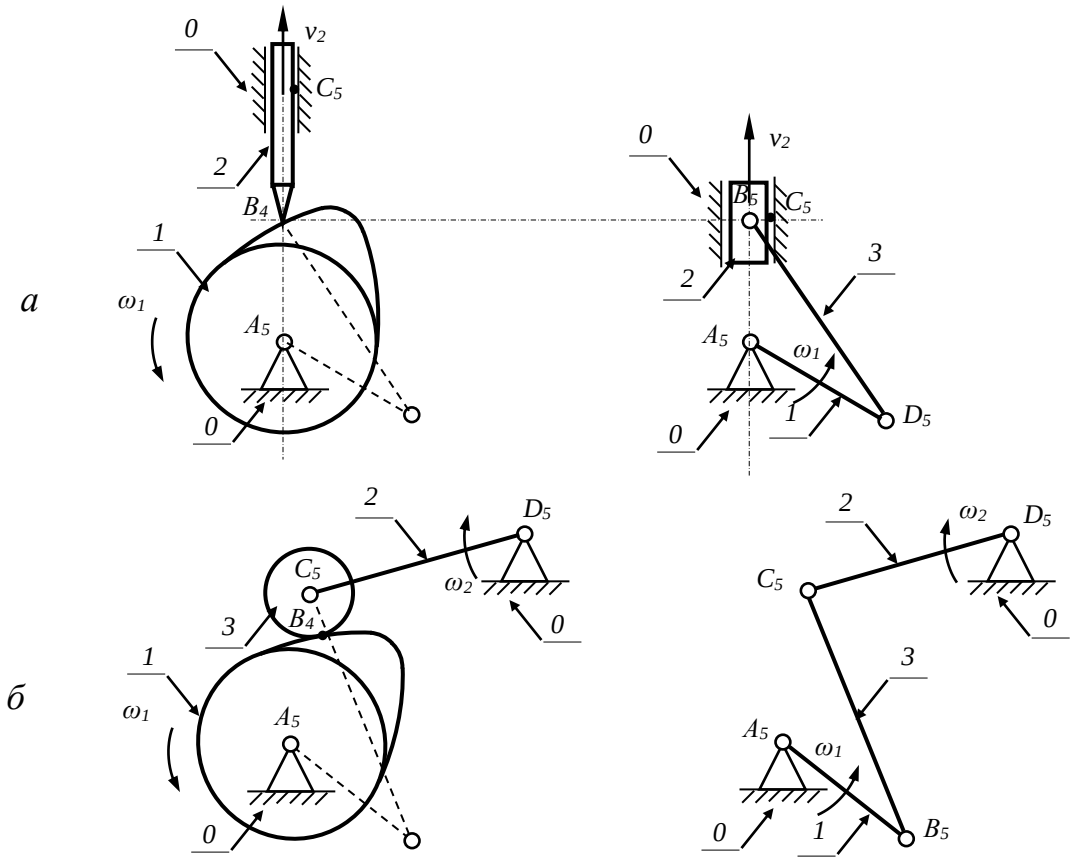


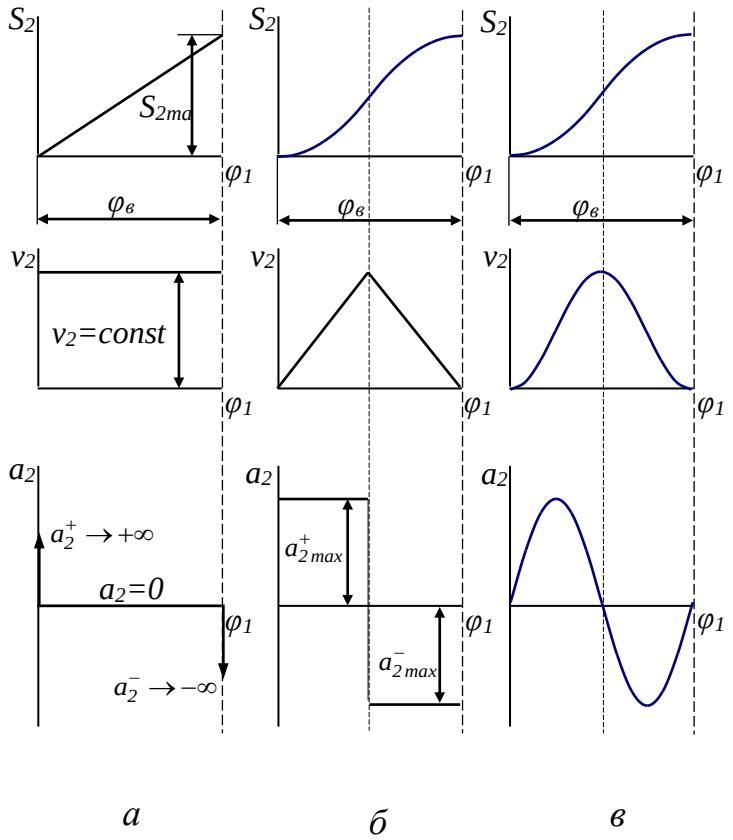
Рис. 2.12. Приклади складання замінних механізмів для КМ:
а – зі штовхачем, що здійснює зворотно-поступальний рух;
б – штовхачем, що здійснює зворотно-обертальний рух

На рис. 2.13, *а* показано ознаки наявності в КМ «жорстких» ударів – стрибкова зміна швидкості V_2 і відповідні миттєві зміни до безмежності прискорень (інерційних навантажень) на початку та закінченні фази $\varphi_в$ (аналогічно і для фази наближення). Для таких КМ існує жорстке обмеження частоти обертання кулачка $n_{1max} < 50\ хв^{-1}$.

На рис. 2.13, *б* зображено ознаки для КМ з «м'якими» ударами (більшість розповсюджених кулачків, профілі яких

окреслені дугами кіл або дугами та прямими лініями – тангенціальних кулачків). Видно, що характерною ознакою є «стрибки» прискорень a_2 до певних максимальних значень з відповідними (кінцевими) значеннями інерційних сил. Для таких механізмів обмеження складає $n_{1max} < 1200\ хв^{-1}$.

На рис. 2.13, *в* показані фрагменти кінематичних діаграм з ознаками відсутності ударів. Видно, що в безударних КМ криві прискорень a_2 змінюються плавно, не мають розривів і стрибків (отримали найбільше розповсюдження автомобільні безударні кулачки, що мають профілі, синтезовані за методом Курца і Полідайн [3]). Разом з тим слід пам'ятати, що при забезпеченні якісної динаміки такі кулачки менш ефективні за повнотою кривих підйомів штовхачів (пропускною спроможністю клапанів дизеля) порівняно з дуговими або тангенціальними кулачками з «м'якими» ударами.



а *б* *в*

Рис. 2.13. Ознаки роботи КМ:
а – з «жорсткими» ударами;
б – «м'якими» ударами;
в – безударних КМ

Питання для самоконтролю до розділу 2

1. Що є метою кінематичного аналізу механізмів?
2. З чого починається кінематичний аналіз механізму?

3. Які методи кінематичного аналізу використовують для визначення переміщень, швидкостей і прискорень точок і ланок механізму?

4. При якому методі кінематичного аналізу будуються плани швидкостей і прискорень?

5. Що є теоретичною основою силового розрахунку?

6. Як можна визначити врівноважений момент без розрахунку реакцій зв’язків?

7. Завданням якого аналізу є визначення законів руху ланок з урахуванням їхніх мас (моментів інерції) і діючих навантажень?

8. Як називається умовна початкова ланка, що має інерційні властивості, еквівалентні властивостям усього механізму, і зазнає навантаження, еквівалентного дії навантажень на всі ланки механізму?

9. Для якого періоду руху машини визначається коефіцієнт нерівномірності руху?

10. При яких значеннях головного вектора та головного моменту сил інерції механізм вважається врівноваженим?

3. ВИКОРИСТАННЯ РОЗГЛЯНУТИХ У РОЗДІЛАХ 1 І 2 ЕЛЕМЕНТІВ ЗІК ПРИ АНАЛІЗІ ЗАГАЛЬНОГО УСТРОЮ ТА ОСНОВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВАЖІЛЬНОГО МЕХАНІЗМУ ПРИВОДА КОНВЕЄРА

Подане нижче дослідження спрямоване на здійснення силового розрахунку шарнірно-важільного механізму привода конвеєра, кінематичну схему якого (у масштабі $\mu_l = 0{,}02$ *м/мм*) зображено на рис. 3.1 (назви ланок наведено в підрозд. 1.2).

Центри мас ланок 1, 2, 3, 4, 5 розташовані в точках S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. Прийнято, що урівноваженням ланок *1* і *3* центри мас S_1 і S_3 перенесені на стійку (відповідно в точки *A* і *E*). Положення центрів мас S_2 і S_4 розташовані на серединах довжин шатунів 2, 4. Точка S_5 збігається з точкою *F*.

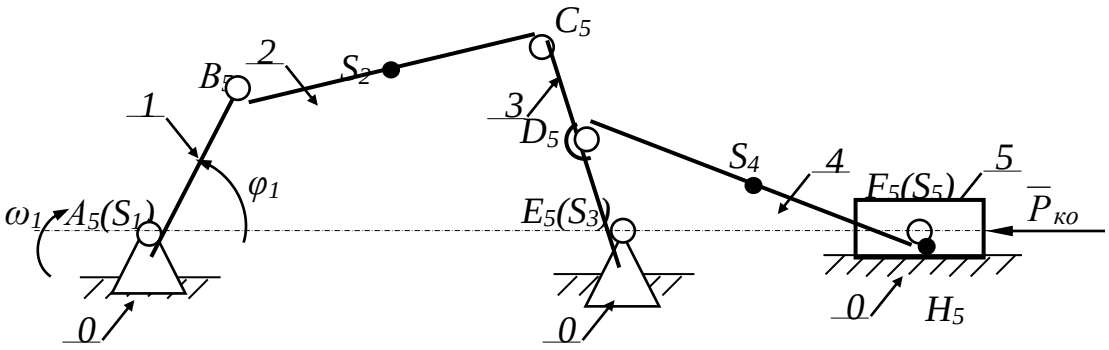


Рис. 3.1. Кінематична схема механізму привода конвеєра

При проведенні силового розрахунку для відповідного положення механізму (визначається узагальненою координатою φ_1) ураховуються такі параметри:

- кутова швидкість кривошипа *1* $\omega_1 = 10$ *рад/с*;
- довжини ланок і геометричні параметри механізму – $l_{AB}=0{,}4$ *м*; $l_{BC}=0{,}8$ *м*; $l_{CE}=0{,}6$ *м*; $l_{DF}=0{,}9$ *м*; $l_{AE}=1{,}26$ *м*; $l_{DE}=0{,}5\cdot l_{CE}$;
- сили ваги ланок – $G_1=60$ *Н*; $G_2=120$ *Н*; $G_3=90$ *Н*; $G_4=140$ *Н*; $G_5=200$ *Н*;
- моменти інерції мас ланок 2 і 4 відносно осей, що проходять через центри мас, – $I_{S_2} = 0{,}64$ *кг* $\cdot$ *м*^{2}; $I_{S_4} = 0{,}95$ *кг* $\cdot$ *м*^{2};

- величина прикладеної до повзуна 5 сили корисного опору для розрахункового положення механізму складає $P_{ко} = 500$ Н.

Силовий розрахунок виконується з використанням сучасних методів дослідження будови механізмів, визначення їхніх кінематичних і динамічних параметрів у відповідності з положеннями, даними в підрозд. 1.3, 2.1 і 2.2.

На першому етапі дослідження виконується **структурний аналіз механізму**, головними завданнями якого є визначення кількості рухомих ланок, кількісті і класу кінематичних пар, ступеня рухомості механізму, виділення СГ, нашаруванням яких цей механізм утворений, визначення їхнього класу і класу механізму. Структурний аналіз також дозволяє встановити послідовність кінематичного дослідження та силового розрахунку механізму.

Ступінь рухомості механізму визначається за формулою (1.2). Для досліджуваного механізму кількість рухомих ланок $n=5$; кількість кінематичних пар 5-го класу, $p_5=7$; кількість кінематичних пар 4-го класу, $p_4=0$.

$$W=3\cdot5-2\cdot7-0=1.$$

Досліджуваний механізм утворений шляхом нашарування до механізму 1-го класу (стійка 0 – кривошип 1) структурної групи (шатун 2 – коромисло 3) другого класу, другого порядку, першого виду і структурної групи (шатун 4 – повзун 3) другого класу, другого порядку, другого виду (рис. 3.2). Тому механізм, що розглядається, є механізмом 2-го класу 2-го порядку.

Для такого механізму формалізоване подання його будови з прив'язаними до неї маршрутами проведення кінематичного дослідження та силового розрахунку буде мати такий вигляд, як на рис. 3.3.

На другому етапі дослідження здійснюється **кінематичний аналіз механізму**. У цьому випадку його метою є визначення величин і напрямків швидкостей і прискорень ланок механізму та певних точок механізму для заданого розрахункового положення графоаналітичним методом (методом планів швидкостей і прискорень) [11, 13]. Отримані результати будуть використовуватися в подальшому при проведенні силового розрахунку.

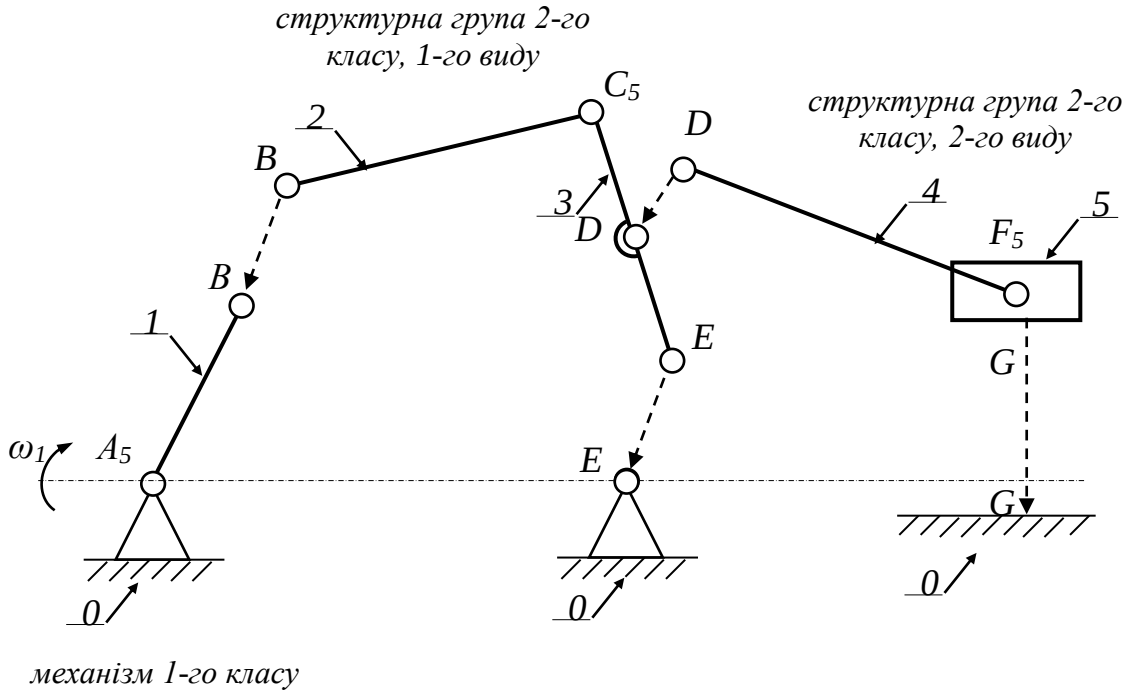


Рис. 3.2. До визначення класу механізму привода конвеєра

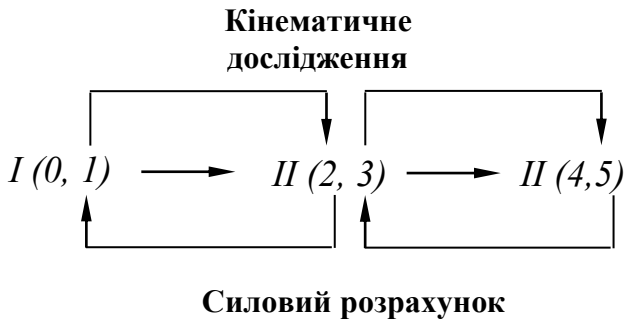


Рис. 3.3

Кінематичне дослідження починається з найближчої до початкової ланки структурної групи 2-3. Ланки кривошип 1 і коромисло 3 здійснюють обертальний рух. Ланка шатун 2 – плоский. Для побудови плану швидкостей складаємо векторні рівняння, що пов’язують швидкість точки С на 2-й і 3-й ланках.

$$\overline{V}_C = \overline{V}_B + \overline{V}_{CB}; \tag{3.1}$$

$$\overline{V}_C = \overline{V}_{3-0}. \tag{3.2}$$

де $V_B = l_{AB} \cdot \omega_1$ – відома за величиною і напрямком ($\perp$до AB за напрямком ω_1),

$$V_B = 0{,}2 \cdot 10 = 2{,}0 \ \ м/с;$$

V_{CB} – відома тільки за напрямком ($\perp$до BC);

V_{3-0} – відома тільки за напрямком ($\perp$до CE).

На рис. 3.4, а в масштабі μ_l показаний план механізму – кінематична схема КПМ в розрахунковому положенні. На ній вказуються напрямки відомих і шуканих швидкостей.

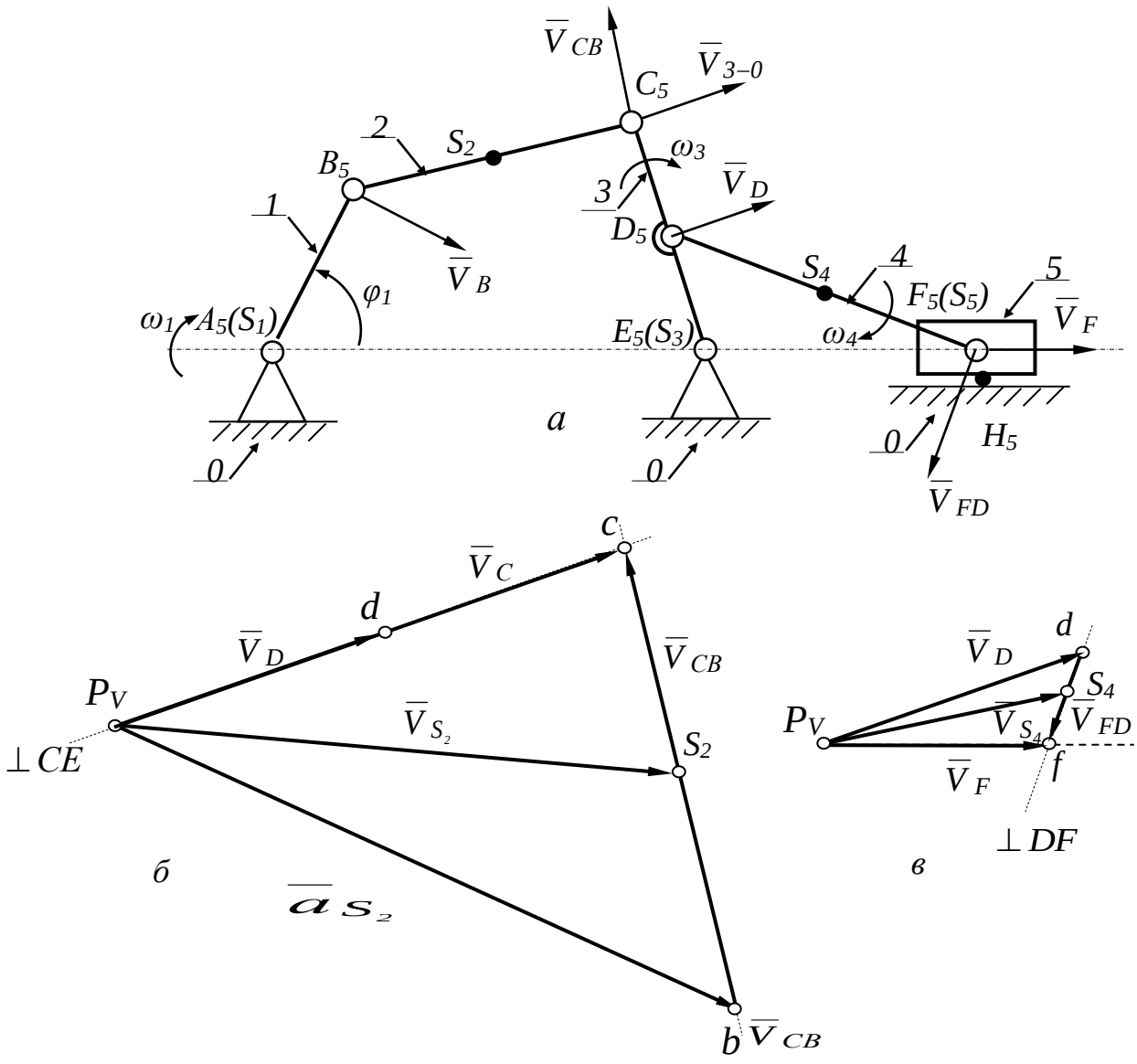


Рис. 3.4. До побудови планів швидкостей механізму

Для встановлення масштабу планів швидкостей довжина вектора швидкості V_B приймається $\overline{P_V a} = 100$ *мм*. Масштаб плану швидкостей

$$\mu_V = \frac{V_B}{P_V b} = \frac{2{,}0}{100} = 0{,}02 \ \ \frac{м/с}{мм}.$$

План швидкостей для СГ 2-3 показаний на рис. 3.4, *б*.

