УДК 539.12; 539.17

ВЛАСТИВОСТІ СТРУМІВ ВЗАЄМОДІЙ ВИСОКОСПІНОВИХ ФЕРМІОНІВ

Ю.В. Куліш, О.В. Рибачук
Українська Державна Академія Залізничного Транспорту.
61050, Україна м. Харків, пл. Фейєрбаха, 7, e-mail: Kulish@kart.edu.ua
Надійшла до редакції 1 березня 2004 р.

Досліджується проблема степеневих розбіжностей в теорії взаємодій високоспінових масивних ферміонів $\left(J > \frac{1}{2}\right)$. В традиційних підходах існують два джерела степеневих розбіжностетей: 1) множники вигляду p_μ / M в пропогаторах високоспінових ферміонів (p_μ - імпульс високоспінового ферміона, M - його маса); 2) добутки импульсів p_μ на деякі константи в компонентах спін-тензорів струмів взаємодій $j_{\mu_1 \dots \mu_l}$. Показано, що в несуперечливій теорії спін-тензори струмів взаємодій $j_{\mu_1 \dots \mu_l}$ повинні бути безслідовими і їхні згортки з імпульсами p та γ - матрицями повинні зникати. Тому в несуперечливій теорії внески множників вигляду p_μ / M у пропагаторі високоспінового ферміона повинні зникати. Оскільки рівняння для взаємодій високоспінових частинок представляють собою систему неоднорідних диференціальних рівнянь, то польові і струмові спін-тензори і струми повинні мати неперервні частині похідні $2J+2$ і $2J+1$ порядків, відповідно. В результаті компоненти струмів разом з константами повинні містити функції, які забезпечують спадання цих компонентів при $\left|p_\mu\right| \to \infty$ по меншій мірі як $\left|p_\mu\right|^{-(2J+1)}$.
КЛЮЧОВІ СЛОВА: високий спін, ферміони, розбіжності, диференціальні рівняння, сумісна теорія.

Взаємодії високоспінових ферміонів $\left(J \geq \frac{3}{2}\right)$ досить гарно вивчені експериментально. Це пов'язано з тим, що серед високоспинових ферміонів (ВФ) є нуклонні резонанси, які збуджуються в процесах взаємодій піонів, фотонів та електронів з нуклонами. Найкраще вивчені взаємодії резонанса $\Delta(1232)$ $\left(P_{33}(1232)\right)$, який має спін $J = \frac{3}{2}$. В наш час відомо, що нуклони і $\Delta(1232)$ не елементарні, а складені частинки, а саме, вони складаються з трьох кольорових кварків у s-стані. Внаслідок принципа Паулі і вимог симетрій безкольорові системи трьох кварків повинні мати стани з $I = J = \frac{1}{2}$ (нуклони N) та $I = J = \frac{3}{2}$ ($\Delta(1232)$). При цьому N і $\Delta(1232)$ відрізняються орієнтаціями спінів кварків. Разом з цим експериментальні дані відносно процесів взаємодій піонів, фотонів і електронів з нуклонами в резонансній області енергій досить гарно описуються в підходах, в яких нуклони розглядаються як елементарні частинки [1]. При цьому необхідні внески $\Delta(1232)$, як і інших високоспінових нуклонних резонансів, розглядаються в таких підходах аналогічно нуклонам, тобто як елементарні частинки.

Необхідність врахування взаємодій ВФ в різних системах відліку при будь – яких значеннях 4 – імпульсів частинок приводить до використання коваріянтних підходів. Підходи, в яких вершинні функції взаємодій ВФ задовольняють тільки умові коваріянтності ми будемо називати традиційними. Можливості традиційних підходів до взаємодій $\Delta(1232)$ та інших ВФ – резонансів обмежені в порівнянні з аналогічними підходами до взаємодій нуклонів. Перш за все це обумовлене степеневим енергетичним зростанням амплітуд реакцій і відповідних їм перерізів, а також степеневими розбіжностями в амплітудах пов'язаних з петльовими діаграмами. Окрім цих гарно відомих недоліків традиційних підходів існують ще й неоднозначності в амплітудах для петльових діаграм [2]. Традиційні підходи мають два джерела степеневих розбіжностей в амплітудах для петльових діаграм. Перше з них пов'язане із залежністю пропагаторів ВФ від їхніх імпульсів p_μ, яка має асимптотичну залежністть вигляду $\left|p_\mu\right|^{2J-2}$. Друге джерело розбіжностей пов'язане з добутками 4 – імпульсів частинок в вершинних функціях взаємодій ВФ. При цьому степеневі розбіжності виникають внаслідок інтегрування по всим можливим значенням компонентів 4 – імпульсів, в тому числі і при $\left|p_\mu\right| \to \infty$. Аналогічно внески ВФ навіть в полюсні амплітуди реакцій дають степеневе енергетичне зростання. Таким чином, результати традиційних підходів сильно суперечать експериментальним даним, згідно з якими навпаки при зростанні спіну ВФ, які утворюються в реакціях, перерізи спадають. Ця ситуація формулюється у вигляді правила: ВФ з $J \geq \frac{5}{2}$ формуються, а не утворються. Тобто на експерименті перерізи утворення таких ВФ разом з іншими частинками в кінцевому стані дуже швидко спадають з енергією (в порівнянні з аналогічними реакціями де замість ВФ є нуклон). ВФ з $J \geq \frac{5}{2}$ спостережуються як резонанси, які формуються в $\pi N-$, $KN, \gamma N$ - взаємодіях, а потім розпадаються.

