

БУДІВНИЦТВО, РЕКОНСТРУКЦІЯ ТА  
ЕКСПЛУАТАЦІЯ КОНСТРУКЦІЙ І СПОРУД  
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

УДК 625.03

*Даренский А.Н., к.т.н., профессор (УкрДАЗТ)*

РАСЧЕТ РЕЛЬСА НА КРУЧЕНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ  
ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ КАК БАЛКИ НА  
УПРУГИХ ОПОРАХ

**Введение.** В качестве одной из основных моделей для исследований кручения рельса принята (например в [1, 2, 3, 4, 5]) теория проф. С.П. Тимошенко [6, 7]. Эта теория исходит из основного положения стесненного кручения тонкостенного стержня открытого профиля, которое заключается в разделении крутящего момента на два: первый из них вызывает чистое кручение, а второй – изгиб головки и подошвы рельса.

Общее дифференциальное уравнение кручения С.П. Тимошенко имеет вид:

$$-C \frac{d\varphi}{dx} + Dh^2 \frac{d^3\varphi}{dx^3} = M_k, \quad (1)$$

где  $C$  – жесткость рельса на кручение ( $H \cdot m^2$ );

$D$  – приведенная жесткость головки и подошвы рельса на изгиб ( $H \cdot m^2$ ).

Жесткость рельса на кручение определяется формулой Сен – Венана:

$$C = \frac{F^4 G}{4\pi^2 I_p},$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения рельса ( $m^2$ );

$G$  – модуль упругости рельсовой стали второго рода ( $H / m^2$ );

$I_p$  –полярный момент инерции поперечного сечения рельса ( $m^4$ )

Приведенная жесткость головки и подошвы рельса на изгиб равна:

$$D = \frac{I_{y2} \cdot I_{yn}}{I_{y2} + I_{yn}} E \quad (H \cdot m^2),$$

где  $I_{y2}, I_{yn}$  – моменты инерции головки и подошвы рельса относительно вертикальной оси ( $m^4$ );

$E$  – модуль упругости рельсовой стали первого рода ( $H/m^2$ ).

Используя общее дифференциальные уравнения кручения, большинство исследователей [3, 4, 5 и др.] применяли его для расчетов, где рассматривали рельс, как балку на сплошном упругом основании. Получение расчетных уравнений при этом способе сводилось к решению дифференциальных уравнений 8 – го порядка.

В.И. Ангелейко [1] и Н.К. Снитко [2] решали задачу о кручении рельса как балки на отдельных упругих опорах, применяя метод начальных параметров, однако функции  $M_\kappa = f(x)$  кусочно – линейна (рис. 1), постоянна в пределах пролетов и не дифференцируется в точках размещения опор. Поэтому произвольные постоянные интегрирования нужно определять для каждого пролета.

**Основная часть.** Обозначим в уравнении (1)

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{d\varphi}{dx} \\ \kappa &= \sqrt{\frac{C}{D \cdot h^2}} \\ p &= D \cdot h^2 \\ f(x) &= \frac{M_\kappa}{D \cdot h^2} = \frac{M_\kappa}{p} \end{aligned} \right\} . \quad (2)$$

Тогда уравнение (1) будет иметь вид:

$$\theta'' - \kappa^2 \theta = f(x) . \quad (3)$$

Это уравнение представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение второй степени с постоянными коэффициентами. Соответствующее ему однородное уравнение:

$$\theta'' - K^2 \cdot \theta = 0 \quad (4)$$

Общее решение этого однородного уравнения будем искать в виде:

$$\bar{\theta} = C_1 \operatorname{ch} Kx + C_2 \operatorname{sh} Kx \quad (5)$$

Заменим в этом уравнении постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  функциями  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$  так, чтобы функция

$$\theta = C_1(x) \operatorname{ch} Kx + C_2(x) \operatorname{sh} Kx \quad (6)$$

была бы решением уравнения (3).

Первая производная функции (6)

$$\theta' = C_1'(x) \operatorname{ch} Kx + C_1(x) K \operatorname{sh} Kx + C_2'(x) \operatorname{sh} Kx + C_2(x) K \operatorname{ch} Kx \quad (7)$$

Наложим на  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$  условие:

$$C_1'(x) \operatorname{ch} Kx + C_2'(x) \operatorname{sh} Kx = 0 \quad (8)$$

Тогда (7) будет иметь вид:

$$\theta' = KC_1 \operatorname{sh} Kx + KC_2(x) \operatorname{ch} Kx$$

Вторая производная

$$\theta'' = C_1' K \operatorname{sh} Kx + C_1(x) K^2 \operatorname{ch} Kx + C_2'(x) K \operatorname{ch} Kx + C_2(x) K^2 \operatorname{sh} Kx \quad (8)$$

Подставим (6) и (8) в (3):

$$K C_1'(x) \operatorname{sh} Kx + K^2 C_1(x) \operatorname{ch} Kx + K C_2'(x) \operatorname{ch} Kx + K^2 C_2(x) \operatorname{sh} Kx - K^2 C_1(x) \operatorname{ch} Kx - K^2 C_2(x) \operatorname{sh} Kx = f(x)$$