Для його побудови необхідно з полюса P_V послідовно відкласти вектори або провести напрямки швидкостей (рис. 3.4, *а*) за рівняннями (3.1) і (3.2). За рівнянням (3.1) з полюса P_V відкладемо вектор $\overline{V}_B$, через його кінець проведемо напрямок вектора $\overline{V}_{CB}$. З полюса P_V за рівнянням (3.2) проведемо напрямок вектора $\overline{V}_{3-0}$. Точка перетинання векторів $\overline{V}_{CB}$ і $\overline{V}_{3-0}$ є шуканою точкою *C*. Відрізок *cb* на плані швидкостей розглядається як план швидкостей ланки 2 (подібний ланці *BC* на схемі) – це визначає положення точки S_2 (на середині відрізка *cb*) і довжину та положення вектора V_{S_2}. Відрізок $P_V c$ на плані швидкостей розглядається як план швидкостей ланки 3 (подібний ланці *CE*), що визначає положення точки *d* (на середині відрізка $P_V c$) і довжину та положення вектора V_D (точки приєднання ланки 4 до ланки 3).

Для визначення дійсних значень швидкостей необхідно довжини векторів шуканих швидкостей у міліметрах, виміряних на плані, помножити на масштаб μ_V

$$V_C = P_V c \cdot \mu_V = 77 \cdot 0{,}02 = 1{,}54 \ \ м/с,$$

$$V_D = P_V d \cdot \mu_V = 38{,}5 \cdot 0{,}02 = 0{,}77 \ \ м/с,$$

$$V_{CB} = bc \cdot \mu_V = 66 \cdot 0{,}02 = 1{,}32 \ \ м/с,$$

$$V_{S_2} = P_V S_2 \cdot \mu_V = 80 \cdot 0{,}02 = 1{,}6 \ \ м/с.$$

Кутова швидкість шатуна *2* (спрямована в бік напрямку вектора швидкості V_{CB})

$$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{l_{BC}} = \frac{1{,}32}{0{,}8} = 1{,}65 \ \ рад/с.$$

Кутова швидкість коромисла *3* (спрямована в бік напрямку вектора швидкості V_C)

$$\omega_3 = \frac{V_C}{l_{CE}} = \frac{1{,}57}{0{,}6} = 2{,}6 \ \ рад/с.$$

Для побудування плану швидкостей СГ 4-5 ураховується, що точка *D* її приєднання до групи 2-3 здійснює обертальний рух, повзун 5 – поступальний рух, а шатун 4 – плоский. Для визначення абсолютної швидкості точки *F* (належить як шатуну 4, так і повзуну 5) складаються векторні рівняння (дод. 1)

$$\overline{V}_F = \overline{V}_D + \overline{V}_{FD}; \qquad (3.3)$$

$$\overline{V}_F = \overline{V}_{5-0}, \qquad (3.4)$$

де V_D – відома за величиною і напрямком ($\perp$ до *DE*);

V_{FD} – відома тільки за напрямком ($\perp$ до *FD*);

V_{5-0} – відома тільки за напрямком руху повзуна.

План швидкостей структурної групи 4-5 показаний на рис. 3.4, *в*.

Для його побудови необхідно з полюса P_V послідовно відкласти вектори або провести напрямки швидкостей (рис. 3.4, *а*) за рівняннями (3.3) і (3.4). За рівнянням (3.3) з полюса P_V відкладемо вектор $\overline{V}_D$, через його кінець проведемо напрямок вектора $\overline{V}_{FD}$. З полюса P_V за рівнянням (3.4) проведемо напрямок вектора $\overline{V}_{5-0}$. Точка перетинання векторів $\overline{V}_{FD}$ і $\overline{V}_{5-0}$ є шуканою точкою *f*. Відрізок *fd* на плані швидкостей розглядається як план швидкостей ланки 4 (подібний ланці *DF* на схемі) – це визначає положення точки S_2 (на середині відрізка *cb*) і довжину та положення вектораV_{S_4}.

Для визначення дійсних значень швидкостей необхідно довжини векторів шуканих швидкостей у міліметрах, виміряних на плані, помножити на масштаб μ_V

$$V_F = P_V f \cdot \mu_V = 31 \cdot 0{,}02 = 0{,}62 \ \ м/с,$$

$$V_{FD} = df \cdot \mu_V = 13 \cdot 0{,}02 = 0{,}26 \ \ м/с,$$

$$V_{S_4} = P_V S_4 \cdot \mu_V = 33 \cdot 0{,}02 = 0{,}66 \ \ м/с.$$

Кутова швидкість шатуна *4* (спрямована в бік напрямку вектора швидкості V_{FD})

$$\omega_4 = \frac{V_{FD}}{l_{DF}} = \frac{0{,}26}{0{,}9} = 0{,}29 \ \ рад/с.$$

Для побудови плану прискорень структурної групи 2-3 механізму складаємо аналогічно векторні рівняння (дод. 1), що пов'язують прискорення точки *C* на 2-й і 3-й ланках (на рис. 3.5, а подано план механізму з вказаними напрямками відомих і шуканих прискорень).

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}^n_{CB} + \bar{a}^\tau_{CB}, \qquad (3.5)$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{3-0} = \bar{a}^n_{3-0} + \bar{a}^\tau_{3-0}, \qquad (3.6)$$

де $a_B = a^n_B = \omega_1^2 \cdot l_{AB}$ – відоме за величиною і напрямком (по ланці 1 до центра обертання),

$$a_B = 10^2 \cdot 0{,}2 = 20 \ \ м/с^2;$$

$a^n_{CB} = \omega_2^2 \cdot l_{BC}$ – відоме за величиною і напрямком (по ланці 2 до центра обертання точки *B*),

$$a^n_{CB} = 1{,}65^2 \cdot 0{,}8 = 2{,}2 \ \ м/с^2;$$

a^τ_{CB} – відоме тільки за напрямком ($\perp$ до *BC*);

$a^n_{3-0} = \omega_3^2 \cdot l_{CE}$ – відоме за величиною і напрямком (по ланці 3 до центра обертання точки *E*),

$$a^n_{3-0} = 2{,}6^2 \cdot 0{,}6 = 4{,}07 \ \ м/с^2;$$

a^τ_{3-0} – відоме тільки за напрямком ($\perp$ до *CE*).

Для встановлення масштабу планів швидкостей довжина вектора прискорення a_B приймається $\overline{P_a b} = 100$ *мм*. Масштаб плану прискрень

$$\mu_a = \frac{a_B}{P_a b} = \frac{20{,}0}{100} = 0{,}2 \ \frac{м/с^2}{мм}.$$

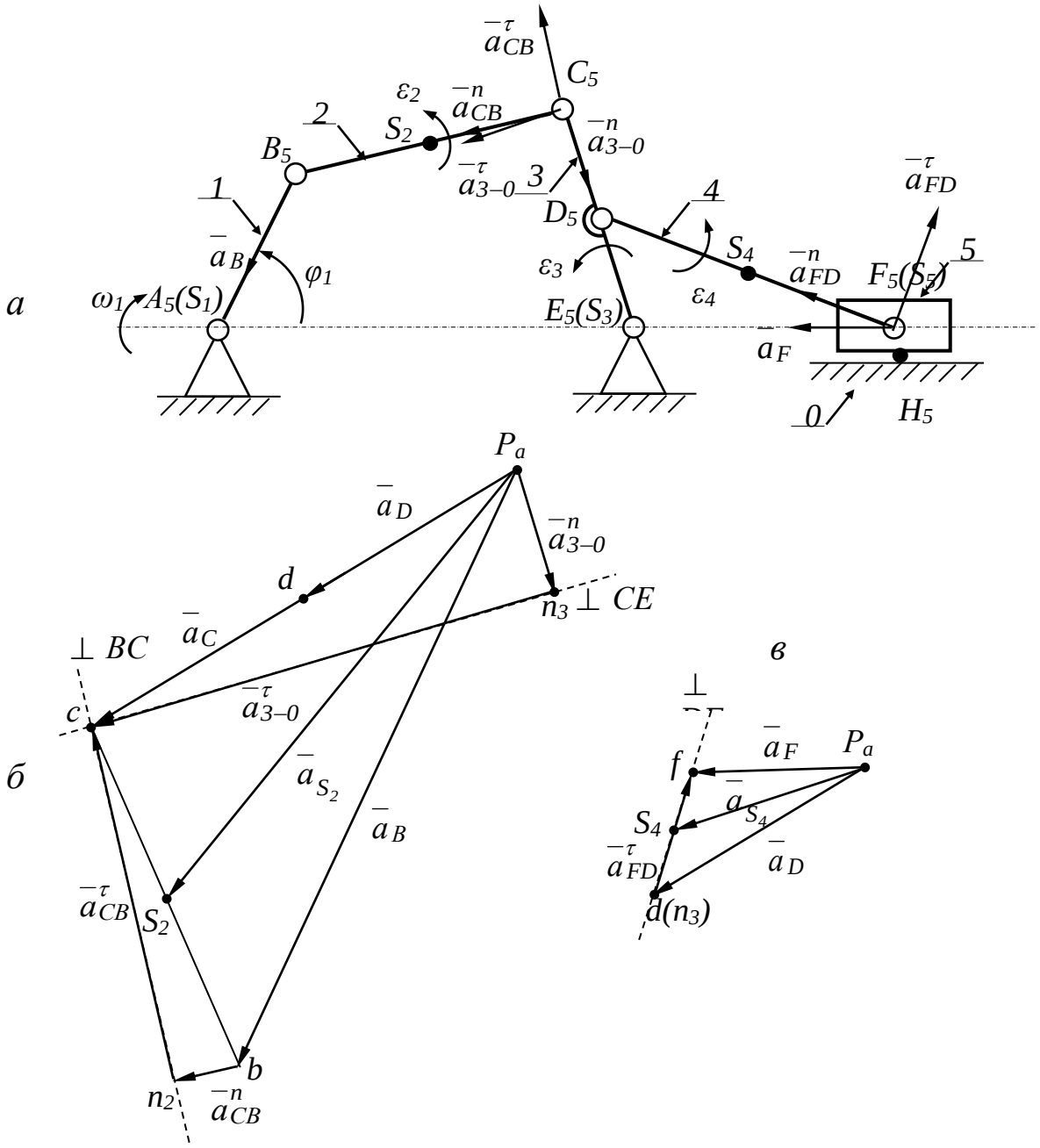


Рис. 3.5. До побудови планів прискорень механізму

Для визначення довжин векторів відомих прискорень на плані їхні величини потрібно віднести до масштабу μ_a

$$\overline{bn_2} = \frac{a^n_{CB}}{\mu_a} = \frac{2{,}2}{0{,}2} = 11 \ мм;$$

$$\overline{P_a n_3} = \frac{a^n_{CB}}{\mu_a} = \frac{4{,}07}{0{,}2} = 20 \ мм.$$

Відкладаючи послідовно з полюса P_a вектори за рівняннями (3.5) і (3.6), отримуємо план прискорень СГ 2-3 (рис. 3.5, б). Для визначення дійсних значень прикорень необхідно довжини векторів шуканих прикорень у міліметрах, виміряних на плані, помножити на масштаб μ_a:

$$a_C = P_a c \cdot \mu_a = 74 \cdot 0{,}2 = 14{,}8 \ м/с^2,$$

$$a_D = P_a d \cdot \mu_a = 37 \cdot 0{,}2 = 7{,}4 \ м/с^2,$$

$$a^\tau_{CB} = n_2 c \cdot \mu_a = 54 \cdot 0{,}2 = 10{,}8 \ м/с^2,$$

$$a^\tau_{3-0} = n_3 c \cdot \mu_a = 72 \cdot 0{,}2 = 14{,}4 \ м/с^2,$$

$$a_{S_2} = P_a S_2 \cdot \mu_a = 82 \cdot 0{,}2 = 16{,}4 \ м/с^2.$$

Кутове прискорення шатуна *2* (спрямоване в бік напрямку вектора прискорення a^τ_{CB})

$$\varepsilon_2 = \frac{a^\tau_{CB}}{l_{BC}} = \frac{10{,}8}{0{,}8} = 13{,}5 \ рад/с^2.$$

Кутове прискорення коромисла *3* (спрямоване в бік напрямку вектора прискорення a^τ_{3-0})

$$\varepsilon_3 = \frac{a^\tau_{3-0}}{l_{CE}} = \frac{14{,}4}{0{,}6} = 24{,}0 \ рад/с^2.$$

При побудуванні плану прискорень СГ 4-5 ураховується, що точка *D* її приєднання до групи 2-3 здійснює обертальний рух з відомим прискоренням a_D, повзун 5 - поступальний рух, шатун 4 – плоский. Для визначення абсолютного прискорення точки *F*

(належить як шатуну 4, так і повзуну 5) складаються векторні рівняння

$$\bar{a}_F = \bar{a}_D + \bar{a}^n_{FD} + \bar{a}^\tau_{FD}; \qquad (3.7)$$

$$\bar{a}_F = \bar{a}_{5-0}, \qquad (3.8)$$

де a_D – відоме за величиною і напрямком (рис. 3.5, б);

$a^n_{FD} = \omega_4^2 \cdot l_{FD}$ – відоме за величиною і напрямком (по ланці 4 до центра обертання точки *D*),

$$a^n_{FD} = 0{,}29^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}08 \ м/с^2;$$

a^τ_{FD} – відоме тільки за напрямком ($\perp$ до *FD*);

$\bar{a}_{5-0}$ – відоме тільки за напрямком руху повзуна.

Для визначення довжини вектора відомого прискорення a^n_{FD} на плані його величину потрібно віднести до масштабу μ_a

$$\overline{bn_3} = \frac{a^n_{FD}}{\mu_a} = \frac{0{,}08}{0{,}2} = 0{,}4 \ мм.$$

З урахуванням малої довжини вектора $\overline{bn_3}$ на плані він буде показаний точкою. Відкладаючи послідовно з полюса P_a вектори за рівняннями (3.7) і (3.8), отримуємо план прискорень структурної групи 4-5 (рис. 3.5, в). Для визначення дійсних значень прикорень необхідно довжини векторів шуканих прикорень у міліметрах, виміряних на плані, помножити на масштаб μ_a:

$$a_F = P_a f \cdot \mu_a = 26 \cdot 0{,}2 = 5{,}2 \ м/с^2,$$

$$a^\tau_{FD} = n_3 f \cdot \mu_a = 18 \cdot 0{,}2 = 3{,}6 \ м/с^2,$$

$$a_{S_4} = P_a S_4 \cdot \mu_a = 29 \cdot 0{,}2 = 5{,}8 \ м/с^2.$$

Кутове прискорення шатуна *4* (спрямоване в бік напрямку вектора прискорення a^τ_{FD})

$$\varepsilon_4 = \frac{a^{\tau}_{FD}}{l_{DF}} = \frac{5{,}8}{0{,}9} = 6{,}44 \ \ рад/с^2 .$$

Основним завданням **силового розрахунку механізму** привода конвеєра є визначення реакцій в усіх кінематичних парах *(A_5, B_5,C_5, D_5, E_5, F_5, H_5)* і врівноважувального моменту $M_{ЗР}$, який потрібно прикласти до початкової ланки (кривошипа *1*) для забезпечення визначених кінематичних параметрів ланок.

Ураховуються всі прикладені до ланок механізму відомі активні навантаження (рис. 3.6).

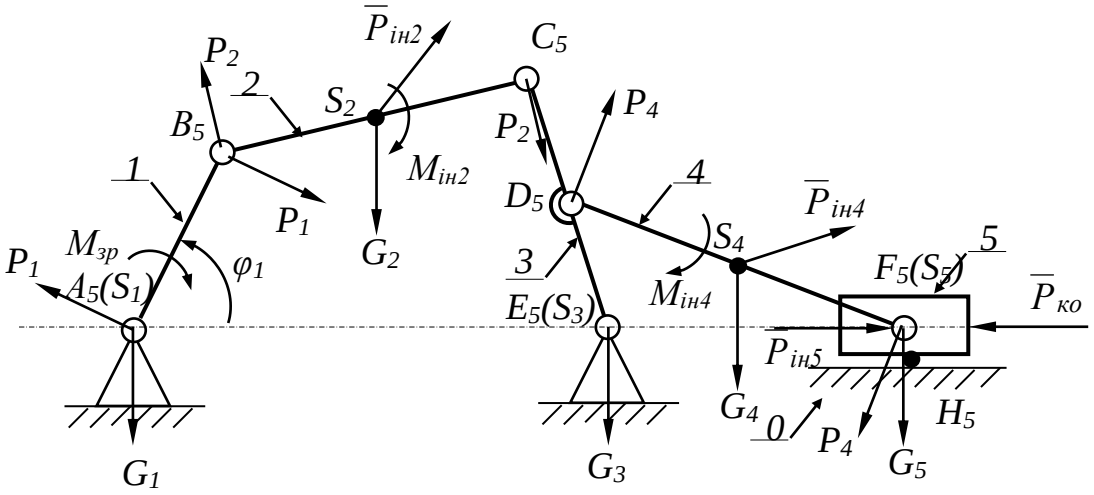


Рис. 3.6. До урахування зовнішніх навантажень, прикладених до ланок механізму привода конвеєра

Сила корисного опору $F_{ко} = 500$ *Н* прикладена до повзуна 5.

Сили ваги рухомих ланок G_1=60 *Н*; G_2=120 *Н*; G_3=90 *Н*; G_4=140 *Н*; G_5=200 *Н* вважаються прикладеними в центрах мас таких ланок (відповідно в точках S_1, S_2 , S_3, S_4, S_5) і спрямовані вниз.

Ураховуються інерційні навантаження. Для розглянутого механізму вектор сил інерції повзуна *5* $\overline{P}_{ін5}$ прикладається в точці $F_5(S_5)$ і спрямовується протилежно вектору прискорення $\overline{a}_F$.

