

**УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

Р.В.Вовк, А.В.Попов

Електрика і магнетизм

Навчальний посібник

Харків 2010

УДК 53 (076.5)

Вовк Р.В., Попов А.В. Електрика і магнетизм: Навч. посібник. – Харків: УкрДАЗТ, 2010. – 178 с.

У даному посібнику викладено розділи загального курсу фізики: “Електростатика”, “Постійний електричний струм”, “Електромагнетизм” відповідно до навчальних програм для технічних університетів. Особливої уваги приділено формулюванню основних законів і теорем класичної електродинаміки і виявленню фізичного змісту величин, які до них входять.

Для студентів технічних університетів.

Іл. 132, бібліогр.: 26 назв.

Рецензенти:

професори В.Г. Карась (ХФТІ НАН України),
М.О. Оболенський (ХНУ ім. В.Н. Каразіна)

© Українська державна
академія залізничного

транспорту, 2010

ЗМІСТ

Передмова	7
------------------------	---

Розділ 1. Електростатика

Електричне поле у вакуумі

§ 1.1. Квантування заряду. Закон збереження заряду.....	9
§ 1.2. Закон Кулона	10
§ 1.3. Напруженість електричного поля. Графічне зображення полів	11
§ 1.4. Принцип суперпозиції полів. Напруженість поля диполя ...	12
§ 1.5. Потік вектора напруженості електричного поля. Теорема Остроградського–Гаусса	14
§ 1.6. Застосування теореми Остроградського–Гаусса до розрахунку поля заряджених кулі, циліндра і площини	16
§ 1.7. Потенціал електростатичного поля. Циркуляція вектора напруженості поля	20
§ 1.8. Зв'язок потенціалу електростатичного поля з напруженістю. Еквіпотенціальні поверхні	23
§ 1.9. Обчислення потенціалу по напруженості	25
§ 1.10. Провідники в електростатичному полі	29
§ 1.11. Електростатичне екранування. Заземлення	33
§ 1.12. Електростатичний генератор Ван де Граафа	34
§ 1.13. Ємність провідників і конденсаторів	35
§ 1.14. З'єднання конденсаторів	39
§ 1.15. Енергія системи нерухомих зарядів	40
§ 1.16. Енергія зарядженого провідника й конденсатора	42
§ 1.17. Енергія електричного поля. Густина енергії	43

Електричне поле в діелектриках

§ 1.18. Види діелектриків. Поляризація діелектриків	45
§ 1.19. Вектор поляризованості	48

§ 1.20.	Теорема Остроградського–Гаусса для діелектриків	50
§ 1.21.	Поляризованість і діелектрична проникність діелектриків	52
§ 1.22.	Напруженість поля в діелектрику	53
§ 1.23.	Залежність ємності конденсатора від діелектричної проникності ізолятора	55
§ 1.24.	Пондеромоторні сили	56
§ 1.25.	Сегнетоелектрики	60

Розділ 2. Постійний електричний струм

Закони постійного струму

§ 2.1.	Сила струму. ЕРС джерела струму	65
§ 2.2.	Закон Ома. Електричний опір провідника	67
§ 2.3.	З'єднання провідників	69
§ 2.4.	Робота й потужність струму. Закон Джоуля–Ленца	70

Електропровідність металів

§ 2.5.	Природа носіїв струму в металах	71
§ 2.6.	Густина струму. Закони Ома й Джоуля–Ленца у диференціальній формі	72
§ 2.7.	Класична теорія електропровідності металів	76
§ 2.8.	Зв'язок між електропровідністю і теплопровідністю металів. Закон Відемана–Франца	79
§ 2.9.	Труднощі класичної теорії електропровідності металів	81

Розділ 3. Електромагнетизм

Магнітне поле у вакуумі

§ 3.1.	Сили, що діють в магнітному полі на рухомі заряди і струми. Вектор магнітної індукції	85
§ 3.2.	Магнітне поле струму. Закон Біо–Савара–Лапласа	87
§ 3.3.	Магнітне поле прямого струму	89
§ 3.4.	Магнітне поле кругового струму	90

§ 3.5.	Теорема про циркуляцію вектора магнітної індукції у вакуумі	92
§ 3.6.	Магнітне поле довгого соленоїда і тороїда	93
§ 3.7.	Потік вектора магнітної індукції. Теорема Остроградського–Гаусса для магнітного поля	96
§ 3.8.	Сила взаємодії двох паралельних провідників. Одиниця сили струму – ампер	98
§ 3.9.	Замкнутий контур зі струмом у магнітному полі	99
§ 3.10.	Робота при переміщенні провідника і контура зі струмом у магнітному полі	102
§ 3.11.	Рух заряджених частинок у магнітному полі. Принцип роботи циклотрона	103
§ 3.12.	Ефект Холла	106
§ 3.13.	Явище електромагнітної індукції. Закон Фарадея	108
§ 3.14.	Правило Ленца	110
§ 3.15.	Явище самоіндукції	111
§ 3.16.	Вихрові струми або струми Фуко. Скін-ефект	116
§ 3.17.	Електричний струм при замиканні і розмиканні ланцюга, що містить індуктивність	118
§ 3.18.	Енергія магнітного поля струму. Об'ємна густина енергії.....	121

Магнітне поле в речовині

§ 3.19.	Намагнічення тіл. Дослід Ейнштейна–де Гааза	124
§ 3.20.	Вектор намагніченості. Напруженість магнітного поля струму	127
§ 3.21.	Теорема про циркуляцію вектора напруженості магнітного поля в речовині	130
§ 3.22.	Типи магнетиків: діа-, пара- і ферромагнетики. Природа діамагнетизму	132
§ 3.23.	Теорія парамагнетизму Ланжевена	136
§ 3.24.	Властивості ферромагнетиків. Гістерезис	140
§ 3.25.	Природа ферромагнетизму	144

Електромагнітне поле

§ 3.26.	Коливальний LC-контур	147
§ 3.27.	Струм зміщення	149
§ 3.28.	Рівняння Максвелла. Електромагнітне поле	152
§ 3.29.	Дивергенція вектора поля. Теорема Остроградського-Гаусса про перетворення поверхневого інтеграла в об'ємний	155
§ 3.30.	Ротор вектора поля. Теорема Стокса	157
§ 3.31.	Рівняння Максвелла в диференціальній формі	160
§ 3.32.	Плоска електромагнітна хвиля	162
§ 3.33.	Енергія електромагнітної хвилі. Вектор Пойнтінга	165
§ 3.34.	Випромінювання електромагнітних хвиль. Досліди Герца	166
§ 3.35.	Тиск електромагнітної хвилі. Досліди Лебедева з вимірювання тиску світла	168
§ 3.36.	Винахід радіотелеграфу О.С.Поповим у Росії	170
	<i>Бібліографічний список</i>	172
	<i>Предметний покажчик</i>	175

ПЕРЕДМОВА

В основу даного навчального посібника покладено конспект лекцій із розділу “Електрика і магнетизм”, які автори протягом довгих років читали студентам ряду Харківських вузів. При написанні цього посібника ми мали за доцільне питання навчальної програми викласти коротко, але достатньо повно.

Спроба написати навчальний посібник за загальним курсом фізики у цьому світі не нова. Підручників та навчальних посібників на цю тему написано немало. Здається, навіщо писати нові? Можна перевидати 2-3 хороших старих та вчитися за ними. Але життя йде вперед, все змінюється, змінюється і наш підхід та наш погляд на речі, подібно до того, як змінюється мода. Стиль викладання того ж самого матеріалу в різні часи був різний і це добре відчуваєш, коли береш в руки будь-який підручник.

Сучасна тенденція – писати стисло, доступно, на рівні популяризації, “без води”. Жодному автору, мабуть, зробити це у повній мірі не вдалось. Тому, на наш погляд, будь-яка спроба викласти той самий матеріал зі своєї точки зору, тим більше, з урахуванням досвіду роботи з учнями, може бути корисною.

Поява даного посібника може бути виправдана ще й тим, що студенти технічних вузів протягом всього навчального року зустрічаються з необхідністю виконувати лабораторні роботи, тематика яких на лекціях ще не розглядалась. Даний посібник, якщо судити з досвіду викладання, допоможе студентам розібратися в цих питаннях самостійно.

При викладанні класичної електродинаміки, якій присвячений цей посібник, головну увагу приділено формулюванню основних її законів та виявленню фізичного змісту величин, що входять до них. Важкі питання, такі як поляризація діелектриків, природа діамагнетизму або поняття про струм зміщення, викладені докладніше, а найважливіші

застосування теорії пояснюються прикладами. Надано опис деяких основоположних експериментів, які мають принципове значення, наприклад, досліду Ейнштейна–де Гааза.

У посібнику збережено лекційний стиль викладання, отже, всі визначення, записані у вигляді формул, супроводжуються словесними формулюваннями, виділеними курсивом. Наводяться використовувані в електродинаміці визначення понять теорії поля: потоку і циркуляції вектора поля, дивергенції та ротора, розкривається їх фізичний зміст. Це дозволяє уникнути звернення до спеціальної математичної літератури, що часто буває зручним в умовах дефіциту часу, характерного для сучасного навчального процесу.

У кінці кожного розділу наведений перелік питань для самоперевірки, покликаний примусити студента задуматися, що у даному розділі є важливим, на що треба звернути увагу. Наприкінці посібника наведено список книг та підручників за тематикою, що розглядається, який може бути корисним тим студентам, хто бажає більш глибоко й докладно вивчити предмет. Користування книгою полегшує предметний показчик.

Автори висловлюють щире подяку своїм колегам – викладачам кафедри фізики академії, які взяли на себе працю читання рукопису, а також нашим рецензентам – професорам В.Г.Карасю та М.О.Оболенському за ті корисні зауваження, які вони надали при рецензуванні посібника і які були нами враховані під час остаточного його редагування.

ЕЛЕКТРОСТАТИКА

Електростатика – розділ фізики, що вивчає нерухомі заряди й незмінні в часі електричні поля.

Електричні явища відомі людині з давніх часів. Це електризація тіл при терті, блискавка. Систематичне вивчення електричних явищ почалося у XVIII столітті. У Росії цим займалися М.В.Ломоносов і Г.Ріхман, в Америці – Бенджамін Франклін. Ломоносов встановив природу блискавки, Франклін – два роди електрики. Франклін умовно став вважати, що скло, натерте шкірою, заряджається позитивно, а бурштин, натертий вовною, – негативно. З погляду сучасної науки, негативно заряджене тіло містить надлишок електронів. Якщо в тіла забрати частину електронів, то воно заряджається позитивно. Отже, негативний знак заряду електрона – умовне поняття, пов'язане з довільним вибором Б.Франкліна.

Електричне поле у вакуумі

§ 1.1. Квантування заряду. Закон збереження заряду

Слово *квант* означає – неподільна порція. Дослідним шляхом встановлено, що заряд будь-якого тіла q кратний деякій мінімальній величині заряду $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, тобто квантується:

$$q = N e,$$

де N – ціле число. Це означає, що в природі не існує зарядів, менших e . Заряд величиною e має електрон, що входить до складу атомів. Позитивні заряди тієї ж величини несуть протони, що містяться в ядрах атомів.

За допомогою експериментів встановлено, що *сумарний заряд тіл, які становлять замкнену систему, не може змінюватися мимоволі, тобто залишається сталим у*

часі. Це твердження виражає один з фундаментальних законів природи – закон збереження заряду. Під замкненою системою тут розуміється сукупність тіл, що не обмінюються речовиною з навколишніми тілами. Закон збереження заряду був відкритий у 1747 році Б.Франкліном.

§ 1.2. Закон Кулона

Закон Кулона – основний закон електростатики. Він стверджує, що сила взаємодії двох точкових зарядів пропорційна величині кожного із зарядів і обернено пропорційна квадрату відстані r між ними:

$$F_{\text{кул}} = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1.1)$$

де k – коефіцієнт пропорційності, що залежить від вибору системи одиниць вимірювання фізичних величин. У системі СІ заряд вимірюється в кулонах ($[Q] = \text{Кл}$), відстань – у метрах ($[r] = \text{м}$), сила – у ньютоні ($[F] = \text{Н}$). З досліду випливає, що в цьому випадку

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}.$$

Цей коефіцієнт прийнято записувати у вигляді

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

де нова константа $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ (фарад на метр). Вона називається *електричною сталою*.

Точковим зарядом називається заряджене тіло, розміри якого малі у порівнянні з відстанню від цього тіла до інших заряджених тіл. У механіці таке тіло називають *матеріальною точкою*.

Силу Кулона (1.1) можна представити у векторному вигляді. Напрямок сили задамо радіус-вектором, проведеним від першого заряду до другого (рис. 1.1). Тоді сила, що діє на другий заряд з боку першого,

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}. \quad (1.2)$$

Сила, що діє на перший заряд з боку другого, має протилежний напрямок:

$$\vec{F}_{12} = -k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}. \quad (1.2a)$$

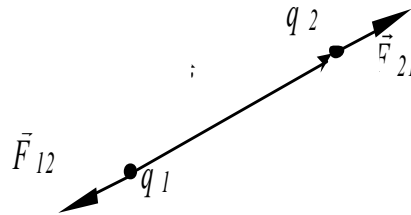


Рис. 1.1

Якщо тіла заряджені однойменно, вони, згідно з дослідом, відштовхуються один від одного, якщо різнойменно – притягуються.

§ 1.3. Напруженість електричного поля. Графічне зображення полів

Дію на даний заряд інших зарядів можна представити у вигляді взаємодії цього заряду з *електричним полем*. Електричне поле виникає в просторі навколо заряджених тіл. Поняття електричного поля вводиться для зручності визначення сили, що діє на обраний заряд, оскільки зарядів, з якими він взаємодіє, може бути дуже багато. Існування електричного поля в просторі можна виявити за допомогою пробного заряду. На цей заряд у полі діє сила.

Силовою характеристикою електричного поля слугує *напруженість поля*. *Напруженість поля в даній точці простору дорівнює силі, що діє на розміщений у цій точці одиничний позитивний заряд:*

$$\vec{E} \stackrel{def}{=} \frac{\vec{F}}{q}. \quad (1.3)$$

(Значок *def* тут і всюди надалі вказує, що дана величина вводиться “по визначенню”. Англійською мовою "definition" – визначення). Підставивши силу взаємодії двох точкових зарядів (1.2), одержимо *напруженість поля точкового заряду q* :

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^3} \vec{r},$$

або в скалярному вигляді

$$E = k \frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}. \quad (1.4)$$

Напруженість поля точкового заряду зменшується з відстанню від заряду обернено пропорційно квадрату цієї відстані.

Напруженість електричного поля вимірюється у *вольтах на метр* ($[E] = \text{В/м}$). *Напруженість поля дорівнює 1 вольт на метр, якщо на заряд в 1 кулон діє сила в 1 ньютон* ($1 \text{ В/м} = 1 \text{ Н/Кл}$).

Електричне поле прийнято зображати *силовими лініями*, або *лініями напруженості*. Сила, що діє на пробний заряд, спрямована по дотичній до силової лінії. Оскільки однойменні заряди відштовхуються, а різнойменні – притягуються, з визначення напруженості поля (1.3) випливає, що силові лінії починаються на позитивних зарядах (рис. 1.2,а) і закінчуються на

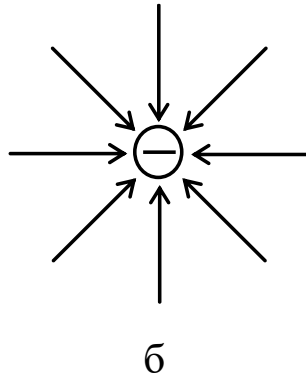
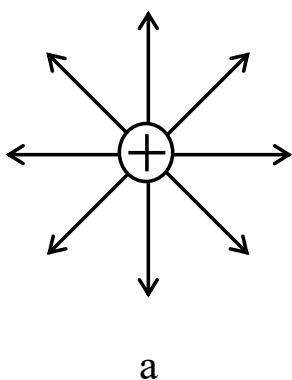


Рис. 1.2

негативних (рис. 1.2,б), тобто лінії напруженості електростатичного поля не замкнені. Напрямок силових ліній вказує напрямком сили, що діє на

пробний заряд, а густина ліній якісно характеризує величину напруженості поля: чим густіше лінії, тим сильніше поле.

§ 1.4. Принцип суперпозиції полів. Напруженість поля диполя

Електричним диполем називається сукупність двох однакових по величині й протилежних за знаком зарядів, відстань

між якими l набагато менше відстані від кожного із зарядів до точки спостереження ($l \ll r$) (рис. 1.3).

Щоб знайти напруженість поля диполя, скористаємося принципом суперпозиції полів, який говорить, що напруженість поля \vec{E} , створеного сукупністю N зарядів, дорівнює сумі напруженостей \vec{E}_i полів, створених кожним із зарядів:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i. \quad (1.5)$$

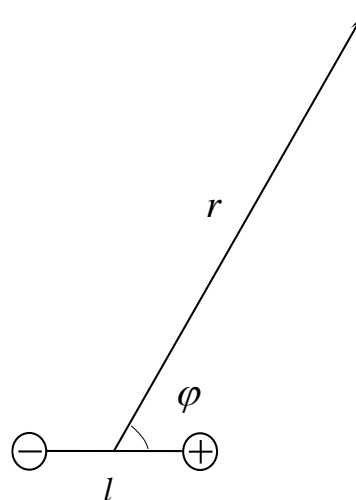


Рис. 1.3

Знайдемо напруженість поля в точці M на осі диполя (рис. 1.4). Як випливає из формули (1.4), напруженість поля, створеного позитивним зарядом, $E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r_+^2}$, а створеного

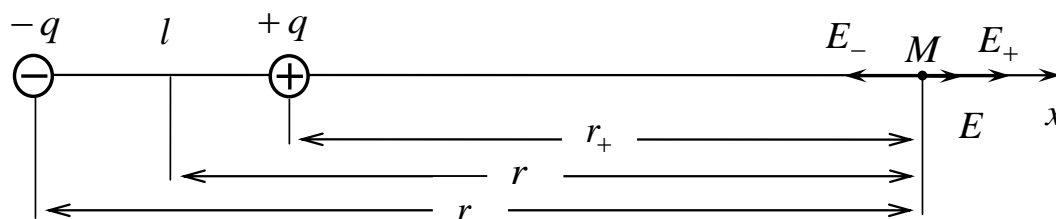


Рис. 1.4

негативним $E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r_-^2}$. Вектори \vec{E}_+ й \vec{E}_- спрямовані в протилежні сторони, тому результуюча напруженість дорівнює їх різниці:

$$E = E_+ - E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2} \right).$$

Відстань від точки спостереження до позитивного заряду

$r_+ = r - \frac{l}{2}$, а до негативного $r_- = r + \frac{l}{2}$, де $r = (r_+ + r_-) / 2$.

Оскільки $l \ll r$, одержимо

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2ql}{r^3}.$$

Цю формулу можна записати у вигляді

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\vec{p}}{r^3}, \quad (1.6)$$

де \vec{p} – електричний дипольний момент диполя.

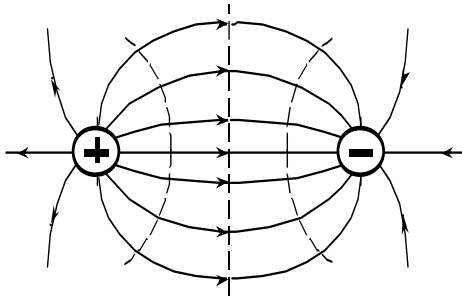


Рис. 1.5

Електричним дипольним моментом \vec{p} диполя називається вектор, спрямований від його негативного заряду до позитивного, модуль якого дорівнює добутку величини кожного із зарядів на відстань між ними:

$$\vec{p} = q\vec{l}. \quad (1.7)$$

З формули (1.6) випливає, що напруженість поля диполя зменшується обернено пропорційно кубу відстані від диполя.