Получим:

$$\kappa C_1'(x)sh\kappa x + \kappa C_2'(x)ch\kappa x = f(x)$$

Таким образом, (5) – частное решение уравнения (3), когда функции  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$  удовлетворяют системе:

$$\left. \begin{aligned} C_1'(x)ch\kappa x + C_2'(x)sh\kappa x &= 0 \\ \kappa C_1'(x)sh\kappa x + \kappa C_2'(x)ch\kappa x &= f(x) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Умножим первое уравнение на  $\kappa ch\kappa x$ , а второе на  $sh\kappa x$  и сложим их. Получим:

$$\kappa C_1'(x)(ch^2\kappa x - sh^2\kappa x) = -sh\kappa x f(x)$$

Так как  $ch^2\kappa x - sh^2\kappa x = 1$ , то

$$C_1'(x) = -\frac{1}{\kappa} f(x)sh\kappa x$$

Умножим первое уравнение системы (9) на  $-\kappa sh\kappa x$ , а второе на  $ch\kappa x$  и сложим их. После преобразований получим:

$$C_2'(x) = -\frac{1}{\kappa} f(x)ch\kappa x$$

Общее решение уравнения (3):

$$\theta = C_1ch\kappa x + C_2sh\kappa x - \frac{ch\kappa x}{\kappa} \int f(x)sh\kappa x dx + \frac{sh\kappa x}{\kappa} \int f(x)ch\kappa x dx$$

Поскольку  $f(x)$  постоянна в пределах каждого пролета

$$\theta = C_1ch\kappa x + C_2sh\kappa x - \frac{ch^2\kappa x}{\kappa^2} f(x) + \frac{sh^2\kappa x}{\kappa^2} f(x)$$

или иначе:

$$\theta = C_1ch\kappa x + C_2sh\kappa x - \frac{f(x)}{\kappa^2} \quad (10)$$

Полученное уравнение (10) является решением уравнения (3).

Для угла закручивания рельса  $\varphi$  уравнение (10) будет иметь вид:

$$\varphi = \int \theta dx$$

$$\varphi = \frac{C_1}{\kappa} \operatorname{sh} \kappa x + \frac{C_2}{\kappa} \operatorname{ch} \kappa x - \frac{f(x)}{\kappa^2} x + C_3,$$

или, с учетом обозначений, принятых в формулах (2)

$$\varphi = \frac{C_1}{\kappa} \operatorname{sh} \kappa x + \frac{C_2}{\kappa} \operatorname{ch} \kappa x - \frac{M(x)}{p\kappa^2} + C_3. \quad (11)$$

На рисунке 1 приведена схема действия горизонтальной поперечной силы  $N_{ед}$ , приложенной к головке рельса. Под действием этой силы на рельс, кроме горизонтальных реакций упругих опор  $R_{зедj}$ , действуют упругие реактивные опорные моменты  $M_{онj}$ . Величина каждого реактивного опорного момента равна:

$$M_{онj} = C_\varphi \cdot \varphi_{онj}, \quad (12)$$

где  $C_\varphi$  – жесткость рельсовой опоры на кручение ( $H/рад$ );

$\varphi_{онj}$  – угол закручивания рельса на  $j$ -ой опоре (рад).

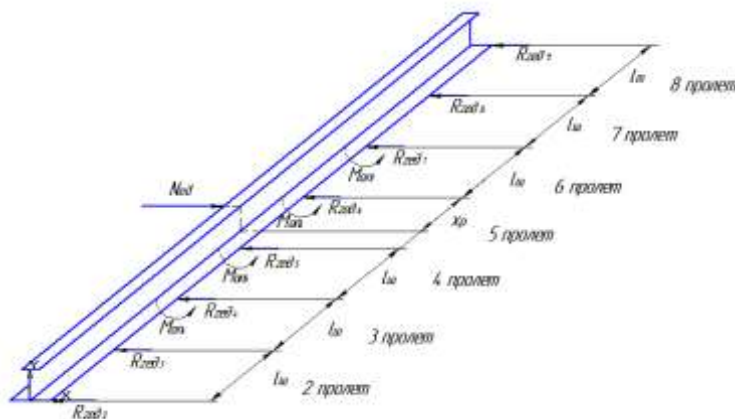


Рисунок 1 - Схема действия на рельс горизонтальной поперечной силы

Условие равновесия рельса относительно продольной оси проходящей через центр кручения:

$$M_{едкр} = N_{ед} \cdot h = C_{\varphi} \cdot \sum \varphi_{onj} \quad (13)$$

Проведенные в 1989 – 1991г и в 2007 – 2009гг. экспериментальные работы [8], что упругие отжатия подошвы рельса на опорах, расположенных далее 2,5м и углы закручивания рельса на опорах, расположенных далее 1м от точки приложения горизонтальной поперечной силы, представляют собой величины третьего порядка малости и обратного знака по отношению к величинам отжатий и углов закручивания на опорах, расположенных ближе, чем 0,5м.

Это относится как к пути на железобетонных, так и на деревянных шпалах. Тогда, к дальнейшим расчетам принимаем:

$$\begin{aligned} Z_{ед1} &= Z_{ед10} = 0 \\ R_{z\ ед1} &= R_{z\ ед10} = 0 \\ \varphi_{on2} &= \varphi_{on3} = \varphi_{on8} = \varphi_{on9} = 0 \\ M_{on2} &= M_{on3} = M_{on8} = M_{on9} = 0 \end{aligned}$$