Вектор сил інерції шатуна *4* $\overline{P}_{ін4}$ прикладається в точці S_4 і спрямовується протилежно вектору прискорення $\overline{a}_{S_4}$. Величина $P_{ін4}$

$$P_{ін4} = m_4 \cdot a_{S_4} = \frac{G_4}{g} \cdot a_{S_4} = \frac{140}{9{,}81} \cdot 5{,}8 = 83 \ Н .$$

Момент сил інерції шатуна *4* $\overline{M}_{ін4}$ спрямовується протилежно кутовому прискоренню ε_4. Величина $M_{ін4}$

$$M_{ін4} = I_{S_4} \cdot \varepsilon_4 = 0{,}95 \cdot 6{,}44 = 6{,}12 \ Н \cdot м .$$

$$P_{ін5} = m_5 \cdot a_F = \frac{G_5}{g} \cdot a_F = \frac{200}{9{,}81} \cdot 5{,}2 = 106 \ Н .$$

При цьому заздалегідь момент сил інерції $M_{ін2}$ потрібно подати як пару сил P_4 з плечем l_{DF}

$$P_4 = \frac{M_{ін4}}{l_{DF}} = \frac{6{,}12}{0{,}9} = 7 \ Н .$$

Вектор сил інерції шатуна *2* $\overline{P}_{ін2}$ прикладається в точці S_2 і спрямовується протилежно вектору прискорення $\overline{a}_{S_2}$. Величина $P_{ін2}$

$$P_{ін2} = m_2 \cdot a_{S_4} = \frac{G_2}{g} \cdot a_{S_2} = \frac{120}{9{,}81} \cdot 16{,}4 = 201 \ Н .$$

Момент сил інерції шатуна *4* $\overline{M}_{ін2}$ спрямовується протилежно кутовому прискоренню ε_2. Величина $M_{ін2}$

$$M_{ін2} = I_{S_2} \cdot \varepsilon_2 = 0{,}64 \cdot 13{,}5 = 8{,}64 \ Н \cdot м .$$

При цьому заздалегідь момент сил інерції $M_{ін2}$ потрібно подати як пару сил P_2 з плечем l_{AB}

$$P_2 = \frac{M_{ін2}}{l_{AB}} = \frac{8{,}64}{0{,}8} = 11 \ Н .$$

Шуканий врівноважувальний момент $M_{ЗР}$ прикладається до початкової ланки, який потрібно подати як пару сил P_1 з плечем l_{AB}

$$P_1 = \frac{M_{ЗР}}{l_{AB}}.$$

Силовий розрахунок механізму починається з найвіддаленішої від початкової ланки *1* СГ *4*-5. Для цього вона (рис. 3.7) умовно від'єднується від механізму (шатун *4* від коромисла 3, а стійка *0* від повзуна *5*). Дію відкинутих ланок заміняємо реакціями $\overline{R}_{0-5}$ (лінія дії проходить через точку *F* і спрямована перпендикулярно до осі руху повзуна 5) і $\overline{R}_{3-4}$ (прикладена в точці *D*). При цьому реакцію $\overline{R}_{3-4}$ умовно розкладаємо на нормальну $\overline{R}^n_{3-4}$ (направлена по шатуну 4) і тангенціальну $\overline{R}^\tau_{3-4}$ (направлена перпендикулярно до шатуна 4 попередньо вниз) складові – $\overline{R}_{34} = \overline{R}^n_{3-4} + \overline{R}^\tau_{3-4}$.

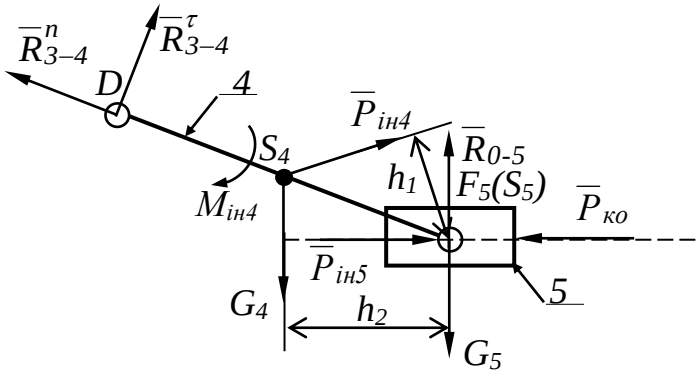


Рис. 3.7. До силового розрахунку структурної групи 4-5

Для визначення складової R^τ_{3-4} складається рівняння рівноваги, у якому ураховуються інерційні навантаження – $\sum M_F = 0$:

$$-R^\tau_{3-4} \cdot l_{DF} + G_4 \cdot h_2 - \frac{M_{ін4}}{\mu_l} - P_{ін4} \cdot h_1 = 0,$$

звідки (плечі відповідних сил вимірюються на схемі в міліметрах)

$$R^{\tau}_{3-4} = \frac{-\frac{M_{ін4}}{\mu_l} - P_{ін4} \cdot h_1 + G_4 \cdot h_2}{l_{DF}} = \frac{-\frac{6{,}12}{0{,}02} - 83 \cdot 14 + 140 \cdot 21}{45} = 25 \ H$$

Для визначення невідомих нормальної складової R^{n}_{3-4} і реакції R_{0-5} відповідно до принципу Даламбера складається векторне рівняння, у якому враховуються всі вказані на рис. 3.7 сили, що діють на ланки СГ 4-5:

$$\overline{R}^{n}_{3-4} + \overline{R}^{\tau}_{3-4} + \overline{G}_4 + \overline{P}_{ін4} + \overline{P}_{ін5} + \overline{G_5} + \overline{P}_{ко} + \overline{R}_{0-5} = 0. \qquad (3.9)$$

Для зручності побудування плану сил складається табл. 3.1, у першому рядку якої вказуються всі відомі за величиною сили з рівняння (3.9), а у другому їхні величини.

Задається довжина вектора найбільшої за величиною сили ($P_{ко} = 500$ *Н*) $\overline{P}_{ко} = 100$ *мм*. Тоді масштаб плану сил

$$\mu_P = \frac{P_{ко}}{\overline{P}_{ко}} = \frac{500}{100} = 5{,}0 \ H/мм.$$

Таблиця 3.1

Сили, що діють на ланки групи 4-5

Позначення сили	R^{τ}_{3-4}	G_4	$P_{ін4}$	$P_{ін5}$	G_5	$P_{ко}$
Величина, *Н*	24	140	83	106	200	500
Довжина вектора сили на плані сил, *мм*	5	28	17	21	40	100

Довжини векторів інших відомих сил знаходяться діленням їхніх величин на масштаб μ_P і заносяться в третій рядок табл. 3.1.

В обраному масштабі μ_P будуємо (починаючи з $\overline{R}^{\tau}_{3-4}$) за рівнянням (3.9) відповідний план сил структурної групи 4-5 (рис. 3.8, *а*). На ньому довжина і напрямок шуканих реакцій визначаються відомими за напрямком і умовою замкнення ліній дії реакцій $\overline{R}^{n}_{3-4}$ і $\overline{R}_{0-5}$. З плану сил величини реакцій R^{n}_{3-4} і R_{0-5}

визначаються як добуток довжин відповідних векторів на величину масштабу плану сил μ_P

$$R_{3-4} = 65 \cdot 5{,}0 = 325 \ H,$$

$$R_{0-5} = 80 \cdot 5{,}0 = 400 \ H.$$

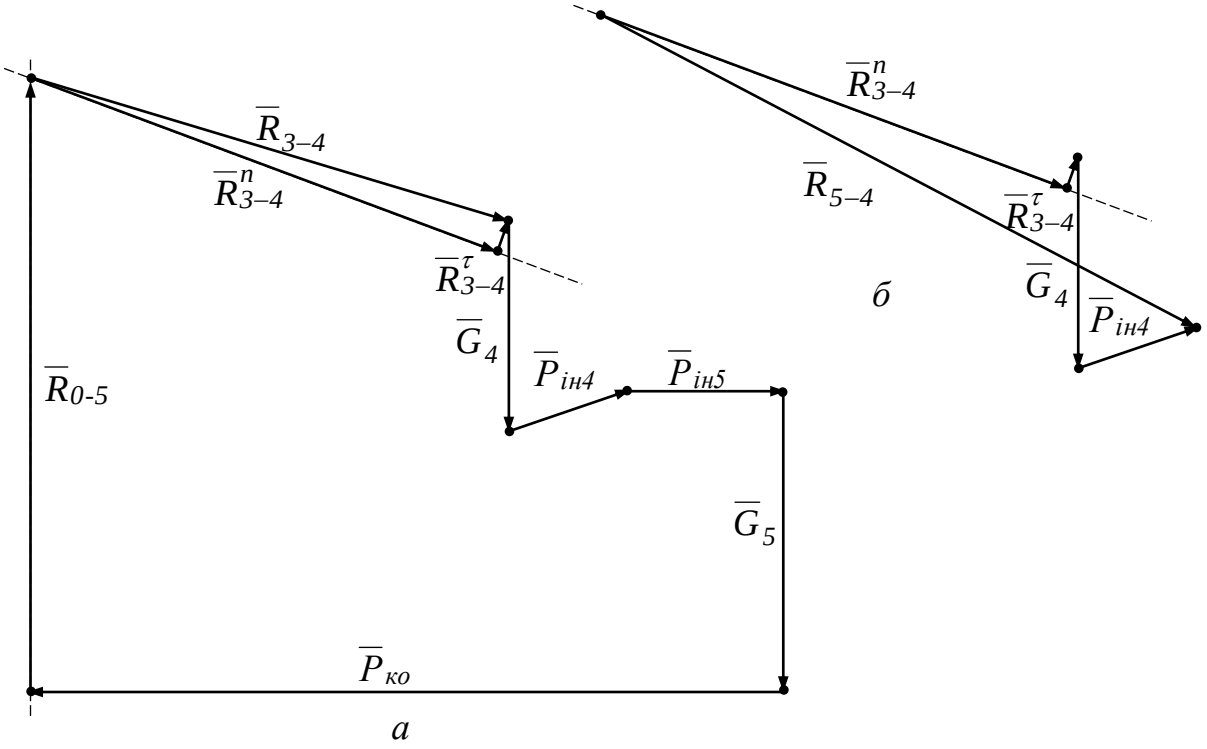


Рис. 3.8. Плани сил структурної групи 4-5

Для визначення реакції у внутрішній КП – шарнірі F_5 – одну з ланок групи (ланку 5) умовно від'єднуємо, а її дію на ланку 4 заміняємо відповідною реакцією $\overline{R}_{5-4}$. Для такої системи сил складаємо рівняння рівноваги у формі $\sum \overline{P} = 0$. Маємо

$$\overline{R}^{n}_{3-4} + \overline{R}^{\tau}_{3-4} + \overline{G}_4 + \overline{P}_{ін4} + \overline{R}_{5-4} = 0. \qquad (3.10)$$

Відповідно до рівняння (3.10) побудований план сил (рис. 3.8, *б*), замикальний вектор якого визначає реакцію $\overline{R}_{5-4}$. Величина реакції R_{5-4} – добуток довжини вектора $\overline{R}_{5-4}$ на величину масштабу плану сил μ_P

$$R_{5-4} = 88 \cdot 5{,}0 = 440 \ H.$$

Наступним етапом є силовий розрахунок СГ 2-3. Для його здійснення вона умовно від'єднується від механізму (рис. 3.9). Дію відкинутих ланок заміняємо відповідними реакціями. Відкинутий від коромисла 3 шатун 4 – реакцією $\overline{R}_{4-3} = -\overline{R}_{3-4}$ (прикладена в точці *D*, спрямована протилежно реакції $\overline{R}_{3-4}$ і за величиною дорівнює R_{3-4}). Відкинуту від коромисла 3 стійку 0 - реакцією $\overline{R}_{0-3}$ (прикладена в точці *E*). При цьому реакцію $\overline{R}_{0-3}$ умовно розкладаємо на нормальну $\overline{R}^{n}_{0-3}$ (направлена по коромислу 3) і тангенціальну $\overline{R}^{\tau}_{0-3}$ (направлена перпендикулярно коромислу 3) складові - $\overline{R}_{0-3} = \overline{R}^{n}_{0-3} + \overline{R}^{\tau}_{0-3}$.

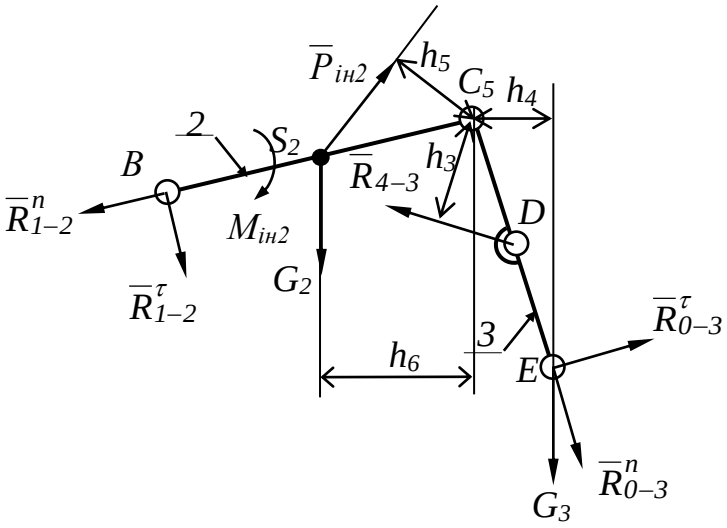


Рис. 3.9. До силового розрахунку структурної групи 2-3

Відкинутий від шатуна 2 кривошип 1 – реакцією $\overline{R}_{1-2}$ (прикладена в точці *B*). Реакцію $\overline{R}_{1-2}$ умовно розкладаємо на нормальну $\overline{R}^{n}_{1-2}$ (направлена по шатуну 2) і тангенціальну $\overline{R}^{\tau}_{1-2}$ (направлена перпендикулярно шатуну 2) складові – $\overline{R}_{1-2} = \overline{R}^{n}_{1-2} + \overline{R}^{\tau}_{1-2}$.

Для визначення складової R^{τ}_{0-3} складається рівняння рівноваги ланки 3 – $\sum M_C = 0$:

$$R^{\tau}_{0-3} \cdot l_{CE} - G_3 \cdot h_4 - R_{4-3} \cdot h_3 = 0,$$

звідки (плечі відповідних сил вимірюються на схемі в міліметрах)

$$R_{0-3}^{\tau} = \frac{R_{4-3} \cdot h_3 + G_3 \cdot h_3}{l_{CE}} = \frac{325 \cdot 10 + 90 \cdot 13}{30} = 148 \ H .$$

Для визначення складової R_{1-2}^{τ} складається рівняння рівноваги ланки $2 - \sum M_C = 0$:

$$R_{1-2}^{\tau} \cdot l_{BC} + G_2 \cdot h_6 - \frac{M_{ін2}}{\mu_l} - P_{ін2} \cdot h_5 = 0,$$

звідки (плечі відповідних сил вимірюються на схемі в міліметрах)

$$R_{1-2}^{\tau} = \frac{\frac{M_{ін2}}{\mu_l} + P_{ін2} \cdot h_5 - G_2 \cdot h_6}{l_{BC}} = \frac{\frac{8{,}64}{0{,}02} + 201 \cdot 13 - 120 \cdot 18}{40} = 23 \ H .$$

Для визначення невідомих нормальних складових реакцій R_{0-3}^{n} і R_{1-2}^{n} відповідно до принципу Даламбера складається векторне рівняння, у якому враховуються всі вказані на рис. 3.9 сили, що діють на ланки групи 2-3:

$$\overline{R}_{1-2}^{n} + \overline{R}_{1-2}^{\tau} + \overline{G}_2 + \overline{P}_{ін2} + \overline{R}_{4-3} + \overline{G_3} + \overline{R}_{0-3}^{\tau} + \overline{R}_{0-3}^{n} = 0 . \qquad (3.11)$$

Для зручності побудування плану сил складається табл. 3.2, у першому рядку якої вказуються всі відомі за величиною сили з рівняння (3.11), а у другому їхні величини.

Довжини векторів інших відомих сил знаходяться діленням їхніх величин на масштаб $\mu_P = 3$ *Н/мм* і заносяться в третій рядок табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Сили, що діють на ланки групи 2-3

Позначення сили	R_{1-2}^{τ}	G_2	$P_{ін2}$	R_{4-3}	G_3	R_{0-3}^{τ}
Величина, *Н*	*23*	*120*	*201*	*325*	*90*	*148*
Довжина вектора сили на плані сил, *мм*	*8*	*40*	*67*	*108*	*30*	*49*

В обраному масштабі μ_P будуємо (починаючи з $\overline{R}^{\tau}_{1-2}$) за рівнянням (3.11) відповідний план сил структурної групи 2-3 (рис. 3.10, а). На ньому довжина і напрямок шуканих реакцій визначаються відомими за напрямком і умовою замкнення ліній дії реакцій $\overline{R}^{n}_{1-2}$ і $\overline{R}^{n}_{0-3}$.

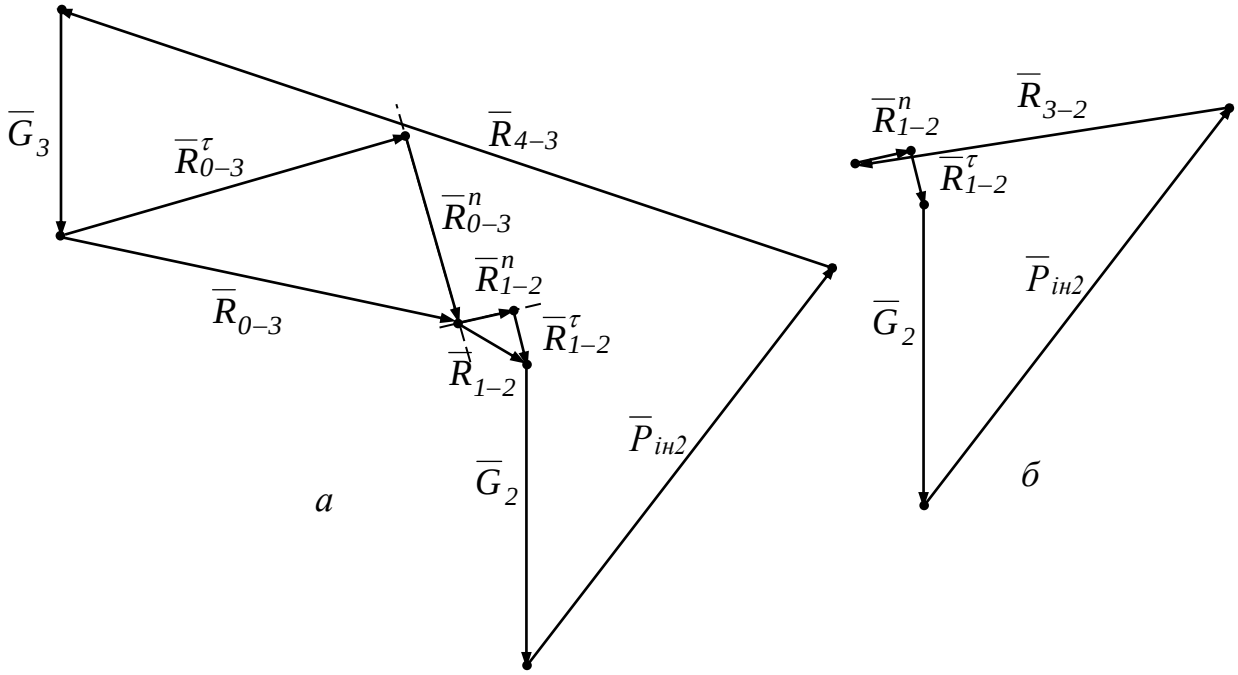


Рис. 3.10. Плани сил структурної групи 2-3

З плану сил величини реакцій R_{1-2} і R_{0-3} визначаються як добуток довжин відповідних векторів на величину масштабу плану сил μ_P:

$$R_{1-2} = 10 \cdot 3{,}0 = 30 \ \ H,$$

$$R_{0-3} = 52 \cdot 3{,}0 = 156 \ \ H.$$

Для визначення реакції у внутрішній КП - шарнірі C_5 – одну з ланок групи (ланку 3) умовно від'єднуємо, а її дію на ланку 2 заміняємо відповідною реакцією $\overline{R}_{3-2}$. Для такої системи сил складаємо рівняння рівноваги у формі $\sum \overline{P} = 0$. Маємо

$$\overline{R}^{n}_{1-2} + \overline{R}^{\tau}_{1-2} + \overline{G}_2 + \overline{P}_{ін2} + \overline{R}_{3-2} = 0. \qquad (3.12)$$

Відповідно до рівняння (3.12) побудований план сил (рис. 3.10, б), замикальний вектор якого визначає реакцію $\overline{R}_{3-2}$. Величина реакції R_{3-2}- добуток довжини вектора $\overline{R}_{3-2}$ на величину масштабу плану сил μ_P

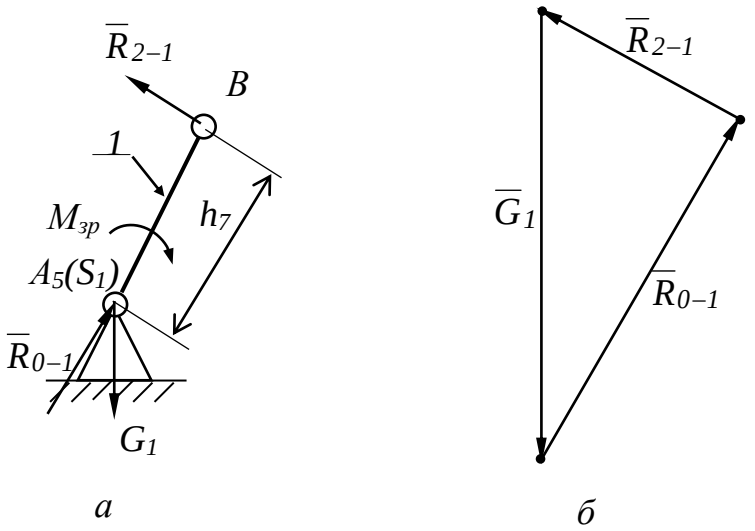
$$R_{3-2} = 50 \cdot 3{,}0 = 150 \ H .$$

На останньому етапі виконується **силовий розрахунок початкової ланки**. Він передбачає визначення величини врівноважувального моменту M_{3P}, а також величини і напрямку реакції в шарнірі A_5 $\overline{R}_{01}$, що утворюються початковою ланкою 1 і нерухомою стійкою 0.