Ми вважаємо, що оскільки ВФ існують, то повинні існувати і теоретичні підходи в яких не існують степеневі розбіжності, тобто ВФ повинні описуватися не гірше від нуклонів і піонів. Іншими словами, розбіжності в теоріях взаємодій високоспінових частинок не повинні перевищувати розбіжності в теоріях взаємодій частинок зі спіном 0 і $\frac{1}{2}$ [3,4]. Пошуки таких підходів ведуться і в останній час (наприклад, [5-8]). В роботах [5,6] досліджуються формалізми для опису високоспінових частинок. В роботах [7,8] вивчаються властивості струмів взаємодій високоспінових бозонів, (які дають вершини взаємодій), оскільки степеневі розбіжності обумовлені струмами взаємодій.

В даній роботі ми вивчаємо струми взаємодій ВФ аналогічно струмам взаємодій високоспінових бозонів в роботах [7,8]. Ми показуємо, що традиційні підходи суперечливи і, окрім цього, в них не виконуються умови існування розв'язків систем диференціальних рівнянь в частинних похідних. В даній роботі вимагається щоб для $2J+1$ незалежних фізичних станів поля ВФ було $2J+1$ диференціальних рівнянь. З практичної точки зору ціль нашої роботи полягає в модифікації традиційних підходів, а саме, в формулюванні загальних умов, яким повинні задовольняти струми взаємодій ВФ в несуперечливих теоріях і які повинні приводити до усунення степеневих розбіжностей. Доцільність роботи пов'зана з використанням підходу Раріта – Швінгера, який досить часто використовується і який найбільш зручний для розрахунків внесків ВФ в коваріантні величини в будь – якій системі відліку і в будь – якій області 4 – імпульсів.

Дана робота аналогічна роботі [7] для високоспінових бозонів. Тому ми будемо посилатися на формули роботи [7] з приставкою 7.

СПІН–ТЕНЗОРИ ВИСОКОСПІНОВИХ ФЕРМІОНІВ

Спінові стани ВФ із спіном $J = l + \frac{1}{2}$ в спокої можна описувати симетричним спінором рангу $2l+1$ $\varphi^{\{a_1 \dots a_{2l+1}\}}$ і симетричним спін– тензором $\chi^a{}_{i_1,\dots,i_l}$, зв'язок між якими аналогічний (7. 2):

$$\chi^{\alpha}_{i_1,\dots i_l} = 2^{-\frac{l}{2}} \varphi^{\{aa_1b_1a_2b_2\dots a_lb_l\}} \cdot \left(\sigma_{i_1}\right)^{c_1}_{a_1} \varepsilon_{b_1c_1\dots\dots} \left(\sigma_{i_l}\right)^{c_l}_{a_l} \varepsilon_{b_lc_l} \,. \tag{1}$$

В (1) спінорні індекси $a, a_1, b_1, c_1, \dots, a_l, b_l, c_l$ приймають значення 1 та 2, а індекси $i_1, i_2, \dots, i_l$ відповідають компонентам тензорів, тобто приймають значення 1, 2, 3; $\varepsilon_{b_kc_k}$ є одиничний антисиметричний тензор $(\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1)$.

Симетричний спін–тензор $\chi^a{}_{i_1,\dots,i_l}$ безслідовий, що доводиться з допомогою (7.4). Окрім цього, з допомогою (7.4) можна показати, що спін–тензор задовольняє умовам

$$\left(\sigma_{i_k}\right)^b_a \chi^a{}_{i_1,\dots,i_l} = 0, \quad k = 1,2,\dots l \,. \tag{2}$$

Тепер розглянемо ВФ, які рухаються із 4–імпульсом $p = (p_0, \vec{p})$, $p^2 = M^2$. Тоді спінори замінюються на біспінори

$$\sqrt{2M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\chi^a_{i_1\dots i_l} \to U(p)^{\alpha}_{\mu_1\dots\mu_l} = \sqrt{p_0 + \sqrt{p^2}}\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{\sigma\vec{p}}{p_0 + \sqrt{p^2}}\end{pmatrix}\chi(\vec{p})^a_{\mu_1\dots\mu_l}, \tag{3}$$

де a – спінорний індекс $(a = 1,2)$, α – біспінорний $(\alpha = 1,2,3,4)$; $\chi(\vec{p})^a_{\mu_1\dots\mu_l}$ відповідає спін–тензору для ВФ із 4 - імпульсом p, M – маса ВФ.

Для релятивизації матриці σ_i розглянемо матриці 4×4 $\tilde{\gamma}_\mu$

$$\tilde{\gamma}_\mu = \gamma_5\left(\gamma_\mu - \frac{p_\mu \hat{p}}{p^2}\right),\ \tilde{\gamma}_\mu p_\mu = 0,\quad \tilde{\gamma}_\mu\tilde{\gamma}_\mu = -3,\quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},. \tag{4}$$

$\hat{p}\tilde{\gamma}_\mu = \tilde{\gamma}_\mu \hat{p}$, $\{\tilde{\gamma}_\mu, \tilde{\gamma}_\nu\} = 2d_{\mu\nu}$, $d_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$, які в системі спокою зводяться до матриць

$$\tilde{\gamma}_0 = 0,\ \tilde{\gamma}_{\boldsymbol{i}} = \begin{pmatrix} \sigma_{\boldsymbol{i}} & 0 \\ 0 & -\sigma_{\boldsymbol{i}} \end{pmatrix} = \sigma_{\boldsymbol{i}}\gamma_0\,. \tag{5}$$