Эпюры крутящих моментов  $M(x)$ , углов закручивания  $\varphi(x)$  и производных углов закручивания  $\varphi'(x)$  и  $\varphi''(x)$  будут иметь вид, представленный на рис.2. Принятая таким образом расчетная схема кручения рельса представляет собой балку на шести упругих опорах, причем  $\varphi_8 = \varphi_3 = 0$ . Система является статически неопределимой, степень статической неопределимости равна четырем и дополнительными к уравнениям (12) и (13) условиями должны быть условия равенства углов закручивания рельса на опорах для разных пролетов балки. Однако общее дифференциальное уравнение (1) – уравнение третьей степени и произвольные постоянные интегрирования  $C_1, C_2, и C_3$  в уравнении (11) нужно определять, вводя в решение дополнительно условия равенства первой и второй производных углов  $\varphi$  на опорах для смежных пролетов  $n$  и  $n+1$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{onj(n)} &= \varphi_{onj(n+1)} \\ \varphi'_{onj(n)} &= \varphi'_{onj(n+1)} \\ \varphi''_{onj(n)} &= \varphi''_{onj(n+1)} \end{aligned} \right\} \cdot \quad (14)$$

Рассмотрим вначале правую часть рельса – от точки действия поперечной силы до опоры 8. Принимаем, что на эту часть действует поперечная сила  $(R_{z9} + R_{z8} + R_{z7} + R_{z6} + R_{z5})$  и крутящий момент в пределах пролета 5 равен:

$$M_{5II} = (R_{z9} + R_{z8} + R_{z7} + R_{z6}) \cdot h$$

Для остальных пролетов (рис. 2)

$$\left. \begin{aligned} M_6 &= M_{5II} - M_{on6} \\ M_7 &= M_6 - M_{on7} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Для седьмого пролета, поскольку  $\varphi_{on8} = 0$ , величину крутящего момента можно определить иначе:

$$M_7 = (R_{z8} + R_{z9}) \cdot h \quad (16)$$

Обозначим через  $x_k$  расстояние от опоры 7 до точки, где  $\varphi(x) = 0$ ;  $\varphi'(x) = 0$  и  $\varphi''(x) = 0$  (рисунок 2).

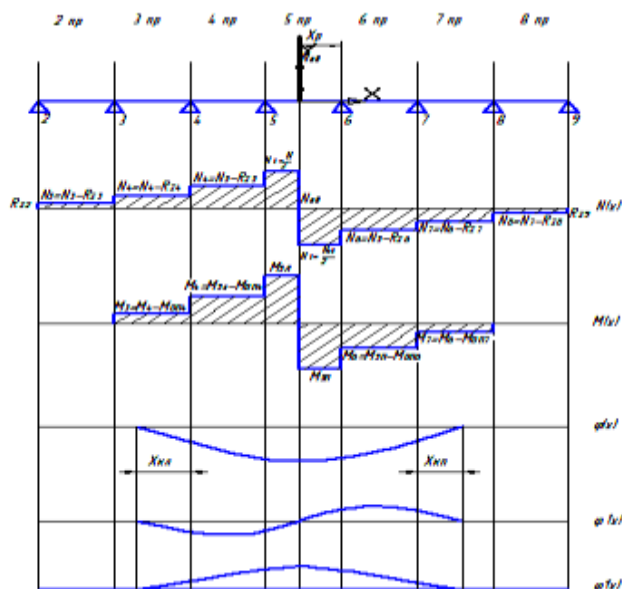


Рисунок 2 .- Эпюра поперечных сил, крутящих моментов, углов закручивания и их производных в рельсе.

Дважды дифференцируя уравнение (11) получим основную систему для определения постоянных  $C_1, C_2, \text{ и } C_3$  в пределах каждого пролета:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{(x)} &= \frac{1}{\kappa} C_1 \operatorname{sh} \kappa x + \frac{1}{\kappa} C_2 \operatorname{ch} \kappa x - \frac{M_i(x)}{p\kappa^2} x + C_3 \\ \varphi'_{(x)} &= C_1 \operatorname{ch} \kappa x + C_2 \operatorname{sh} \kappa x - \frac{M_i(x)}{p\kappa^2} \\ \varphi''_{(x)} &= C_1 \kappa \operatorname{sh} \kappa x + C_2 \kappa \operatorname{ch} \kappa x \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Обозначим постоянные  $C_1, C_2, \text{ и } C_3$  для седьмого пролета  $C_{1-7}, C_{2-7}, \text{ и } C_{3-7}$ . Для точки, в которой  $\varphi(x) = 0$ ,  $\varphi'(x) = 0$  и  $\varphi''(x) = 0$ ,  $x = x_p + \ell_u + x_\kappa$ , система (17) будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\kappa} C_{1-7} \operatorname{sh} \kappa (x_p + \ell_u + x_{\kappa\Pi}) + \frac{1}{\kappa} C_{2-7} \operatorname{ch} \kappa (x_p + \ell_u + x_{\kappa\Pi}) - \frac{M_7}{p\kappa^2} (x_p + \ell_u + x_{\kappa\Pi}) + C_{3-7} &= 0 \\ C_{1-7} \operatorname{ch} \kappa (x_p + \ell_u + x_{\kappa\Pi}) + C_{2-7} \operatorname{sh} \kappa (x_p + \ell_u + x_{\kappa\Pi}) - \frac{M_7}{p\kappa^2} &= 0 \\ \kappa C_{1-7} \operatorname{sh} \kappa (x_p + \ell_u + x_{\kappa\Pi}) + \kappa C_{2-7} \operatorname{ch} \kappa (x_p + \ell_u + x_{\kappa\Pi}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Сократим обе части третьего уравнения на  $\kappa$ .