У цьому прикладі для визначення величини M_{3P} (моменту, який потрібно прикласти до початкової ланки з метою врівноваження в русі дії всіх ланок механізму і забезпечення потрібних законів руху) розглядається тільки механізм 1-го класу, а дію відкинутої групи 2-3 заміняють відповідною реакцією $\overline{R}_{21}$ ($\left|\overline{R}_{21}\right| = \left|\overline{R}_{12}\right|$ і їй протилежна за напрямком).

Відповідна розрахункова схема показана на рис. 3.11, а. З неї видно, що

$$M_{3P} = R_{21} \cdot h_7 \cdot \mu_l = 30 \cdot 20 \cdot 0{,}02 = 12 \ H \cdot м .$$



а *б*

Рис. 3.11. Силовий розрахунок початкової ланки

Для визначення реакції $\overline{R}_{01}$, що характеризує дію механізму на стійку, умовно відкидаємо стійку 0 і складаємо рівняння рівноваги у формі $\sum \overline{P} = 0$:

$$\overline{R}_{2-1} + \overline{G}_1 + \overline{R}_{0-1} = 0. \qquad (3.13)$$

План сил, побудований за рівнянням (3.13), показаний на рис. 3.11, б. З нього величина реакції R_{01} визначається як добуток довжини вектора $\overline{R}_{01}$ на масштаб плану сил $\mu_P = 1\ Н/мм$.

З метою **перевірки правильності силового розрахунку механізму** врівноважувальний момент на початковій ланці $1\ M'_{ЗР}$ визначається методом, що не передбачає визначення реакцій у кінематичних парах – за допомогою положення, що ґрунтується на теоремі М. Є. Жуковського (дод. 1).

На рис. 3.12 подано збільшений план швидкостей механізму (рис. 3.5, б, в) з перенесеними в однойменні точки з рис. 3.7 векторами сил, які повернуті на $90°$ (у цьому випадку за годинниковою стрілкою).

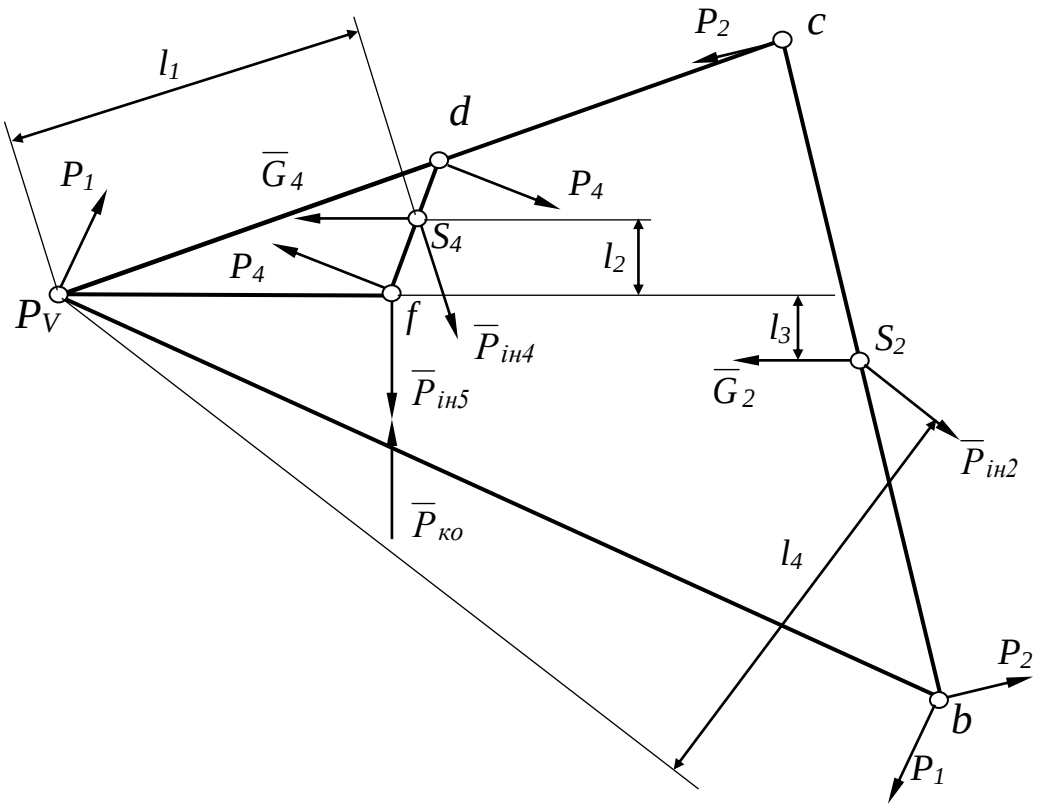


Рис. 3.12. До визначення врівноважувального моменту $M'_{ЗР}$

Рівняння моментів показаних на рис. 3.12 сил відносно полюса плану швидкостей $\sum M_{P_V} = 0$:

$$-P_1 \cdot P_V b - P_4 \cdot df - P_{ін4} \cdot l_1 + G_4 \cdot l_2 + (F_{ко} - P_{ін5}) \cdot P_V f + \\ + P_2 \cdot bc - G_2 \cdot l_3 - P_{ін2} \cdot l_4 = 0.$$

Розв'язання рівняння відносно сил P_1:

$$P_1 = \frac{-P_4 \cdot df - P_{ін4} \cdot l_1 + G_4 \cdot l_2 + (F_{ко} - P_{ін5}) \cdot P_V f + P_2 \cdot bc - G_2 \cdot l_3 - P_{ін2} \cdot l_4}{P_V b},$$

де $P_V b$, df, l_1, l_2, $P_V f$, bc, l_3, l_4 – виміряні на рис. 3.12 в міліметрах довжини відповідних відрізків (плечей сил відносно P_V).

$$P_1 = \frac{-7 \cdot 15 - 83 \cdot 44 + 140 \cdot 12 + (500 - 106) \cdot 43 + 11 \cdot 90 - 120 \cdot 10 - 201 \cdot 54}{128} = \\ = 29{,}7 \ Н.$$

Врівноважувальний момент, визначений за допомогою цього положення,

$$M'_{зр} = P_1 \cdot l_{AB} = 29{,}7 \cdot 0{,}4 = 11{,}88 \ Н \cdot м.$$

Визначаємо розходження між двома значеннями врівноважувального моменту: $M_{ЗР} = 12 \ Нм$ і $M'_{ЗР} = 11{,}88 \ Нм$. Воно складає

$$\delta = \frac{12{,}0 - 11{,}88}{12{,}0} \cdot 100 \ \% = 1{,}0 \ \%.$$

Розходження (похибка) знаходиться в межах допустимих значень (не перевищує $5 \ \%$).

Для самостійного виконання дослідження механізму привода конвеєра вихідними даними є задане викладачем тризначне число (наприклад «679»), за яким студент з табл. 3.3 вибирає числові значення всіх наданих у ній параметрів. Для

цього необхідно два рази записати тризначний варіант і під кожною з цифр необхідно записати літери: **а, б, в, г, д, е**.

6	7	9	6	7	9
а	б	в	г	д	е

Тоді цифра над літерою «а» вказує, що дані з рядка «а» потрібно обирати за варіантом 6 (у цьому прикладі – 6), рядка «б» – за варіантом 7, рядка «в» – за варіантом 9, рядка «г» – за варіантом 6, рядка «д» – за варіантом 7, рядка «е» – за варіантом 9.

Таблиця 3.3

Вихідні дані

Параметр		**Позначення**	**Варіант**				
			0	**1**	**2**	**3**	**4**
а	Кутова швидкість початкової ланки, рад/с	ω_1	8	10	12	14	16
б	Довжина початкової ланки *1*, м	l_{AB}	0,35	0,33	0,37	0,39	0,4
в	Співвідношення довжин ланок *2* і *1*	l_{BC} / l_{AB}	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2
г	Довжина ланки *3*, м	l_{CE}	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65
д	Співвідношення довжин ланок *4* і *3*	l_{DF} / l_{CE}	1,45	1,5	1,55	1,6	1,65
е	Координата розрахункового положення механізму, град	φ_1	0	30	60	90	120
а	Вага ланки *5*, Н	G_5	150	160	170	180	190

Продовження табл. 3.3

Параметр		Позначення	Варіант				
			5	**6**	**7**	**8**	**9**
а	Кутова швидкість початкової ланки, рад/с	ω_1	9	11	13	15	17
б	Довжина початкової ланки *1*, м	l_{AB}	0,42	0,34	0,38	0,43	0,38
в	Співвідношення довжин ланок *2* і *1*	l_{BC} / l_{AB}	1,85	1,95	2,05	2,15	1,75
г	Довжина ланки *3*, м	l_{CE}	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65
д	Співвідношення довжин ланок *4* і *3*	l_{DF} / l_{CE}	1,45	1,5	1,55	1,6	1,65
е	Координата розрахункового положення механізму, град	φ_1	150	180	0	30	60
а	Вага ланки *5*, Н	G_5	200	165	175	185	195

Примітка. Величину сили корисного опору $P_{к.о.}$ вибирати за графіком на рис. 3.13 залежно від координати розрахункового положення механізму φ_1.

Розрахункове положення механізму визначається заданою в табл. 3.3 величиною узагальненої координати φ_1 (рис. 3.12).

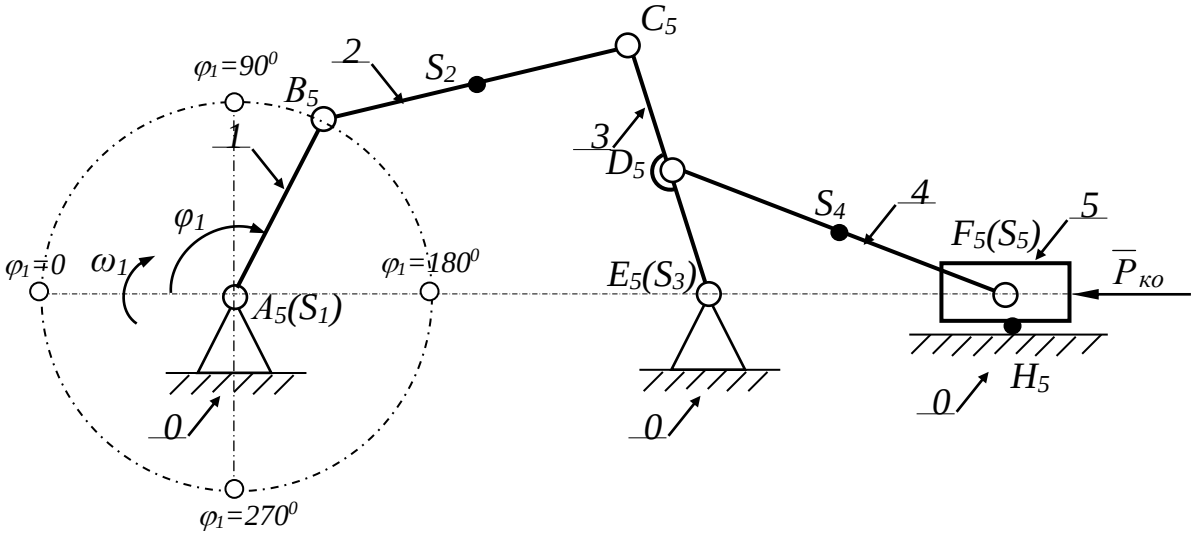


Рис. 3.12. До визначення розрахункового механізму приводу конвеєра

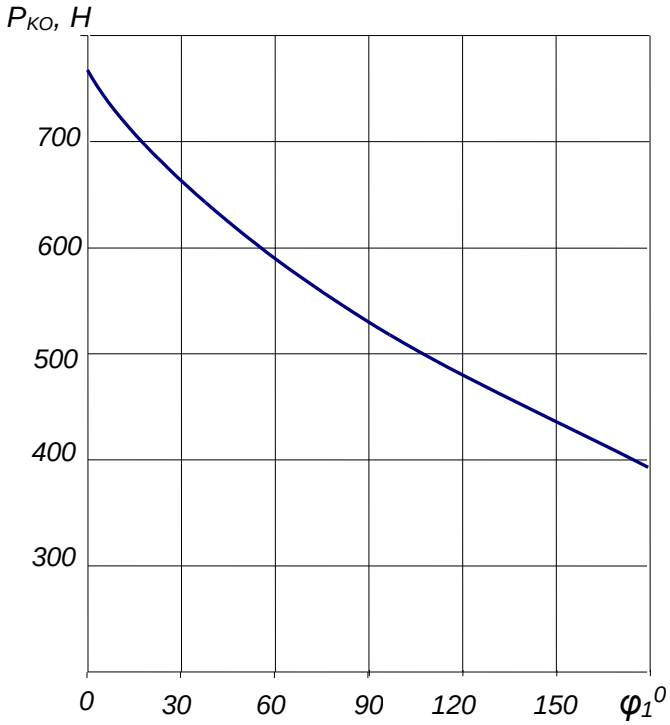


Рис. 3.14. Графік залежності прикладеної до повзуна привода конвеєра сили $P_{ко}$ від розрахункової узагальненої координати φ_1

При формуванні комплексу вихідних даних (відповідно до вказаних у прикладі) слід ураховувати:

1. Центри мас ланок 1, 2, 3, 4, 5 розташовані в точках S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. Урівноваженням ланок *1* і *3* центри мас S_1 і S_3 перенесені на стійку (відповідно в точки *A* і *E*). Положення центрів мас S_2 і S_4 прийняті на серединах довжин шатунів 2, 4. Точка S_5 збігається з точкою *F*.

2. Точка *D* (приєднання ланки 4 до ланки 3) розташовується на середині довжини ланки 3.

3. Вага ланок 1, 2, 3, 4 G_1, G_2, G_3, G_4 визначається з урахуванням їхніх довжини і величини погонної ваги $q=150$ *Н/м* ($G_i=l_i \cdot q$).

4. Моменти інерції мас ланок 2 і 4 відносно осей, що проходять через центри мас, – $I_{S_2} = m_2 \cdot l_{BC}^2 / 12$, $I_{S_4} = m_4 \cdot l_{DF}^2 / 12$ (відповідно маси ланок $m_2 = G_2 / 9{,}81$, $m_4 = G_4 / 9{,}81$).

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Кіницький Я. Т. Теорія механізмів і машин. Київ: Видавництво «Наукова думка», 2002. 660 с.

2. Мороз В. І., Братченко О. В. Основи конструювання і САПР: навч. посіб. Харків: Нове слово, 2003. 193 с.

3. Мороз В. І., Братченко О. В., Павшенко А. В. Теорія механізмів і машин: Дослідження та проектування механізмів типових технічних засобів залізничного транспорту: навч. посіб. Харків: УкрДАЗТ, 2013. 156 с.

4. Мороз В. І., Братченко О. В., Астахова К. В. Основи конструювання і САПР технічних засобів залізничного транспорту. Довідково-допоміжні матеріали до самостійного вивчення теоретичного курсу та виконання курсового проекту: навч. посіб. Харків: УкрДАЗТ, 2010. 136 с.

5. Мороз В. І., Братченко О. В., Логвіненко О. А. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи з дисципліни «Теорія механізмів і машин» для студентів механіко-енергетичного факультету спеціальності «Залізничний транспорт». Харків: УкрДУЗТ, 2020. 49 с.

6. Павловський М. А. Теоретична механіка. Київ: Видавництво «Техніка», 2002. 511 с.

7. Черниш О. М. Теоретична механіка: навч. посіб. Київ: Центр навчальної літератури, 2018. 760 с.

8. Мороз В. І., Братченко О. В., Громов В. І. Конспект лекцій з дисципліни теорія механізмів і машин до змістовного модуля «Основи динамічного удосконалення машин і механізмів» для студентів спеціальностей «Залізничний транспорт» та «Галузеве машинобудування». Харків: УкрДУЗТ, 2021. 55 с.

9. Гуліда Е. М., Дзюба Л. Ф., Ольховий І. М. Прикладна механіка. Львів: Світ, 2007. 384 с.

10. Кореняко О. С. Теорія механізмів і машин. Київ: Вища школа, 1987. 208 с.

11. Вірник М. М., Булига Ю. В. Курсовое проектування з теорії механізмів і машин: навч. посіб. Вінниця: ВНТУ, 2009. 213 с.

12. Zakhovaiko O. P. Theory of mechanisms and machines. In 2 parts. Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2020. Part 1.: Classification and analysis of mechanisms. 188 p.

13. Kinematic design of machines and mechanisms / Homer D. Eckhardt. New York etc.: McGraw-Hill, 1998. 621 p.

Додаток 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ВИЗНАЧЕННЯ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Теоретична механіка – *наука, у якій вивчаються загальні закони механічного руху та механічної взаємодії матеріальних тіл.*

В основі теоретичної механіки лежать закони, що називаються законами класичної механіки або законами Ньютона, встановлені шляхом узагальнення результатів великої кількості експериментів і спостережень. Їхня справедливість перевірена багатовіковою практичною діяльністю людини.

Для вивчення всієї різноманітності механічних явищ теоретична механіка узагальнена в три розділи, що розглядаються в сукупності: статика, кінематика і динаміка [6, 7].

Основні поняття статики

Статика – розділ теоретичної механіки, у якому вивчаються сили, методи перетворення систем сил на еквівалентні та встановлюються умови рівноваги сил, прикладених до твердого тіла.

Основним завданням статики є дослідження умов рівноваги зовнішніх сил, прикладених до абсолютно твердого тіла.

Механічна взаємодія – взаємодія матеріальних тіл, що змінюють або намагаються змінити характер їхнього механічного руху чи форми (*створити деформацію*).