Оскільки для ВФ у спокої відмінні від нуля тільки верхні компоненти біспінора, то для будь–якого вектора $a = (a_0, \vec{a})$ маємо в системі спокою

$$\chi^*{}_{a,i_1\ldots i_l}(\vec{\sigma}\,\vec{a})^a_b\,\chi^b_{k_1\ldots k_l} = -\overline{U}(p)_{\alpha,\mu_1\ldots\mu_l}(\tilde{\gamma}_\mu a_\mu)^\alpha_\beta\, U(p)^\beta_{\nu_1\ldots\nu_l}\,, \tag{6}$$

де $\overline{U}(p)_{\alpha,\mu_1\ldots\mu_l} = U^+(p)_{\beta,\mu_1\ldots\mu_l}(\gamma_0)^\beta_\alpha$. Далі спінорні і біспінорні індекси виписувати як правило не будемо.

Знову припустимо, що не існує частинок із спіном меншим J і масою в точності рівний M. Тоді можна написати умови

$$p_{\mu_k}U(p)_{\mu_1\ldots\mu_l} = 0 \qquad (\partial_{\mu_k}U(x)_{\mu_1\ldots\mu_l} = 0) \tag{7}$$

$$g_{\mu_j\mu_k}U(p)_{\mu_1\ldots\mu_k} = 0 \qquad g_{\mu_j\mu_k}U(x)_{\mu_1\ldots\mu_k} = 0 \tag{8}$$

$$\tilde{\gamma}_{\mu_k}U(p)_{\mu_1\ldots\mu_l} = \gamma_{\mu_k}U(p)_{\mu_1\ldots\mu_l} = 0,\quad (\tilde{\gamma}_{\mu_k}U(x)_{\mu_1\ldots\mu_l} = \gamma_{\mu_k}U(x)_{\mu_1\ldots\mu_l} = 0)\,, \tag{9}$$

$j,k = 1,2,\ldots,l$. В дужках наведені умови в координатному зображенні. Умова (7) аналогічна умові (7.4), (8) – умові (7.5). Умова (9) є релятивистське узагальнення (2).

Розглянемо проекційний оператор $\Pi_{i_1\cdots i_l,k_1\cdots k_l}$ і скорочений проекційний оператор $\Pi^l(\vec{a},\vec{b})$, які є матриці 2×2, для ВФ із спіном $J = l + \frac{1}{2}$ у спокої [9]:

$$\Pi^l(\vec{a},\vec{b}) = a_{i_1}\ldots a_{i_l}\Pi_{i_1\cdots i_l,k_1\cdots k_l}b_{k_1}\ldots b_{k_l} = \frac{l!}{(2l+1)!!}|\vec{a}|^l|\vec{b}|^l\left[P'_{l+1}(z) - \frac{(\vec{\sigma}\vec{a})(\vec{\sigma}\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}P'_l(z)\right],\ z = \frac{(\vec{a}\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}, \tag{10}$$

де $P_l(z)$ – поліном Лежандра. Для проекційного оператора ВФ, який рухається із імпульсом $p = (p_0, \vec{p})$ потрібно перейти до біспінорів і 4–векторів. Введемо вектори $\tilde{a}_\mu = a_\mu - \frac{(ap)p_\mu}{p^2}$, $\tilde{b}_\mu = b_\mu - \frac{(bp)p_\mu}{p^2}$ і матрицю $\hat{\tilde{a}} = \tilde{\gamma}_\mu\tilde{a}_\mu = \tilde{\gamma}_\mu a_\mu = \gamma_5\gamma_\mu\tilde{a}_\mu$. Тоді скорочений проекційний оператор $P(p,a,b)$, який є матриця 4×4, можна представити у вигляді

$$P(p,a,b) = \frac{\hat{p}+M}{2M}\,\Pi(p,a,b) = \Pi(p,a,b)\frac{\hat{p}+M}{2M}\,,$$

$$P(p,a,b) = \tilde{a}_{\mu_1}\ldots\tilde{a}_{\mu_l}\sum_{\lambda=-l-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}U(\lambda,p)_{\mu_1\cdots\mu_l}\overline{U}(\lambda,p)_{\nu_1\cdots\nu_l}\tilde{b}_{\nu_1}\ldots\tilde{b}_{\nu_l} = \tilde{a}_{\mu_1}\ldots\tilde{a}_{\mu_l}P_{\mu_1\cdots\mu_l,\nu_1\ldots\nu_l}\tilde{b}_{\nu_1}\ldots\tilde{b}_{\nu_l}\,, \tag{11}$$

$$\Pi(p,a,b) = \tilde{a}_{\mu_1}\ldots\tilde{a}_{\mu_l}\Pi(p)_{\mu_1\cdots\mu_l,\nu_1\cdots\nu_l}\tilde{b}_{\nu_1}\ldots\tilde{b}_{\nu_l} =$$

$$= \frac{l!}{(2l+1)!!}\left(-\tilde{a}^2\right)^{\frac{l}{2}}\left(-\tilde{b}^2\right)^{\frac{l}{2}}\left[P'_{l+1}(z) - \frac{\hat{\tilde{a}}\hat{\tilde{b}}}{\sqrt{-\tilde{a}^2}\sqrt{-\tilde{b}^2}}P'_l(z)\right],\quad z = -\frac{(\tilde{a}\tilde{b})}{\sqrt{-\tilde{a}^2}\sqrt{-\tilde{b}^2}}\,, \tag{12}$$

де λ - спіральність.