Умножим второе уравнение этой системы на  $\operatorname{ch} \kappa (x_p + \ell_u + x_\kappa)$ , третье на  $\operatorname{sh} \kappa (x_p + \ell_u + x_\kappa)$  и вычтем из второго третье уравнение. Получим:

$$\begin{aligned} C_{1-7} \operatorname{ch}^2 \kappa (x_p + \ell_u + x_\kappa) + C_{2-7} \operatorname{sh} \kappa (x_p + \ell_u + x_\kappa) \operatorname{ch} \kappa (x_p + \ell_u + x_\kappa) - C_{1-7} \operatorname{sh}^2 \kappa (x_p + \ell_u + x_\kappa) - \\ - C_{2-7} \operatorname{ch} \kappa (x_p + \ell_u + x_\kappa) \operatorname{sh} \kappa (x_p + \ell_u + x_\kappa) = \frac{M_7}{p\kappa^2} \operatorname{ch} \kappa (x_p + \ell_u + x_{\kappa\Pi}) \end{aligned}$$

Поскольку  $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 1$ , получим:

$$C_{1-7} = \frac{M_7}{p\kappa^2} \operatorname{ch}_\kappa \kappa (x_p + \ell_u + x_{\kappa\Pi})$$



Умножим второе уравнение системы (18) на  $shk(x_p + \ell_u + x_{кП})$ , третье – на  $chk(x_p + \ell_u + x_{кП})$  и вычтем из второго третье уравнение. Получим:

$$C_{1-7} chk(x_p + \ell_u + x_{кП}) shk(x_p + \ell_u + x_{кП}) + C_{2-7} sh^2 k(x_p + \ell_u + x_{кП}) - C_{1-7} shk(x_p + \ell_u + x_{кП}) chk(x_p + \ell_u + x_{кП}) - C_{2-7} ch^2 k(x_p + \ell_u + x_{кП}) = \frac{M_7}{pk} shk(x_p + \ell_u + x_{кП})$$

Поскольку  $sh^2 x - ch^2 x = -1$ , то получим

$$C_{2-7} = -\frac{M_7}{pk^2} shk(x_p + \ell_u + x_{кП})$$

Подставим значения  $C_{1-7}, C_{2-7}$  в первое уравнение системы (18):

$$\begin{aligned} & \frac{M_7}{pk^2} chk(x_p + \ell_u + x_{кП}) \cdot shk(x_p + \ell_u + x_{кП}) - \frac{M_7}{pk^2} shk(x_p + \ell_u + x_{кП}) \cdot chk(x_p + \ell_u + x_{кП}) + C_{3-7} = \\ & = \frac{M_7}{pk^2} (x_p + \ell_u + x_{кП}). \end{aligned}$$

Тогда  $C_{3-7} = \frac{M_7}{pk^2} (x_p + \ell_u + x_{кП})$ .

Подставим полученные значения  $C_{1-7}, C_{2-7}$  и  $C_{3-7}$  в первое уравнение основной системы (17) и получим частное решение уравнения (11) для седьмого пролета:

$$\varphi_7 = \frac{M_7}{pk^3} chk(x_p + \ell_u + x_{кП}) \cdot shk - \frac{M_7}{pk^3} sh(x_p + \ell_u + x_{кП}) \cdot chk x + \frac{M_7}{pk^2} (x_p + \ell_u + x_{кП}) - \frac{M_7}{pk^2} x$$

Или иначе

$$\varphi_7 = \frac{M_7}{pk^3} (x_p + \ell_u + x_{кП} - x) + \frac{M_7}{pk^3} [chk(x_p + \ell_u + x_{кП}) \cdot shk x - shk(x_p + \ell_u + x_{кП}) \cdot chk x]$$

Учитывая, что  $ch y sh x - sh y \cdot ch x = -sh(x - y)$

$$\varphi_7 = \frac{M_7}{pk^2} (x_p + \ell_u + x_{кП} - x) - \frac{M_7}{pk^3} \cdot shk(x_p + \ell_u + x_{кП} - x) \quad (19)$$

Для опоры 7  $\varphi_7 = \varphi_{on7}$ ;  $x = x_p + \ell_u$

$$\varphi_{on7} = \frac{M_7}{p\kappa^2} \left( x_{\kappa\Pi} - \frac{sh\kappa x_{\kappa\Pi}}{\kappa} \right) \quad (20)$$

Первая производная уравнения (19):

$$\varphi'_7 = -\frac{M_7}{p\kappa^2} - \frac{M_7}{p\kappa^2} ch\kappa (x_p + \ell_u + x_{\kappa\Pi} - x)$$

Для опоры 7 ( $x = x_p + \ell_u$ )

$$\varphi'_{on7} = -\frac{M_7}{p\kappa^2} (ch\kappa x_{\kappa\Pi} + 1) \quad (21)$$

Вторая производная уравнения (19):

$$\varphi''_7 = -\frac{M_7}{p\kappa^2} \kappa sh\kappa (x_p + \ell_u + x_{\kappa\Pi} - x)$$

Для опоры 7:

$$\varphi''_{on7} = -\frac{M_7}{p\kappa^2} \kappa sh\kappa x_{\kappa\Pi} \quad (22)$$