Матеріальна точка – фізичне тіло певної маси, розмірами якого при вивченні його руху можна знехтувати.

Система матеріальних точок (*механічна система, тверде тіло*) – сукупність матеріальних точок, у якій положення і рух кожної точки залежать від положення і руху інших точок цієї системи.

Абсолютно тверде тіло – тіло, у якому відстані між двома довільними його точками залишаються незмінними.

Вважаючи тіла абсолютно твердими, не враховують деформацій, що виникають у реальних тілах.

Кінематичний стан тіла – стан спокою або руху певного характеру, у якому може знаходитися тіло.

Сила – міра механічної взаємодії тіл, що визначає інтенсивність і напрямок цієї взаємодії.

Сила характеризується (рис. Д.1.1):

- ❖ чисельним значенням (*модулем*);
- ❖ напрямком;
- ❖ точкою прикладання.

Пряма, по якій скерована сила, називається *лінією дії сили*.

Одиницею вимірювання сили в системі СІ є ньютон (Н).

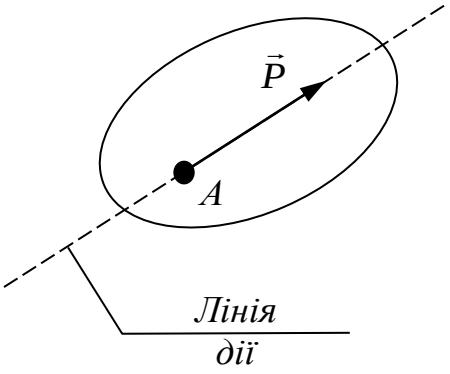


Рис. Д.1.1

Система сил (рис. Д.1.2) – сукупність сил, діючих на матеріальну точку:

$$\{\vec{P}_1,\vec{P}_2,.....,\vec{P}_n\} \text{ або } \{\vec{P}_n\},$$

де $n = 1,2,.....,k$.

Еквівалентні системи сил – дві системи сил, кожну з яких можна замінити іншою, не порушуючи кінематичного стану твердого тіла:

$$\{\vec{N}_1,\vec{N}_2,.....,\vec{N}_k\} \sim \{\vec{P}_1,\vec{P}_2,.....,\vec{P}_n\}.$$

Рівнодійна системи сил – сила, еквівалентна системі сил

$$\vec{R} \sim \{\vec{P}_1,\vec{P}_2,.....,\vec{P}_n\}.$$

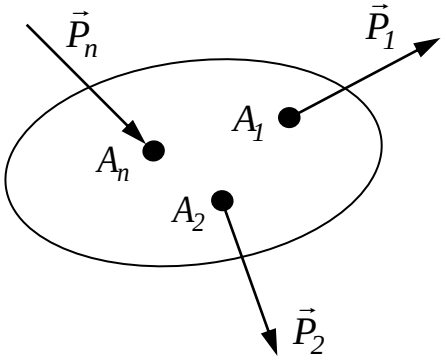
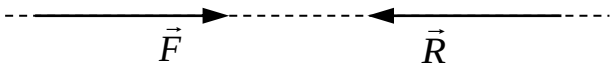


Рис. Д.1.2

Врівноважувальна сила – сила, рівна за модулем рівнодійній силі та скерована вздовж її лінії дії в протилежний бік:

$$|P| = |R|; \quad \vec{P} = -\vec{R}.$$



Система взаємно врівноважувальних сил – система сил, під дією якої тіло знаходиться і рівновазі (*ця система сил еквівалентна нулю*):

$$\left\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_n\right\} \sim \vec{R} \sim 0.$$

Сили, що діють на механічну систему, поділяють так:

- **внутрішні -** сили взаємодії між точками (*тілами*) певної системи;
- **зовнішні -** сили, що діють на матеріальні точки (*тіла*) певної системи з боку матеріальних точок (*тіл*), що цій системі не належать.

Зосереджена сила (рис. Д.1.3, а) – сила ($\vec{Q}$), прикладена до тіла в будь-якій одній його точці.

Розподілені сили – сили (q), що діють на всі точки тіла (*масові, об'ємні*) або на всі точки визначеної частини поверхні тіла (*поверхневі*). Як приклад на рис. Д.1.3, б показана дія розподілених сил по виділеній довжині тіла l.

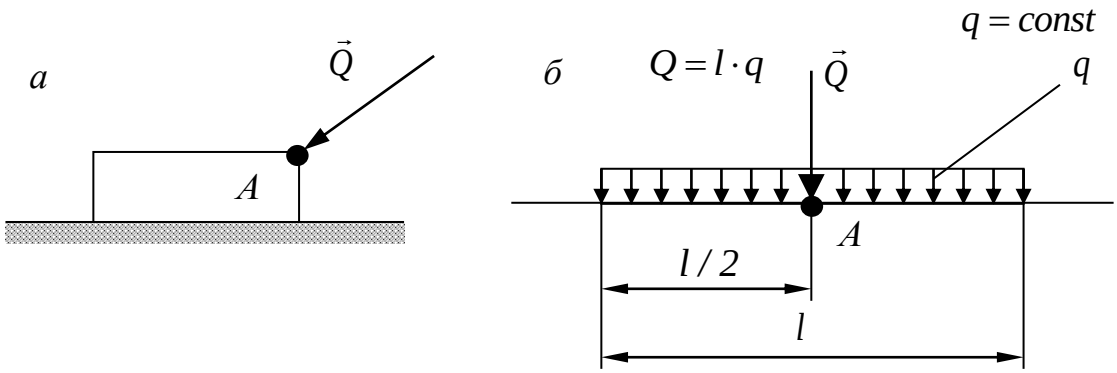


Рис. Д.1.3

Аксіоми статики

Відображують властивості сил, діючих на тіло.

1. Аксіома інерції (закон Галілея). Під дією взаємно врівноважених сил матеріальна точка знаходиться в стані спокою або рухається прямолінійно та рівномірно.

2. Аксіома рівноваги двох сил. Дві сили, прикладені до твердого тіла (рис. Д.1.4), взаємно врівноважуються тільки в тому випадку, якщо вони рівні за модулем і спрямовані вздовж однієї прямої в протилежні боки.

$$\{P_1, P_2\} \sim 0, \quad \vec{P}_1 = -\vec{P}_2, \quad |P_1| = |P_2|.$$

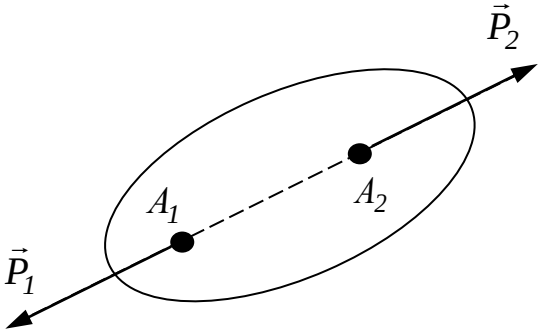


Рис. Д.1.4

3. Аксіома приєднання та вилучення врівноважених сил. Дія системи сил на тверде тіло не зміниться, якщо до неї приєднати або ж вилучити систему взаємно врівноважених сил.

Наслідок: *не порушуючи стану абсолютно твердого тіла, силу можна переносити вздовж її лінії дії в буд-яку точку, зберігаючи незмінними її модуль і напрямок. Тобто сила, прикладена до абсолютно твердого тіла, є* ***ковзним вектором.***

4. Аксіома паралелограма сил. Рівнодійна двох сил, які перетинаються в одній точці (рис. Д.1.5), прикладена в точці їх перетину і відображується діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як сторонах.

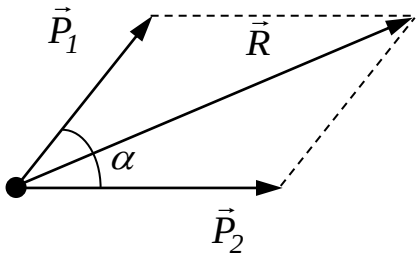


Рис. Д.1.5

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2, \quad R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \cos\alpha}.$$

5. Аксіома рівності дії та протидії. Кожній дії відповідає рівна за модулем і протилежна за напрямком протидія.

6. Аксіома збереження рівноваги сил, прикладених до тіла, що деформується, при його твердінні (принцип твердіння). Рівновага сил, прикладених до тіла, що деформується, зберігається при його твердінні.

Наслідок: *умови рівноваги сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, мають виконуватися і для сил, прикладених до тіла, що деформується.*

7. Аксіома звільнення тіла від зв'язків. Не змінюючи стану тіла, будь-яке тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути зв'язки, а їхню дію замінити реакціями.

Зв'язки та їхні реакції

Вільне тіло – тверде тіло, на переміщення якого в просторі не накладено ніяких обмежень.

Зв'язки – тіла, що обмежують рух інших тіл у просторі.

Невільне тіло – тіло, переміщення в просторі якого обмежено зв'язками.

Реакція зв'язку – сила, з якою зв'язок діє на тіло.

Реакція зв'язку завжди скерована протилежно тому напрямку, у якому зв'язок протидіє можливому руху тіла.

Активна сила – сила, яка характеризує дію інших тіл на задане, що викликає або може викликати зміну його кінематичного стану.

Реактивна сила – сила, що характеризує дію зв'язків на певне тіло.

Основні види зв'язків

1. Ідеальна (*гладенька*) **поверхня** (рис. Д.1.6, а) **або опора** (рис. Д.1.6, б, в) (*реакція перпендикулярна до поверхні;* $\vec{N}$ *– нормальна реакція поверхні*).

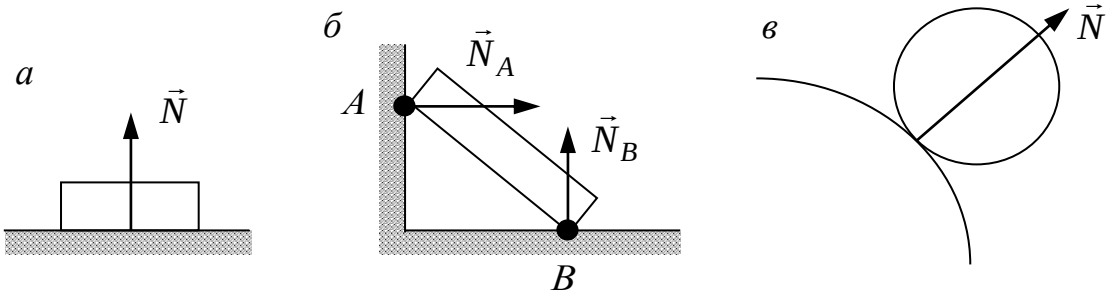


Рис. Д.1.6

2. Ідеальна нитка (рис. Д.1.7, а) **або стрижень** (рис. Д.1.7, б) (*реакція* $\overline{R}$ *скерована вздовж нитки або стрижня*).

Рис. Д.1.7

3. Шарнірно-рухома опора (*реакція $\vec{R}$ перпендикулярна до поверхні руху шарніра* (рис. Д.1.8)).

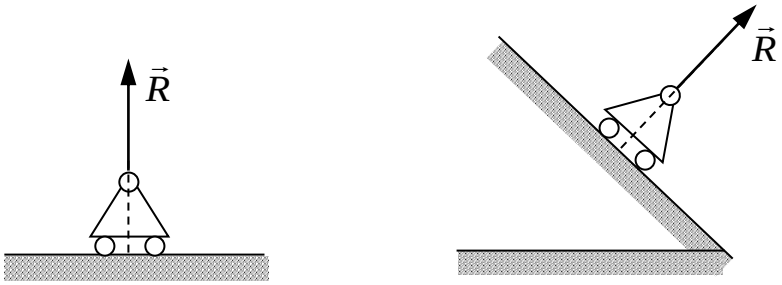


Рис. Д.1.8

4. Шарнірно-нерухома опора (рис. Д.1.9) (*реакція $\vec{R}_A$ складається з її проєкцій на координатні осі $\vec{X}_A$ та $\vec{Y}_A$*).

$$\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A, \quad R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}\,.$$

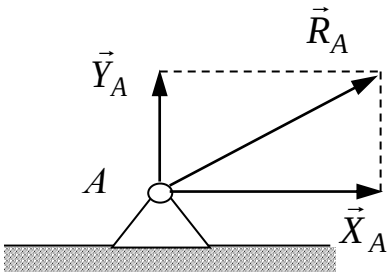


Рис. Д.1.9

5. Циліндричний шарнір або підшипник (рис. Д.1.10) (*реакція складається з проєкцій скерованих вздовж осей, що перпендикулярні до осі циліндра*).

$$\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Z}_A, \quad \vec{R}_B = \vec{X}_B + \vec{Z}_B\,.$$

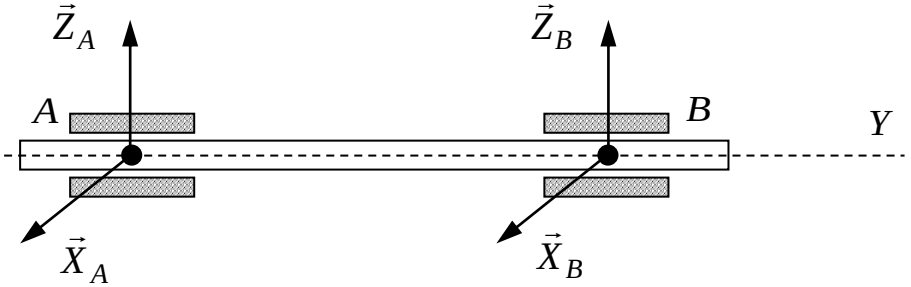


Рис. Д.1.10

6. Підп'ятник (рис. Д.1.11) (*реакція $\vec{R}_A$ складається з проєкцій вздовж координатних осей*).

$$\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A + \vec{Z}_A, \quad R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}\,.$$

7. Сферичний підшипник (рис. Д.1.12) (*реакція* $\vec{R}_A$ *складається з проєкцій на просторові осі координат*).

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}\,.$$

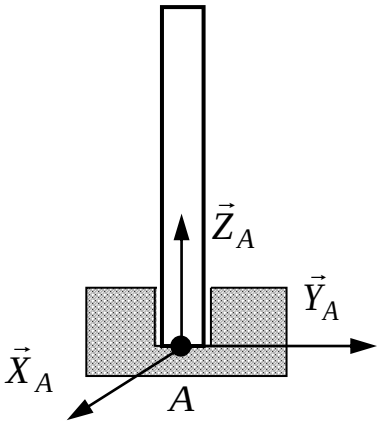


Рис. Д.1.11

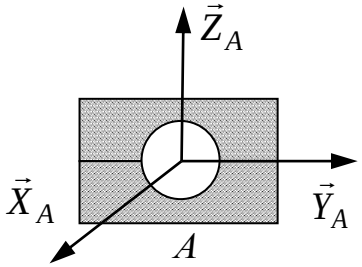


Рис. Д.1.12

8. Нерухоме закріплення (рис. Д.1.13) (*жорстке защемлення*). Реакція жорсткого защемлення характеризується реактивною силою $\vec{R}_A$, що складається з проєкцій $\vec{X}_A$,$\vec{Y}_A$, а також реактивним моментом M_A.

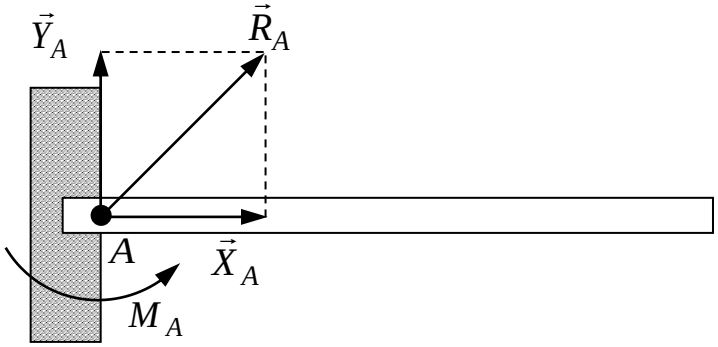


Рис. Д.1.13

Система збіжних сил

Система збіжних сил – система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці (рис. Д.1.14).

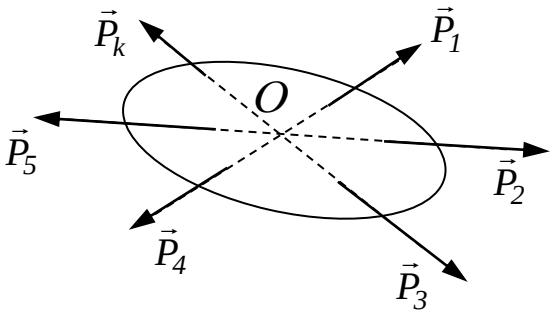


Рис. Д.1.14

Вона еквівалентна рівнодійній силі, що дорівнює векторній сумі сил і прикладена в точці перетину ліній їх дії:

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + ...+ \vec{P}_k = \sum_{n=1}^{k} \vec{P}_n .$$

Методи визначення рівнодійної системи збіжних сил

1. Метод паралелограмів сил. *За аксіомою паралелограма сил, кожні дві сили певної системи послідовно приводяться до однієї сили – рівнодійної* (рис. Д.1.15).

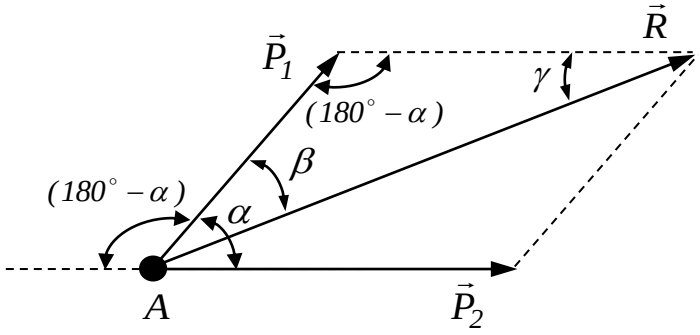


Рис. Д.1.5

Модуль і напрямок вектора рівнодійної

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \cos\alpha}\,, \qquad \frac{P_1}{\sin\gamma} = \frac{P_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{R}{\sin\alpha}\,.$$

2. Побудування векторного силового багатокутника. Будується за рахунок послідовного перенесення кожного векторасили в кінцеву точку попереднього вектора (рис. Д.1.16).

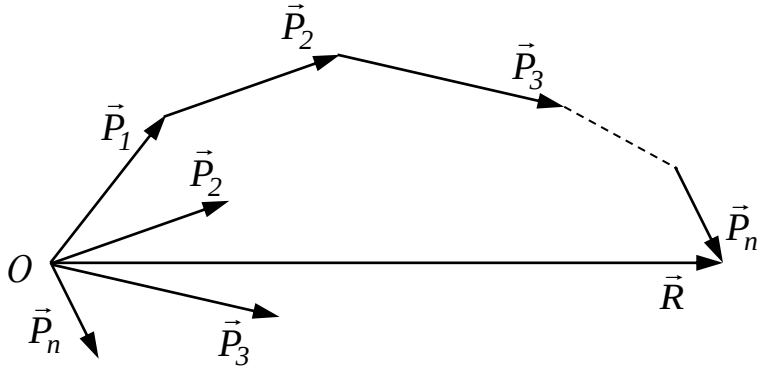


Рис. Д.1.16

Замикальною його стороною є вектор рівнодійної системи збіжних сил $\vec{R}$.

Умови рівноваги системи збіжних сил

Геометрична умова – для рівноваги системи збіжних сил необхідно та достатньо, щоб векторний силовий багатокутних, побудований на цих силах, був замкнений ($\vec{R} = \sum_{n=1}^{k} \vec{P}_n = 0$).

Аналітична умова – для рівноваги системи збіжних сил необхідно та достатньо, щоб алгебраїчні суми проєкцій усіх сил на координатні осі дорівнювали нулю: $\sum_{n=1}^{k} P_{nX} = 0$, $\sum_{n=1}^{k} P_{nY} = 0$, $\sum_{n=1}^{k} P_{nZ} = 0$.