Можна показати, що напруженість поля диполя в довільній точці простору (див. рис. 1.3) має величину

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}.$$

Лінії напруженості поля, створеного електричним диполем, зображені на рис. 1.5.

§ 1.5. Потік вектора напруженості електричного поля.

Теорема Остроградського–Гаусса

Електричне поле, задане вектором напруженості \vec{E} , називається *векторним полем*. Це означає, що в кожній точці простору задано три незалежні функції координат: $E_x(x, y, z)$, $E_y(x, y, z)$ і $E_z(x, y, z)$, так що

$$\vec{E} = E_x(x, y, z) \vec{i} + E_y(x, y, z) \vec{j} + E_z(x, y, z) \vec{k}.$$

Нехай у цьому полі існує нескінченно малий майданчик dS (рис. 1.6). Напрямок обходу контура, що обмежує цей майданчик, показаний на рисунку стрілкою. Він пов'язаний з напрямком позитивної нормалі до майданчика \vec{n} правилом правого гвинта (\vec{n} – одиничний вектор).

Потоком $d\Phi$ вектора \vec{E} через нескінченно малий майданчик називається добуток його площі dS на модуль \vec{E} і на косинус кута α між напрямком вектора \vec{E} і нормаллю до майданчика:

$$d\Phi = E dS \cos \alpha.$$

Введемо вектор майданчика $d\vec{S} = \vec{n} dS$, що збігається по напрямку з \vec{n} . Тоді потік $d\Phi$ можна представити у вигляді скалярного добутку

$$d\Phi = (\vec{E} d\vec{S}).$$

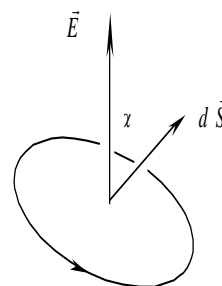


Рис. 1.6

Щоб знайти потік через поверхню кінцевої величини S , потрібно взяти інтеграл по цій поверхні від скалярного добутку $(\vec{E} d\vec{S})$:

$$\Phi = \int_S (\vec{E} d\vec{S}).$$

Інтегрування по поверхні припускає, що значення підінтегральної функції беруться в точках цієї поверхні. Своє походження термін “потік” бере в гідродинаміці, де потік вектора швидкості рідини \vec{v} через майданчик S є кількість рідини, що протікає через цей майданчик за одиницю часу. Докладніше про це сказано в § 3.29.

Теорема Остроградського–Гаусса – основна теорема електростатики. Вона дозволяє обчислити напруженість електричного поля у випадках, коли заряди, що створюють поле, розподілені в просторі яким-небудь симетричним чином.

Формулювання теореми: *потік вектора напруженості електричного поля через довільну замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, розміщених усередині цієї поверхні, поділеної на ϵ_0* :

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{q_{\text{внутр}}}{\epsilon_0}. \quad (1.8)$$

Інтеграл по замкненій поверхні позначається кільцем на знаку інтеграла.

Розглянемо застосування теореми в деяких простих випадках.

§ 1.6. Застосування теореми Остроградського–Гаусса до розрахунку поля заряджених кулі, циліндра і площини

Нехай провідна куля радіусом R має заряд q , рівномірно розподілений по його поверхні. Знайдемо напруженість поля, створеного кулею на відстані r від її центра. Щоб скористатися теоремою Остроградського–Гаусса, побудуємо поверхню інтегрування S (гаусівська поверхня) у вигляді концентричної з кулею сфери радіусом r (рис. 1.7). Тоді можна записати:

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.9)$$

Завдяки симетричному розташуванню заряду на кулі вектор напруженості поля \vec{E} і вектор майданчика $d\vec{S}$ паралельні один одному в будь-якій точці сфери S . У силу цього скалярний добуток цих векторів перетворюється в добуток їх модулів $(\vec{E} d\vec{S}) = E dS$. Крім цього, модуль вектора \vec{E} має на сфері S постійне значення (у силу рівновіддаленості точок сфери від поверхні кулі). Тому інтеграл (1.9) легко обчислюється:

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0},$$

звідки

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}, \quad (r \geq R). \quad (1.10)$$

Порівняння формул (1.10) і (1.4) показує, що напруженість поля зарядженої кулі за межами кулі збігається з напруженістю поля точкового заряду.

Напруженість поля всередині кулі дорівнює нулю. Щоб це показати, побудуємо гаусівську поверхню у вигляді сфери S' радіусом r' , меншим радіуса кулі R (рис. 1.8). Оскільки заряд всередині цієї сфери відсутній (ми припустили, що він розподілений по поверхні кулі), потік вектора \vec{E} через поверхню сфери дорівнює нулю:

$$\oint_{S'} (\vec{E} d\vec{S}) = 0,$$

звідки й випливає, що напруженість поля всюди всередині кулі дорівнює нулю.

Розглянемо тепер циліндр радіусом R , рівномірно заряджений по поверхні з лінійною густиною заряду τ ($\tau = q/l$ – заряд, що припадає на одиницю довжини циліндра). Поверхню інтегрування виберемо у вигляді коаксіального циліндра радіусом r і довжиною l (рис. 1.9). Згідно з теоремою Остроградського–Гаусса

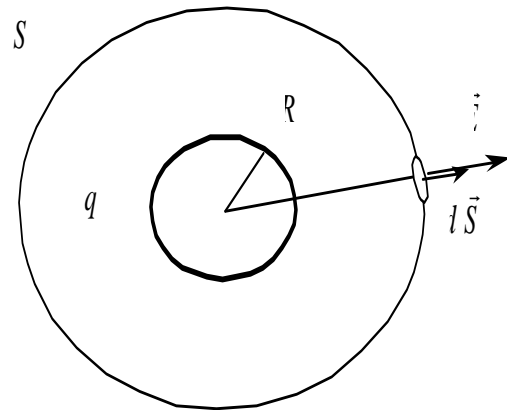


Рис. 1.7

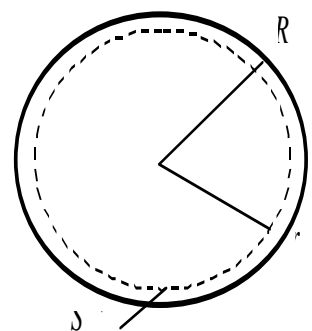


Рис. 1.8

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{q_{\text{внутр}}}{\epsilon_0} = \frac{\tau \cdot l}{\epsilon_0}. \quad (1.11)$$

Інтеграл по замкненій поверхні в лівій частині розпадається на суму інтегралів – по бічній поверхні циліндра $S_{\text{бічн}}$ і по площах двох його основ $S_{\text{осн}}$:

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \int_{S_{\text{бічн}}} (\vec{E} d\vec{S}) + 2 \int_{S_{\text{осн}}} (\vec{E} d\vec{S}).$$

Вектор \vec{E} перпендикулярний бічній поверхні циліндра в будь-якій її точці і сковає вздовж площ його основ. Тому на

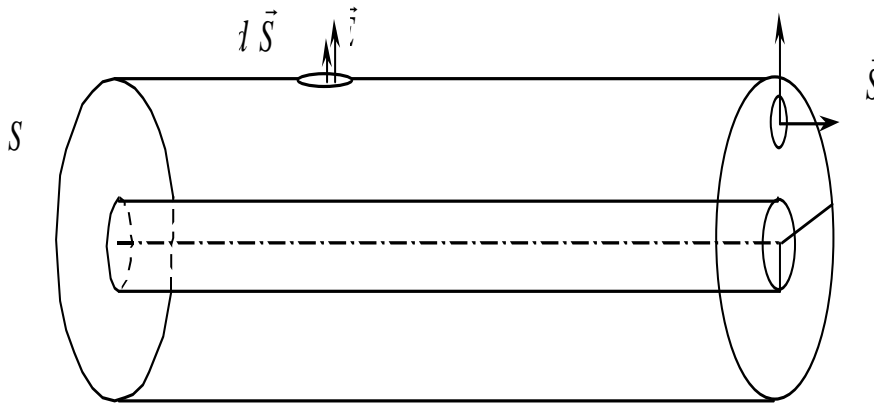


Рис. 1.9

бічній поверхні скалярний добуток $(\vec{E} d\vec{S}) = E dS$ і модуль вектора \vec{E} має постійне числове значення (у силу рівновіддаленості точок бічної поверхні від поверхні циліндра), а на поверхнях основ $(\vec{E} d\vec{S}) = 0$. Отже,

$$\int_{S_{\text{бічн}}} (\vec{E} d\vec{S}) = \int_{S_{\text{бічн}}} (E dS) = E \int_{S_{\text{бічн}}} dS = E \cdot 2\pi r l,$$

$$\int_{S_{\text{осн}}} (\vec{E} d\vec{S}) = 0.$$

Після підстановки цих формул в (1.11) маємо

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = E \cdot 2\pi r l = \frac{\tau \cdot l}{\epsilon_0},$$

звідки одержимо напруженість поля зарядженого циліндра:

$$E(r) = \frac{l}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\tau}{r}, \quad (r \geq R). \quad (1.12)$$

Як і у випадку зарядженої кулі, напруженість поля всередині циліндра дорівнює нулю. Це можна показати аналогічним чином.

Формула (1.12) справедлива, якщо замість циліндра взяти заряджену з лінійною густиною τ нитку, що проходить уздовж його осі.

Розглянемо нескінченну площину, рівномірно заряджену з поверхневою густиною заряду $\sigma = q/S$, і знайдемо напруженість поля в її навколишньому просторі. Теорему Остроградського–Гаусса застосуємо до поверхні циліндра, основи якого паралельні зарядженій площині, а твірні перпендикулярні їй (рис. 1.10). Площа кожної з основ циліндра S , заряд, що міститься всередині нього, $q = \sigma \cdot S$. За теоремою Остроградського–Гаусса

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0}. \quad (1.13)$$

Інтеграл по поверхні циліндра можна розбити на суму інтегралів по кожній з площ його основ $S_{осн}$ і по бічній поверхні $S_{бічн}$. Для кожної з основ циліндра (рис. 1.10) маємо

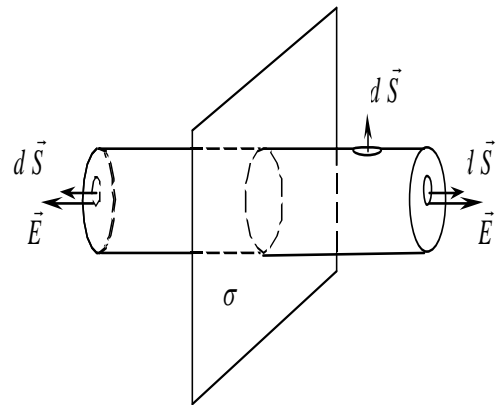


Рис. 1.10

$$\int_{S_{осн}} (\vec{E} d\vec{S}) = \int_{S_{осн}} E dS = E \int_{S_{осн}} dS = E \cdot S,$$

оскільки вектор \vec{E} всюди перпендикулярний площі основи і, у силу рівновіддаленості кожної з точок основи від зарядженої площини, має на ньому сталі значення.

Як видно з рис. 1.10, вектор \vec{E} ковзає вздовж бічної поверхні циліндра, ніде її не перетинаючи. Тому потік вектора \vec{E} через бічну поверхню дорівнює нулю. Остаточно одержимо:

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = 2 \int_{S_{\text{осн}}} (\vec{E} d\vec{S}) = 2E \cdot S = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0},$$

звідки

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1.14)$$

З цієї формули випливає, що напруженість поля нескінченної рівномірно зарядженої площини не залежить від відстані від неї і має всюди однакове числове значення. Таке поле називається *однорідним*.

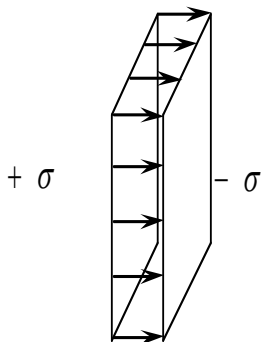


Рис. 1.11

Якщо розташувати паралельно один одному дві площини, заряджені з щільністю $+\sigma$ і $-\sigma$, то створене ними поле буде існувати в проміжку між цими площинами (рис. 1.11). За межами цього проміжку напруженість поля дорівнює нулю. Насправді, позитивно заряджена площина всюди у просторі створює поле напруженістю $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, а негативно

заряджена – поле тієї ж напруженості, але протилежного напрямку, що у сумі з першим дає нуль. Між площинами їх поля однаково спрямовані і тому, дають подвоєну напруженість:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.15)$$

Ця формула виражає напруженість поля усередині плоского конденсатора.

§ 1.7. Потенціал електростатичного поля. Циркуляція вектора напруженості поля

Сила, що діє на заряд в електростатичному полі, називається *кулонівською силою* незалежно від того, що є джерелом поля – точковий заряд або заряди, розподілені по якій-небудь поверхні або в об'ємі. Покажемо, що кулонівська сила є силою *консервативною*, тобто робота цієї сили при переміщенні заряду з однієї точки поля в іншу не залежить від форми його траєкторії, а визначається тільки положенням початкової і кінцевої точок шляху.

Нехай точковий заряд Q знаходиться в початку координат, а заряд q переміщується з точки 1 на відстані r_1 від Q у точку 2 на відстань r_2 (рис. 1.12). Робота переміщення цього заряду

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F} \cdot d\vec{l}).$$

Згідно з (1.2), сила, що діє на заряд q з боку заряду Q :

$$\vec{F} = k \frac{qQ}{r^3} \vec{r}.$$

Тоді

$$A_{12} = k q Q \int_1^2 \frac{(\vec{r} \cdot d\vec{l})}{r^3}.$$

Оскільки $(\vec{r} \cdot d\vec{l}) = r dl \cos(\widehat{\vec{r} \cdot d\vec{l}}) = r dr$, одержимо

$$A_{12} = k q Q \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = k q Q \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.16)$$

У цій формулі не міститься відомостей про форму траєкторії заряду q , а фігурують тільки координати початку й кінця траєкторії r_1 і r_2 , звідки випливає, що кулонівська сила – консервативна. Поле будь-якої консервативної сили, як відомо, є *потенційним*.

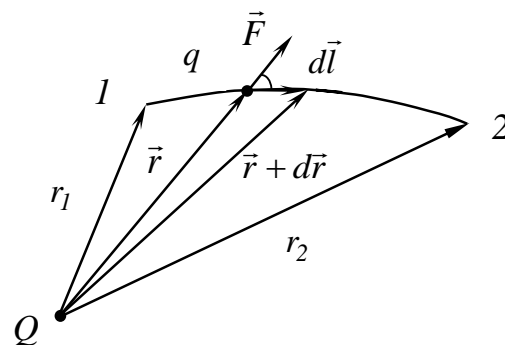


Рис. 1.12

Перенесемо заряд q у поле кулонівських сил із точки 1 в точку 2 по шляху $1a2$ (рис. 1.13). Виконана при цьому робота дорівнює A_{1a2} . Повернемо заряд у точку 1 по іншій траєкторії $2b1$. Робота складе величину A_{2b1} . Оскільки робота не залежить від форми траєкторії, тобто $A_{1a2} = A_{1b2} = -A_{2b1}$. Тому сума $A_{1a2} + A_{2b1} = 0$, тобто робота переносу заряду по замкненій траєкторії дорівнює нулю.

Цю роботу можна представити у вигляді інтеграла по замкненому контуру (позначається кільцем на позначці інтеграла)

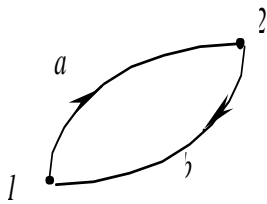


Рис. 1.13

$$\oint_L (\vec{F} d\vec{l}) = q \oint_L (\vec{E} d\vec{l}) = 0.$$

Інтеграл по замкненому контуру L від скалярного добутку $(\vec{E} d\vec{l})$ називається циркуляцією вектора \vec{E} по

цьому контуру (див. докладніше про циркуляцію § 3.29). Рівність нулю циркуляції вектора \vec{E} виражає умову потенційності електростатичного поля:

$$\oint_L (\vec{E} d\vec{l}) = 0. \quad (1.17)$$

Рівняння (1.17) є математичним вираженням потенційності електростатичного поля.

Тому в електростатичному полі можна ввести поняття потенційної енергії заряду. Однак, на відміну від механіки, в електростатиці вводиться поняття *потенціалу поля*, під яким мається на увазі потенційна енергія позитивного заряду в один кулон.

Нехай заряд q переноситься в електростатичному полі з точки поля 1 в точку 2 (рис. 1.14). Різницею потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$ між двома точками електростатичного поля називається робота, що виконується силами поля при переміщенні одиничного позитивного заряду по будь-якому шляху з першої точки в іншу:

$$\varphi_1 - \varphi_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A_{12}}{q}. \quad \ddot{e} \quad (1.18)$$

Підставивши сюди формулу (1.16), одержимо

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q} = kQ \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = k \frac{Q}{r_1} - k \frac{Q}{r_2},$$

тобто *потенціал поля точкового заряду Q на відстані r від нього:*

$$\varphi = k \frac{Q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}. \quad (1.19)$$

Перемістимо тепер точку 2 на нескінченність, де поле відсутнє, тоді формула (1.18) набуває виду

$$\varphi_1 - \varphi_\infty = \frac{A_{1\infty}}{q}.$$

Припустимо, що потенціал поля на нескінченності дорівнює нулю:

$$\varphi_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = 0.$$

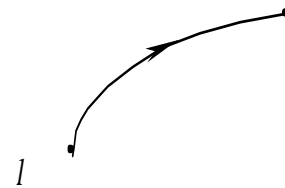


Рис. 1.14

Тоді можна дати визначення потенціалу поля: *потенціалом електростатичного поля в даній точці називається робота, що виконується силами поля при віддаленні одиничного позитивного заряду по будь-якому шляху з даної точки на нескінченність:*

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A}{q}. \quad (1.20)$$

Потенціал поля є функцією координат і визначається не однозначно, а з точністю до довільної сталої. Визначення потенціалу (1.20) припускає, що на нескінченності поле відсутнє і потенціал там можна покласти рівним нулю. Звичайно за нуль потенціалу приймають потенціал Землі.