Рассмотрим далее шестой пролет балки (рис. 2). Обозначим постоянные интегрирования уравнения (11) через  $C_{1-6}$ ,  $C_{2-6}$  и  $C_{3-6}$ . Для опоры 7, используя уравнения (20), (21) и (22) система уравнений (17) будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{on7} &= \frac{1}{\kappa} C_{1-6} sh\kappa (x_p + \ell_u) + \frac{1}{\kappa} ch\kappa (x_p + \ell_u) - \frac{M_6}{p\kappa^2} (x_p + \ell_u) + C_{3-6} = \\ &= -\frac{M_7}{p\kappa^2} \left( \frac{sh\kappa x_{\kappa\Pi}}{\kappa} - x_{\kappa} \right) \\ \varphi'_{on7} &= C_{1-6} ch\kappa (x_p + \ell_u) + C_{2-6} sh\kappa (x_p + \ell_u) - \frac{M_6}{p\kappa^2} = -\frac{M_7}{p\kappa^2} (ch\kappa x_{\kappa\Pi} + 1) \\ \varphi''_{on7} &= C_{1-6} \kappa sh\kappa (x_p + \ell_u) + C_{2-6} \kappa ch\kappa (x_p + \ell_u) = -\frac{M_7}{p\kappa^2} \kappa sh\kappa x_{\kappa\Pi} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Выполнив расчетные действия, аналогичные расчетам для в пролёта, получим значения постоянных интегрирования:

$$C_{1-6} = \left( \frac{M_6}{p\kappa^2} - \frac{M_7}{p\kappa^2} \right) ch\kappa(x_p + \ell_u) - \frac{M_7}{p\kappa^2} ch\kappa(x_p + \ell_u + x_{\kappa\Pi})$$

$$C_{2-6} = - \left( \frac{M_6}{p\kappa^2} - \frac{M_7}{p\kappa^2} \right) sh\kappa(x_p + \ell_u) + \frac{M_7}{p\kappa^2} sh\kappa(x_p + \ell_u - x_{\kappa\Pi})$$

$$C_{3-6} = \frac{M_6}{p\kappa^2}(x_p + \ell_u) + \frac{M_7}{p\kappa^2} x_{\kappa\Pi}$$

Частное решение уравнения (11) для шестого пролета получим, подставив значения  $C_{1-6}$ ,  $C_{2-6}$  и  $C_{3-6}$  в первое уравнение системы (17):

$$\begin{aligned} \varphi_6 = & \frac{1}{\kappa} \left( \frac{M_6}{p\kappa^2} - \frac{M_7}{p\kappa^2} \right) ch\kappa(x_p + \ell_u) \cdot sh\kappa x - \frac{1}{\kappa} \frac{M_7}{p\kappa^2} \cdot ch\kappa(x_p + \ell_u - x_{\kappa\Pi}) sh\kappa x - \\ & - \frac{1}{\kappa} \left( \frac{M_6}{p\kappa^2} - \frac{M_7}{p\kappa^2} \right) sh\kappa(x_p + \ell_u) \cdot ch\kappa x + \frac{1}{\kappa} \frac{M_7}{p\kappa^2} sh\kappa(x_p + \ell_u - x_{\kappa\Pi}) ch\kappa x + \\ & + \frac{M_6}{p\kappa^2}(x_p + \ell_u) - \frac{M_6}{p\kappa^2} x + \frac{M_7}{p\kappa^2} x_{\kappa\Pi}. \end{aligned}$$

После преобразований получим:

$$\begin{aligned} \varphi_6 = & \frac{M_6}{p\kappa^2}(x_p + \ell_u - x) + \frac{M_7}{p\kappa^2} x_{\kappa\Pi} - \frac{1}{\kappa} \left( \frac{M_6}{p\kappa^2} - \frac{M_7}{p\kappa^2} \right) sh\kappa(x_p + \ell_u - x) + \\ & + \frac{1}{\kappa} \frac{M_7}{p\kappa^2} sh\kappa(x_p + \ell_u - x_{\kappa\Pi} - x). \end{aligned} \tag{24}$$

Для опоры б  $x = x_p$ , тогда угол закручивания рельса на опоре б равен:

$$\varphi_{оп6} = \frac{M_6}{p\kappa^2} \ell_u + \frac{M_7}{p\kappa^2} x_{\kappa\Pi} - \left( \frac{M_6}{p\kappa^2} - \frac{M_7}{p\kappa^2} \right) \frac{sh\kappa \ell_u}{\kappa} + \frac{M_7}{p\kappa^2} \frac{sh\kappa(\ell_u - x_{\kappa\Pi})}{\kappa} \tag{25}$$

Дифференцируем уравнение (24):

$$\varphi'_6 = -\frac{M_6}{p\kappa^2} - \left( \frac{M_6}{p\kappa^2} - \frac{M_7}{p\kappa^2} \right) \operatorname{ch}\kappa(x_p + \ell_u - x) + \frac{M_7}{p\kappa^2} \operatorname{ch}\kappa(x_p + \ell_u - x_{\kappa\Pi} - x)$$

Для опоры 6  $x = x_p$

$$\varphi'_{on6} = -\frac{M_6}{p\kappa^2} - \left( \frac{M_6}{p\kappa^2} - \frac{M_7}{p\kappa^2} \right) \operatorname{ch}\kappa \ell_u + \frac{M_7}{p\kappa^2} \operatorname{ch}\kappa(\ell_u - x_{\kappa\Pi}), \quad (26)$$

Вторая производная уравнения (24):

$$\varphi''_6 = -\left( \frac{M_6}{p\kappa^2} - \frac{M_7}{p\kappa^2} \right) \kappa \operatorname{sh}\kappa(x_p + \ell_u - x) + \frac{M_7}{p\kappa^2} \kappa \operatorname{sh}\kappa(x_p + \ell_u - x_{\kappa\Pi} - x).$$