Теорія пар сил

Складання двох паралельних сил, скерованих в один бік. Рівнодійна $\vec{R}$ двох паралельних сил $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, скерованих в одному напрямку, має такий самий напрямок, а її модуль дорівнює сумі модулів цих сил (рис. Д.1.17): $R = P_1 + P_2$, причому $\frac{AC}{P_2} = \frac{CB}{P_1} = \frac{AB}{R}$.

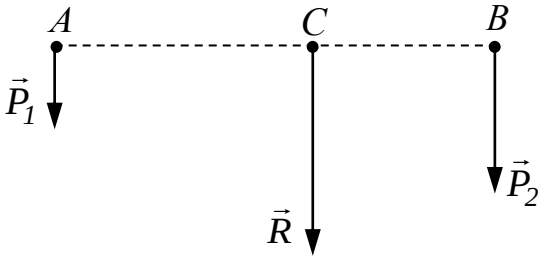


Рис. Д.1.17

Складання двох паралельних сил, скерованих у різні боки. Рівнодійна $\vec{R}$ двох паралельних сил $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ (рис. Д.1.18), скерованих у протилежному напрямку, має напрямок більшої за модулем сили, а її модуль дорівнює різниці модулів цих сил: $R = P_2 - P_1$, причому $\frac{AC}{P_2} = \frac{BC}{P_1} = \frac{AB}{R}$.

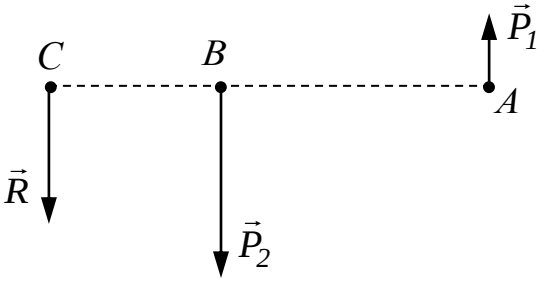


Рис. Д.1.18

Пара сил. Момент пари сил

Пара сил – система двох паралельних, рівних за модулем і протилежних за напрямком сил (рис. Д.1.19).

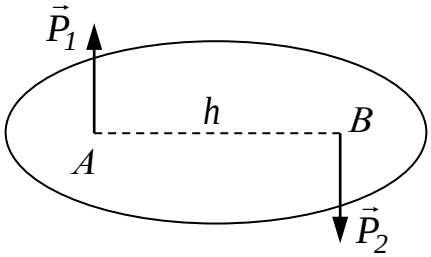


Рис. Д.1.19

Плече пари сил h – відстань між лініями дії сил пари (*довжина перпендикуляра, проведеного з довільної точки лінії дії однієї з сил пари до лінії дії іншої сили).*

Площина дії пари сил – площина, у якій розташовані лінії дії сил пари.

Момент пари сил як вектор – вектор $\vec{M}$ з такими ознаками (рис. Д.1.20):

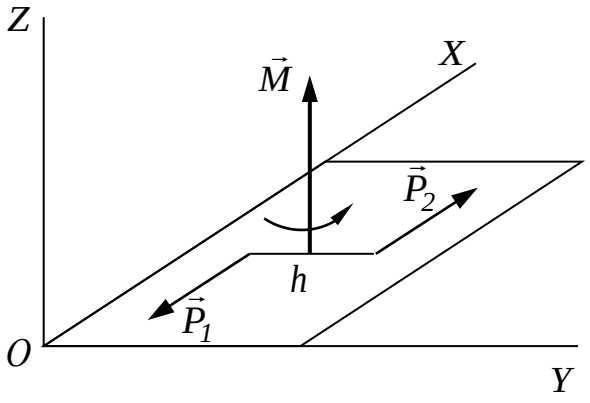
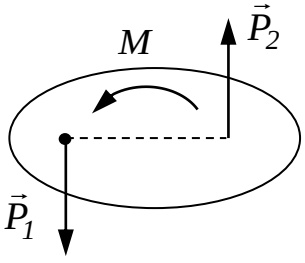


Рис. Д.1.20

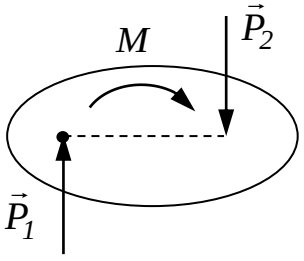
- вектор $\vec{M}$ перпендикулярний до площини пари;
- скерований у той бік, звідки обертання, створюване парою, відбувається проти годинникової стрілки;
- його модуль дорівнює добутку модуля однієї з сил пари на плече h з урахуванням знака.

Знак моменту пари сил:

1) проти годинникової стрілки « + » - ***додатний***



2) за годинниковою стрілкою « − » - ***від'ємний***



Умови рівноваги пар сил: пари сил у площині врівноважуються в тому випадку, якщо алгебраїчна сума їхніх моментів дорівнює нулю: $\sum_{n=1}^{k} M_n = 0$.

Момент сили відносно точки та осі

Будь-який кінематичний стан тіл, що мають точку або вісь обертання, можна описати моментом сили, який характеризує обертальний ефект дії сили.

Момент сили відносно точки як вектор (рис. Д.1.21) – векторний добуток радіус-вектора $\vec{r}$ точки прикладання сили на вектор сили $\vec{P}$:

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{r} \times \vec{P}.$$

Модуль моменту сили

$$\left|\vec{M}_O(\vec{P})\right| = |\vec{r}| \times |\vec{P}| \cdot sin(\alpha) = r \cdot P \cdot sin\alpha = P \cdot h,$$

де α – кут між радіус-вектором і вектором сили;

$r \cdot sin\alpha = h$ – плече сили (*найкоротша відстань від точки до лінії дії сили*).

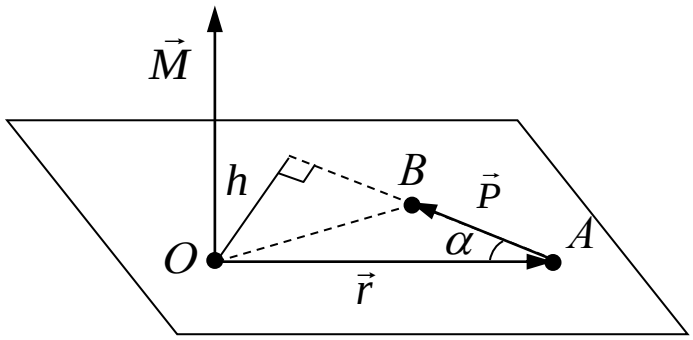
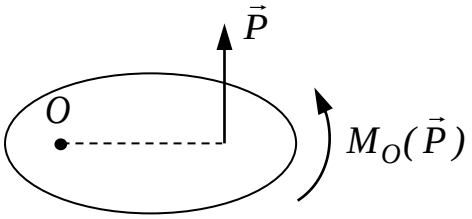


Рис. Д.1.21

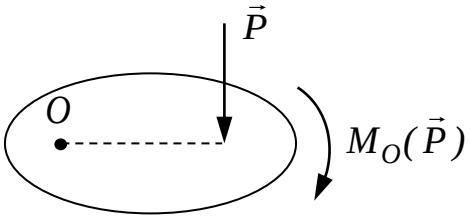
Момент сили відносно точки зображується вектором, прикладеним у цій точці та скерованим перпендикулярно до площини, що містить силу і точку, у той бік, звідки, дивлячись назустріч цьому вектору, бачити силу, що прагне обертати цю площину в бік, зворотний обертанню годинникової стрілки [6].

Момент сили відносно точки в площині – алгебраїчна величина, що дорівнює добутку модуля сили $\vec{P}$ на плече h відносно того самого центра з урахуванням знака: $M_O(\vec{P}) = \pm P \cdot h$.

1) проти годинникової стрілки « + » - ***додатний***



2) за годинниковою стрілкою « − » - ***від'ємний***



Одиницею вимірювання моменту сили в системі СІ є ***ньютон × метр*** *(Нм).*

Момент сили відносно точки дорівнює нулю, коли:

- ❖ сила дорівнює нулю ($P = 0$);
- ❖ плече сили дорівнює нулю ($h = 0$), тобто лінія дії сили проходить через точку.

Моментом сили $\vec{P}$ відносно осі z (рис. Д.1.22) називається взятий зі знаком плюс або мінус добуток модуля проєкції $\vec{P}_{np}$ сили $\vec{P}$ на площину, перпендикулярну до осі, на її плече h відносно точки O перетину осі з площиною: $M_z(\vec{P}) = \pm P_{np} \cdot h$.

Момент сили відносно осі вважається ***додатним***, якщо, дивлячись назустріч осі z, проєкція $\vec{P}_{np}$ прагне обертати площину навколо цієї осі проти годинникової стрілки, а якщо навпаки – ***від'ємним*** [6].

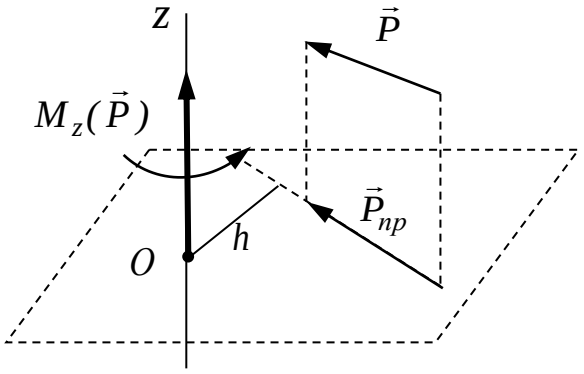


Рис. Д.1.22

Момент сили відносно осі дорівнює нулю у двох випадках:

- лінія дії сили паралельна осі ($P_{np} = 0$);
- лінія дії сили перетинає вісь ($h = 0$).

Довільна плоска система сил

Довільна плоска система сил – система сил, лінії дії яких розташовані в площині незалежно.

Приведення сили до заданого центра. ***Теорема про паралельне перенесення сили (метод Пуансо):*** *силу, не змінюючи її дії на тверде тіло (рис. Д.1.23), можна перенести паралельно самій собі в будь-який центр, додавши при цьому пару сил з моментом цієї сили відносно центра приведення.*

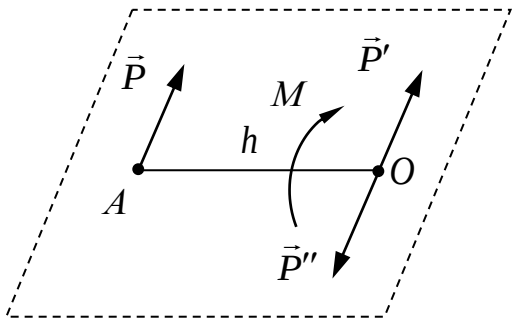


Рис. Д.1.23

$$M(\vec{P},\vec{P}'') = M_O(\vec{P}) = \pm P \cdot h.$$

$\vec{P}',\vec{P}''$ – сили, що знаходяться в рівновазі ($\vec{P}' = -\vec{P}''$, $\left|\vec{P}'\right| = \left|\vec{P}''\right|$).

Головним вектором системи сил, довільно розташованих на площині, $\vec{R}^*$ називається вектор, що дорівнює геометричній сумі усіх сил системи: $\vec{R}^* = \sum_{n=1}^{k} \vec{P}_n$.

Модуль $\vec{R}^*$: $R^* = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2}$, $R_X = \sum_{n=1}^{k} P_{nX}$, $R_Y = \sum_{n=1}^{k} P_{nY}$.

Напрямок вектора $\vec{R}^*$: $\cos(\vec{R}^*,\vec{i}) = \frac{R_X}{R^*}$, $\cos(\vec{R}^*,\vec{j}) = \frac{R_Y}{R^*}$.

Головним моментом системи M^* (рис. Д.1.24) відносно центра O в площині називається алгебраїчна сума моментів сил системи відносно центра приведення O.

$$M^* = \sum_{n=1}^{k} M_O(\vec{P}_n).$$

Якщо сили, довільно розташовані на площині, не врівноважуються, то їх можна привести або до однієї сили, або до пари сил.

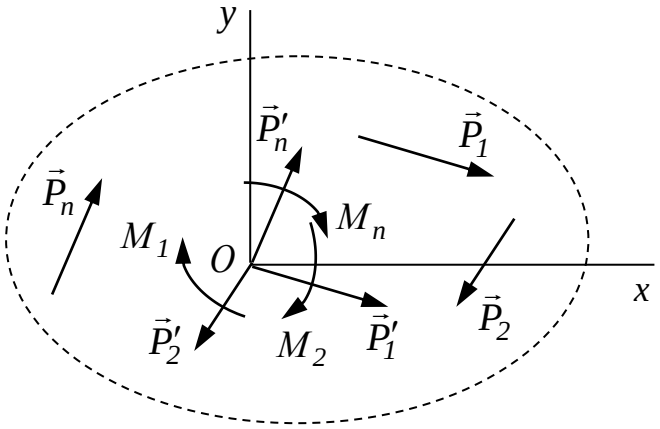


Рис. Д.1.24

Теорема Варіньона про момент рівнодійної плоскої системи сил: момент рівнодійної сили відносно будь-якої точки на площині дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно тієї самої точки [7].

$$M_O(\vec{R}) = \sum_{n=1}^{k}(P_n \cdot h_n) = \sum_{n=1}^{k} M_O(\vec{P}_n),$$

де h_n – плечі сил системи відносно точки O.

Умови рівноваги довільної плоскої системи сил

1. Геометричні умови рівноваги: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно та достатньо, щоб одночасно головний вектор і головний момент системи дорівнювали нулю:

$$R^* = 0, \quad M^* = 0.$$

2. Аналітичні умови рівноваги. *Основна форма умови рівноваги*: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно та достатньо, щоб суми проєкцій усіх сил на координатні осі та сума їхніх моментів відносно будь-якого центра, що знаходиться в площині дії сил, дорівнювали нулю:

$$\sum_{n=1}^{k} P_{nX} = 0, \qquad \sum_{n=1}^{k} P_{nY} = 0, \qquad \sum_{n=1}^{k} M_O(\vec{P}_n) = 0.$$

Довільна просторова система сил
Головний вектор і головний момент

Модуль і напрямок ***головного вектора*** $\vec{R}^*$ (рис. Д.1.25)

$$R^* = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$
$$\cos(\vec{R}^*, \vec{i}) = X / R^*; \quad \cos(\vec{R}^*, \vec{j}) = Y / R^*; \quad \cos(\vec{R}^*, \vec{k}) = Z / R^*,$$

де X, Y, Z – проєкції головного вектора на осі координат,

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n;$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n;$$
$$Z = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n,$$

де $X_1, X_2, ..., X_n$; $Y_1, Y_2, ..., Y_n$; $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ – проєкції сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_n$ відповідно на осі x, y, z.

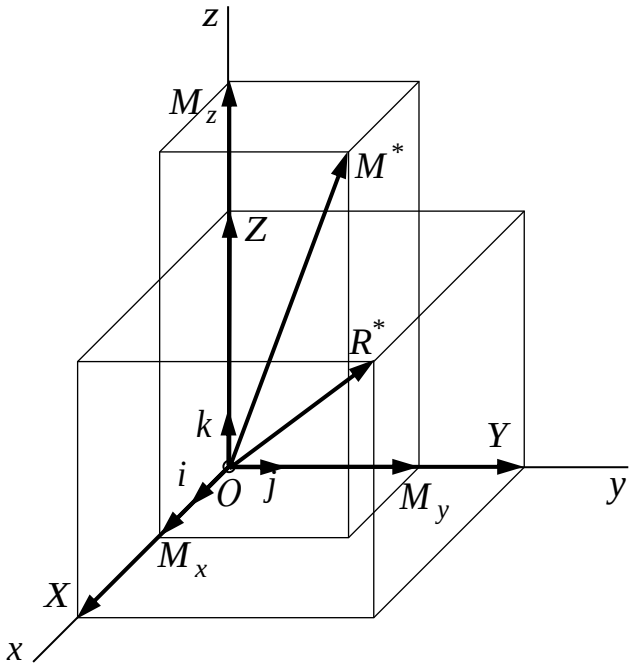


Рис. Д.1.25

Модуль і напрямок ***головного моменту*** $\vec{M}^*$

$$M^* = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2};$$

$$cos(\vec{M}^*, \vec{i}) = M_x / M^*; \quad cos(\vec{M}^*, \vec{j}) = M_y / M^*;$$

$$cos(\vec{M}^*, \vec{k}) = M_z / M^*,$$

де M_x, M_y, M_z – проєкції головного моменту на осі x, y, z, проведені через точку O,

$$M_x = M_{1x} + M_{2x} + ... + M_{nx};$$
$$M_y = M_{1y} + M_{2y} + ... + M_{ny};$$
$$M_z = M_{1z} + M_{2z} + ... + M_{nz},$$

де $M_{1x}, M_{2x}, ..., M_{nx}$; $M_{1y}, M_{2y}, ..., M_{ny}$; $M_{1z}, M_{2z}, ..., M_{nz}$ – моменти сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_n$ відповідно на осі x, y, z.

Сили, довільно розташовані в просторі, можна привести до однієї сили, що дорівнює їхньому головному вектору та прикладена в центрі приведення, а також до пари сил з моментом, що дорівнює головному моменту всіх сил відносно центра приведення.

Залежність між моментами рівнодійної та складових сил встановлюється **теоремою Варіньона про момент рівнодійної сили:** момент рівнодійної відносно будь-якої точки дорівнює геометричній сумі моментів складових сил відносно цієї точки [7]:

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{M}^* = \vec{M}_{1O} + \vec{M}_{2O} + ... + \vec{M}_{nO},$$

а момент рівнодійної сили відносно будь-якої осі (*наприклад* x) дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно цієї осі:

$$M_x(\vec{R}) = M_x = M_{1x} + M_{2x} + ... + M_{nx}.$$

Умови рівноваги довільної просторової системи сил

Аналітичні умови рівноваги: для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій усіх сил на кожну з трьох координатних осей і суми їхніх моментів відносно цих осей дорівнювали нулю.

$$\left.\begin{array}{lll} \sum\limits_{n=1}^{k} P_{nX} = 0, & \sum\limits_{n=1}^{k} P_{nY} = 0, & \sum\limits_{n=1}^{k} P_{nZ} = 0 \\ \sum\limits_{n=1}^{k} M_X = 0, & \sum\limits_{n=1}^{k} M_Y = 0, & \sum\limits_{n=1}^{k} M_Z = 0 \end{array}\right\}.$$

Важіль

Важіль – тверде тіло (рис. Д.1.26), що має нерухому вісь обертання та знаходиться під дією сил, що знаходяться в площині, перпендикулярній до цієї осі.

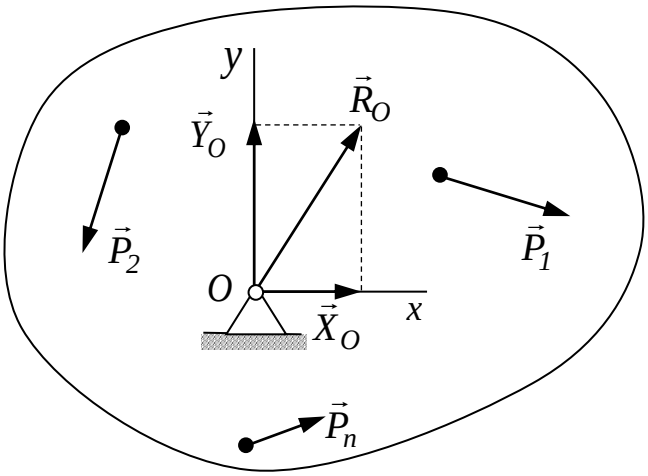


Рис. Д.1.26

Розрізняють ***важелі 1-го та 2-го роду:***

- до важелів ***1-го роду*** належать такі важелі,

у яких діючі на них сили знаходяться з обох боків від нерухомої осі обертання;

- до важелів ***2-го роду*** належать такі важелі, у яких діючі на них сили знаходяться з одного боку від нерухомої осі обертання.