Потенціал і різницю потенціалів електростатичного поля вимірюють у *вольтах (В)*. *Різниця потенціалів між двома*

точками рівна одному вольту, якщо при переміщенні заряду в один кулон з першої точки в другу виконується робота в один джоуль:

$$1\text{В} = 1\text{Дж}/1\text{Кл.}$$

§ 1.8. Зв'язок потенціалу електростатичного поля з напруженістю. Еквіпотенціальні поверхні

Електростатичне поле в точці простору з координатами x, y, z можна охарактеризувати вектором напруженості поля $\vec{E}(x, y, z)$, що рівнозначно заданню трьох незалежних функцій – його компонентів $E_x(x, y, z)$, $E_y(x, y, z)$ і $E_z(x, y, z)$. Умова потенційності електростатичного поля (1.17) з математичної точки зору виявляється настільки сильною, що для характеристики поля досить задати всього одну скалярну функцію – потенціал поля $\varphi(x, y, z)$. Очевидно, між напруженістю і потенціалом існує зв'язок. Знайдемо його спочатку в одновимірному випадку, коли вектор напруженості поля \vec{E} залежить тільки від однієї координати x і спрямований вздовж осі X . При переносі заряду q з точки 1 з координатою x в точку 2 з координатою $x + \Delta x$ (рис. 1.15) виконується робота:

$$A(x) = F(x)\Delta x = qE(x)\Delta x.$$

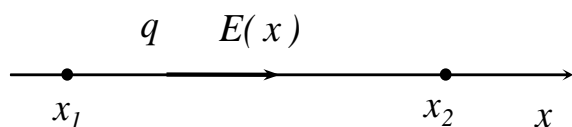


Рис. 1.15

Цю роботу, згідно з (1.18), можна виразити через різницю потенціалів у цих точках:

$$A(x) = q(\varphi_1 - \varphi_2) = -q\Delta\varphi$$

(знак “мінус”, оскільки $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$). Тоді $qE(x)\Delta x = -q\Delta\varphi$, звідки, скорочуючи q й спрямовуючи Δx до нуля, одержимо

$$E(x) = -\frac{d\varphi}{dx}.$$

У тривимірному випадку

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi, \quad (1.21)$$

де введено вектор

$$\text{grad} \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}, \quad (1.22)$$

що називається *градієнтом* скалярної функції. Компонентами його служать похідні від $\varphi(x, y, z)$ по координатах x, y, z . (При обчисленні, наприклад, похідної функції $\varphi(x, y, z)$ по x дві інші змінні y і z вважаються сталими).

Таким чином, *напруженість електростатичного поля \vec{E} дорівнює градієнту потенціалу φ , взятому зі зворотним знаком.*

Точки поля, що задовольняють умову $\varphi(x, y, z) = \text{const}$, утворюють поверхню, що називається *еквіпотенціальною* або *поверхнею рівного* потенціалу. Графічно еквіпотенціальні поверхні позначають пунктирними лініями так, щоб потенціали двох сусідніх поверхонь відрізнялися на один вольт.

Покажемо, що еквіпотенціальні поверхні перетинаються з лініями напруженості під прямим кутом. Для цього підберемо на поверхні рівного потенціалу $\varphi(x, y, z) = \text{const}$ дві близько розташованих одна біля одної точки 1 і 2, такі, що відрізок, який їх з'єднує, можна вважати прямолінійним. Позначимо його вектором $\Delta \vec{l}$ (рис. 1.16). Робота переносу заряду q з першої точки в другу:

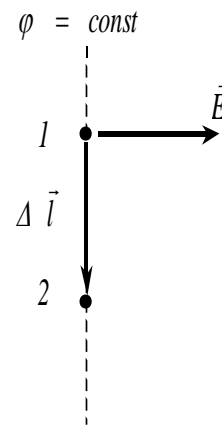


Рис. 1.16

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q(\varphi - \varphi) = 0.$$

Але цю ж роботу можна представити у вигляді скалярного добутку:

$$A_{12} = (\vec{F} \Delta \vec{l}) = q(\vec{E} \Delta \vec{l}) = 0.$$

З рівності нулю скалярного добутку випливає, що вектори $\Delta \vec{l}$ й \vec{E} перпендикулярні один одному, що і доводить висловлене вище припущення. Оскільки $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$, градієнт перпендикулярний екіпотенціальній поверхні в кожній її точці. Градієнт вказує напрямок найбільш різкого зростання функції $\varphi(x, y, z)$, а вектор напруженості поля \vec{E} спрямований у бік зниження потенціалу.

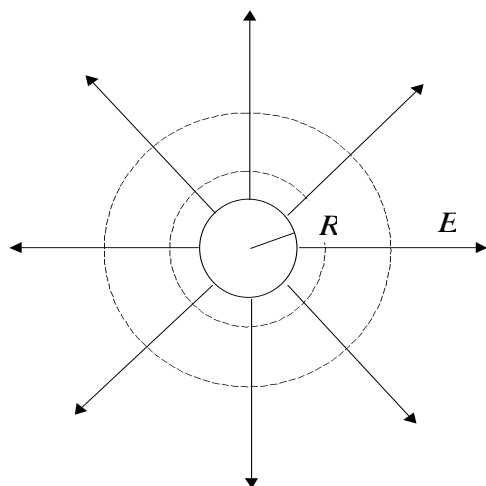
§ 1.9. Обчислення потенціалу по напруженості

Співвідношення (1.21) дозволяє визначати потенціал електростатичного поля по його напруженості. Зробимо це для розглянутих вище випадків (див. § 1.6) поля зарядженої кулі, циліндра і площини.

1. Знайдемо потенціал поля, створеного провідною кулею радіуса R , рівномірно зарядженою по поверхні (рис. 1.17). Згідно з (1.10), напруженість поля кулі за її межами ($r \geq R$)

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}.$$

Оскільки поле має сферичну симетрію, формула (1.21) має вид



$$E(r) = -\frac{d\varphi(r)}{dr},$$

звідки

$$\varphi(r) = -\int E(r) dr + C,$$

де C – константа інтегрування. Приймаючи $\varphi(r \rightarrow \infty) = 0$, цю

Рис. 1.17

константу можна зробити рівною нулю. Тоді в результаті інтегрування одержимо

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}, \quad (r \geq R). \quad (1.23)$$

Еквіпотенціальні поверхні являють собою концентричні сфери, зображені на рис. 1.17 пунктирними лініями.

Оскільки напруженість поля всередині кулі дорівнює нулю ($E_{\text{внутр}} = 0$), потенціал поля має там постійне значення

$$\varphi_{\text{внутр}} = \text{const.}$$

Умова безперервності потенціалу, що впливає з його визначення, згідно з (1.23), дає

$$\varphi_{\text{внутр}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R}.$$

Графік залежності потенціалу кулі від відстані r від його центру наведений на рис. 1.18.

2. Знайдемо потенціал електростатичного поля, створеного провідним циліндром, рівномірно зарядженим по поверхні. Згідно з (1.12), напруженість поля за межами циліндра

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\tau}{r}, \quad (r \geq R),$$

де $\tau = q/l$ – заряд одиниці довжини циліндра.

Поле циліндра має аксіальну симетрію, тому потенціал

$$\varphi(r) = -\int E(r) dr + C_1 = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} + C_1, \quad (r \geq R). \quad (1.24)$$

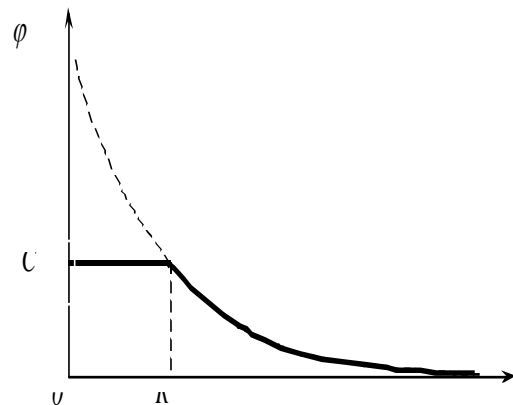


Рис. 1.18

Константу інтегрування C_1 тут не можна зробити рівною нулю, тому що циліндр “нескінченно довгий” і поле на нескінченності не зникає, як це було в попередньому випадку.

Картина силових ліній і екіпотенціальних поверхонь якісно аналогічна зображеній на рис. 1.17, якщо дивитися з торця циліндра. Графік залежності потенціалу φ від r/R наведений на рис. 1.19.

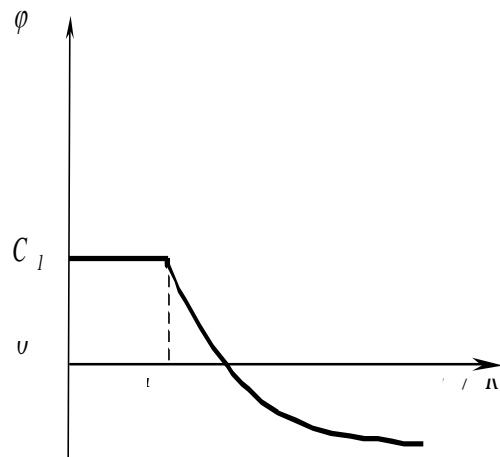


Рис. 1.19

3. Знайдемо тепер потенціал електростатичного поля, створеного зарядженою площиною. Згідно з (1.14), напруженість поля площини $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ ($\sigma = q/S$ – поверхнева густина заряду). Завдання знаходження потенціалу поля розв’язується інтегруванням цього виразу по координаті x на осі, перпендикулярній площині (рис. 1.20):

$$\varphi(x) = - \int E(x) dx + C_2 = C_2 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x. \quad (1.25)$$

Поверхні рівного потенціалу являють собою плоскі поверхні, паралельні зарядженій площині і розташовані, згідно з (1.25), на рівних відстанях одна від одної.

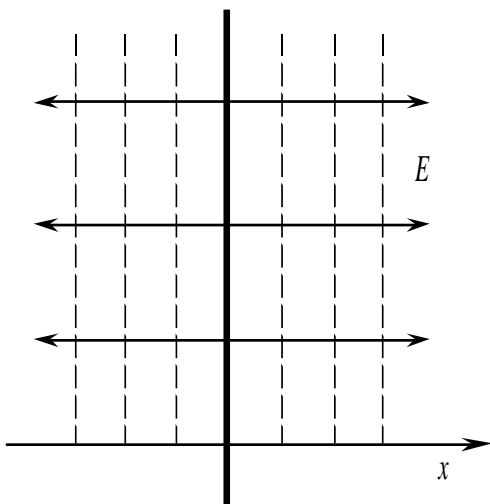


Рис. 1.20

Константу інтегрування C_2 тут також не можна зробити рівною нулю, оскільки площина “нескінченна”.

4. Знайдемо потенціал поля, створеного двома паралельними різнойменно зарядженими площинами,

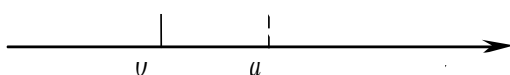


Рис. 1.21

відстань між якими d (див. рис. 1.11). Підставивши в (1.25) відповідний вираз (1.15), одержимо

$$\varphi(x) = C_2 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} x, (0 \leq x \leq d). \quad (1.26)$$

Нехай потенціал лівої площини φ_1 , а правої – φ_2 . Виберемо початок відліку по осі X на лівій позитивно зарядженій площині. Тоді з формули (1.26) одержимо

$$\varphi(0) = C_2 = \varphi_1,$$

$$\varphi(d) = \varphi_1 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \varphi_2.$$

Оскільки $\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E$, остання формула дозволяє одержати зв'язок напруженості поля з різницею потенціалів між площинами (обкладками плоского конденсатора):

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}.$$

Різниця потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$ називається *напругою* U , тобто

$$E = \frac{U}{d}. \quad (1.27)$$

Напруженість поля між обкладками плоского конденсатора дорівнює відношенню прикладеної напруги до відстані між ними.

Оскільки за межами плоского конденсатора $E=0$, потенціал має там постійні значення, що дорівнюють потенціалам відповідних його обкладок. Графік потенціалу наведений на рис. 1.21.

§ 1.10. Провідники в електростатичному полі

Провідниками називаються речовини, в яких є вільні заряди, здатні переміщуватися по всьому об'єму провідника. Провідниками є всі метали, розчини електролітів, іонізовані гази. Ми будемо надалі розглядати тільки метали. Вільні заряди, що

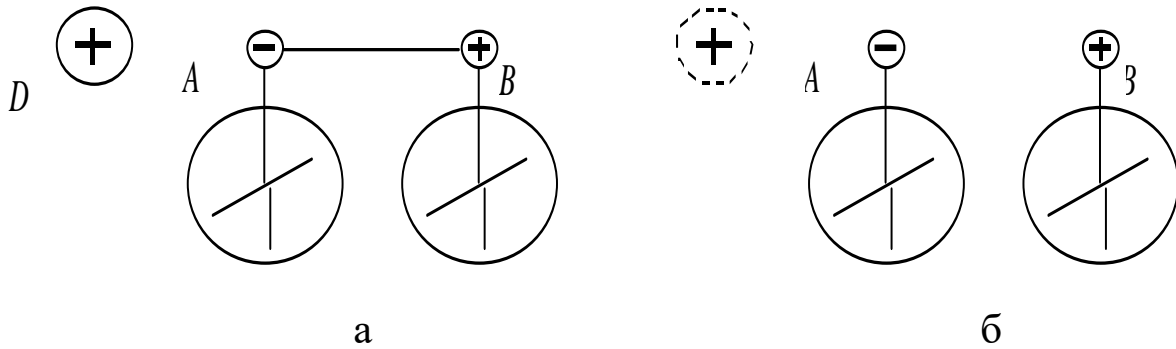


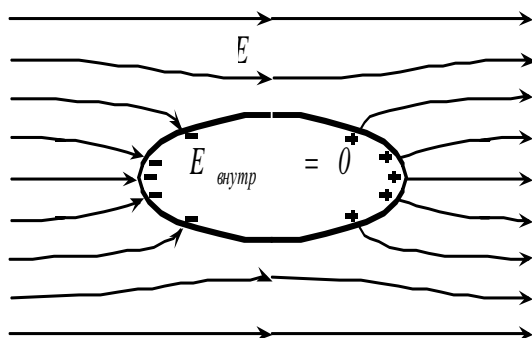
Рис. 1.22

переміщуються всередині металів – електрони.

Якщо провідник внести в зовнішнє електростатичне поле, то він буде спотворювати це поле завдяки виникненню на його поверхні індукованого заряду. Наявність індукованого заряду в провіднику можна довести на досліді.

З'єднаємо дротом два електроскопи A і B й наблизимо до першого заряджене тіло D (рис. 1.22,а). Стрілки електроскопів відхиляться, що свідчить про наявність на них зарядів. Якщо дріт, що з'єднує електроскопи, забрати, то після віддалення тіла D електроскопи залишаються зарядженими, причому заряд одного з них позитивний, а іншого – негативний (рис. 1.22,б). Це свідчить про перерозподіл зарядів, наявних у вільному стані в металевих частинах електроскопів і в дроті. Описаний процес зарядки називається електризацією через вплив (“по індукції”).

Наявність вільних зарядів у провідниках зумовлює їхні характерні властивості, які ми розглянемо надалі.



1. Напруженість поля всередині провідника дорівнює нулю ($E_{\text{внутр}} = 0$).

Рис. 1.23

Насправді, при внесенні провідника в електростатичне поле вільні електрони, що мають негативний заряд, зміщуються у напрямку, протилежному напрямку зовнішнього поля. На іншому кінці провідника при цьому утворюється надлишковий позитивний заряд іонів кристалічної решітки (рис. 1.23). Ці заряди розташовуються так, що створене ними електричне поле повністю компенсує зовнішнє поле E_0 . В протилежному випадку не скомпенсоване електричне поле, впливаючи на вільні електрони, привело б їх у рух, який тривав би доти, доки поле усередині провідника б не зникло.

Таким чином, першу з властивостей провідника в електростатичному полі можна записати у вигляді рівняння:

$$E_{внутр} = 0. \quad (1.28)$$

2. З рівності нулю напруженості електростатичного поля всередині провідника, згідно з (1.21), випливає, що потенціал φ у всьому об'ємі провідника має постійне значення. Друга властивість провідників:

$$\varphi = const. \quad (1.29)$$

Можна говорити про потенціал провідника як цілого. Якщо два яких-небудь провідника привести в зіткнення або з'єднати дротиком, то потенціали їх негайно зрівнюються – це буде вже єдиний провідник. Земля, як об'єкт, що проводить електричний струм, теж має певний потенціал. Потенціал Землі звичайно приймають рівним нулю. При обладнанні заземлення металеві частини приладів або корпусів верстатів з'єднують із землею, і вони набувають "нульовий потенціал".

3. З (1.21) також випливає, що лінії напруженості поля перпендикулярні поверхні провідника в кожній її точці, оскільки ця поверхня є однією з екіпотенціальних поверхонь.

4. Напруженість поля в кожній точці поверхні провідника визначається поверхневою густиною заряду σ на провіднику поблизу даної точки і виражається формулою

$$E_{нов} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.30)$$

Для доведення розглянемо ділянку поверхні зарядженого провідника таку малу, що її можна вважати плоскою, і скористаємося теоремою Остроградського-Гаусса. Гаусівську поверхню виберемо у вигляді циліндра дуже малої висоти з основами, паралельними цій поверхні, і твірними, перпендикулярними до неї (рис. 1.24). Лінії напруженості перпендикулярні основам циліндра і скочують вздовж його бічної поверхні. Потік вектора \vec{E} через нижню основу циліндра дорівнює нулю, тому що $E_{внутр} = 0$. На верхній основі вектор \vec{E} спрямований уздовж вектора нормалі, тому скалярний добуток $(\vec{E} d\vec{S}) = E dS$, а модуль вектора \vec{E} – стала величина ($E = const$). Тоді маємо

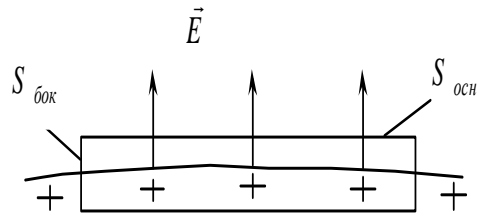


Рис. 1.24

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \int_{S_{осн}} E dS = E \cdot S_{осн} = \frac{\sigma \cdot S_{осн}}{\epsilon_0},$$

звідки і випливає наведене вище співвідношення (1.30).

Розглянемо приклад використання перерахованих властивостей провідників.

Приклад. Є дві металеві кулі радіусами R_1 й R_2 . Заряд першої з них q_1 , а друга куля не заряджена ($q_2 = 0$). Знайти заряди першої і другої куль q'_1 і q'_2 після їхнього з'єднання дротом, ємністю якого можна знехтувати (рис. 1.25).

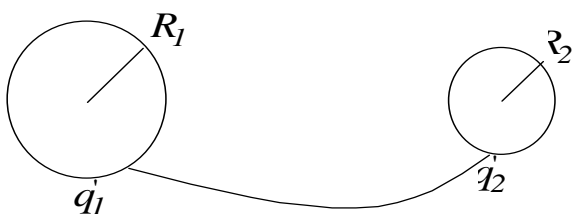


Рис. 1.25

Розв'язання. Для знаходження двох невідомих величин q'_1 і q'_2 потрібно мати два незалежні рівняння. Перше з них запишемо,

скориставшись законом збереження заряду:

$$q_1 = q'_1 + q'_2. \quad (a)$$

Друге рівняння випливає з умови рівності потенціалів куль після їхнього з'єднання. Skorиставшись формулою (1.23), маємо

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q'_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q'_2}{R_2}, \quad (б)$$

звідки $q'_1 = q'_2 \frac{R_1}{R_2}$. Підставивши в (а) і зробивши елементарні перетворення, одержимо

$$q'_1 = q_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad q'_2 = q_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Отримані формули показують, що заряди куль пропорційні їхнім радіусам:

$$\frac{q'_1}{q'_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Якщо другою кулею обрати Землю ($R_2 \gg R_1$), то заряд першої кулі буде мізерно малий:

$$q'_1 = q_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cong q_1 \frac{R_1}{R_2} \ll q_1.$$

Тому заряд будь-якого тіла після його з'єднання із Землею “іде в землю”.