В системі спокою ВФ на масовій поверхні $\frac{(\hat{p}+M)}{2M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, що і дозволяє звести $P(p,a,b)$ до $\Pi(\vec{a},\vec{b})$ при $\vec{p}=0$.

Оператор $\Pi^{l}_{\{\mu\}\{\nu\}}\equiv\Pi(p)_{\mu_1\cdots\mu_l,\nu_1\cdots\nu_l}$ представляє собою тензорний множник в проекційному операторі $P_{\mu_1\cdots\mu_l,\nu_1\cdots\nu_l}$. Для тензорних множників маємо

$$\Pi^{l}_{\{i\}\{j\}}\Pi^{l}_{\{j\}\{k\}}=\Pi^{l}_{\{i\}\{k\}}, \tag{13}$$

$$\Pi^{l}_{\{\mu\}\{\nu\}}\Pi^{l}_{\{\mu\}\{\rho\}}=(-1)^{l}\,\Pi^{l}_{\{\mu\}\{\rho\}}, \tag{14}$$

де $\Pi^{l}_{\{s\}\{j\}}=\Pi_{s_1\ldots s_l,k_1\ldots k_l}$.

Якщо потрібно знайти проекційний оператор з кількома вільними індексами (не повністю згорнутий з векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$), то можна скористатися формулою (7.13). Наприклад, для $J=3/2$ ми одержуємо

$$\Pi(\vec{a},\vec{b})=(\vec{a}\,\vec{b})-\frac{1}{3}(\vec{\sigma}\,\vec{a})(\vec{\sigma}\,\vec{b}),\qquad \Pi_{ik}=\delta_{ik}-\frac{1}{3}\sigma_i\sigma_k$$

$$\Pi(p,a,b)=-(\tilde{a}\,\tilde{b})-\frac{1}{3}€€\tilde{a}\tilde{b},\qquad \Pi_{\mu\nu}=d_{\mu\nu}-\frac{1}{3}\tilde{\gamma}_{\mu}\tilde{\gamma}_{\nu} \tag{15}$$

$$P_{\mu\nu}=\frac{\hat{p}+M}{2M}\left[d_{\mu\nu}-\frac{1}{3}\tilde{\gamma}_{\mu}\tilde{\gamma}_{\nu}\right]=\left[d_{\mu\nu}-\frac{1}{3}\tilde{\gamma}_{\mu}\tilde{\gamma}_{\nu}\right]\frac{\hat{p}+M}{2M}.$$

Можна для $J=\frac{3}{2}$ одержати в явному вигляді спін – вектор $U(p)^{\alpha}_{\mu}=u^{\alpha}{}_{\mu}(\lambda)$. Цей спін – вектор одержаний за методом [10], для різних спіральностей λ представлений в таблиці. Компоненти вектор – спінора $U^{\alpha}_{\mu}(x)$ виражаються через біспінори ψ_1 і ψ_2:

$$\psi_1=\left(p_0+\sqrt{p^2}\right)^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\ \dfrac{p_3}{p_0+\sqrt{p^2}}\\0\end{pmatrix},\qquad \psi_2=\left(p_0+\sqrt{p^2}\right)^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ -\dfrac{p_3}{p_0+\sqrt{p^2}}\end{pmatrix},\quad p=(p_0,0,0,p_3),$$

причому можна безпосередньо показати, що $\overline{\psi}_1\psi_1=\overline{\psi}_2\psi_2=2\sqrt{p^2}$, $\overline{\psi}_2\psi_1=0$, та

$$\overline{u}_{\mu}\left(\lambda'\right)u_{\mu}(\lambda)=-2\sqrt{p^2}\,\delta_{\lambda\lambda'},\qquad p_{\mu}u_{\mu}(\lambda)=\gamma_{\mu}u_{\mu}(\lambda)=0. \tag{16}$$

Відмітимо, що вигляд проекційного оператора $P_{\mu\nu}$, (а разом з ним і пропагатора $P_{\mu\nu}/\left(p^2-M^2\right)$) для частинки із спіном $\frac{3}{2}$ (15) відрізняється від проекційного оператора одержаного в традиційних підходах (наприклад, [10-12]). Наш проекційний оператор (15), (на масовій поверхні і за її межами , тобто при довільних p_{μ}) задовольняє умовам

$$p_{\mu}P_{\mu\nu}=P_{\mu\nu}p_{\mu}=\gamma_{\mu}P_{\mu\nu}=P_{\mu\nu}\gamma_{\nu}=0. \tag{17}$$

Проекційний оператор в традиційних підходах задовольняє умовам (17) тільки на масовій поверхні. Виконання умов (17) має важливе значення для усунення степеневих розбіжностей при довільних p_{μ}.