$\vec{P}_1,\vec{P}_2,....,\vec{P}_n$ – сили, прикладені до важеля;

O – опорна точка;

$\vec{R}_O$ – реакція осі важеля, що врівноважує прикладені до нього сили;

$\vec{X}_O,\vec{Y}_O$ – складові (*проєкції*) реакції осі важеля на осі координат.

Умова рівноваги важеля: алгебраїчна сума моментів усіх прикладених до важеля сил відносно опорної точки дорівнює нулю: $\sum_{i=1}^{n} M_{iO} = 0$.

Слід зауважити, що стійкість тіл при їх перевертанні оцінюють за величиною коефіцієнта стійкості:

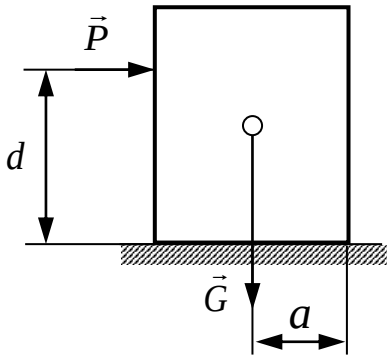
$$k = M_{\text{ут}} / M_{\text{пер}},$$

де $M_{\text{ут}}$ – утримувальний момент;

$M_{\text{пер}}$ – перевертальний момент.

У випадку ***граничної стійкості*** $k = 1$ $(M_{\text{ут}} = M_{\text{пер}})$.

У випадку ***стійкого стану*** $k > 1$ $(M_{\text{ут}} > M_{\text{пер}})$.



Наприклад

$M_{\text{ут}} = Ga$, $M_{\text{пер}} = Pd$,

де P – перевертальна сила;

G – вага тіла.

Центр тяжіння твердого тіла. ***Вага тіла*** – рівнодійна сил тяжіння окремих частинок тіла $(\Delta\vec{G}_1,\Delta\vec{G}_2,....,\Delta\vec{G}_n)$ (рис. Д.1.27), що дорівнює їхній сумі:

$$\vec{G} = \sum_{n=1}^{k} \Delta\vec{G}_n .$$

Центром тяжіння твердого тіла називається незмінно пов'язана з цим тілом точка (*точка C*), через яку проходить лінія дії рівнодійної ($\vec{G}$) сил тяжіння при будь-якому положенні тіла в просторі.

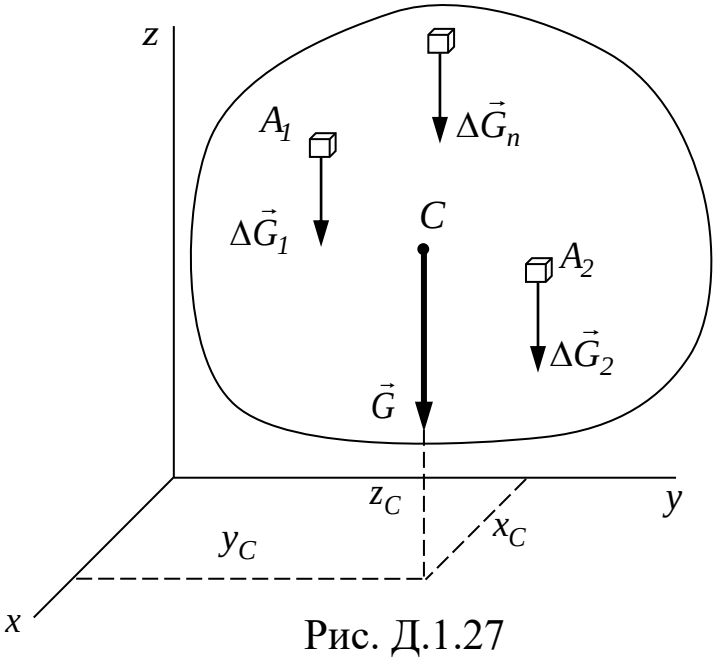


Рис. Д.1.27

Координати центра тяжіння

$$x_C = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta G_n \cdot x_n)}{G}, \quad y_C = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta G_n \cdot y_n)}{G}, \quad z_C = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta G_n \cdot z_n)}{G},$$

де x_n, y_n, z_n – координати точок прикладання $A_1, A_2, \ldots A_n$ сил тяжіння окремих частинок тіла.

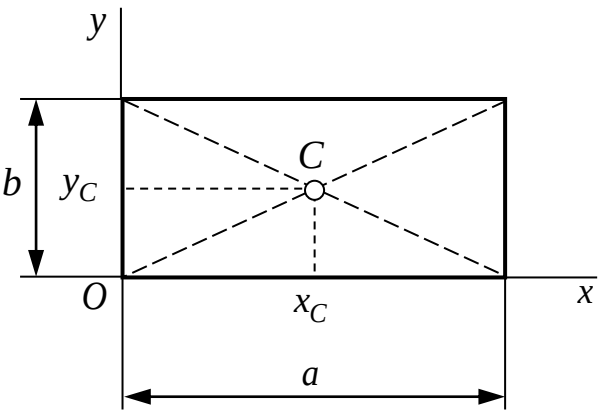
Способи визначення положення центра тяжіння

1. Прямокутник (паралелограм).

Площа: $S = a \cdot b$.

Центр тяжіння в точці C перетину діагоналей.

$$x_C = \frac{a}{2}; \quad y_C = \frac{b}{2}.$$

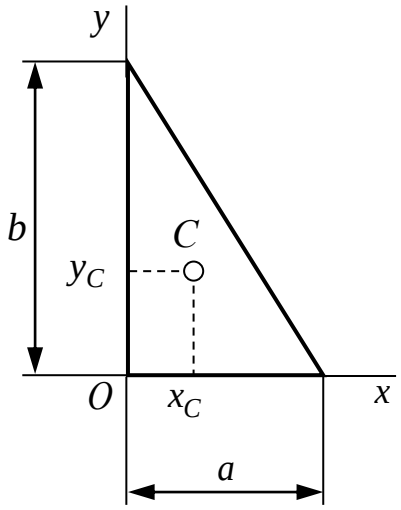


2. Прямокутний трикутник.

Площа: $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$.

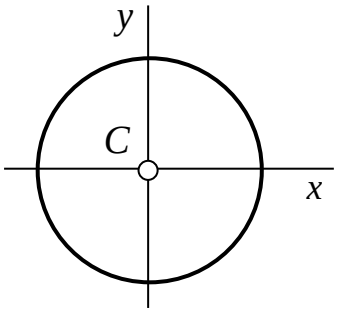
Центр тяжіння в точці C.

$$x_C = \frac{a}{3}; \quad y_C = \frac{b}{3}.$$

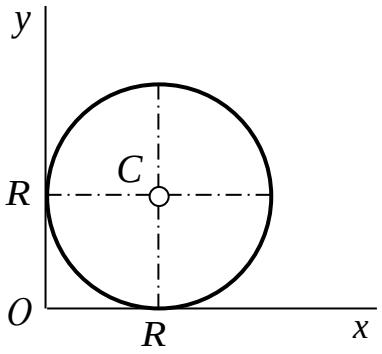


3. Круг.

Площа: $S = \pi \cdot R^2$.



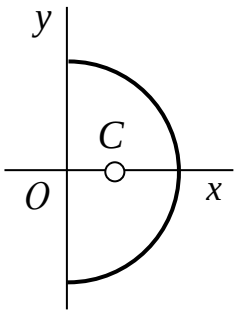
$x_C = 0; y_C = 0$



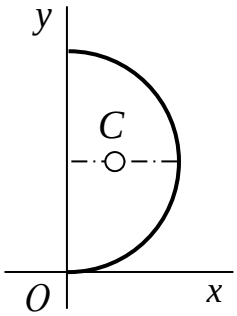
$x_C = R; y_C = R$

4. Коло.

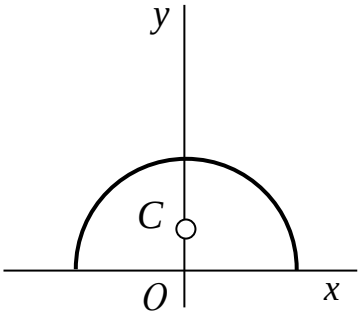
Площа: $S = \frac{\pi \cdot R^2}{2}$.



$x_C = \frac{4R}{3\pi}; y_C = 0$



$x_C = \frac{4R}{3\pi}; y_C = R$



$x_C = 0; y_C = \frac{4R}{3\pi}$

Якщо тіло можна розбити на кінцеву кількість елементів, для яких відомі площі (рис. Д.1.28), положення

центрів тяжіння та їхні координати, то координати центра тяжіння тіла можна визначити з використанням методу розбиття за формулами

$$x_C = \frac{S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2 + ... + S_n \cdot x_n}{S};$$

$$y_C = \frac{S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2 + ... + S_n \cdot y_n}{S},$$

де $x_1, x_2, ..., x_n$ и $y_1, y_2, ..., y_n$ – координати центрів тяжіння елементів відповідно за осями x та y;

S – сумарна площа елементів ($S = S_1 + S_2 + ... + S_n$).

Якщо тіло має вирізані елементи, то з використанням методу доповнення у вищезазначених формулах площі цих елементів мають від'ємне значення.

Наприклад

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 - S_5;$$

$$x_C = \frac{S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2 + S_3 x_3 + S_4 x_4 - S_5 \cdot x_5}{S};$$

$$y_C = \frac{S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2 + S_3 y_3 + S_4 y_4 - S_5 \cdot y_5}{S}.$$

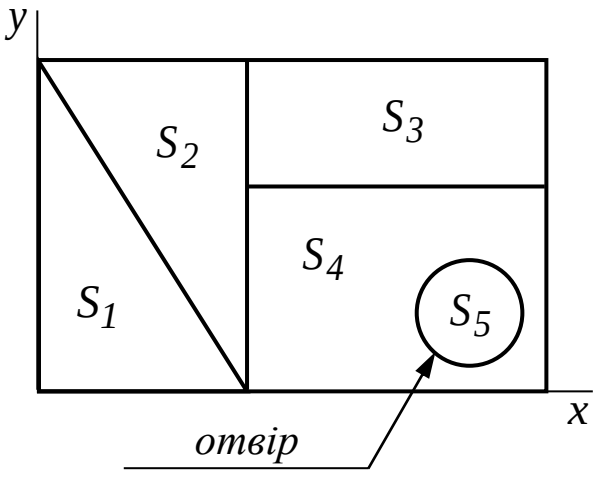


Рис. Д.1.28

Кінематика механічного руху

Кінематика – розділ теоретичної механіки, у якому вивчається рух матеріальних тіл у просторі без урахування сил, що його викликали.

Механічний рух – зміна положення одного тіла відносно іншого, що відбувається в просторі з плином часу.

Система відліку – система координат, невідривно пов'язана з тілом, відносно якої розглядається положення рухомого тіла.

Закон (або рівняння) руху – залежність, що характеризується положенням тіла в просторі з плином часу.

Основне завдання кінематики:

при відомому законі руху тіла визначити всі кінематичні параметри (переміщення, швидкість, прискорення) руху тіла в цілому та кожної його точки окремо.

Траєкторія руху – лінія, що описує рухома точка відносно обраної системи відліку.

Види руху точки за видом траєкторії:

- прямолінійний (*траєкторія – пряма лінія*);
- криволінійний (*траєкторія – крива лінія*).

Способи задавання руху точки

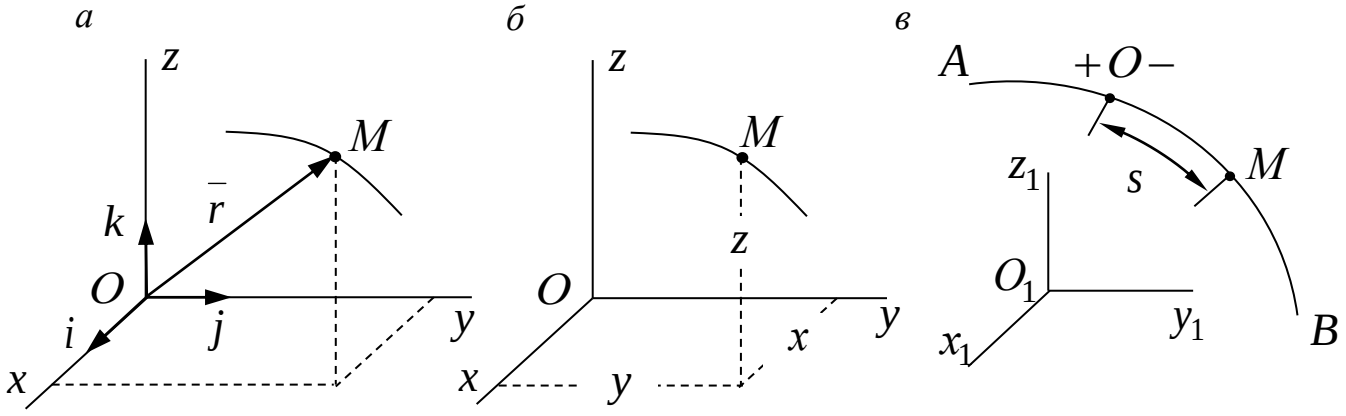
Векторний спосіб *(траєкторія руху точки невідома)*: положення точки в будь-який момент часу визначається за допомогою радіус-вектора $\bar{r}$ (рис. Д.1.29, а).

Геометричне місце кінцевих точок радіус-вектора (*годограф цього вектора*) визначає траєкторію руху точки.

Закон руху точки: $\bar{r} = \bar{r}(t)$, $\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$.

Координатний спосіб *(траєкторія руху точки невідома)*: положення точки в просторі в будь-який момент часу визначається її координатами x, y, z відносно обраної системи відліку (рис. Д.1.29, б).

Натуральний спосіб *(траєкторія руху точки відома)*: положення точки на траєкторії (*криволінійна координатна вісь*) буде встановлюватися криволінійною (*дуговою*) координатою s (рис. Д.1.29, в).



(±) – *додатний або від'ємний напрямок відліку дугової координати*

Рис. Д.1.29

Закон руху точки: $x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t)$.

Закон руху точки вздовж траєкторії: $s = f(t)$.

Швидкість

Швидкість точки – векторна величина, що характеризує швидкість і напрямок руху точки в певній системі відліку [$м/с$].

При криволінійному русі вектор швидкості скерований по дотичній до траєкторії точки в бік її руху (рис. Д.1.30, а).

При прямолінійному русі вектор швидкості скерований вздовж траєкторії точки (рис. Д.1.30, б).

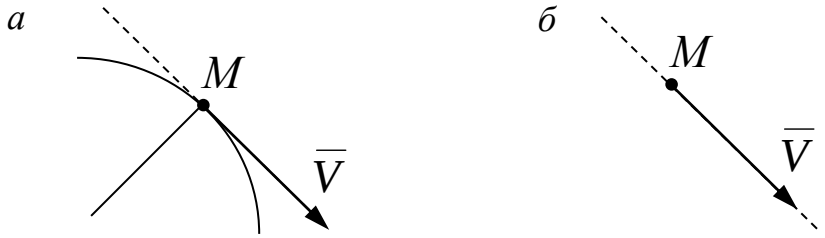


Рис. Д.1.30

При векторному способі $V = \dfrac{dr}{dt}$.

При координатному способі $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$,

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \qquad V_y = \frac{dy}{dt}, \qquad V_z = \frac{dz}{dt},$$

де V_x, V_y, V_z – проєкції швидкості на координатні осі.

При натуральному способі $V = \frac{ds}{dt}$.

Прискорення

Прискорення точки – векторна величина, що характеризує зміну модуля та напрямку швидкості точки з плином часу [$м/с^2$].

При криволінійному русі вектор прискорення скерований у бік увігнутості траєкторії (рис. Д.1.31, а).

При прямолінійному русі вектор прискорення скерований вздовж траєкторії точки (рис. Д.1.31, б).

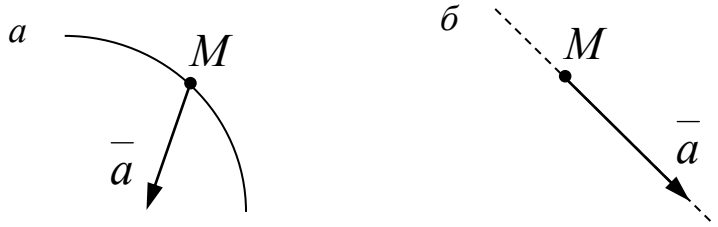


Рис. Д.1.31

При векторному способі $\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$.

При координатному способі $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$,

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

де a_x, a_y, a_z – проєкції прискорення на координатні оси.

При натуральному способі

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n, \qquad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

де a_τ, a_n – ***дотичне*** та ***нормальне*** прискорення (рис. Д.1.32).

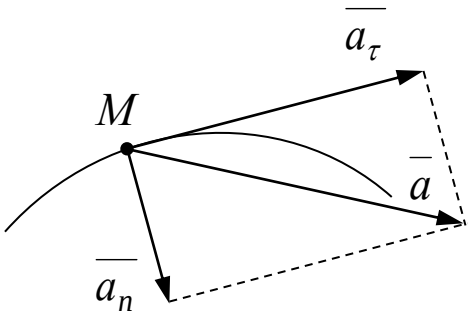


Рис. Д.1.32

Дотичне прискорення

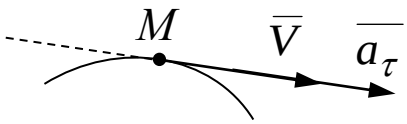
$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Дотичне прискорення *існує лише при нерівномірному русі точки та характеризує зміну модуля швидкості.*

Якщо:

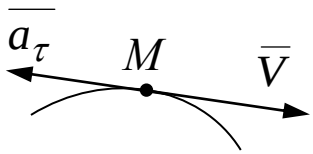
- $a_\tau = 0 \;\Rightarrow\; V = const$;
- $a_\tau > 0 \Rightarrow$ рух точки прискорений, модуль швидкості зростає.

Вектор $\bar{a}_\tau$ співпадає з напрямком вектора швидкості $\bar{V}$;



- $a_\tau < 0 \;\Rightarrow$ рух точки сповільнений, модуль швидкості зменшується.

Вектор $\bar{a}_\tau$ скерований протилежно вектору швидкості $\bar{V}$.



Нормальне прискорення $a_n = \dfrac{V^2}{R}$,

де R – радіус кривизни траєкторії в певній точці.

Нормальне прискорення *існує лише при криволінійному русі точки та характеризує зміну напрямку швидкості, а також:*

- *є завжди додатною величиною,*
- *скеровується по нормалі до траєкторії.*

Якщо:

- $a_n \neq 0$ *– рух точки криволінійний* $(R \neq 0)$;
- $a_n = const$ *– рух по колу радіусом* R;
- $a_n = 0$ *– рух точки прямолінійний* $(R \to \infty)$.

Види рухів твердого тіла

ПОСТУПАЛЬНИЙ РУХ – рух твердого тіла (рис. Д.1.33), при якому будь-яка пряма, що належить тілу, залишається під час його руху паралельною своєму початковому положенню.

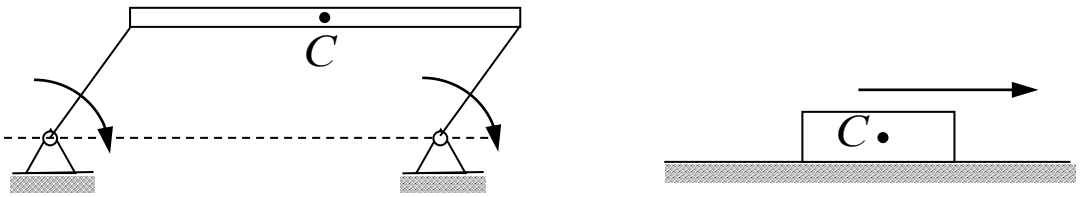


Рис. Д.1.33

При поступальному русі траєкторіями точок є прямі.