§ 1.11. Електростатичне екранування. Заземлення

Розглянуті вище властивості провідників дозволяють робити електростатичне екранування, тобто створювати у просторі області, в яких електричне поле відсутнє. Для цього дану область простору оточують провідною оболонкою (або сіткою), яку з'єднують із Землею. Індуковані зовнішнім

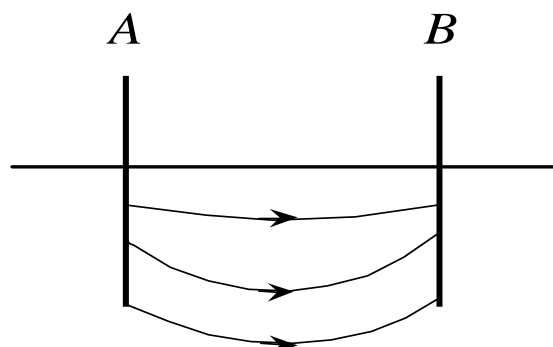


Рис. 1.26

електричним полем заряди перерозподіляються по поверхні цієї оболонки таким чином, що поле усередині неї стає рівним нулю. Таку оболонку можна зарядити, надавши їй надлишковий заряд, однак поле усередині оболонки завжди буде відсутнє (так звана “клітка Фарадея”).

Термін “заземлення” звичайно має два змісти:

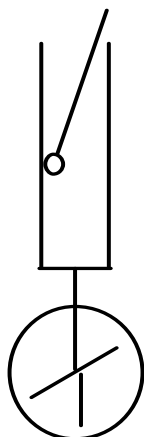
1) використання Землі як провідника великої ємності, про що йшла мова в попередньому параграфі (визначення електричної ємності провідника буде дано нижче);

2) як провідника, що відіграє роль другого провідника у двопровідній лінії.

Якщо у двох точках A і B земної поверхні, що знаходяться на деякій відстані одна від одної, у землю увіткнути довгі металеві стрижні, що мають з нею добрий електричний контакт, то електричний опір ділянки землі між цими точками не залежить від відстані між ними (рис. 1.26). Справа в тому, що зі збільшенням цієї відстані зростає і площа поперечного перерізу “провідника” – шару землі між цими точками, так що опір між ними залишається незмінним. Такі лінії використовуються для обладнання телефонного зв'язку в польових умовах.

§ 1.12. Електростатичний генератор Ван де Граафа

Властивості провідників, описані в попередньому параграфі, були встановлені в дослідах Фарадея. Він, зокрема, з'ясував, що наданий провіднику заряд розподіляється на поверхні цього провідника. Насправді, вільні заряди одного знака, відштовхуючись один від одного, прагнуть розійтися якнайдалі й тому будуть знаходитися в поверхневому шарі провідника.



В одному з дослідів Фарадей насаджував на стрижень електроскопа довгу металеву посудину циліндричної форми, відкриту зверху. Потім усередину циліндра він вносив заряджену кульку на ізолюваній ручці (рис. 1.27). Стрілка електроскопа

Рис. 1.27

відхилялася. Якщо кулька була занурена в циліндр досить глибоко, то при будь-яких переміщеннях її в циліндрі кут відхилення стрілки електроскопа не змінювався. Він не змінювався навіть тоді, коли заряджена кулька доторкалася до внутрішньої поверхні циліндра. При цьому кулька виявлялася незарядженою. У цьому можна було переконатися, витягаючи кульку з циліндра і доторкаючись нею до іншого – незарядженого електроскопа. Увесь заряд кульки переходив у циліндр і розподілявся на його зовнішній поверхні.

Грунтуючись на цих дослідах, Фарадей запропонував спосіб, за допомогою якого заряд одного провідного тіла можна повністю передавати іншому провідному тілу. Для цього в другому тілі треба зробити порожнину й внести в неї перше (заряджене) тіло. При зіткненні

внесеного тіла з внутрішньою поверхнею порожнини заряд від нього повністю переходить до другого тіла. Внесене тіло можна витягти з порожнини й, зарядивши знову, таким же способом передати цей заряд другому тілу. Повторюючи цю операцію багаторазово, можна теоретично надати порожньому тілу який завгодно великий заряд.

Практично ж величина заряду обмежується витоком електрики через іонізацію навколишнього повітря. За цим принципом працює електростатичний генератор Ван де Граафа.

Генератор Ван де Граафа складається з порожньої металевої кулі 1 діаметром у кілька метрів, укріпленої на ізолюючій колоні 2 (рис. 1.28). Рухома, нескінченна стрічка з шовкової прогумованої тканини заряджається від джерела високої напруги за допомогою системи вістрів 4. Інша система вістрів 5 знімає заряди зі стрічки й передає їх порожній кулі. Генератор дозволяє одержувати напруги до 3 ... 5 млн вольт. Він використовується для прискорення електронів та іонів.

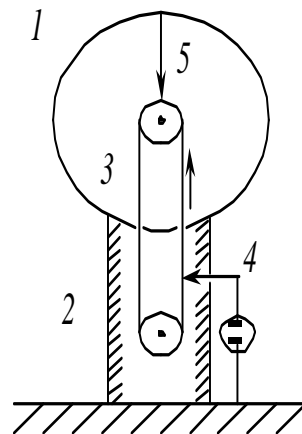


Рис. 1.28

§ 1.13. Ємність провідників і конденсаторів

Оберемо ізольований провідник і надамо йому заряд q . Потенціал провідника стає рівним φ . Надавши провіднику ще один такий же заряд q , виявимо, що його потенціал подвоївся. Дослідним шляхом можна встановити, що заряд провідника і його потенціал пропорційні один одному. Зв'язок між ними прийнято записувати у вигляді

$$q = C\varphi,$$

де C – коефіцієнт пропорційності, що характеризує даний провідник. Він називається *електричною ємністю провідника*. За визначенням,

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q}{\varphi}. \quad (1.31)$$

Ємність відокремленого провідника чисельно дорівнює заряду, який треба надати раніше не зарядженому провіднику, щоб його потенціал став рівним одному вольту.

Ємність відокремленого провідника залежить від розмірів і форми провідника, а також від розташування поблизу нього інших тіл. Тому для одержання певних значень ємності використовують не окремі провідники, а конденсатори.

Конденсатором назвемо сукупність двох провідників, відстань між якими набагато менша їх лінійних розмірів. Це можуть бути дві паралельні пластини, що складають *плоский конденсатор*, два коаксіальні циліндри, що є обкладками *циліндричного конденсатора*, або дві концентричні сфери, що утворюють *сферичний конденсатор*.

Процес зарядки конденсатора зводиться до переносу заряду з однієї його обкладки на іншу, у результаті чого одна з них набуває надлишкового позитивного заряду q , а інша – надлишкового негативного заряду тієї ж величини. Цей заряд називається зарядом конденсатора.

Ємність конденсатора чисельно дорівнює відношенню заряду q до різниці потенціалів U між його обкладками:

$$C \stackrel{def}{=} \frac{q}{U}, \quad (U = \varphi_1 - \varphi_2). \quad (1.32)$$

Електричне поле конденсатора існує лише в просторі між його обкладками і тому не піддається впливу навколишніх тіл. Ємність конденсатора залежить від його форми й розмірів, а також від діелектричної проникності ізолятора, що знаходиться між обкладками (визначення діелектричної проникності буде дано нижче).

У системі СІ ємність вимірюється у фарадах: $1 \text{ Ф} = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ В}}$.

Це дуже велика одиниця ємності, і тому на практиці ємність вимірюють у мікрофарадах ($1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$) або в пікофарадах ($1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$).

Щоб проілюструвати сказане, обчислимо радіус кулі R , ємність якої становить один фарад. Згідно з (1.23), потенціал кулі, що має заряд q , рівний

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R}.$$

Підставивши цю формулу в (1.31), знайдемо ємність кулі:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (1.33)$$

Звідси радіус кулі ємністю в один фарад

$$R = \frac{C}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м}.$$

Тобто цей радіус становить 9 млн кілометрів. Розмір такого тіла набагато перевищує розмір Землі й приблизно дорівнює 1/20 частини її відстані від Сонця.

Одержимо тепер формули ємності конденсаторів, про які говорилося вище.

1. Сферичний конденсатор. Згідно з формулою (1.23), різниця потенціалів між обкладками сферичного конденсатора – концентричними сферами радіусами R_1 й R_2 (рис. 1.29):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Підставивши цей вираз в (1.32), одержимо

$$C_{сф} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (1.34)$$

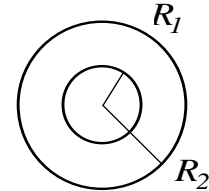


Рис. 1.29

2. Циліндричний конденсатор. Різниця потенціалів між коаксіальними циліндрами з радіусами R_1 і R_2 і довжиною l (рис. 1.30), що є обкладками циліндричного конденсатора, згідно з (1.24), рівна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad \left(\tau = \frac{q}{l} \right).$$

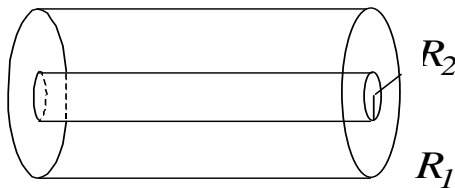


Рис. 1.30

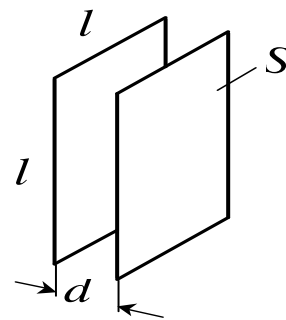


Рис. 1.31

З формули (1.32) одержимо

$$C_{цил} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (1.35)$$

3. Плоский конденсатор. Будемо вважати, що розміри обкладок плоского конденсатора набагато перевищують відстань між ними ($l \gg d$, рис. 1.31). Тоді, нехтуючи викривленням електричного поля на краях обкладок, згідно з (1.26), маємо

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d, \quad (\sigma = \frac{q}{S}),$$

що після підстановки у формулу (1.32) дає

$$C_{пл} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \quad (1.36)$$

де S – площа обкладки.

§ 1.14. З'єднання конденсаторів

Знайдемо ємність батареї конденсаторів при їх паралельному і послідовному з'єднаннях.

1. Паралельне з'єднання. Для простоти розглянемо батарею, що складається з двох конденсаторів ємностями C_1 й C_2 (рис. 1.32). Напруга U , прикладена до батареї, однакова для кожного з конденсаторів. Тому заряди конденсаторів, згідно з (1.32), рівні

$$q_1 = C_1 U,$$

$$q_2 = C_2 U.$$

Оскільки заряд батареї $q = q_1 + q_2$, її ємність

$$C_{пар} = \frac{q}{U} = \frac{C_1 U + C_2 U}{U} = C_1 + C_2.$$

Узагальнюючи цю формулу на випадок N паралельно з'єднаних конденсаторів, одержимо

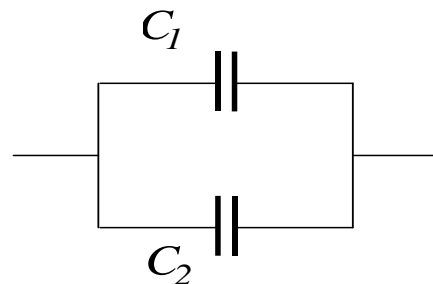


Рис. 1.32

$$C_{нар} = \sum_{i=1}^N C_i. \quad (1.37)$$

Ємність батареї паралельно з'єднаних конденсаторів дорівнює сумі ємностей кожного з них.

2. Послідовне з'єднання. При послідовному з'єднанні конденсаторів (рис. 1.33) прикладена до батареї напруга U розподіляється по кожному з конденсаторів, так що

$$U = U_1 + U_2. \quad (1.38) \quad \begin{array}{c} C_1 \\ +q \quad || \quad -q \end{array} \quad \begin{array}{c} C_2 \\ +q \quad || \quad -q \end{array}$$

Заряди конденсаторів при їхньому послідовному з'єднанні рівні один одному:

Рис. 1.33

$q_1 = q_2 = q$, оскільки при підключенні батареї конденсаторів до джерела ЕРС протікає короткочасний струм зарядки, однаковий у кожному з конденсаторів.

Інший доказ цього: кожна з обкладок конденсаторів ізольована від інших. Зокрема, права обкладка конденсатора C_1 і ліва обкладка конденсатора C_2 разом із з'єднуючим їх провідником являють собою ізольований провідник із зарядом $q = 0$. Після зарядки батареї, за законом збереження заряду, сумарний заряд цих обкладок залишається рівним нулю, тому якщо перша з них набуває заряду $-q$, то друга $+q$.

З формули (1.32) випливає, що $U_1 = \frac{q}{C_1}$, $U_2 = \frac{q}{C_2}$, а напруга на батареї конденсаторів $U = \frac{q}{C_{посл}}$. Підставивши ці формули в (1.38) і скоротивши q , одержимо

$$\frac{1}{C_{посл}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

У загальному випадку N послідовно з'єднаних конденсаторів:

$$\frac{1}{C_{\text{посл}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}. \quad (1.39)$$

Величина, обернена ємності батареї конденсаторів при їхньому послідовному з'єднанні, дорівнює сумі обернених величин ємностей кожного з конденсаторів.

Слід зазначити, що при послідовному з'єднанні конденсаторів більша напруга припадає на конденсатор меншої ємності.

§ 1.15. Енергія системи нерухомих зарядів

Кулонівські сили, що діють між зарядженими тілами, є силами консервативними. Тому будь-який заряд, поміщений в електростатичне поле, набуває потенційної енергії. Сукупність зарядів, що знаходяться у різних точках простору, має енергію, що має сенс потенційної.

Знайдемо енергію системи з двох точкових зарядів q_1 і q_2 (рис. 1.34), що знаходяться на відстані r один від одного. Формування цієї системи зарядів почнемо з того, що помістимо в точку 1 заряд q_1 . Виконана при цьому робота дорівнює нулю, тому що на заряд q_1 при його переміщенні не діє кулонівська сила. Помістимо тепер у точку 2 заряд q_2 , переносячи його “з нескінченності”. Згідно зі співвідношенням (1.20), робота перенесення цього заряду

$$A_2 = q_2 \varphi_2 = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r},$$

де φ_2 – потенціал поля, створеного в точці 2 зарядом q_1 (див. формулу (1.23)).

Вчинимо тепер навпаки – помістимо спочатку в точку 2 заряд q_2 (виконана при цьому робота буде рівна нулю), а потім у точку 1 помістимо заряд q_1 . Робота в цьому випадку

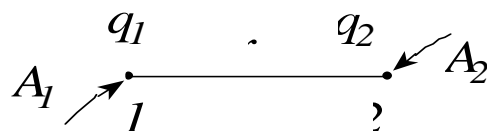


Рис. 1.34

$$A_1 = q_1 \varphi_1 = q_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{r},$$

де φ_1 – потенціал поля, створеного в точці 1 зарядом q_2 .

З двох останніх рівностей випливає, що $q_1\varphi_1 = q_2\varphi_2$, тому роботу, затрачену при формуванні системи зарядів, тобто енергію системи, можна представити у вигляді

$$A = W = \frac{1}{2} \cdot 2q_1\varphi_1 = \frac{1}{2} (q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2).$$

Ця формула у випадку системи з N нерухомих зарядів набуває виду

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i. \quad (1.40)$$

Енергія системи нерухомих зарядів дорівнює півсумі добутків кожного із зарядів q_i на потенціал φ_i поля, створеного всіма іншими зарядами в точці, де знаходиться заряд q_i .

§ 1.16. Енергія зарядженого провідника й конденсатора

Знайдемо роботу, затрачену при зарядці відокремленого провідника. Надаючи провіднику заряд порціями по dq (способом, описаним в § 1.12), ми поступово збільшуємо його потенціал (рис. 1.35). Нехай при наданні провіднику чергової порції заряду потенціал провідника φ . Тоді робота переносу заряду dq на поверхню провідника

$$\delta A = \varphi dq.$$

Щоб знайти роботу, затрачену при наданні йому заряду q , потрібно проінтегрувати цей вираз:

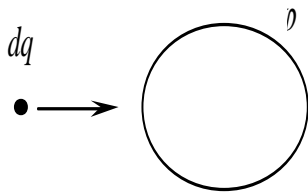


Рис. 1.35

$$A = \int_0^q \phi dq = \frac{1}{C} \int_0^q q dq = \frac{q^2}{2C},$$

де C – ємність провідника.

Ця робота і є енергія, запасена провідником:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\phi}{2} = \frac{C\phi^2}{2}. \quad (1.41)$$

Процес зарядки конденсатора, як відомо, зводиться до переносу заряду q з однієї його обкладки на іншу. У результаті одна з обкладок набуває надлишкового позитивного заряду $+q$, а інша – надлишкового негативного $-q$. Енергію зарядженого конденсатора визначають аналогічно:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}, \quad (1.42)$$

де U – напруга між обкладками конденсатора.

§ 1.17. Енергія електричного поля. Густина енергії

Виразимо енергію зарядженого конденсатора через напруженість електричного поля E , створеного між його обкладками. Розглянемо плоский конденсатор і будемо нехтувати викривленням однорідного поля на його краях (рис. 1.36). Нехай площа кожної з обкладок конденсатора S , відстань між ними d , а заряд конденсатора q . Тоді ємність конденсатора $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$, а

його енергія $W = \frac{q^2}{2C}$. Оскільки напруженість поля між

обкладками, згідно з (1.15), $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S}$,

заряд можна виразити через напруженість

$$q = \epsilon_0 S E.$$

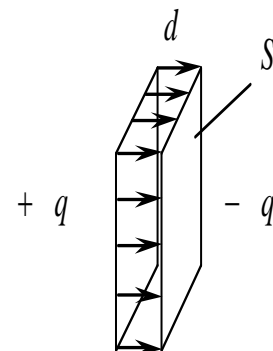


Рис. 1.36

Підставивши у вираз для енергії W заряд q і ємність C , одержимо

$$W = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} Sd = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V,$$

де $V = Sd$ – об'єм конденсатора.

Розділивши на V , одержимо об'ємну густину енергії електричного поля:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (1.43)$$

Якщо поле неоднорідне, об'ємна густина енергії визначається межею відношення енергії ΔW , що міститься в об'ємі ΔV , до цього об'єму при спрямуванні його до нуля:

$$w = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta V}.$$

Приклад. Знайти енергію електричного поля, створеного кулею радіусом R , що має заряд q (рис. 1.37).

Розв'язання. Енергію електричного поля навколо кулі можна знайти інтегруванням об'ємної густини енергії w за об'ємом простору поза кулею:

$$W = \int_V w dV.$$

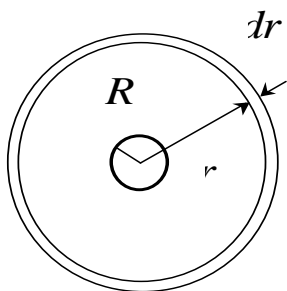


Рис. 1.37

Цей інтеграл зручно обчислювати у сферичній системі координат, оскільки завдання має сферичну симетрію. Елемент об'єму dV візьмемо у вигляді сферичної оболонки радіусом r і товщиною dr . Тоді

$$dV = 4\pi r^2 dr.$$

Оскільки густина енергії $w = \varepsilon_0 E^2 / 2$ залежить тільки від r ($E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$), інтеграл за об'ємом зводиться до інтеграла по r в межах від R до ∞ :

$$W = \frac{\varepsilon_0 q^2}{2(4\pi\varepsilon_0)^2} \int_R^{\infty} 4\pi r^2 \frac{dr}{r^4} = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \left. \frac{1}{r} \right|_R^{\infty} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Якщо врахувати, що ємність кулі $C = 4\pi\varepsilon_0 R$, то отримана формула збігається з формулою для енергії зарядженої кулі $W = \frac{q^2}{2C}$.