Порівняємо пропагатор ферміона із спіном $\frac{3}{2}$ у нашому підході (15) з пропогатором одержаним в традиційному підході :

$$P_{\mu\nu} = \frac{\hat{p}+M}{2M}\left(-g_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\gamma_\mu \gamma_\nu + \frac{2}{3}\frac{p_\mu p_\nu}{M^2} + \frac{\gamma_\mu p_\nu - p_\mu \gamma_\nu}{3M}\right). \tag{17a}$$

Видно, що масштабна вимірність пропагатора (15) у нашому підході таж сама як і для частинки із спіном $\frac{1}{2}$, тобто дорівнює –1. Тому при $\left|p_\rho\right| \to \infty$ наш пропагатор $P_{\mu\nu} \sim \left|p_\rho\right|^{-1}$. Масштабна вимірність пропагатора (17.a) дорівнює +1, тобто при $\left|p_\rho\right| \to \infty$ в традиційному підході $P_{\mu\nu} \sim \left|p_\rho\right|$. Така поведінка пропагатора частинки із спіном $\frac{3}{2}$ приводить до степеневої розбіжності у традиційному підході.

Таблиця. Спін - вектор $u_\mu^\alpha(\lambda)$ для $J = \frac{3}{2}$

λ	u_0^α	u_1^α	u_2^α	u_3^α
$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1$	$-\frac{i}{\sqrt{2}}\psi_1$	0
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{3p^2}}\, p_3 \psi_1$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}\psi_2$	$-\frac{i}{\sqrt{6}}\psi_2$	$\sqrt{\frac{2}{3p^2}}\, p_0 \psi_1$
$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{3p^2}}\, p_3 \psi_2$	$\frac{1}{\sqrt{6}}\psi_1$	$-\frac{i}{\sqrt{6}}\psi_1$	$\sqrt{\frac{2}{3p^2}}\, p_0 \psi_2$
$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2$	$-\frac{i}{\sqrt{2}}\psi_2$	0

ТЕОРЕМИ ПРО СТРУМИ ВЗАЄМОДІЙ

Для ВФ, які взаємодіють, має місце система неоднорідних рівнянь

$$\left(\hat{\partial} + iM\right)U(x)_{\mu_1 \cdots \mu_l} = j(x)_{\mu_1 \cdots \mu_l} \tag{18}$$

при додаткових умовах (7) – (9). Система (18) є узагальненням рівняння Дірака для частинки із спіном 1/2. Для струмів взаємодій (18) $j(x)_{\{\mu\}}^l \equiv j(x)_{\mu_1 \cdots \mu_l}$ справедливі теореми подібні до теорем для високоспінових бозонів.

Теорема про поля і струми

Якщо симетричні польові спін–тензори $U(x)_{\{\mu\}}^l$ неперервні, мають неперервні частинні похідні до другого порядку включно і задовольняють умовам (7)-(9), а симетричні спін–тензори струмів $j(x)_{\{\mu\}}^l$ неперервні і мають неперервні похідні першого порядку, то струми задовольняють умовам

$$\partial_{\mu_k} j(x)_{\mu_1 \cdots \mu_l} = 0\,. \tag{19}$$

$$g_{\mu_j \mu_k} j(x)_{\mu_1 \cdots \mu_l} = 0\,. \tag{20}$$

$$\tilde{\gamma}_{\mu_k} j(x)_{\mu_1 \cdots \mu_l} = \gamma_{\mu_k} j(x)_{\mu_1 \cdots \mu_l} = 0\,. \tag{21}$$

Умови (19) і (20) доводяться так же, як і (7.18), (7.19) для високоспінових бозонів. Щоб довести (21) скористаємося (9) в координатному представленні

$$\begin{aligned}&\gamma_{\mu_k}\left(\hat{\partial}+iM\right)U(x)_{\mu_1\cdots\mu_l}=2\partial_{\mu_k}U(x)_{\mu_1\cdots\mu_l}+\\&+\left(-\hat{\partial}+iM\right)\gamma_{\mu_k}U(x)_{\mu_1\cdots\mu_l}=\gamma_{\mu_k}j(x)_{\mu_1\cdots\mu_l}=0.\end{aligned}\tag{22}$$

Умови (19)- (21) мають простий смисл: оскільки оператор рівняння Дірака $\hat{\partial}+iM$, як і оператор рівняння Клейна–Гордона $\Box+M^2$, скалярний, то дія скалярного оператора на незвідне представлення повинна давати таке ж саме незвідне зображення, тобто тієї ж самої розмірності і з такими ж самими властивостями. Відмітимо знову, що невиконання умов (19)- (21), при виконанні (7)-(9), приводить до суперечливої, тобто несумісної, системи рівнянь.

Спін–тензор струмів $j(x)^l_{\{\mu\}}$, які задовольняють умовам (19)-(21), побудуємо з допомогою тензорного множника $\Pi(x)^l_{\{\mu\}\{\nu\}}$ в координатному представленні:

$$j(x)^l_{\{\mu\}}=\Pi(x)^l_{\{\mu\}\{\nu\}}\eta(x)^l_{\{\nu\}},\tag{23}$$

де $\eta(x)^l_{\{\nu\}}$– симетричний спін–тензор, який може не задовольняти умовам (19)-(21).

Теорема про асимптотику струмів

Твердження 1. *Система диференціальних рівнянь в частинних похідних, які задовольняють умовам (7)-(9) і (19)-(21) складається з рівнянь порядку* $2J$*, кожне з яких містить похідні довільних спін – тензорів струму* $\eta\left(p\right)^l_{\{\nu\}}$ *порядку* $2J-1$.