Закон поступального руху

$$x_C = f_1(t), \quad y_C = f_2(t), \quad z_C = f_3(t).$$

ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ – рух твердого тіла (рис. Д.1.34), при якому всі його точки здійснюють рух навколо нерухомої прямої (*осі обертання*).

Закон обертального руху

$$\varphi = f(t),$$

де φ - кут обертання, рад.

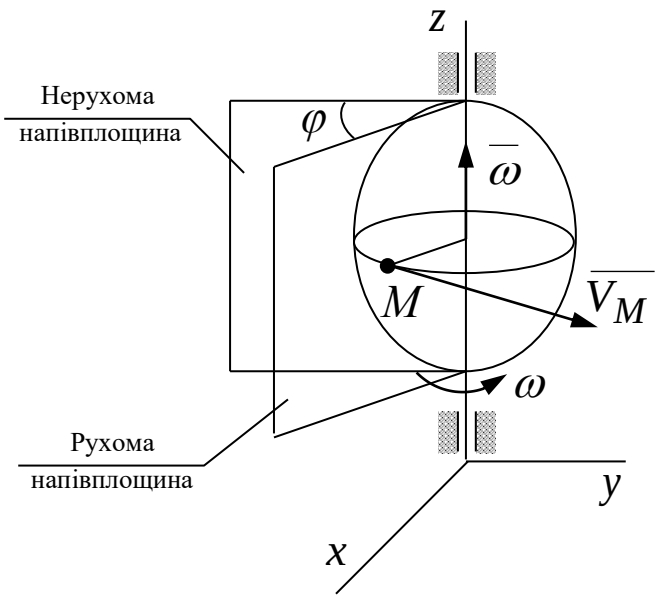


Рис. Д.1.34

Кутова швидкість ω характеризує зміну кута повороту з плином часу:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Одиниці вимірювання ω *в системі СІ* $[\,рад/с,\ 1/с,\ с^{-1}\,]$.

Якщо:

- $\omega > 0$ – тіло обертається в напрямку відліку кута обертання;
- $\omega < 0$ – тіло обертається у зворотному напрямку відліку кута обертання;
- $\omega = 0$ – тіло змінює напрямок обертання.

Кутове прискорення ε характеризує зміну кутової швидкості тіла з плином часу:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Одиниці вимірювання ε *в системі СІ* $[\,рад/с^2,\ 1/с^2,\ с^{-2}\,]$.

Якщо:

- $\omega > 0, \varepsilon > 0$ або $\omega < 0, \varepsilon < 0$ – рух прискорений;
- $\omega > 0, \varepsilon < 0$ або $\omega < 0, \varepsilon > 0$ – рух сповільнений;
- $\omega = const$, $\varepsilon = 0$ – рух рівномірний.

Вектори ω ***та*** ε ***скеровуються вздовж осі обертання тіла в тому напрямку, звідки його обертання видно проти годинникової стрілки***

(вони є ковзними векторами, тому що не мають точки прикладання).

Лінійна (*обертальна*) швидкість (рис. Д.1.35)

$$V = \omega \cdot R.$$

Вектор скерований по дотичній до траєкторії ($\overline{V} \perp R$).

Лінійне прискорення

$$\bar{a} = \overline{a_{об.}} + \overline{a_{д}},$$

$$a = \sqrt{a_{об.}^2 + a_{д}^2} = R \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

де $a_{об.}$, $a_{д}$ – обертальне та доцентрове прискорення.

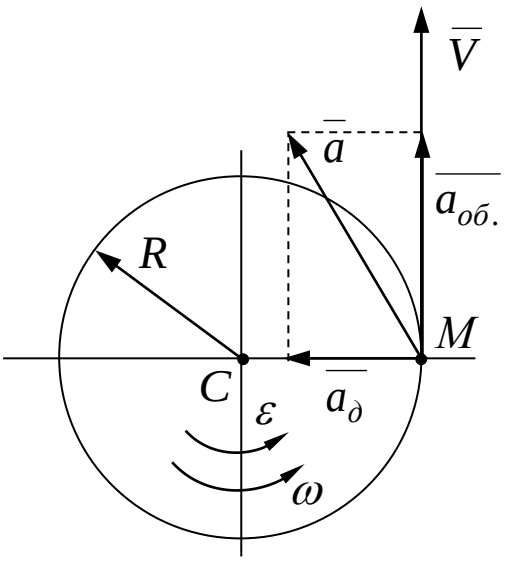


Рис. Д.1.35

Обертальне (*дотичне*) прискорення

$$a_{об.} = \frac{dV}{dt} = \frac{R \cdot d\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon.$$

Вектор $\overline{a_{об.}}$ скеровується по дотичній до траєкторії в напрямку кутового прискорення ε.

Доцентрове (*нормальне*) прискорення

$$a_{д} = \frac{V^2}{R} = \frac{\omega^2 \cdot R^2}{R} = \omega^2 \cdot R.$$

Вектор $\overline{a_{д}}$ скеровується вздовж радіуса обертання точки до осі обертання.

ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ (ПЛОСКИЙ) РУХ – рух твердо-го тіла, при якому всі його точки здійснюють рух у площинах, паралельних нерухомій площині, яку називають базовою.

Закон плоского руху $x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$

Плоскопаралельний рух складається з поступального руху точки, що називають полюсом, та обертального її руху навколо полюса.

Швидкість точки M тіла (рис. Д.1.36)

$$\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{V}_{MA},$$

де $\bar{V}_A$ – швидкість точки A (*полюса*);

$\bar{V}_{MA}$ – обертальна швидкість точки M в її обертальному русі разом з тілом навколо полюса,

$$V_{MA} = \omega \cdot MA \ (V_{MA} \perp MA).$$

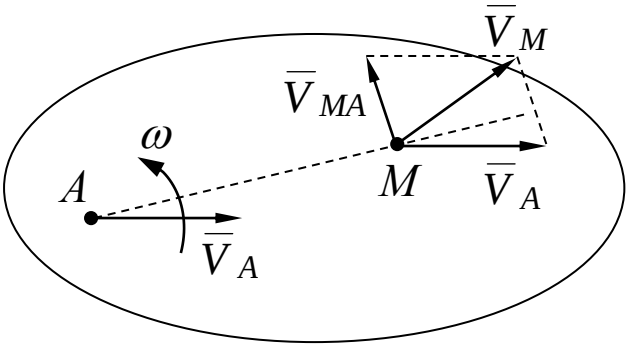


Рис. Д.1.36

Прискорення точки M тіла (рис. Д.1.37)

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}, \quad \text{при цьому} \quad \bar{a}_{MA} = \overline{a^{\tau}_{MA}} + \overline{a^{n}_{MA}},$$

де $\bar{a}_A$ – прискорення точки A (*полюса*);

$\bar{a}_{MA}$ – прискорення точки M в її обертальному русі разом з тілом навколо полюса;

$\overline{a^{\tau}_{MA}}$, $\overline{a^{n}_{MA}}$ – дотичне та нормальне прискорення точки M в її обертальному русі разом з тілом навколо полюса,

$$a^{\tau}_{MA} = \varepsilon \cdot MA, \qquad a^{n}_{MA} = \omega^2 \cdot MA.$$

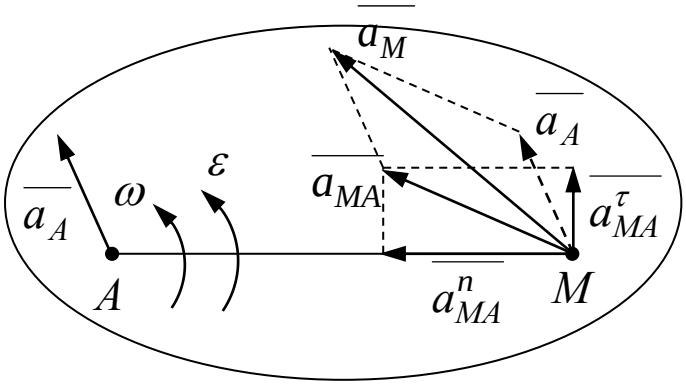


Рис. Д.1.37

СКЛАДНИЙ РУХ – рух, при якому точка одночасно бере участь у кількох рухах, тобто точка здійснює рух відносно двох систем відліку (*нерухомої та рухомої*).

Відносний рух – рух точки відносно рухомої системи відліку.

Переносний рух – рух, що здійснює рухома система відліку разом з точкою відносно нерухомої системи відліку.

Абсолютний рух – рух точки відносно нерухомої системи відліку.

Абсолютна швидкість точки

$$\overline{V_{аб.}} = \overline{V_e} + \overline{V_r},$$

$$V_{аб.} = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2 \cdot V_e \cdot V_r \cdot \cos\alpha},$$

де V_e, V_r – переносна та відносна швидкість.

Абсолютне прискорення точки:

- ***при поступальному переносному русі***

$$\overline{a_{аб.}} = \overline{a_e} + \overline{a_r},$$

$$a_{аб.} = \sqrt{a_e^2 + a_r^2 + 2 \cdot a_e \cdot a_r \cdot \cos(\overline{a}_e \times \overline{a}_r)},$$

де a_e, a_r – переносне та відносне прискорення;

- ***при обертальному переносному русі***

$$\overline{a_{аб.}} = \overline{a_e} + \overline{a_r} + \overline{a_c},$$

де a_c – прискорення *Коріоліса (рис. Д.1.38)*,

$$\overline{a}_c = 2(\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r),$$

$$a_c = 2 \cdot \omega_e \cdot V_r \cdot \sin(\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r),$$

де ω_e – кутова швидкість переносного руху.

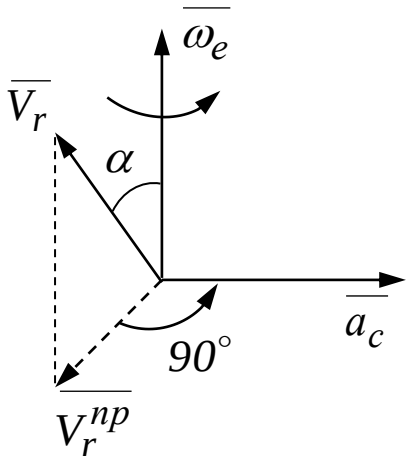


Рис. Д.1.38

Правило Жуковського: *для знаходження напрямку прискорення Коріоліса необхідно спроєціювати вектор відносної швидкості точки на площину, перпендикулярну до осі переносного обертання та повернути цю проєкцію на кут 90° у бік переносного обертання* [6].

Динаміка механічного руху

Динаміка – розділ теоретичної механіки, у якому вивчаються закони руху матеріальних тіл залежно від діючих на них сил.

Закони динаміки (сформульовані Ньютоном):

1. Закон інерції (*встановлений Галілеєм*) – матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху до того часу, поки дія інших тіл не змінить цей стан.

Рух, що здійснює точка за відсутності сил, називається ***рухом за інерцією***.

Інертність – прагнення тіла зберігати незмінною швидкість свого руху, тобто зберігати отриманий раніше механічний рух.

2. Закон пропорційності сили та прискорення (*основний закон динаміки*) – прискорення $\vec{a}$ матеріальної точки M пропорційне прикладеній силі $\vec{P}$ та має однаковий з нею напрямок (рис. Д.1.39).

$$\vec{P} = m \cdot \vec{a},$$

де m – маса матеріальної точки.

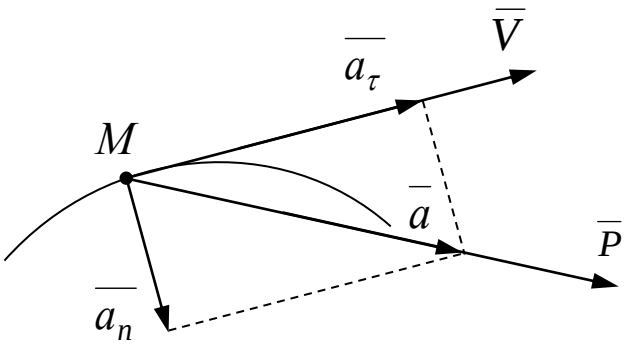


Рис. Д.1.39

3. Закон рівності дії та протидії – кожній дії відповідає рівна за модулем і протилежно скерована протидія.

4. Принцип незалежності дії сил – декілька одночасно діючих на матеріальну точку сил придають точці таке прискорення, яке б надала їй сила, що дорівнює їхній геометричній сумі.

За другим законом динаміки,

$$\overline{P_1} = m \cdot \overline{a_1}, \quad \overline{P_2} = m \cdot \overline{a_2}, \quad \ldots, \quad \overline{P_n} = m \cdot \overline{a_n}.$$

Згідно з цим принципом прискорення матеріальної точки, що знаходиться під дією сил $\overline{P_1}, \overline{P_2}, \ldots, \overline{P_n}$, *визначається рівнянням* ***(основним рівнянням динаміки для системи сил)***

$$m \cdot \overline{a} = \overline{P_1} + \overline{P_2} + \ldots + \overline{P_n},$$

$$m \cdot \overline{a} = m\overline{a_1} + m\overline{a_2} + \ldots + m\overline{a_n},$$

$$\overline{a} = \overline{a_1} + \overline{a_2} + \ldots + \overline{a_n}.$$

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

$$m \cdot x'' = P_{1x} + P_{2x} + \ldots + P_{nx} = \sum_{n=1}^{k} P_{nx},$$

$$m \cdot y'' = P_{1y} + P_{2y} + \ldots + P_{ny} = \sum_{n=1}^{k} P_{ny},$$

$$m \cdot z'' = P_{1z} + P_{2z} + \ldots + P_{nz} = \sum_{n=1}^{k} P_{nz},$$

де x'', y'', z'' – проєкції прискорення $\overline{a}$ на координатні осі;

$P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}, P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}, \ldots, P_{nx}, P_{ny}, P_{nz}$ – проєкції сил $\overline{P_1}, \overline{P_2}, \ldots, \overline{P_n}$ на координатні осі.

За допомогою диференціальних рівнянь руху точки можна розв'язувати ***дві основні задачі динаміки*** *точки:*

1) задачу динаміки (пряму). Знаючи масу точки m та рівняння її руху $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, визначити модуль і напрямок рівнодійної сил, прикладених до точки.

Розв'язання цієї задачі проводиться методом подвійного диференціювання рівнянь руху за часом.

Диференціальні рівняння руху точки

$$m \cdot x'' = \sum_{n=1}^{k} P_{nx} = P_x, \qquad m \cdot y'' = \sum_{n=1}^{k} P_{ny} = P_y, \qquad m \cdot z'' = \sum_{n=1}^{k} P_{nz} = P_z.$$

Модуль рівнодійної $F = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$;

2) задачу динаміки (обернену). Знаючи масу точки m, сили, що діють на точку, а також початкове положення (x_0, y_0, z_0) і початкову швидкість (x_0', y_0', z_0'), визначити закон руху $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$.

Розв'язання цієї задачі здійснюється методом подвійного інтегрування за часом диференціальних рівнянь при відомих початкових умовах:

а) складання диференціальних рівнянь

$$m \cdot x'' = P_x(t, x, y, z, x', y', z'),$$
$$m \cdot y'' = P_y(t, x, y, z, x', y', z'),$$
$$m \cdot z'' = P_z(t, x, y, z, x', y', z');$$

б) інтегрування диференціальних рівнянь руху двічі за часом;

в) визначення постійних інтегрування за початковими умовами

$$t = 0,\ x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0,\ x' = x_0',\ y' = y_0',\ z' = z_0';$$

г) отримання рівнянь руху точки

$$x = f_1(t, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0'),$$
$$y = f_2(t, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0'),$$
$$z = f_3(t, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0').$$

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Аксіоми статики 103
Аналог лінійної швидкості ланки 43
– лінійного прискорення ланки 43
– кутової швидкості ланки 43
– кутового прискорення ланки 43

Важіль 116
– першого роду 116
– другого роду 117
Варіньона теорема 114,116
Взаємодія механічна 101
Вілліса теорема 59
– формула 28
Водило 28

Група структурна (Ассура) 18
– – , клас 18
– – , порядок 18

Даламбера принцип 44,88
Динаміка механічного руху 130
Дуга зачеплення початкова 65

Евольвента кола 60
Елемент кінематичної пари 12

Жуковського правило 131

Зачеплення евольвентне 66
– властивості 61
Зв’язки, види 105
З’єднання кінематичне 17
Зміщення зуборізного інструменту 68
– – – додатне 68
– – – нульове 68
– – – від’ємне 69
Зубець колеса зубчастого 71
– – –, висота 63
– – – , ділильна головка 62
– – – , ділильна ніжка 62

Інволюта кута 61

Кількість зубців 61
Кінематика механічного руху 121
Кінематична пара 12
– – , замикання геометричне 13
– – , замикання силове 13
– – , клас 13
– – , позначення 14
Коефіцієнт висоти головки зубця 63
– перекриття 66
– питомих ковзань 66
– радіального зазору 63
Колесо зубчасте 21
– прямозубе 21
– косозубе 21
– шевронне 21
– опорне 28
– планетарне (сателіт) 28
– центральне (сонячне) 28
Коло вершин 61
– ділильне 62
– западин 61
– основне 61
– початкове 61
Координата узагальнена 15
Коромисло 12
Кривошип 12
Крок початковий 61
– кутовий 63
Кулачки 31

Кут ближнього вистою 41
– віддалення 34,35
– дальнього вистою 34,35
– дії кулачка 36
– евольвентний 60
– зачеплення 64
– наближення 34,35
– перекриття 65
– профілю 60
– тиску кулачка на штовхач 70

Ланка 11
– вихідна 12
– вхідна 12
– з'єднувальна 12
– нерухома 12
– початкова 15
Ланцюги кінематичні, класифікація 15
Лінія зачеплення активна 65
– – теоретична 65

Масштаб кінематичної схеми 38
– плану прискорень 39
– плану сил 47
– плану швидкостей 39
Машина 10
– автомат 11
– енергетична 10
– робоча 10
Машинний агрегат 11
Маховик 58
Метод Зинов'єва 43
– оборотності руху 28
Механізм 11
– багатоланковий зубчастий 25
– диференціальний 28
– замінний 71
– зубчастий 20
– – гіперболоїдний 25
– – конічний 24
– – циліндричний 22
– кулачковий, класифікація 31
– кривошипно-шатунний 39
– планетарний 28
– синусний 42
Модуль зубців 62
Момент
– пари сил 110
– сили відносно точки 111
– сили відносно осі 111

Нормаль загальна 66

Передаточне відношення 20
Передача зубчаста
– внутрішнім зачепленням 22
– зовнішнім зачепленням 22
Період руху 37
Повзун 12
Прискорення 123
– кутове 126
– Коріоліса 129
– лінійне 127
Профілі зубців активні 65

Рівняння руху 56
Рух тіла
– абсолютний 129
– відносний 129
– поступальний 125
– обертальний 125
– переносний 129
– плоскопаралельний 127
– складний 129

Сили 103
– активні 45
– ваги 45
– внутрішні 103
– зовнішні 45, 103
Стан тіла кінематичний 102
Статика 101
Схема механізму кінематична 15

Тіло абсолютно тверде 101
– вільне 105
– невільне 105
Точка матеріальна 101
Траєкторія руху 121
Чебишева формула 17
Число передаточне 59

Удари в кулачкових механізмах 71

Фази руху штовхача 34

Центр тяжіння твердого тіла 118
– – – –, способи визначення 118

Шатун 12
Швидкість 122
– кутова 126
– лінійна 126
Шестерня 21
Штовхачі, класифікація 31

Навчальний посібник

Мороз Володимир Ілліч,
Братченко Олександр Васильович,
Громов Володимир Ігорович
та ін.

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

(СКЛАДОВІ ЗАГАЛЬНОІНЖЕНЕРНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ)

Частина 1

Відповідальний за випуск Логвіненко О. А.

Редактор Ібрагімова Н. В.

Підписано до друку 21.10.2022 р.
Умовн. друк. арк. 8,0. Тираж . Замовлення № .

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха,7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.