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте основний закон електростатики.
2. Що є силовою характеристикою електричного поля?
3. У чому полягає принцип суперпозиції електричних полів?
4. Що називається електричним диполем?
5. Які застосування теореми Остроградського–Гаусса вам відомі?
6. Що називається потенціалом електростатичного поля?
7. Вкажіть зв'язок потенціалу з напруженістю електростатичного поля.
8. Перелічіть властивості провідників в електростатичному полі.
9. Що називається електричною ємністю відокремленого провідника, конденсатора?
10. Запишіть формулу для енергії системи нерухомих зарядів і роз'ясніть зміст фізичних величин, що в неї входять.
11. Запишіть вираз для об'ємної густини енергії електричного поля.

Електричне поле в діелектриках

§ 1.18. Види діелектриків. Поляризація діелектриків

Діелектриками називаються речовини, що не проводять електричний струм. Якщо в провідниках є вільні заряди, здатні переміщуватися по всьому об'єму провідника, то в діелектриках таких зарядів немає.

Можна поставити дослід, що доводить це. Внесемо в електричне поле провідник A і діелектрик B (рис. 1.38,а).

Потім

розділимо кожний з них на дві частини і

вимкнемо поле. Обидві частини провідника заряджаються по індукції і набувають зарядів протилежних знаків (рис. 1.38,б). Обидві частини діелектрика залишаються незарядженими, що й підтверджує сказане.

Наявність у провідниках вільних зарядів зумовлює ряд їх властивостей в електричному полі, описаних в § 1.10. Зокрема, напруженість електростатичного поля всередині провідника дорівнює нулю. Діелектрики, незважаючи на відсутність у них вільних зарядів, проте взаємодіють з електричним полем, змінюючи його. Це показує простий дослід. Закріпимо на стрижні електроскопа металевий диск A і надамо йому деякий заряд, внаслідок чого стрілка електроскопа відхилиться (рис. 1.39, а). Наблизимо тепер до цього диска товсту пластину B з діелектрика, наприклад, зі скла (рис. 1.39, б). Кут відхилення стрілки електроскопа різко зменшується, начебто диск A втрачає заряд.

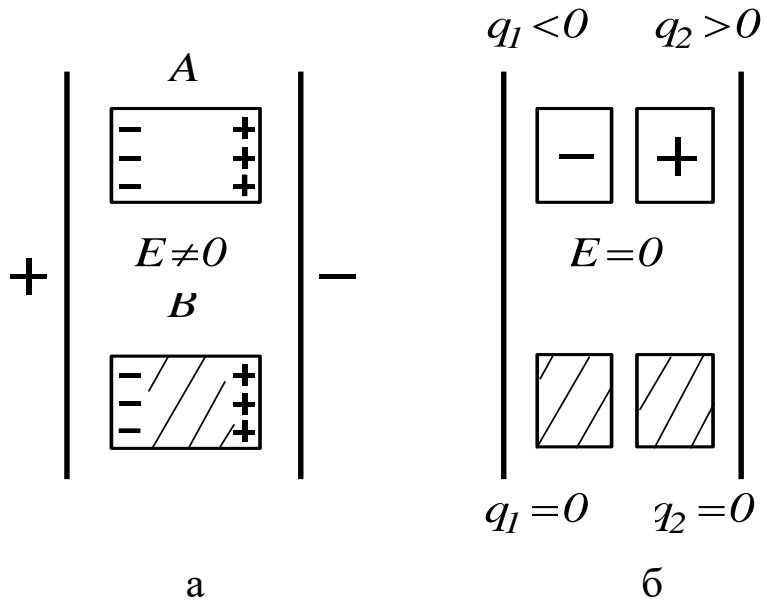


Рис. 1.38

Якщо забрати діелектрик, то картина відновлюється в колишньому вигляді.

Діелектрик, поміщений в електричне поле, поляризується. Це значить, що на його поверхні з'являється надлишковий заряд (рис. 1.40). Цей заряд називається *поляризаційним* або *зв'язаним*. Механізм поляризації різних речовин різний і за цією ознакою діелектрики можна розділити на три типи.

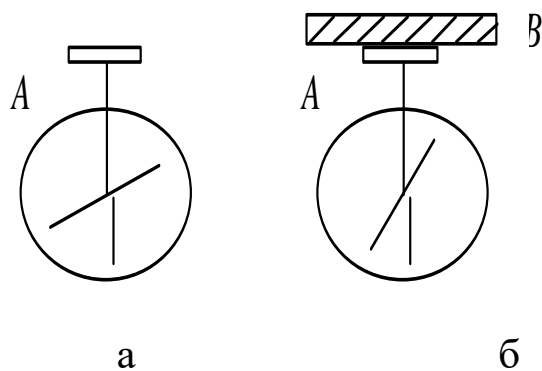


Рис. 1.39

До першого типу відносяться діелектрики, молекули яких мають електричні дипольні моменти під час відсутності зовнішнього поля, тобто є *полярними*. Кожна молекула такого діелектрика несе на одному своєму кінці негативний заряд, а на іншому – позитивний. При внесенні

діелектрика в поле дипольні моменти його молекул орієнтуються переважно вздовж поля.

На рис. 1.40 зображений плоский конденсатор, усередину якого поміщена плоска пластинка з діелектрика. Молекули, розташовані на поверхні пластинки, оберненої до позитивної обкладки конденсатора, повертаються до неї своїм негативним полюсом, а молекули, розташовані на протилежній грані пластинки з боку негативної обкладки конденсатора, повертаються до неї своїм позитивним полюсом. У результаті поруч з позитивною обкладкою виникає зв'язаний негативний, а поруч із негативною обкладкою – зв'язаний позитивний заряд. Поверхнева густина заряду на обкладках конденсатора $\sigma = q/S$, а на поверхні діелектрика $\sigma' = q_{зв} / S$. Оскільки $\sigma' < \sigma$, заряди на поверхні діелектрика частково компенсують заряди обкладок конденсатора, у результаті чого напруженість поля між обкладками зменшується, але не перетворюється в нуль, як у металах. Цим і пояснюється “зменшення” заряду диска електроскопа в описаному вище досліді (див. рис. 1.39).

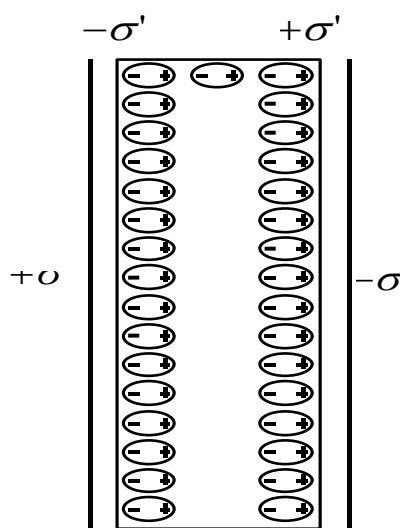


Рис. 1.40

Молекули діелектриків другого типу під час відсутності зовнішнього поля не мають дипольних моментів, тобто є *неполярними*. Поляризація таких діелектриків у зовнішньому полі проявляється в тому, що в його молекулах центри ваги позитивних і негативних зарядів (ядер атомів і електронів) зміщуються один відносно одного та утворюють електричні диполі. Ці диполі поведуться в зовнішньому полі так само, як і дипольні молекули діелектриків першого типу.

До третього типу діелектриків відносяться *іонні кристали*. Це сполуки галогенідів лужних металів $NaCl$, KJ і т.ін.,

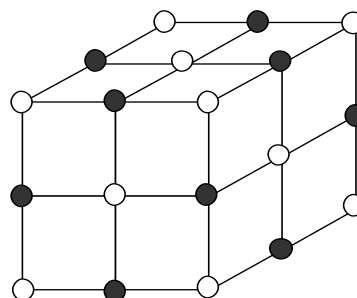


Рис. 1.41

що мають кристалічну решітку у вигляді двох однаково вкладених одна в одну підрешіток, що складаються з позитивних і негативних іонів (рис. 1.41). У зовнішньому електричному полі підрешітки зміщуються одна щодо одної, у результаті чого з'являється дипольний момент кристала як цілого.

Надалі ми будемо розглядати поляризацію діелектриків, не конкретизуючи механізм цієї поляризації.

§ 1.19. Вектор поляризованості

Для кількісної характеристики поляризації діелектрика вводиться поняття *вектора поляризованості*.

Вектором поляризованості називається електричний дипольний момент одиниці об'єму діелектрика, створений зв'язаними зарядами:

$$\vec{P} \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i, \quad (1.44)$$

де \vec{p}_i – дипольний момент i -ї молекули, N – число молекул в об'ємі ΔV .

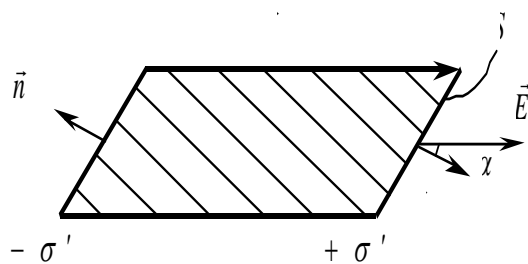


Рис. 1.42

Вектор поляризованості зв'язаний з поверхневою густиною поляризаційного заряду σ' на діелектрику. Щоб знайти цей зв'язок, візьмемо косий паралелепіпед з діелектрика і помістимо його в однорідне електричне поле, лінії якого паралельні його бічним граням (рис. 1.42). На основах паралелепіпеда з'являються поляризаційні заряди з густиною σ' . Якщо S – площа основи паралелепіпеда, то діелектрик набуває дипольного моменту $\sigma' S \vec{l}$, де \vec{l} – вектор, проведений від негативної основи паралелепіпеда до позитивної паралельно до бічних граней.

Вектор поляризованості діелектрика

$$\vec{P} = \frac{\sigma' S}{V} \vec{l},$$

де V – об'єм паралелепіпеда.

Нехай \vec{n} – одиничний вектор зовнішньої нормалі до основи паралелепіпеда, зарядженої позитивно. Тоді $V = S l \cos\alpha = S (\vec{l} \cdot \vec{n})$. Підставивши цей вираз у попередню формулу, попередньо помноживши її скалярно на \vec{n} , знайдемо

$$P_n = (\vec{P} \cdot \vec{n}) = \sigma'. \quad (1.45)$$

Проекція вектора поляризованості на напрямок зовнішньої нормалі до поверхні лівої основи паралелепіпеда, де $\sigma' < 0$, негативна, а на напрямок зовнішньої нормалі до поверхні правої основи – позитивна ($\sigma' > 0$). На бічних гранях паралелепіпеда густина зв'язаного заряду дорівнює нулю одночасно з тим, що нормальна до них компонента вектора \vec{P} теж дорівнює нулю. Тому формула (1.45) слухна для будь-якої точки поверхні діелектрика.

Отриманий результат свідчить про те, що *проекція вектора поляризованості на напрямок зовнішньої нормалі до поверхні діелектрика в даній точці чисельно дорівнює густині зв'язаного заряду σ' поблизу даної точки.*

Формула (1.45) показує, що нормальна складова P_n чисельно дорівнює кількості електрики, що зміщується при поляризації через одиничний майданчик у напрямку нормалі до неї.

Побудуємо подумки всередині діелектрика замкнену поверхню у вигляді прямокутного паралелепіпеда, бічні грані якого паралельні вектору \vec{E} (рис. 1.43). Заряд $-q'$, що пройшов при поляризації через ліву основу паралелепіпеда, і заряд $+q'$, що пройшов через праву основу, рівні один одному, якщо поляризація однорідна, тобто напруженість поля однакова у всьому об'ємі діелектрика.

Якщо ж діелектрик знаходиться в неоднорідному полі, то заряд $-q'$, що зміщується через ліву основу паралелепіпеда, де поле сильніше, більший від заряду $+q''$, що зміщується через

праву основу (рис. 1.44). В об'ємі паралелепіпеда з'явиться некомпенсований поляризаційний заряд $q_{пол}$.

Заряд, що зміщується при поляризації через майданчик dS у напрямку, протилежному напрямку зовнішньої нормалі \vec{n} , згідно з (1.45), $-P_n dS$. Тоді всередину об'єму паралелепіпеда через усю його поверхню S при поляризації надходить поляризаційний заряд

$$q_{пол} = -\oint_S P_n dS = -\oint_S (\vec{P} d\vec{S}). \quad (1.46)$$

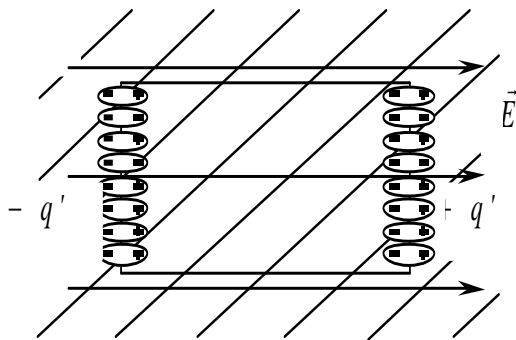


Рис. 1.43

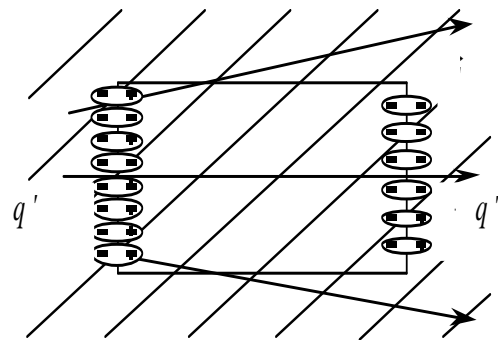


Рис. 1.44

§ 1.20. Теорема Остроградського–Гаусса для діелектриків

Теорему Остроградського–Гаусса, що виражається формулою (1.8), можна застосувати і до діелектриків. Як відомо, мова йде про потік вектора напруженості електричного поля через довільну замкнену поверхню, який, згідно з теоремою Остроградського–Гаусса, дорівнює алгебраїчній сумі зарядів усередині цієї поверхні, поділеної на ϵ_0 :

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Якщо простір заповнений однорідним діелектриком, то поряд з вільним зарядом q всередині поверхні S з'являється поляризаційний заряд $q_{пол}$, згідно з формулою (1.46), який слід додати у праву частину рівняння:

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{q}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0} \oint_S (\vec{P} d\vec{S}).$$

Переносячи другий доданок правої частини рівняння в ліву й помноживши рівняння на ε_0 , одержуємо

$$\oint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = q.$$

Введемо новий вектор

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (1.47)$$

який називається *вектором електричної індукції* (інша назва – *електричне зміщення*). Тоді

$$\oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = q. \quad (1.48)$$

Це і є теорема Остроградського–Гаусса для діелектриків: *Потік вектора електричної індукції через довільну замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі вільних зарядів, що містяться всередині цієї поверхні.*

Теорема Остроградського–Гаусса для вектора індукції \vec{D} в діелектрику має такий же вид, як і для добутку напруженості електричного поля \vec{E}_0 у вакуумі на ε_0 . Тому всі математичні співвідношення, отримані з неї для вакууму, зберігають силу і для однорідного діелектрика. Треба тільки вектор \vec{E}_0 помножити на ε_0 і їх добуток замінити вектором \vec{D} ($\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0$). Наприклад, індукція поля точкового заряду в однорідному діелектрику, згідно з (1.4), рівна

$$D = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q}{r^2}.$$

Індукція поля плоского конденсатора, згідно з (1.15):

$$D = \sigma.$$

Одиниці вимірювання індукції поля D і поляризованості P збігаються й рівні *кулон на квадратний метр* (Кл/м²).

§ 1.21. Поляризованість і діелектрична проникність діелектриків

Рівняння (1.17), що виражає потенційність електростатичного поля, і рівняння (1.48) є фундаментальними рівняннями електростатики. У вакуумі, де поле характеризується одним тільки вектором \vec{E} , цих рівнянь досить, щоб знайти \vec{E} . Вони утворюють повну систему рівнянь електростатики. У речовині вектор \vec{D} є сумою двох векторів різної природи $\epsilon_0 \vec{E}$ і \vec{P} . Тому, щоб одержати повну систему рівнянь для знаходження \vec{D} , треба зв'язати вектори \vec{P} і \vec{E} ще одним рівнянням. Універсального зв'язку між зазначеними векторами немає. Однак дослід показує, що між векторами \vec{P} і \vec{E} для великого класу діелектриків і широкого кола явищ існує лінійна залежність. Цю залежність прийнято записувати у вигляді

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}, \quad (1.49)$$

де χ – безрозмірний коефіцієнт, що називається *поляризованістю* або *діелектричною сприйнятливістю* діелектрика, що є функцією густини і температури речовини.

Підставивши цю формулу в (1.47), одержимо

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}. \quad (1.50)$$

Нова безрозмірна величина

$$\epsilon = 1 + \chi \quad (1.51)$$

називається *діелектричною проникністю* діелектрика. Вона характеризує індивідуальні властивості діелектриків. Для вакууму $\chi = 0$, $\varepsilon = 1$.

У наступному параграфі ми визначимо фізичний зміст вектора електричної індукції \vec{D} і діелектричної проникності ε .

§ 1.22. Напруженість поля в діелектрику

Розглянемо плоский конденсатор, заповнений діелектриком з діелектричною проникністю ε (рис. 1.45). Електричне поле в діелектрику складається з поля E_0 вільних зарядів на обкладках конденсатора і поля E' , створеного поляризаційними зарядами на поверхні діелектрика. Поле E_0 спрямоване зліва направо, від позитивної обкладки конденсатора до негативної. Поле E' спрямоване в протилежну сторону. Напруженість поля E' можна знайти за формулою (1.15), тому що бічні грані діелектрика виступають у ролі заряджених обкладок плоского конденсатора. Тоді

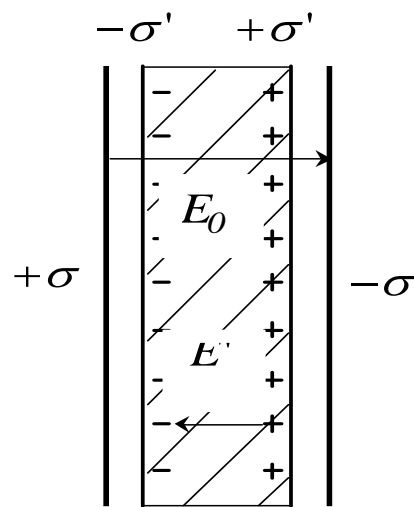


Рис. 1.45

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}.$$

Враховуючи, що $\sigma' = P_n$ і $P_n = \varepsilon_0 \chi E$ (у плоскому конденсаторі напрямки векторів \vec{P} і \vec{E} збігаються), одержимо

$$E = E_0 - \chi E,$$

звідки

$$E = \frac{E_0}{1 + \chi} = \frac{E_0}{\varepsilon}. \quad (1.52)$$

Таким чином, діелектрична проникність показує, у скільки разів напруженість поля в речовині менша напруженості поля у вакуумі:

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E}.$$

Звернемося тепер до формули (1.50) для вектора електричної індукції. У діелектрику

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E},$$

у вакуумі

$$\vec{D}_0 = \varepsilon_0 \vec{E}_0.$$

Оскільки $\vec{E}_0 = \varepsilon \vec{E}$, праві частини двох останніх рівностей збігаються. Отже,

$$\vec{D} = \vec{D}_0. \quad (1.53)$$

Індукція електричного поля \vec{D} в діелектрику дорівнює індукції електричного поля \vec{D}_0 у вакуумі за умови, що однорідний діелектрик заповнює весь простір, де поле відмінне від нуля, або він займає область простору, обмежену еквіпотенціальними поверхнями і лініями напруженості. Це ж стосується і співвідношення (1.52), яке для діелектриків довільної форми не виконується.