Тензорну частину $\Pi\left(p\right)^l_{\{\mu\}\{\nu\}}$ проекційного оператора одержуємо із скороченого проекційного оператора $\Pi\left(p,a,b\right)$ (12) з формули аналогічній (7.13) з диференціюванням l разів за a_μ і l разів за b_ν. Спочатку знайдемо частинні похідні другого порядку

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial a_\mu}\frac{\partial}{\partial b_\nu}\left(\tilde{a}\tilde{b}\right)=\frac{\partial}{\partial a_\mu}\frac{\partial}{\partial b_\nu}\left[(ab)-\frac{(ap)(bp)}{p^2}\right]=-d_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\\&\frac{\partial^2}{\partial a_\mu\partial a_\nu}(\tilde{a}^2)=\frac{\partial^2}{\partial a_\mu\partial a_\nu}\left[a^2-\frac{(ap)^2}{p^2}\right]=-2d_{\mu\nu}\\&\frac{\partial\hat{\tilde{a}}}{\partial a_\mu}=\gamma_5\left(\gamma_\mu-\frac{p_\mu\hat{p}}{p^2}\right)=\tilde{\gamma}_\mu.\end{aligned}\tag{24}$$

Для поліномів Лежандра в (12) використаємо формулу з [13, 14]

$$P_l(z)=\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}\left[z^l-\frac{l(l-1)}{2(2l-1)}z^{l-2}+\ldots.\right],\tag{25}$$

де крапки відповідають доданкам, в кожному з яких степінь z зменшується на два в порівнянні з попереднім членом. Тоді для першої частинки в (12) маємо

$$\left(-\tilde{a}^2\right)^{\frac{l}{2}}\left(-\tilde{b}^2\right)^{\frac{l}{2}}P^{/}_{l+1}(z)=\frac{(2l+2)!(l+1)(-1)^l}{2^{l+1}\left[(l+1)!\right]^2}\times$$

$$\times\left\{(\tilde{a}\tilde{b})^l-\frac{l(l-1)}{2(2l+1)}(\tilde{a}\tilde{b})^{l-2}\tilde{a}^2\tilde{b}^2+\ldots..\right\}.\tag{26}$$

З (24) випливає, що кожен доданок в (26) дає добуток l множників вигляду $p_{\mu_i} p_{\nu_k} / p^2$, $p_{\mu_i} p_{\mu_k} / p^2$, $p_{\nu_i} p_{\nu_k} / p^2$ $(i, k = 1,2,..., l)$, які містяться в тензорах $d_{\rho\sigma}$. Таким чином, перша частина в (12) дає в $\Pi(p)^l_{\{\mu\}\{\nu\}}$ множник $\left(p^2\right)^{-l}$. Для другої частинки в (12) маємо

$$\left(-\tilde{a}^2\right)^{\frac{l}{2}} \left(-\tilde{b}^2\right)^{\frac{l}{2}} \frac{\widehat{\tilde{a}}\widehat{\tilde{b}}}{\sqrt{-\tilde{a}^2}\sqrt{-\tilde{b}^2}} P_l^{\prime}(z) = \frac{(2l)!\, l(-1)^{l+1}}{2^l (l!)^2} \widehat{\tilde{a}}\widehat{\tilde{b}} \times$$
$$\times \left\{ \left(\tilde{a}\tilde{b}\right)^{l-1} - \frac{(l-1)(l-2)}{2(2l-1)} \left(\tilde{a}\tilde{b}\right)^{l-3} \tilde{a}^2 \tilde{b}^2 + \ldots \right\}. \tag{27}$$

З (24) бачимо, що (27), як і (26), дає в $\Pi(p)^l_{\{\mu\}\{\nu\}}$ l множників вигляду $p_\rho p_\sigma / p^2$. Тому обидві частини в квадратних дужках в (12) дають множник $\left(p^2\right)^{-l}$ в $\Pi(p)^l_{\{\mu\}\{\nu\}}$. Оскільки при переході до координатного зображення $p_\mu \to i\partial_\mu$, то $\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \to \partial_\mu \partial_\nu /$. Тоді, щоб одержати диференціальні рівняння для ВФ з $J = l + \frac{1}{2}$ необхідно оператор $\Pi(x)_{\mu_1 \ldots \mu_l, \nu_1 \ldots \nu_l}$ помножити на даламбертіан в степені l.

Таким чином для ВФ одержуємо систему диференціальних рівнянь

$$^{l}\ \Pi(x)^l_{\{\mu\}\{\nu\}} \left(\hat{\partial} + iM\right) U(x)^l_{\{\nu\}} = \ ^{l}\ \Pi(x)^l_{\{\mu\}\{\nu\}}\, \eta(x)^l_{\{\nu\}}. \tag{28}$$

Ці рівняння мають порядок $2l + 1 = 2J$ і вони містять частинні похідні порядку $2l = 2J - 1$ від довільних спін – тензорів струмів $\eta(x)^l_{\{\mu\}}$.

Твердження 2. *В системі диференціальних рівнянь для* $2J + 1$ *фізичних станів ВФ, яка складається з* $2J + 1$ *рівнянь, кожне з яких має порядок* $2J + 2$ *і містить частинні похідні від довільного спін – тензора струму* $\eta(x)^l_{\{\mu\}}$ *порядку* $2J + 1$.