Для опоры 6: ( $x = x_p$ )

$$\varphi''_{on6} = -\left( \frac{M_6}{p\kappa^2} - \frac{M_7}{p\kappa^2} \right) \kappa \operatorname{sh}\kappa \ell_u + \frac{M_7}{p\kappa^2} \kappa \operatorname{sh}\kappa(\ell_u - x_{\kappa\Pi}). \quad (27)$$

Для пятого пролета постоянные интегрирования обозначим  $C_{1-5}, C_{2-5}$  и  $C_{3-5}$ . Основная система (17) для опоры 6 будет иметь вид (уравнения (25), (26) и (27)):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{on6} &= \frac{1}{\kappa} C_{1-5} \operatorname{sh}\kappa x_p + \frac{1}{\kappa} C_{2-5} \operatorname{ch}\kappa x_p - \frac{M_{5\Pi}}{p\kappa^2} x_p + C_{3-5} = -\frac{M_6}{p\kappa^2} \ell_u + \frac{M_7}{p\kappa^2} x_{\kappa\Pi} - \\ &- \left( \frac{M_6}{p\kappa^2} - \frac{M_7}{p\kappa^2} \right) \frac{\operatorname{sh}\kappa \ell_u}{\kappa} + \frac{M_7}{p\kappa^2} \frac{\operatorname{sh}\kappa(\ell_u - x_{\kappa\Pi})}{\kappa} \\ \varphi'_{on6} &= C_{1-5} \operatorname{ch}\kappa x_p + C_{2-5} \operatorname{sh}\kappa x_p - \frac{M_{5\Pi}}{p\kappa^2} = -\frac{M_6}{p\kappa^2} - \left( \frac{M_6}{p\kappa^2} - \frac{M_7}{p\kappa^2} \right) \operatorname{ch}\kappa \ell_u + \\ &+ \frac{M_7}{p\kappa^2} \operatorname{ch}\kappa(\ell_u - x_{\kappa\Pi}) \\ \varphi''_{on6} &= C_{1-5} \kappa \operatorname{sh}\kappa x_p + C_{2-5} \kappa \operatorname{ch}\kappa x_p = -\left( \frac{M_6}{p\kappa^2} - \frac{M_7}{p\kappa^2} \right) \kappa \operatorname{sh}\kappa \ell_u + \frac{M_7}{p\kappa^2} \kappa \operatorname{sh}\kappa(\ell_u - x_{\kappa\Pi}) \end{aligned} \right\} .(28)$$

Выполнив действия, аналогичные действиям для предыдущих пролетов, получим значения произвольных постоянных:

$$C_{1-5} = \left( \frac{M_5}{p\kappa^2} - \frac{M_6}{p\kappa^2} \right) ch\kappa x_p - \left( \frac{M_6}{p\kappa^2} - \frac{M_7}{p\kappa^2} \right) ch\kappa(\ell_u - x_p) + \frac{M_7}{p\kappa^2} sh\kappa(\ell_u - x_p - x_{\kappa\Pi}),$$

$$C_{2-5} = - \left( \frac{M_{5\Pi}}{p\kappa^2} - \frac{M_6}{p\kappa^2} \right) sh\kappa x_p - \left( \frac{M_6}{p\kappa^2} - \frac{M_7}{p\kappa^2} \right) sh\kappa(\ell_u - x_p) + \frac{M_7}{p\kappa^2} sh\kappa(\ell_u - x_p - x_{\kappa\Pi}),$$

$$C_{3-5} = - \frac{M_{5\Pi}}{p\kappa^2} x_p + \frac{M_6}{p\kappa^2} \ell_u + \frac{M_7}{p\kappa^2} x_{\kappa\Pi}$$

Подставив значения  $C_{1-5}$ ,  $C_{2-5}$  и  $C_{3-5}$  в первое уравнение системы (17), получим частное решение для пятого пролета:

$$\varphi_5 = \frac{M_{5\Pi}}{p\kappa^2} (x_p - x) + \frac{M_6}{p\kappa^2} \ell_u + \frac{M_7}{p\kappa^2} x_{\kappa\Pi} - \left( \frac{M_5}{p\kappa^2} - \frac{M_6}{p\kappa^2} \right) \frac{sh\kappa(x_p - x)}{\kappa} -$$

$$- \left( \frac{M_6}{p\kappa^2} - \frac{M_7}{p\kappa^2} \right) \frac{sh\kappa(\ell_u - x_p + x)}{\kappa} + \frac{M_7}{p\kappa^2} \frac{sh\kappa(\ell_u - x_p - x_{\kappa\Pi} + x)}{\kappa} \quad (29)$$

При  $x=0$  угол будет равен  $\varphi_0$  в точке приложения горизонтальной поперечной силы:

$$\varphi_{опр} = \frac{M_{5\Pi}}{p\kappa^2} x_p + \frac{M_6}{p\kappa^2} \ell_u + \frac{M_7}{p\kappa^2} x_{\kappa\Pi} - \left( \frac{M_5}{p\kappa^2} - \frac{M_6}{p\kappa^2} \right) \frac{sh\kappa x_p}{\kappa} -$$

$$- \left( \frac{M_6}{p\kappa^2} - \frac{M_7}{p\kappa^2} \right) \frac{sh\kappa(\ell_u - x_p)}{\kappa} + \frac{M_7}{p\kappa^2} \frac{sh\kappa(\ell_u - x_p - x_{\kappa\Pi})}{\kappa} \quad (30)$$

В этом уравнении неизвестным является значение  $x_{\kappa\Pi}$  – расстояние от опоры 7 до точки, в которой угол закручивания рельса  $\varphi_{(x)}$  и его первая и вторая производные равны нулю (рисунок 2). Для определения  $x_{\kappa\Pi}$  используем условие  $\varphi'_5 = 0$  при  $x = 0$ .