Вектор електричної індукції \vec{D} – допоміжна величина, що дозволяє при зазначених умовах виключити з розгляду зв'язані заряди. Поле вектора \vec{D} створюється вільними зарядами, розташованими на поверхні провідників.

Для ілюстрації сказаного розглянемо приклад.

Приклад. Знайти напруженість електростатичного поля в точках 1 і 2 у плоскому конденсаторі (рис. 1.46), відстань між обкладками якого d . До однієї з обкладок прилягає пластинка з діелектрика товщиною d_1 . Діелектрична проникність діелектрика – ε , прикладена до конденсатора напруга – U .

Розв'язання. Позначимо потенціали обкладок конденсатора φ_a і φ_b , потенціал верхньої грані пластинки φ_c . Тоді напруга на конденсаторі

$$U = \varphi_a - \varphi_b = (\varphi_a - \varphi_c) + (\varphi_c - \varphi_b) = U_1 + U_2. \quad (\text{а})$$

Згідно з (1.27),

$$E_1 = \frac{U_1}{d - d_1}, \quad E_2 = \frac{U_2}{d_1}. \quad (\text{б})$$

За співвідношенням (1.53), $D_1 = D_2$, тому, з урахуванням (1.50):

$$\varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_0 \varepsilon E_2. \quad (\text{в})$$

Підставляючи (б) і (в) в (а), одержимо

$$U = \varepsilon(d - d_1)E_2 + d_1 E_2,$$

звідки

$$E_2 = \frac{U}{\varepsilon(d - d_1) + d_1},$$

$$E_1 = \frac{\varepsilon U}{\varepsilon(d - d_1) + d_1}.$$

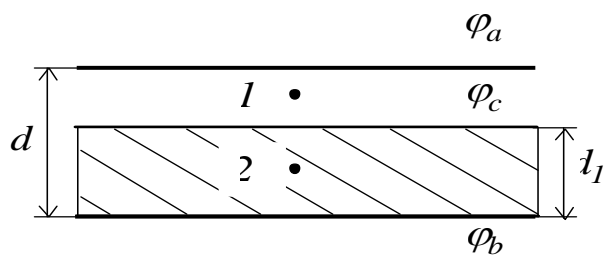


Рис. 1.46

Як і повинно бути, напруженість поля в діелектрику (у точці 2) у ε раз менша напруженості поля у вакуумі (у точці 1, рис. 1.46).

§ 1.23. Залежність ємності конденсатора від діелектричної проникності ізолятора

Між обкладками конденсатора звичайно знаходиться діелектрик з діелектричною проникністю ε . У цьому випадку:

1) підвищується граничне значення напруги U_{max} , яку можна прикласти до конденсатора, щоб не відбулося його пробую;

2) електрична ємність конденсатора C збільшується в ε раз у порівнянні з ємністю повітряного конденсатора C_0 :

$$C = \varepsilon C_0. \quad (1.54)$$

Щоб довести це співвідношення, розглянемо плоский повітряний конденсатор, відстань між обкладками якого d , а заряд q . Ємність конденсатора

$$C_0 = \frac{q}{U_0} = \frac{q}{E_0 d},$$

де U_0 – напруга, $E_0 = \frac{U_0}{d}$ – напруженість поля між його обкладками.

Помістимо всередину конденсатора діелектрик. Тоді напруженість поля

$$E = \frac{U}{d} = \frac{E_0}{\varepsilon},$$

звідки $U = \frac{E_0 d}{\varepsilon} = \frac{U_0}{\varepsilon}$. Ємність конденсатора у цьому випадку

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{U_0} \varepsilon = \varepsilon C_0,$$

що й було потрібно довести.

Якщо діелектрик заповнює весь простір, де поле відмінне від нуля, поряд зі співвідношенням (1.54) змінюються і формули, отримані для вакууму, а саме разом з електричною сталою ε_0 , що входить у формули, з'являється множник ε . Наприклад, формула для об'ємної густини енергії електричного поля набуває виду

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{\vec{D} \vec{E}}{2}. \quad (1.55)$$

§ 1.24. Пондеромоторні сили

В електричному полі на діелектрики і провідники діють сили. Їх називають *пондеромоторними силами*, тобто силами, що діють на вагомій тіла. Цей термін був уведений у той час, коли у фізиці поряд зі звичайними речовинами визнавалося існування

багатьох невагомих субстанцій – теплецю, ефіру, електричної і магнітної рідин.

Першопричиною виникнення пондеромоторних сил є електричні заряди, що надаються тілам. Однак надання зарядів тілам ускладнюється появою поляризаційних зарядів і пружними деформаціями в діелектриках і провідниках. Загальний метод їх обчислення дає термодинаміка.

Розглянемо взаємодію обкладок плоского конденсатора (рис. 1.47). У вакуумі силу взаємодії обкладок F_0 можна знайти, якщо вважати, що ліва обкладка створює електричне поле, а права знаходиться в цьому полі. Тоді

$$F_0 = q_{np} E_{лів}.$$

Якщо відстань між обкладками набагато менша їх лінійних розмірів, можна вважати, що поле створюється нескінченною зарядженою площиною, тобто $E_{лів} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{q_{лів}}{2\epsilon_0 S}$. Оскільки заряди

обкладок рівні за модулем ($q_{np} = q_{лів} = q$), маємо

$$F_0 = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S}. \quad (1.56)$$

Якщо простір між обкладками заповнити твердим діелектриком, то поле зміниться тільки усередині діелектрика. Поле, у якому знаходяться обкладки, і сила їх взаємодії залишаться колишніми. Однак дослід показує, що якщо діелектрик рідкий або газоподібний, то сила взаємодії обкладок зменшується в ϵ раз (ϵ – діелектрична проникність діелектрика). Зазначена зміна сил взаємодії обкладок, яку не вдається

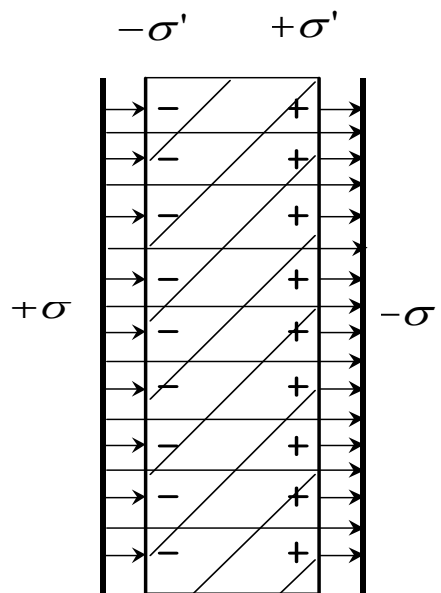


Рис. 1.47

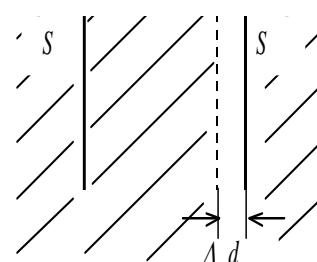


Рис. 1.48

пояснити виникненням зв'язаних зарядів, є наслідком механічних напруг, що з'являються в поляризованому діелектрику. Рідкий або газоподібний діелектрик втягується в простір між обкладками і створює додаткову силу, що розсовує обкладки, у результаті чого сили притягання між ними частково компенсуються.

Проведемо розрахунок з діелектриком. Енергія плоского конденсатора (рис. 1.48):

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} S d .$$

Оскільки напруженість поля між обкладками

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon S} ,$$

одержимо

$$W = \frac{q^2}{2 \varepsilon_0 \varepsilon S} d .$$

Нехай права обкладка під впливом сил притягання злегка зрушується вліво. При цьому виконується робота

$$\Delta A = F \cdot \Delta d .$$

Ця робота виконується за рахунок зміни енергії конденсатора, яка відбувається в результаті зменшення відстані між обкладками на Δd :

$$\Delta A = \Delta W = \frac{q^2}{2 \varepsilon_0 \varepsilon S} d - \frac{q^2}{2 \varepsilon_0 \varepsilon S} (d - \Delta d) ,$$

тобто сила взаємодії обкладок

$$F = \frac{q^2}{2 \varepsilon_0 \varepsilon S} .$$

Порівнюючи цей вираз з (1.56), бачимо, що сила зменшилася в ϵ разів:

$$F = \frac{F_0}{\epsilon}. \quad (1.57)$$

Розгляд у загальному випадку показує, що при заповненні простору, де ϵ електричне поле, однорідним діелектриком з діелектричною проникністю ϵ сили взаємодії між зарядами зменшуються в ϵ разів.

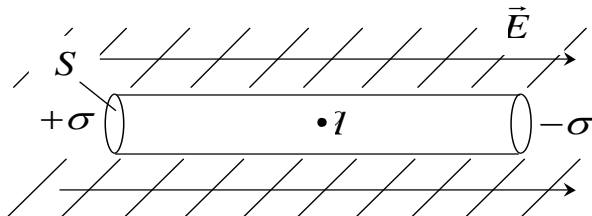


Рис. 1.49

Закон Кулона тоді можна записати у вигляді

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}.$$

У загальному випадку, коли діелектрики неоднорідні або мають кінцеві розміри, їх вплив на сили взаємодії між зарядами не може бути врахований ніякими простими співвідношеннями. Якщо заряд знаходиться в порожнині у діелектрику, то сили будуть визначатися формою порожнини.

Нехай заряд знаходиться усередині діелектрика у довгій вузькій циліндричній порожнині, твірні якої паралельні лініям напруженості поля \vec{E} (рис. 1.49). Сила, що діє на заряд q , складається з двох частин – сили \vec{F} з боку поля й сили \vec{F}' з боку поляризаційних зарядів $q' = \sigma' S$, що виникають на торцях порожнини. Оскільки порожнина вузька і довга, сила \vec{F}' дуже мала і нею можна знехтувати у порівнянні з першою із зазначених сил, тобто

$$\vec{F} = q \vec{E},$$

звідки

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (1.58)$$

Таким чином, *напруженість електричного поля в діелектрику дорівнює силі, що діє на одиничний позитивний заряд, що знаходиться у довгій вузькій порожнині, розташованій уздовж ліній поля \vec{E} .*

Помістимо тепер заряд q у коротку і широку порожнину, показану на рис. 1.50. Як і в попередньому випадку, сила, що діє на заряд:

$$\vec{F}_{\text{н\o i}} = \vec{F} + \vec{F}' = q\vec{E} + \vec{F}' \quad (1.59)$$

причому тут уже не можна знехтувати силою \vec{F}' з боку зв'язаних зарядів на торцях циліндра. Ця сила

$$\vec{F}' = q \vec{E}'.$$

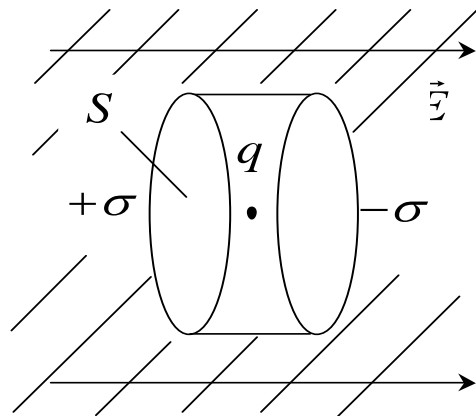


Рис. 1.50

Напруженість поля зв'язаних зарядів \vec{E}' обчислюється за формулою (1.15). З урахуванням (1.45) і (1.49) одержимо

$$\vec{E}' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{P_n}{\epsilon_0} = \chi E.$$

Підстановка в (1.59) дає

$$\vec{F}_{\text{н\o i}} = q(1 + \chi)\vec{E} = q\epsilon\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}q\vec{D},$$

звідки

$$\vec{D} = \frac{\varepsilon_0 \vec{F}_{\text{сум}}}{q}. \quad (1.60)$$

Індукція електричного поля \vec{D} в діелектрику дорівнює силі, що діє на одиничний позитивний заряд, що знаходиться у короткій широкій циліндричній порожнині, твірні якої паралельні лініям напруженості поля \vec{E} , помноженої на електричну сталу ε_0 .

§ 1.25. Сегнетоелектрики

При розміщенні діелектрика в електричному полі відбувається його поляризація, тобто на поверхні діелектрика з'являються зв'язані заряди, а сам діелектрик набуває дипольного моменту, рівного сумарному дипольному моменту всіх молекул діелектрика. У природі зустрічаються речовини, поляризовані навіть за відсутності зовнішнього електричного поля. Вони називаються *сегнетоелектриками*, оскільки явище спонтанної поляризації було спочатку відкрито для сегнетової солі (хімічна формула $Na KC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$).

Властивості сегнетоелектриків:

1. Діелектрична проникність має величину біля декількох сотень і навіть тисяч одиниць ($\varepsilon \approx 10^2 \dots 10^3$).
2. Поляризованість P – нелінійна функція напруженості поля E , тобто діелектрична проникність ε залежить від E .
3. Наявний гістерезис електричних властивостей сегнетоелектриків (див. нижче).
4. Існує температура T_c , характерна для кожного сегнетоелектрика, вище якої він стає звичайним діелектриком. Ця температура називається *температурою Кюрі* або *точкою Кюрі* на честь французького фізика П'єра Кюрі, який уперше відкрив існування подібної критичної температури при дослідженні магнітних властивостей феромагнетиків (див. розд. 3). У сегнетовій солі існує дві точки Кюрі: -15^0C і $+22,5^0C$. Поза цим температурним інтервалом сегнетова сіль – звичайний діелектрик.

Розглянемо зазначене вище явище гістерезису (у перекладі на українську мову означає запізнення). На рис. 1.51 приведена залежність поляризованості P від напруженості зовнішнього поля E . Як видно з рисунка, поляризованість спершу різко зростає зі збільшенням E , а потім стає постійною. Подальше збільшення напруженості поля не приводить до збільшення поляризованості. Такий характер залежності P від E можна пояснити тим, що спочатку під дією зростаючого електричного поля збільшується ступінь орієнтації дипольних моментів атомів по полю. Починаючи з деякого значення E , коли всі дипольні моменти зорієнтовані вздовж поля, подальше збільшення P припиняється, настає явище насичення.

Явище гістерезису полягає в тому, що поляризованість P залежить не тільки від значення напруженості поля E в цей момент, але й від того, яка напруженість була раніше. Ділянка кривої Oa на рис. 1.51 дає зростання поляризованості P при збільшенні поля E , коли поляризація проводиться вперше. Точка a відповідає насиченню, тобто P досягає свого максимуму. Якщо після того, як насичення досягнуто, почати зменшувати напруженість поля E , поляризованість P буде спадати не по кривій aO , а по новій кривій ab . Тим же самим значенням E , що проходяться у зворотному порядку, відповідають більші значення P . При $E = 0$ поляризованість зберігає нерівне нулю значення

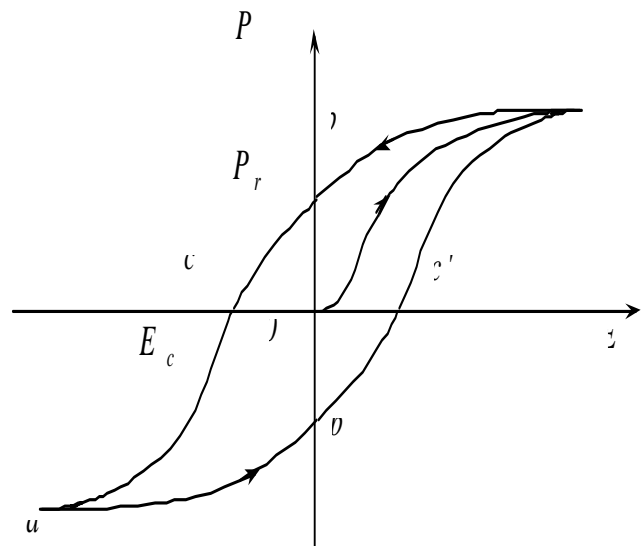


Рис. 1.51

P_r , що називається *залишковою поляризованістю* (відрізок Ob на рис. 1.51). Щоб викликати подальше зменшення P , треба змінити напрямок зовнішнього поля на зворотний. При деякому його значенні $E = E_c$ поляризованість зникає. Це значення E_c називається *коерцитивною силою*. При ще більшому зростанні зворотного по напрямку поля E виникає поляризованість зворотного знака. Тут також може бути досягнуте насичення a' (див. рис. 1.51). Якщо потім електричне поле E почати збільшувати, то залежність P від E зобразиться симетричною кривою $a' b' c' a$. Петля гістерезису замикається.

У результаті гістерезису тому самому значенню зовнішнього поля E можуть відповідати кілька значень P . Наприклад, значенню $E = 0$ відповідають: 1) відсутність поляризованості (точка O); 2) поляризованість, що виражається відрізком Ob (існує після поляризації сегнетоелектрика); 3) поляризованість, що виражається відрізком Ob' (наявна після переполіаризації сегнетоелектрика).

Залежність індукції поля D від напруженості E , що має аналогічний вид, наведено на рис.1.52. На відміну від поляризованості P індукція D при більших значеннях напруженості поля E не стає сталою, а продовжує зростати з напруженістю лінійно, оскільки $D = \varepsilon_0 E + P$.

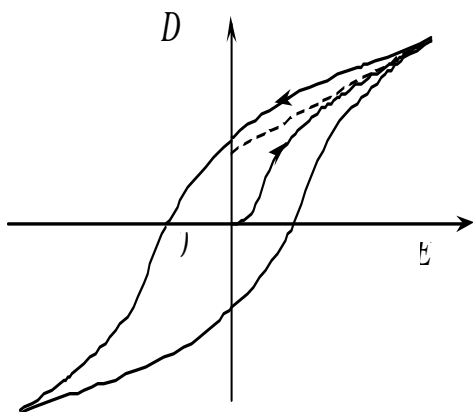


Рис. 1.52

Причиною сегнетоелектричних властивостей є спонтанна поляризація сегнетоелектриків, що виникає під дією сильної взаємодії між молекулами. Під впливом цієї взаємодії весь об'єм сегнетоелектрика розпадається на макроскопічні області – *діелектричні домени*. Кожний домен складається з величезної кількості молекул, електричні дипольні моменти

яких спрямовані в одну сторону, тобто у межах домена спонтанно

досягається стан насичення.

Напрямки дипольних моментів різних доменів розподілені в просторі хаотично, завдяки чому сумарний дипольний момент сегнетоелектрика дорівнює нулю (рис. 1.53,а). У зовнішньому електричному полі вектори дипольних моментів доменів орієнтуються вздовж напрямку поля і виникає поляризація всього зразка сегнетоелектрика (рис. 1.53,б). У стані насичення всі дипольні моменти доменів паралельні один одному, і подальше збільшення поля не приводить до збільшення поляризованості. Після вимикання зовнішнього поля впорядковане розташування дипольних моментів доменів порушується за рахунок теплового руху, однак їх орієнтація вздовж поля частково зберігається, чим і пояснюється залишкова поляризованість сегнетоелектрика.

Сегнетоелектрики мають важливі практичні застосування. Їх використовують для виготовлення електричних конденсаторів великої ємності при малих розмірах. Сегнетоелектрична кераміка на основі титанату барію ($BaTiO_3$) застосовується для створення електромеханічних перетворювачів у широкому діапазоні частот (під дією електричного поля сегнетоелектрики деформуються). До них відносяться випромінювачі звуку, датчики мікропереміщень, стабілізатори частоти й інші пристрої.