Для того, щоб одержати сукупність з $2J + 1$ диференціальних рівнянь в частинних похідних для польових спін – тензорів $U(x)^l_{\{\nu\}}$, які відповідають $2J + 1$ незалежним фізичним станам перейдемо до неоднорідних рівнянь Клейна – Гордона. Для цього помножимо обидві частини (28) зліва на оператор $\hat{\partial} - iM$. В результаті маємо сукупність диференціальних рівнянь порядку $2l + 2 = 2J + 1$, які містять похідні спін – тензорів струмів порядку $2J$:

$$^{l}\ (\ \ + M^2)\ \Pi(x)^l_{\{\mu\}\{\nu\}}\, U(x)^l_{\{\nu\}} = \ ^{l} \left(\hat{\partial} - iM\right) \Pi(x)^l_{\{\mu\}\{\nu\}}\, \eta(x)^l_{\{\nu\}}. \tag{29}$$

При цьому ми також одержуємо, що для ВФ на масовій поверхні $p^2 = M^2$. Для цих J в [7], було показано, що для кожного з фізичних компонентів, які відповідають спіральності $|\lambda| \neq J$ існує кілька диференціальних рівнянь. Всі ці рівняння зводяться до одного для кожного фізичного стану з визначеною спіральностю, якщо ці рівняння додатково продиференціювати і скористатися умовами (17) і (19) (подібними до (7.17), (7.18)) . Така ситуація має місце і для ВФ. Дійсно розглянемо для деякого λ ($|\lambda| \neq J$) компоненти $U(x)_{0\mu_2 \ldots \mu_l}$ і $U(x)_{3\mu_2 \ldots \mu_l}$ (для частинки яка рухається вздовж вісі Z). Для цих двох компонентів ми маємо два рівняння, хоча ці компоненти відповідають одному фізичному стану. Одне рівняння одержимо, якщо продиференцюємо рівняння для $U(x)_{0\mu_2 \ldots \mu_l}$ за x_0, а рівняння для $U(x)_{3\mu_2 \ldots \mu_l}$ за x_3 і скористаємося умовами (7), (19). Таким чином в сукупності (системі) $2J + 1$ диференціальних рівнянь для кожного з $2J + 1$ станів ці рівняння мають порядок $2J + 2$ і містять похідні від струмів порядку $2J + 1$.

Теорема. *Якщо для* $2J+1$ *фізичних станів поля ВФ із спіном* J *система диференціальних рівнянь складається з* $2J+1$ *рівнянь в частинних похідних, то Фур'є -компоненти струмів* $\eta(p)^{l}_{\{\mu\}}$ *повинні спадати по меншій мірі як* $\left|p_\mu\right|^{-2J-5}$ *при* $\left|p_\mu\right| \to \infty$.

Дійсно для існування неперервних похідних $\eta(x)^{l}_{\{\mu\}}$ необхідна абсолютна збіжність не тільки інтеграла подібного до (7.31) (від Фур'є – компонент), але сукупності інтегралів (від Фур'є – компонент помноженних на імпульси), причому з імпульсами p в степені до $2J+1$:

$$\int \left|\eta(p)_{\mu_1\ldots\mu_l}\, p_{\nu_1}\cdots p_{\nu_m}\right| d^4 p\,, \tag{30}$$

де m може приймати значення від 0 до $2J+1$.

Тому для ВФ Фур'є – компоненти струму повинні спадати при $\left|p_\mu\right| \to \infty$ як

$$\left|\eta(p)_{\mu_1\ldots\mu_l}\right| < \left|p_\mu\right|^{-2J-5} \tag{31}$$

Цей висновок ми одержали з аналізу класичних рівнянь. В квантованій теорії відомо, що ренормалізуємою є взаємодія псевдоскалярних мезонів з нуклонами $g\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi$ (тобто нуклонний струм $J(x)=\gamma_5\psi\varphi$ не має залежності від імпульсу нуклона). Тому будемо вважати, що квантованний струм може спадати як

$$\left|\eta(p)_{\mu_1\ldots\mu_l}\right| < \left|p_\mu\right|^{-2J-1}. \tag{32}$$

Видно, що при одинаковому l струми взаємодій ВФ повинні спадати при $\left|p_\mu\right| \to \infty$ швидше від струмів взаємодії високоспінових бозонів.

РЕЗУЛЬТАТИ І ОБГОВОРЕННЯ

Ми показали, що традиційні підходи суперечливі. Дійсно система рівнянь (18) суперечлива у випадку виконання умов (7)-(9) для польових спін – тензорів і невиконання аналогічних умов (19) – (21) для спін тензорів струмів взаємодій ВФ. З точки зору усунення степеневих розбіжностей в пропагаторах ВФ дуже важливе значення має збереження струму (19). При виконанні (19) зникають добутки 4 – імпульсів ВФ, які містяться в тензорній частині пропагаторів ВФ, на струми взаємодій ВФ. Таким чином в нашому підході (тобто при виконанні (7)-(9) та (19)-(21)) не виникає одне з джерел розбіжностей, яке існує в традиційних підходах до взаємодій ВФ з $J \geq \frac{3}{2}$. Друге джерело розбіжностей, яке існує в традиційних підходах, ліквідується в нашому підході внаслідок того, що систему диференціальних рівнянь в частинних похідних (18) ми зводимо до сукупності рівнянь, для кожного з $2J+1$ фізичних станів. Кожне з цих рівнянь має досить високий порядок. Тому струми взаємодій ВФ у імпульсному просторі для виконання умови збіжності сукупності інтегралів (30) повинні досить сильно спадати при $\left|p_\mu\right| \to \infty$. Таким чином, повинні бути збіжними не тільки інтеграли від модулів компонентів спін – тензорів струмів $\eta(p)\mu_1,\ldots,\mu_l$ але, також і інтеграли в сукупності моментів модулів цих струмів

$$M^{m_0,m_1,m_2,m_3}_{\mu_1\ldots\mu_l} = \int \left|\eta(p)_{\mu_1\ldots\mu_l}\, p_{\nu_1}\ldots p_{\nu_m}\right| d^4 p\,, \tag{33}$$