Дифференцируем уравнение (29)

$$\begin{aligned} \varphi'_5 = & -\frac{M_{5\Pi}}{p\kappa^2} - \left( \frac{M_5}{p\kappa^2} - \frac{M_6}{p\kappa^2} \right) \operatorname{ch}\kappa(x_p - x) - \left( \frac{M_6}{p\kappa^2} - \frac{M_7}{p\kappa^2} \right) \cdot \operatorname{ch}\kappa(\ell_u - x_p + x) + \\ & + \frac{M_7}{p\kappa^3} \operatorname{ch}\kappa(\ell_u - x_p - x_\kappa + x). \end{aligned}$$

При  $x = 0$   $\varphi'_5 = 0$ , тогда :

$$-\frac{M_{5\Pi}}{p\kappa^2} - \left( \frac{M_{5\Pi}}{p\kappa^2} - \frac{M_6}{p\kappa^2} \right) \operatorname{ch}\kappa x_p - \left( \frac{M_6}{p\kappa^2} - \frac{M_7}{p\kappa^2} \right) \cdot \operatorname{ch}\kappa(\ell_u - x_p) + \frac{M_7}{p\kappa^2} \operatorname{ch}\kappa(\ell_u - x_p - x_{\kappa\Pi}) = 0.$$

Запишем это выражение в виде:

$$\operatorname{ch}\kappa(\ell_u - x_p - x_{\kappa\Pi}) = \frac{M_{5\Pi}}{M_7} + \left( \frac{M_{5\Pi}}{M_7} - \frac{M_6}{M_7} \right) \operatorname{ch}\kappa x_p + \left( \frac{M_6}{M_7} - 1 \right) \operatorname{ch}\kappa(\ell_u - x_p) \quad (31)$$

Обозначим для сокращения записи правую часть формулы (31) через  $A_{np}$ . Функцию  $\operatorname{ch} x$  в левой части заменим:  $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

$$e^{\kappa(\ell_u - x_p - x_{\kappa\Pi})} + e^{-\kappa(\ell_u - x_p - x_{\kappa\Pi})} = 2A_{np}.$$

Или иначе:

$$\begin{aligned} \frac{e^{\kappa\ell_u}}{e^{\kappa x_p} \cdot e^{\kappa x_{\kappa\Pi}}} + \frac{e^{\kappa x_p} e^{\kappa x_{\kappa\Pi}}}{e^{\kappa\ell_u}} &= 2A_{np}; \\ e^{2\kappa x_{\kappa\Pi}} e^{2\kappa x_p} - 2A_{np} e^{\kappa x_{\kappa\Pi}} e^{\kappa x_p} e^{\kappa\ell_u} + e^{2\kappa\ell_u} &= 0; \\ e^{2\kappa x_{\kappa\Pi}} - 2A_{np} e^{\kappa x_{\kappa\Pi}} \left( \frac{e^{\kappa\ell_u}}{e^{\kappa x_p}} \right) + \frac{e^{2\kappa\ell_u}}{e^{2\kappa x_p}} &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Это выражение представляет собой обыкновенное квадратное уравнение, корни которого равны:

$$\begin{aligned} e^{\kappa x_{\kappa\Pi}} &= A_{np} - \left( \frac{e^{\kappa\ell_u}}{e^{\kappa x_p}} \right) \pm \sqrt{A_{np}^2 \left( \frac{e^{2\kappa\ell_u}}{e^{2\kappa x_p}} \right) - \left( \frac{e^{2\kappa\ell_u}}{e^{2\kappa x_p}} \right)}; \\ e^{\kappa x_{\kappa\Pi}} &= \frac{e^{\kappa\ell_u}}{e^{\kappa x_p}} \left( A_{np} \pm \sqrt{A_{np}^2 - 1} \right) \end{aligned}$$

или иначе:

$$e^{kx_p} = e^{k(\ell_u - x_p)} \left( A_{II} \pm \sqrt{A_{II}^2 - 1} \right) \quad (33)$$

Рассмотрим правую часть формулы (31):

$$A_{II} = \frac{M_{5II}}{M_7} + \left( \frac{M_{5II}}{M_7} - \frac{M_6}{M_7} \right) ch k x_p + \left( \frac{M_6}{M_7} - 1 \right) ch k (\ell_u - x_p)$$

При  $x_p = 0$   $ch k x_p = 1$ ;  $M_6 = M_5$  (рисунок 2)

Тогда:

$$A_{II} = \frac{M_{5II}}{M_7} (ch k \ell_u + 1) - ch k \ell_u$$

При  $x_p = 0,5 \ell_u$ ;  $\ell_u = 2x_p$

$$A_{II} = \frac{M_{5II}}{M_7} + \frac{M_{5II}}{M_7} ch k x_p - \frac{M_6}{M_7} ch k x_p + \frac{M_6}{M_7} ch k x_p - ch k x_p;$$

$$A_{II} = \frac{M_{5II}}{M_7} (ch k x_p + 1) - ch k x_p$$

При  $x_p = \ell_u$ ;  $ch k (\ell_u - x_p) = 1$   $M_6 = M_7$

$$A_{II} = \frac{M_{5II}}{M_7} (ch k \ell_u + 1) - ch k \ell_u$$

Поскольку  $x_p = 0 \div \ell_u$ , с точностью достаточной для выполняемых расчетов, принимаем

$$A_{II} = \frac{M_{5II}}{M_7} (ch k x_p + 1) - ch k x_p \quad (34)$$

Так как  $\frac{M_5}{M_7} \gg 1$  оба корня уравнения (32) (выражение 33) представляют собой действительные положительные числа.