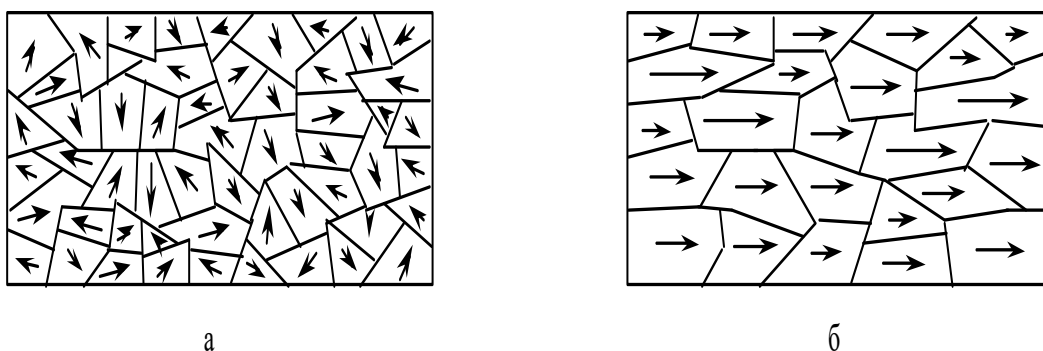


Рис. 1.53

Питання для самоперевірки

1. У чому полягає процес поляризації діелектрика в електричному полі? Яка природа зв'язаних зарядів?
2. Які види діелектриків вам відомі?
3. Дайте визначення вектора поляризованості діелектрика.
4. Сформулюйте теорему Остроградського–Гаусса для діелектриків.
5. Роз'ясніть сенс уведення індукції електричного поля.
6. Як зміниться напруженість електричного поля, якщо весь простір, у якому існує поле, заповнити однорідним діелектриком з діелектричною проникністю ϵ ?
7. Як залежить ємність конденсатора від діелектричної проникності ізолятора між його обкладками?
8. Чи змінюється сила взаємодії між зарядами при розміщенні їх у однорідному безмежному діелектрику?
9. Що таке сегнетоелектрики і які їхні властивості в електричному полі?

РОЗДІЛ 2

ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

Електричним струмом називається впорядкований рух зарядів. Постійний струм тече в провіднику, між кінцями якого підтримується постійна різниця потенціалів, що створюється джерелом електрорушійної сили (ЕРС). У вченні про струм заряди, що рухаються, *називаються носіями* струму. У різних тілах носії струму мають різну природу: у металах і напівпровідниках носії струму – електрони, у розчинах електролітів – позитивні і негативні іони, у газах – позитивні іони та електрони, у вакуумі – термоелектрони, що випускаються нагрітим катодом.

Для існування струму необхідне виконання таких умов:

- 1) наявність замкненого ланцюга, у якому є джерело ЕРС;
- 2) наявність носіїв струму.

За напрямок струму прийнятий напрямок руху позитивних зарядів, хоча в провідниках першого роду – металах – фактично переміщаються негативні електрони в напрямку, зворотному напрямку струму. Надалі ми будемо розглядати тільки електропровідність металів.

Закони постійного струму

§ 2.1. Сила струму. ЕРС джерела струму

Схема замкненого ланцюга, що містить джерело ЕРС і навантаження R , зображена на рис. 2.1 (r – внутрішній опір джерела). Струм на зовнішній ділянці ланцюга тече від позитивного полюса джерела до негативного. Роль джерела струму в замкненому ланцюзі полягає у підтримці на кінцях провідника в зовнішньому ланцюзі різниці потенціалів, завдяки чому всередині провідника постійно існує електричне поле, що приводить в рух заряди – носії струму.

На рис. 2.2 зображена механічна модель замкненого ланцюга. По похилому жолобу під дією сили тяжіння

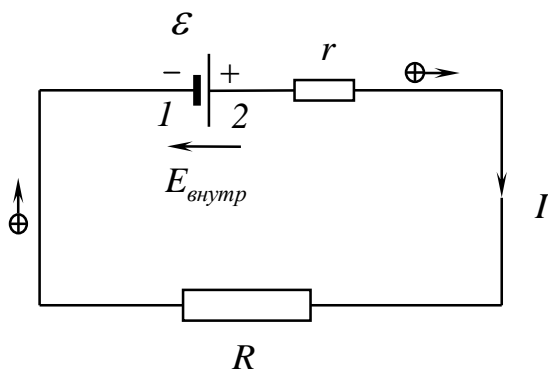


Рис. 2.1

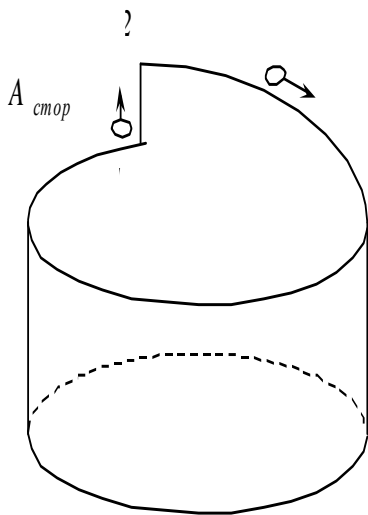


Рис. 2.2

(електричного поля, створеного всередині провідника джерелом ЕРС) кульки (позитивні носії струму) рухаються із точки 2 в точку 1. На рис. 2.1 такий жолоб – це зовнішня ділянка ланцюга (опір R). Потенціал φ_1 негативного полюса джерела менше потенціалу φ_2 позитивного. У середині джерела електричне поле ($E_{внутр}$ на рис. 2.1) спрямоване від “плюса” до “мінуса”, тобто проти напрямку руху носіїв струму, тому перенос зарядів із точки 1 в точку 2 усередині джерела здійснюється під дією сил неелектричного походження – так званих *сторонніх сил*. Сторонні сили можуть бути різного походження: хімічного – у гальванічних елементах і акумуляторах, механічного – у

роторних генераторах електричного струму, теплового – у термоелектричних генераторах, оптичного – у сонячних батареях. У механічній моделі, зображеній на рис. 2.2, робота сторонніх сил по підйому кульок відбувається на ділянці 1 – 2.

Електрорушійною силою джерела струму називається робота сторонніх сил по переносу одиничного позитивного заряду через джерело – від меншого потенціалу до більшого:

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A_{\text{стор}}}{q}. \quad (2.1)$$

ЕРС вимірюється у вольтах:

$$[\mathcal{E}] = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ Кл}} = 1 \text{ В}.$$

ЕРС джерела виражає різницю потенціалів на його клеммах при розімкненому ланцюгу.

Силою струму I називають заряд, що протікає через поперечний переріз провідника за одиницю часу:

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dq}{dt}. \quad (2.2)$$

Сила струму вимірюється в *амперах*:

$$1 \text{ А} = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ с}}.$$

У системі СІ одиниця сили струму – ампер – є однією з основних і визначається за допомогою магнітної сили взаємодії струмів (див. § 3.8).

§ 2.2. Закон Ома. Електричний опір провідника

Закон Ома для ділянки ланцюга був відкритий експериментально у 1827 році. Німецький фізик Георг Ом дав таке формулювання свого закону: *відношення напруги на кінцях провідника до сили струму в ньому не залежить від сили струму для провідників першого роду – металів.*

Відношення напруги до сили струму називається *електричним опором* провідника:

$$R = \frac{U}{I}. \quad (2.3)$$

Опір вимірюється в *омах*:

$$1 \text{ Ом} = \frac{1 \text{ В}}{1 \text{ А}}.$$

Опір провідника становить 1 ом, якщо при напрузі в 1 вольт по провіднику тече струм силою в 1 ампер.

Опір однорідного провідника пропорційний довжині й обернено пропорційний площі його поперечного перерізу (рис. 2 3):

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (2.4)$$

Коефіцієнт пропорційності ρ називається *питомим опором* провідника і характеризує властивості матеріалу, з якого

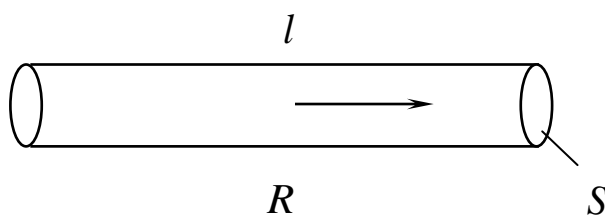


Рис. 2.3

провідник виготовлений. Питомий опір ρ чисельно дорівнює опору провідника одиничної довжини ($l = 1$ м) і площею поперечного перерізу, що дорівнює одиниці ($S = 1$ м²). Одиниця вимірювання

питомого опору $[\rho] = \text{Ом} \cdot \text{м}$.

Опір металів залежить від температури – зі збільшенням температури він зростає за законом

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (2.5)$$

де α – температурний коефіцієнт опору, t – температура в градусах Цельсія (°C).

Інше формулювання закону Ома: *спадання напруги U на ділянці ланцюга дорівнює добутку опору цієї ділянки на силу струму, що протікає по ньому:*

$$U = I R. \quad (2.6)$$

Звідси випливає, що, якщо ділянка ланцюга складається з декількох послідовно з'єднаних провідників, то напруга на кінцях провідника тим вища, чим більший його опір. Напруга на всій ділянці дорівнює сумі напруг на кожному з провідників.

Сила струму в замкненому ланцюзі визначається законом Ома для замкненого ланцюга (див. рис. 2.1). Сила струму,

що протікає в замкненому ланцюзі, дорівнює відношенню ЕРС джерела струму в цьому ланцюзі до повного її опору:

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r}, \quad (2.7)$$

де r – внутрішній опір джерела струму.

§ 2.3. З'єднання провідників

Знайдемо опір ділянки ланцюга при послідовному і паралельному з'єднаннях провідників.

1. **Послідовне з'єднання.** Виберемо ділянку ланцюга, що складається з двох провідників з опорами R_1 і R_2 (рис. 2.4). Падіння напруги U на цій ділянці дорівнює сумі падінь напруги на кожному з провідників:

$$U = U_1 + U_2. \quad (2.8)$$

За законом Ома $U = IR$, де R – повний опір ланцюга. Оскільки струм I , що тече по кожному з провідників, той самий, спадання напруги на першому з них $U_1 = IR_1$, а на другому – $U_2 = IR_2$. Підставляючи U , U_1 і U_2 в (2.8) і скорочуючи I , одержимо

$$R = R_1 + R_2.$$

У випадку N послідовно з'єднаних провідників:

$$R = \sum_{i=1}^N R_i. \quad (2.9)$$

Опір ділянки ланцюга при послідовному з'єднанні провідників дорівнює сумі опорів кожного з провідників.

2. **Паралельне з'єднання.** Щоб знайти опір ділянки ланцюга, складеного з паралельно з'єднаних

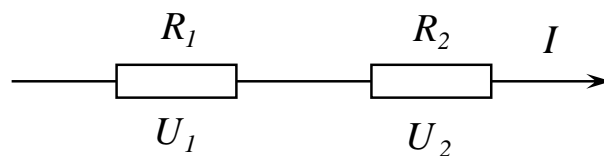


Рис. 2.4

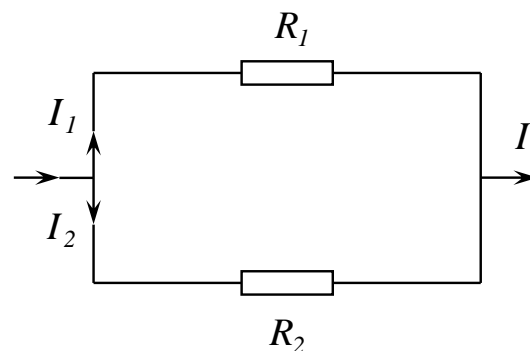


Рис. 2.5

провідників опорами R_1 і R_2 (рис. 2.5), врахуємо, що напруга U на кожному з провідників однакова. Тому струм, що тече по першому провіднику, $I_1 = U / R_1$, а струм, що тече по другому провіднику, $I_2 = U / R_2$. Загальний струм:

$$I = I_1 + I_2. \quad (2.10)$$

Оскільки струм у ланцюгу I визначається загальним опором ланцюга R ($I = U / R$), то підставляючи в (2.10) струми I , I_1 і I_2 й скорочуючи U , одержимо

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

У випадку N паралельно з'єднаних провідників:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}. \quad (2.11)$$

Величина, обернена опору провідника, називається його *електричною провідністю* $G = 1 / R$. Одиниця його вимірювання – *сименс* ($[G] = 1 / \text{Ом} = \text{См}$).

Провідність ділянки ланцюга при паралельному з'єднанні провідників дорівнює сумі провідностей кожного з провідників:

$$G = \sum_{i=1}^N G_i.$$

Питомою провідністю σ або електропровідністю речовини, з якої виготовлений провідник, називається величина, обернена його питомому опору ρ :

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad ([\sigma] = \text{См} / \text{м}). \quad (2.12)$$

§ 2.4. Робота й потужність струму. Закон Джоуля–Ленца

Розглянемо ділянку ланцюга з опором R , по якому тече струм I (рис. 2.6). Падіння напруги на цій ділянці $U = IR$. При

переносі заряду q по провіднику електричне поле виконує роботу

$$A = qU = It \cdot U .$$

Звідси *потужність електричного струму*:

$$P = \frac{A}{t} = I \cdot U = I^2 R = \frac{U^2}{R} . \quad (2.13)$$

Робота, що виконується електричним полем при переносі зарядів по провіднику, витрачається на нагрівання провідника, оскільки заряди (електрони) співударяються з іонами

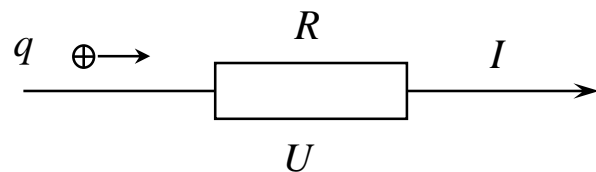


Рис. 2.6

кристалічної решітки і віддають їм енергію, зумовлену поступальним рухом вздовж напрямку поля. Коливальна енергія іонної решітки зростає, і відбувається нагрівання провідника. Кількість теплоти, що виділяється за час dt , як впливає з (2.13), дорівнює добутку квадрата сили струму на опір провідника й час:

$$\delta Q = I^2 R dt . \quad (2.14)$$

Ця формула виражає *закон Джоуля–Ленца*.

Електропровідність металів

§ 2.5. Природа носіїв струму в металах

Згідно із сучасними уявленнями, носіями струму в металах є вільні електрони, здатні переміщуватися по всьому об'єму провідника. Це було встановлено за допомогою спеціальних експериментів.

Перший експеримент, спрямований на з'ясування природи носіїв струму в металах, був поставлений в 1901 році

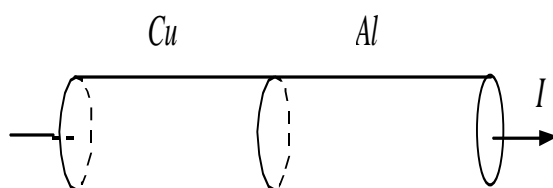


Рис. 2.7

німецьким фізиком К.Рікке. Він пропускав електричний струм через два циліндричних зразки, виготовлених з різних металів, з'єднаних разом добре відполірованими торцями (рис. 2.7). Через великий проміжок часу (1 рік) зразки роз'єднали й виявилось, що ніякого переносу речовини при протіканні струму не відбулося. У всякому разі взаємопроникнення металів було не більше, ніж у контрольному зразку, виготовленому з тих же металів, через який струм не пропускався. Дослід Рікке показав, що струм у металах не супроводжується переносом речовини, тобто атомів, з яких складаються метали.

Другий дослід, поставлений російськими фізиками Л.І.Мандельштамом і Н.Д.Папалексі в 1914 році. Ідея дослідження полягала в тому, що, якщо металевий зразок привести в рух, а потім різко загальмувати, то вільні носії струму, продовжуючи рухатися за інерцією, створять короткочасний електричний струм. Стрілка амперметра (рис. 2.8) під час гальмування відхиляється.

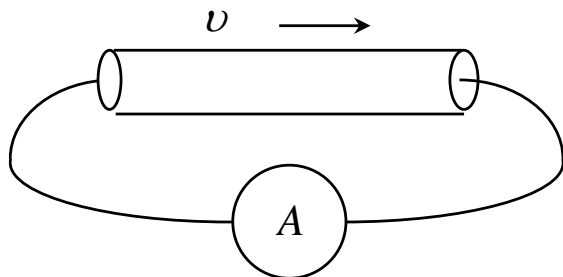


Рис. 2.8

На практиці використовувалася котушка з провідником, яка розкручувалася до великої швидкості й гальмувалася. Дослід показав наявність у металах вільних зарядів. Природа цих зарядів була не ясна доти, поки в 1916 році

Стюарт і Толмен в аналогічному досліді не виміряли відношення заряду носіїв струму до їхньої маси. Це відношення збігається з питомим зарядом електрона:

$$\frac{q}{m} = \frac{e}{m} \approx 1,8 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг.}$$

Таким чином, дослідним шляхом було встановлено, що носії струму в металах – електрони.

§ 2.6. Густина струму. Закони Ома й Джоуля–Ленца у диференціальній формі

Розглянемо однорідний провідник довжиною l і площею поперечного перерізу S , по якому тече струм I (рис. 2.9). Густиною струму j називається відношення сили струму I до площі поперечного перерізу провідника S :

$$j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I}{S}. \quad (2.15)$$

Густина струму дорівнює заряду q , що протікає через одиничний поперечний переріз провідника за одиницю часу:

$$j = \frac{q}{S \cdot t}. \quad (2.16)$$

Нехай u – середня швидкість спрямованого руху носіїв струму (у металах це електрони, що рухаються в протилежну до напрямку струму сторону) – так звана дрейфова швидкість. За час t

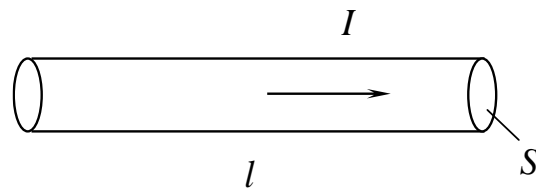


Рис. 2.9

кожен електрон проходить вздовж провідника відстань $l = ut$.

Всі електрони, що знаходяться у провіднику довжиною l , пройдуть за цей час через його поперечний переріз S , переносючи заряд $q = Ne$, де N – число електронів у провіднику, e – заряд електрона. Позначивши через $n = N/V$ – об'ємну густина числа електронів ($V = S \cdot l$ – об'єм провідника), маємо

$$q = neV = ne \cdot Sut.$$

Підставляючи заряд q у формулу (2.16) і враховуючи, що напрямок струму збігається з напрямком руху його носіїв, одержимо вектор густини струму:

$$\vec{j} = ne\vec{u}. \quad (2.17)$$

Нехай R – опір провідника, U – напруга на його кінцях (див. рис. 2.9). За законом Ома $I = U/R$. Підставивши сюди R з формули (2.4), одержимо

$$I = \frac{US}{\rho l}.$$

Розділивши на S і враховуючи, що $U/l = E$ – напруженість електричного поля в провіднику, маємо

$$j = \frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} E.$$

Оскільки носії струму (позитивні заряди) рухаються вздовж ліній напруженості поля ($\vec{j} \parallel \vec{E}$), останню рівність можна представити у векторному вигляді:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (2.18)$$

Де $\sigma = 1/\rho$ – електропровідність речовини.

Рівняння (2.18) виражає закон Ома в диференціальній формі. Термін “диференціальна” означає, що рівняння дає локальний зв'язок між напруженістю поля \vec{E} і густиною струму \vec{j} в даній точці всередині провідника.