де цілі невід'ємні числа m_0, m_1, m_2, m_3 відповідають кількості компонентів p_0, p_1, p_2, p_3 у добутку 4 – імпульсів $p_{\nu_1}\ldots p_{\nu_m}$ (30), причому $m_0+m_1+m_2+m_3=m$, і $0 \leq m \leq 2J+1$. Іншими словами, струми взаємодій ВФ повинні містити функції 4-імпульсів (форм - фактори), які повинні забезпечувати спадання струмів при $\left|p_\mu\right| \to \infty$. З формул (31) (або (32)) випливає, що таке спадання повинно посилюватися із збільшенням спіну ВФ. Можливо, що як раз цим і пояснюється правило відоме з експериментів про формування ВФ – резонансів, а не їхне утворення.

Одержані наслідки теорем про поля і струми та про асимптотику струмів необхідно перевірити на експерименті. У зв'язку з цим велике значення має вивчення наслідків моделі взаємодій ВФ – резонансів з псевдоскалярними мезонами та нуклонами (наприклад, $N^* \to N\pi$, $N\pi \to N^*$ і серед них

$\Delta(1232)\to N\pi,\ N\pi\to\Delta(1232)$) в резонансній області енергій. Відмітимо, що такій моделі для виконання умов збіжності сукупності інтегралів (30) степінь спадання струмів $\eta(p)^{l}_{\{\mu\}}$ при $|p_\mu|\to\infty$ може посилитися в порівнянні з (31) (або (32)).

В нашому підході залишаються справедливими наслідки збереження струмів взаємодій високоспінових частинок для асиметрій та елементів матриці густини при високих енергіях [2,15].

На заключення дякуємо В.Д. Гершуну за корисне обговорення проблем високоспинових частинок. Автори сумують у зв’язку з втратою В.Г. Зими, дискусії з яким, як знавцем математичних методів в фізики елементарних частинок, були дуже корисними.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ахиезер А.И., Рекало М.П., Электродинамика адронов.- Киев: Наукова думка, 1977, 495 с.
2. Кулиш Ю.В. // ЯФ. - 1989. – Т. 50. -Вып. 6. - С. 1697-1704.
3. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теорию квантованных полей. – М.: Наука, 1984, 598 с.
4. Ахиезер А.И., Пелетминский С. В., Теория фундаментальных взаимодействий. – Киев: Наукова думка, 1993, 570 с.
5. Зима В.Г., Вальверде Х. // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. – 2003. -№585. – Випуск 1/21/.-С.3-18.
6. Fedoruk S., Zima V.G. // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. – 2003. -№585. – Випуск 1/21/.-С.39-48.
7. Куліш Ю.В., Рибачук О.В. // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. – 2003. -№585. – Віпуск 1/21/.-С.49-55.
8. Kulish Yu.V., Rybachuk E.V. // Problems of atomic science and technology. KIPT. – 2001.-№6(1). - P.-84-87.
9. Де Альфаро В., Фубини С., Фурлан Г., Росетти К . Токи в физике адронов.- М.: Мир, 1977, 672 с.
10. Новожилов Ю.В. Введение в теорию элементарных частиц.- М.: Наука, 1972, 472 с.
11. Ландау Л.Д.,Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Релятивистская квантовая теория. – ч. 1. – М.: Наука, 1968, 480с.
12. Газиорович С. Физика элементарных частиц. – М.: Наука, 1969, 744 с.
13. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. –Т. 2, М.: ФМ, 1963, 516 с.
14. Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петьо Г., Фогель Г. Функции математической физики.- М.: ФМ, 1963, 102 с.
15. Kulish Yu. V. High-Energy Spin Physics Proceedings of the 9-th International Symposium Held at Bonn, FRG, 6-15 September 1990, Berlin: Springer-Verlag, V. 1, P. 600-603, 1991.

PROPERTIES OF HIGH-SPIN FERMION INTERACTION CURRENTS

Yu.V. Kulish, E.V. Rybachuk
Ukrainian State Academy of Railway Transport
61050, Ukraine, Kharkov, Sq. Feyerbach, 7, e-mail: Kulish@kart equ.ua

The problem of power divergences in theory of high-spin massive fermion $\left(J>\frac{1}{2}\right)$ interactions is investigated. The conventional approaches have two sources of the power divergences: 1) the factors like to p_μ / M in the propagators of the high-spin fermions (p_μ and M are the momentum and the mass of the high-spin fermion, respectively); 2) the products of the p_μ and some constants in the components of the spin-tensor for interaction current $j_{\mu_1\ldots\mu_l}$. It is shown that in consistent theory the spin-tensors for the interaction current $j_{\mu_1\ldots\mu_l}$ must be traceless and their convolutions with the momentum p and γ - matrixes must vanish . Therefore the contributions of the factors of p_μ / M -type to the high-spin fermion propagators must vanish. As the equations for the high-spin fermion interactions are the system of heterogeneous differential equations, the field and current spin-tensors must have the continuous partial derivatives of $2J+2$ and $2J+1$, respectively. In result, the current components must include the form factors, which provide the decreasing of these components at least as $|p_\mu|^{-(2J+1)}$ with $|p_\mu|\to\infty$.

KEY WORDS: high spin, fermions, divergences, differential equations, consistent theory.