Логарифмуємо обе части выражения (33)

Получим:

$$x_{кП} = (\ell_{и} - x_p) \ell_n \left( A_{П} \pm \sqrt{A_{П}^2 - 1} \right)$$

Величина

$$x_{кП} = (\ell_{и} - x_p) \ell_n \left( A_{П} - \sqrt{A_{П}^2 - 1} \right), \quad (35)$$

представляет собой искомое значение  $x_k$ , величина  $x_{кП(2)} = (\ell_{и} - x_p) \ell_n \left( A_{П} + \sqrt{A_{П}^2 - 1} \right)$  – точку, в которой обратная волна угла закручивания  $\varphi_{(x)} = 0$ .

Для левой части рельса – от точки действия поперечной силы до опоры 3 (рисунок 2) аналогично выше изложенному можно получить:

- крутящие моменты в пределах пролетов:

$$\left. \begin{aligned} M_{5,4} &= (R_{z2} + R_{z3} + R_{z4} + R_{z5}) \cdot h \\ M_4 &= M_5 - M_{он5} \\ M_3 &= M_4 - M_{он4} \end{aligned} \right\}, \quad (36)$$

или иначе

$$M_3 = (R_{z2} + R_{z3}) \cdot h$$

Углы закручивания рельса на опорах будут равны:

$$\varphi_{он4} = \frac{M_3}{p\kappa^2} \left( x_{кл} - \frac{sh\kappa x_{кл}}{\kappa} \right), \quad (37)$$

$$\varphi_{он5} = \frac{M_4}{p\kappa^2} \ell_{и} + \frac{M_3}{p\kappa^2} x_{кл} - \left( \frac{M_4}{p\kappa^2} - \frac{M_3}{p\kappa^2} \right) \frac{sh\kappa \ell_{и}}{\kappa} + \frac{M_3}{p\kappa^2} \frac{sh\kappa(\ell_{и} - x_{кл})}{\kappa}, \quad (38)$$



где:  $x_{кл}$  – расстояние от опоры 4 до точки, в которой угол закручивания рельса  $\varphi_{(x)}$  и его производная равна нулю.

$$x_{кл} = x_p \ell_{\Pi} \left( A_{\Pi} - \sqrt{A_{\Pi}^2 - 1} \right), \quad (39)$$

$$A_{\Pi} = \frac{M_{5л}}{M_3} [ch \kappa (\ell_{\Pi} - x_p) + 1] - ch \kappa (\ell_{\Pi} - x_p) \quad (40)$$

Имея уравнения (20, 25, 34, 35, 37, 38, 39 и 40) можно определить искомый угол  $\varphi_{N_{ед}}$  в точке приложения горизонтальной поперечной единичной силы  $N_{ед} = 1$ :

$$\varphi_{N_{ед}} = \varphi_{он5} \frac{x_p}{\ell_{\Pi}} + \varphi_{он6} \frac{(\ell_{\Pi} - x_p)}{\ell_{\Pi}} + \frac{M_5}{\rho \kappa^2} \frac{(\ell_{\Pi} - x_p)(x_p)}{\ell_{\Pi}}, \quad (41)$$

где  $M_5 = M_{5\Pi} + M_{5л} = N_{ед} \cdot h = h$ .

**Вывод.** Таким образом, получены все расчетные уравнения (20, 25, 30, 35, 37, 38, 39, 40, 41), которые позволяют определять углы закручивания рельса в любой его точке под действием известной горизонтальной поперечной силы N.

### *Список литературы.*

1. Снитко Н.К. Расчет рельса на горизонтальные силы с учетом скручивания методом начальных параметров [Текст] / Н.К. Снитко // Информационный бюллетень Военно – транспортной академии. – 1950.- № 26. –С. 54-88.
2. Ангелейко В.И. О влиянии поперечных горизонтальных сил на напряжения в рельсе [Текст] / В.И. Ангелейко // Труды ХИИТ, Трансжелдориздат. - 1956.- № 26. -С. 112-142.
3. Ершков О.П. Расчет поперечных горизонтальных сил в кривых [Текст] / О.П. Ершков // Труды ВНИИЖТ.– М.: Транспорт.-1966.- №301. -235 с.
4. Вериго М.Ф., Коган А.Я. Взаимодействие пути и подвижного состава [Текст] / М.Ф. Вериго, А.Я. Коган.- М.: Транспорт.-1986.-599 с.

5. Вериго М.Ф. Взаимодействие пути и подвижного состава в кривых малого радиуса и борьба с боковым износом рельсов и гребней колёс [Текст] / М.Ф. Вериго.-М.: ПКТЬ ЦП МПС.-1997.-207 с.
6. Timoshenko S. Method of Analysis of Statical and Dynamical Stresses in Rail.- Proc of the 2-d International Conyress for Appl. Mechanics. Zürich, 1927, 12p.
7. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов [Текст] / С.П. Тимошенко. - М.: Физматгиз, 1960.- ч1 – 379с., ч2 – 406с.
8. Даренський О.М., Вітольберг В.Г., Бугаєць Н.В., Штомпель А.М. Визначення сил опіру поперечному переміщенню залізобетонних шпал у баласті // Збірник наукових праць УкрДАЗТ 2008, вып. 99, 167-176-с.