Одержимо тепер закон Джоуля–Ленца в диференціальній формі. *Питомою тепловою потужністю струму* w назвемо кількість теплоти, яка виділяється в одиниці об'єму провідника за одиницю часу. Якщо густина струму в різних точках провідника різна, то потрібно обрати межу відносної кількості теплоти ΔQ , що виділяється за одиницю часу в об'ємі ΔV , до цього об'єму при $\Delta V \rightarrow 0$:

$$w = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V \cdot t}.$$

У розглянутому випадку циліндричного провідника $j = \text{const}$, і тому

$$w = \frac{Q}{V \cdot t}.$$

Оскільки за законом Джоуля–Ленца $Q = I^2 R t = I^2 \rho \frac{l}{S} t$, а $V = lS$, одержимо

$$w = \rho j^2 = \sigma E^2 = \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (2.19)$$

Питома теплова потужність, що виділяється в даній точці провідника, пропорційна квадрату густини струму в цій точці.

Формула (2.19) виражає закон Джоуля–Ленца в диференціальній формі. Вона використовується для обчислення кількості теплоти, що виділяється в масивному провіднику при довільному розподілі струму в об'ємі цього провідника. Щоб пояснити сказане, розглянемо нижченаведений приклад.

Приклад. Струм I тече по ланцюгу, що складається з трубки радіусом R_1 , з'єднаної алюмінієвою шайбою товщиною d з трубкою радіусом R_2 (рис. 2.10). Знайти кількість теплоти Q , що виділяється в шайбі за час t .

Розв'язання. Кількість теплоти знайдемо, інтегруючи питому теплову потужність струму (2.19) за об'ємом шайби:

$$Q = t \int_V w dV = \rho t \int_V j^2 dV, \quad (a)$$

де ρ – питомий опір шайби.

Щоб виконати інтегрування, перейдемо в циліндричну систему координат. Виділимо в об'ємі шайби пасок радіусом r і товщиною dr (рис. 2.11). Об'єм паска

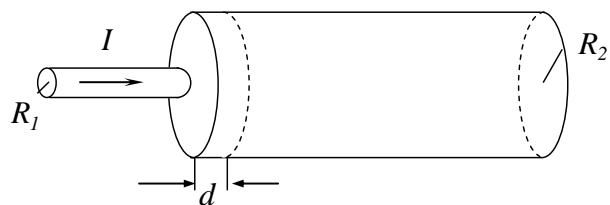


Рис. 2.10

$$dV = 2\pi r dr \cdot d, \quad (б)$$

де d – ширина паска. Оскільки лінії струму в шайбі радіальні, струм через пасок тече від його внутрішньої поверхні площею $2\pi r \cdot d$ до зовнішньої. Щільність струму

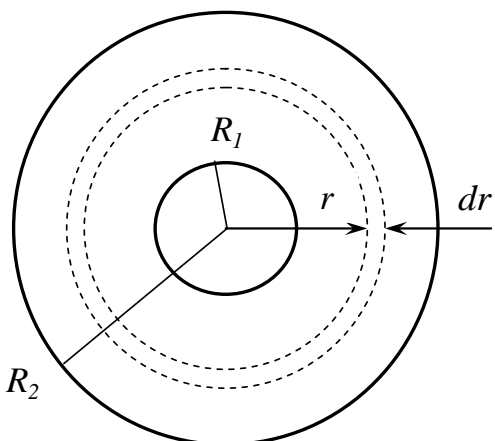


Рис. 2.11

$$j = \frac{I}{S} = \frac{I}{2\pi r \cdot d}. \quad (\text{в})$$

Підставляючи (б) і (в) в (а) і інтегруючи по r в межах від R_1 до R_2 , одержимо

$$Q = \rho t \frac{I^2}{2\pi d} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \left(\frac{\rho}{2\pi d} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) I^2 t.$$

Порівнюючи цю формулу з формулою (2.14), бачимо, що вираз в дужках дорівнює опору шайби:

$$R = \frac{\rho}{2\pi d} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

§ 2.7. Класична теорія електропровідності металів

Уявлення про вільні електрони в металах лягло в основу класичної теорії електропровідності, розвинутої на початку ХХ століття Друде й Лоренцом. Згідно з цією теорією, електрони в металі утворюють газ, поведінка якого описується законами ідеального газу. Зокрема, молекулам цього газу (електронам) властиве поняття довжини вільного пробігу $\bar{\lambda}$, яку вони проходять між двома послідовними зіткненнями з іонами кристалічної решітки. Позитивний заряд іонів решітки компенсує негативний заряд електронів, так що газ у цілому виявляється електронейтральним.

Електрони, що беруть участь у хаотичному тепловому русі, мають швидкість, середнє значення якої визначається класичною формулою

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

де m – маса електрона; k – стала Больцмана.

При кімнатній температурі ($T \approx 300 \text{ K}$) середня швидкість електронів $\bar{v} \approx 10^5 \text{ м/с}$. При протіканні струму в провіднику виникає дрейф електронного газу як цілого вздовж напрямку

електричного поля зі швидкістю u , яку ми назвали дрейфовою швидкістю і яку можна знайти, скориставшись формулою (2.17):

$$j = \frac{I}{S} = neu,$$

звідки

$$u = \frac{I}{neS}. \quad (2.20)$$

Оцінимо числове значення дрейфової швидкості u . Виберемо провідник діаметром $d = 1 \text{ мм}$, виготовлений з міді, по якому тече струм $I = 10 \text{ А}$ (див. рис. 2.9). Концентрацію електронів n приймемо рівною числу атомів міді в одиниці об'єму, тобто будемо вважати, що від кожного атома відділяється

по одному електрону. Густина міді $\rho = \frac{m}{V} = \frac{Nm_0}{V} = nm_0$, де

$m_0 = \frac{M}{N_A}$ – маса одного атома (M – молярна маса, N_A – стала

Авогадро). Звідси $n = N_A \frac{\rho}{M}$. Підставивши в (2.20), одержимо

$$u = \frac{4MI}{\pi d^2 N_A \rho e} \approx 6 \cdot 10^{-4} \text{ м/с.}$$

Таким чином, дрейфова швидкість електронів при реальних значеннях параметрів приблизно у 10^8 разів менше швидкості їх теплового руху. Дрейф електронного газу при протіканні струму в провіднику можна уподібнити вітру в атмосфері. Якщо швидкість вітру близько 10 м/с , то швидкість хаотичного руху молекул повітря набагато більша й становить приблизно 500 м/с .

У рамках електронної теорії електропровідності можна одержати закони Ома й Джоуля–Ленца. Будемо вважати, що кожний електрон, зустрічаючись з іонами кристалічної решітки, повністю втрачає свою швидкість спрямованого руху і після зіткнення знову починає розганятися в електричному полі. Прискорення, з яким він рухається:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}.$$

До кінця пробігу в момент наступного зіткнення з іонами решітки він набуває швидкості спрямованого руху $u_1 = a\tau$, де $\tau = \bar{\lambda} / \bar{v}$ – час вільного пробігу. Середнє за час вільного пробігу значення його швидкості \bar{u} дорівнює половині швидкості u_1 наприкінці пробігу, оскільки рух електрона рівноприскорений:

$$\bar{u} = \frac{u_1}{2} = \frac{eE\bar{\lambda}}{2m\bar{v}}.$$

Отже, під дією електричного поля на хаотичний рух електронів накладається рух спрямований, середня швидкість якого пропорційна напруженості E електричного поля.

Підставляючи \bar{u} у формулу (2.17), одержимо величину густини струму:

$$j = \frac{ne^2\bar{\lambda}}{2m\bar{v}} E. \quad (2.21)$$

Очевидно, для даного провідника при даній температурі множник $\frac{ne^2\bar{\lambda}}{2m\bar{v}}$ має постійне значення, тому остання рівність являє собою закон Ома в диференціальній формі. Таким чином, закон Ома безпосередньо впливає з електронної теорії електропровідності.

Порівнюючи формули (2.21) і (2.18), бачимо, що величина

$$\sigma = \frac{ne^2\bar{\lambda}}{2m\bar{v}} \quad (2.22)$$

– електропровідність металу. З формули (2.22) випливає, що електропровідність тим вища, чим більша концентрація n вільних електронів і чим більша довжина їх вільного пробігу $\bar{\lambda}$.

Знайдемо тепер теплову потужність струму w . У момент зіткнення з іонами кристалічної решітки електрон за припущенням повністю віддає їм свою кінетичну енергію, зв'язану зі швидкістю спрямованого руху u_1 , яку він набув в

електричному полі за час вільного пробігу. Ця швидкість, як було показано вище, дорівнює

$$u_1 = \frac{eE\bar{\lambda}}{m\bar{v}}.$$

Отже, кінетична енергія, яку він передає кристалічній решітці при одному зіткненні:

$$W_{kl} = \frac{mu_1^2}{2} = \frac{e^2\bar{\lambda}^2}{2m\bar{v}^2} E^2.$$

Під впливом електричного поля ця кінетична енергія електронів виникає знову й передається металу. Таким чином, метал нагрівається за рахунок роботи сил електричного поля.

Щоб знайти кількість теплоти, яка виділяється за одиницю часу в одиниці об'єму, тобто теплову потужність струму, помножимо W_{kl} на число електронів в одиниці об'єму n і на середню частоту їх зіткнення з іонами решітки \bar{z} , яка виражається через середню довжину вільного пробігу $\bar{\lambda}$ й середню швидкість хаотичного руху \bar{v} :

$$\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}}.$$

Тоді

$$w = n \bar{z} W_{kl} = \frac{ne^2\bar{\lambda}}{2m\bar{v}} E^2.$$

Множник $\frac{ne^2\bar{\lambda}}{2m\bar{v}}$ за формулою (2.22) дорівнює електропровідності металу σ , звідки

$$w = \sigma E^2,$$

що збігається з виразом (2.19) для закону Джоуля–Ленца, отриманим у попередньому параграфі.

Таким чином, у рамках класичної теорії електропровідності закони Ома й Джоуля–Ленца отримуються природним шляхом – застосуванням до моделі електронного газу законів класичної механіки та електродинаміки. Формула (2.22) для електропровідності не дозволяє, однак, визначити цю величину

для конкретного металу, тому що містить довжину вільного пробігу $\bar{\lambda}$ і концентрацію носіїв струму n , що не піддаються безпосередньому вимірюванню.

§ 2.8. Зв'язок між електропровідністю і теплопровідністю металів. Закон Відемана–Франца

Експериментально встановлено, що чим менший питомий опір металу і відповідно вища його електропровідність, тим більша його теплопровідність, яка у всіх металів значно більша, ніж у діелектриків. У зв'язку з цим природно припустити, що теплопровідність металів зумовлена вільними електронами.

Кінетична теорія газів дає для коефіцієнта теплопровідності таку формулу:

$$\chi = \frac{1}{3} \rho c_V \bar{\lambda} \bar{v}, \quad (2.23)$$

де c_V – питома теплоємність газу при постійному об'ємі; $\rho = m/V$ – густина газу. Цю формулу можна перетворити до більш зручного для нас виду. Зазначимо, що питома теплоємність c_V виражається через молярну теплоємність C_V співвідношенням $c_V = C_V / M$, де M – молярна маса газу. Для одноатомного газу $C_V = 3R/2 = 3N_A k/2$, де N_A – стала Авогадро; k – стала Больцмана. Крім того, масу m і молярну масу M можна виразити через масу однієї молекули газу m_0 , а саме: $m = N m_0$, $M = N_A m_0$. Підставивши це у формулу (2.23), одержимо

$$\chi = \frac{1}{2} n k \bar{\lambda} \bar{v}.$$

Ця формула виражає і теплопровідність електронного газу в моделі, прийнятій в класичній теорії електропровідності. Розділивши її на σ , з формули (2.22) маємо

$$\frac{\chi}{\sigma} = \frac{m \bar{v}^2}{e^2} k.$$

Середня кінетична енергія молекули $\frac{m\bar{v}^2}{2}$, за законом рівнорозподілу енергії за ступенями свободи молекул, дорівнює для одноатомного газу $\frac{3}{2} kT$, тому відношення $\frac{\chi}{\sigma}$ набуває виду

$$\frac{\chi}{\sigma} = \frac{3k^2}{e^2} T. \quad (2.24)$$

Оскільки k і e – сталі величини, відношення коефіцієнта теплопровідності χ до коефіцієнта електропровідності σ пропорційне абсолютній температурі і не залежить від сорту металу.

Ця закономірність була встановлена експериментально і називається *законом Відемана–Франца*:

$$\frac{\chi}{\sigma} = \gamma T. \quad (2.25)$$

Значення константи γ для різних металів добре узгоджується з теоретичним значенням $3k^2/e^2$ і свідчить про правильність теорії. Однак спроби уточнити теорію приводять до погіршення її узгодження з експериментом.

§ 2.9. Труднощі класичної теорії електропровідності металів

Уявлення про газ вільних електронів у металах, незважаючи на успіхи теорії, все-таки не може пояснити ряд експериментальних фактів. Уточнення теорії, зроблене з урахуванням розподілу “молекул” газу (електронів) по швидкостях (розподілу Максвелла), погіршує узгодження з дослідом закону Відемана–Франца. Як було сказано вище, вираз для коефіцієнта електропровідності $\sigma = \frac{ne^2\bar{\lambda}}{2m\bar{v}}$ містить сталі n й

$\bar{\lambda}$, які не піддаються вимірюванню дослідним шляхом. Крім того, цей вираз не дає правильної температурної залежності електропровідності σ , яка, згідно з теорією, зменшується з температурою обернено пропорційно \sqrt{T} , тоді як з досліду

впливає, що $\sigma \sim \frac{1}{T}$. Але найбільші труднощі теорії проявляються у теплових властивостях металів.

Експериментально встановлено, що *всі тверді тіла – метали і діелектрики – мають приблизно однакову молярну теплоємність*

$$C = 3R,$$

де R – універсальна газова стала. Це твердження називається *законом Дюлонга і Пті*.

Походження цієї величини теплоємності можна пояснити, якщо вважати, що кожний атом твердого тіла здійснює коливання в трьох взаємно перпендикулярних напрямках – вздовж трьох координатних осей, тобто має три коливальні ступеня свободи. Енергія коливань атома складається з потенціальної і кінетичної енергії, на кожну з яких припадає по $kT/2$ теплової енергії (згідно із законом рівнорозподілу енергії за ступенями свободи молекул), тобто $2 \cdot \frac{1}{2} kT = kT$ на кожний коливальний ступінь свободи. Таким чином, коливальна енергія одного моля речовини дорівнює добутку сталої Авогадро (числа атомів у молі речовини) на $3kT$ (по числу коливальних ступенів свободи):

$$W_{\text{кол}} = 3 N_A kT = 3 RT,$$

звідки теплоємність

$$C = \frac{dW_{\text{кол}}}{dT} = 3R.$$

Знайдене значення теплоємності являє собою теплоємність кристалічної решітки твердого тіла $C_{\text{реш}}$ і не враховує теплоємності газу вільних електронів $C_{\text{ел}}$, які повинні давати внесок у теплоємність металів. Молярна теплоємність одноатомного газу становить $3R/2$, тому теплоємність металів

$$C_{\text{мет}} = C_{\text{реш}} + C_{\text{ел}} = 3R + \frac{3}{2}R = 4,5R$$

повинна бути в півтора раза більша, ніж у діелектриків, а це суперечить досліду. Виходить, що електронний газ не дає ніякого внеску у теплоємність металів. Таке протиріччя між теорією та експериментом не можна розв'язати, залишаючись у рамках класичної фізики. Пояснення йому дає *квантова механіка*, створена у 20-ті роки минулого століття.

Газ електронів потрібно розглядати як вироджений електронний газ, що підкоряється законам квантової механіки, які забороняють більшості електронів брати участь у тепловому русі, і через це вони й не дають внесок у теплоємність. Більш детально це питання ми обговоримо в розділі, присвяченому квантовій механіці.

Підводячи підсумок, слід зазначити, що класична електронна теорія електропровідності металів зуміла пояснити ряд експериментальних фактів – закони Ома, Джоуля–Ленца, Відемана–Франца, але зайшла в суперечність з іншими експериментами і тим самим показала некоректність застосування уявлень класичної фізики по відношенню до мікрочастинок – електронів, поставивши питання про створення нової механіки – механіки мікросвіту, що одержала назву *квантової механіки*.

Питання для самоперевірки

1. Що називається електричним струмом?
2. Перелічіть умови існування постійного струму.
3. Що є носіями струму в металах, напівпровідниках, розчинах електролітів, газах?
4. Дайте визначення сили струму, ЕРС джерела струму.
5. Яка роль джерела струму в замкненому ланцюзі?
6. Сформулюйте закон Ома для ділянки ланцюга, для замкненого ланцюга.
7. Що називається провідністю провідника, електропровідністю речовини?
8. Вивести формули для опору ланцюга при паралельному і послідовному з'єднаннях провідників.

9. Про що йде мова в законі Джоуля–Ленца?
10. Запишіть закони Ома і Джоуля–Ленца в диференціальній формі. Що мається на увазі під терміном “диференціальна”?
11. Яка модель лежить в основі класичної теорії електропровідності металів?
12. Що стверджує закон Відемана–Франца?
13. У чому полягає основне протиріччя між дослідом і класичною теорією електропровідності металів?
14. Який зміст закону Дюлонга і Пті?

РОЗДІЛ 3

ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Всякий електричний струм діє на інший струм з деякою силою. Два прямих паралельних провідники, по яких течуть електричні струми, притягуються або відштовхуються залежно від напрямку цих струмів. Провідники зі струмом електрично нейтральні. Отже, в цьому випадку з'являються сили взаємодії, які не можуть бути пояснені кулонівською взаємодією. Ці сили називаються *магнітними силами*.

Подібно до того, як електричний заряд, що знаходиться в спокої, діє на інший заряд за допомогою електричного поля, електричний струм діє на інший струм за допомогою *магнітного поля*.

Нерухомі заряди не створюють магнітного поля. Джерелами магнітного поля є заряди, що рухаються у вакуумі або в якому-небудь середовищі (струми) і постійні магніти. Магнітне поле постійних магнітів також викликається рухом зарядів (електронів) в атомах речовини самого магніта. По суті магнітне поле створюється тільки рухомими зарядами.

Якщо провідник розташувати паралельно стрілці магнітного компаса та увімкнути струм, то стрілка відхилиться в напрямку, перпендикулярному до провідника (дослід Ерстеда, 1820 рік). Таким чином, магнітне поле діє і на постійні магніти.

Магнітне поле не діє на заряди, що знаходяться в спокої. Воно діє на заряди, що рухаються у вакуумі або в середовищі, тобто на струми. Дія магнітного поля на магніти зводиться врешті-решт до його дії на заряди, які рухаються в атомах речовини.

Вчення про електромагнетизм ґрунтується на двох положеннях:

1. Магнітне поле діє на рухомі заряди і струми;
2. Магнітне поле виникає навколо струмів і рухомих зарядів.

Щоб розібратися у всьому різноманітті явищ магнетизму, що спостерігаються в природі, почнемо з розгляду простих законів, що лежать в основі цих явищ.

Магнітне поле у вакуумі

§ 3.1. Сили, що діють в магнітному полі на рухомі заряди і струми. Вектор магнітної індукції

Подібно до вектора напруженості електростатичного поля \vec{E} , силовою характеристикою магнітного поля є вектор магнітної індукції. Лінії напруженості електростатичного поля \vec{E} починаються на позитивних зарядах і закінчуються на негативних, а сила, що діє в цьому полі на заряд, спрямована по дотичній до лінії напруженості. На відміну від електростатичного поля, лінії магнітного поля замкнуті. Це пов'язано з відсутністю в природі “магнітних зарядів”. У магнітному полі на рухомий заряд q діє сила, спрямована перпендикулярно лініям індукції поля \vec{B} і швидкості заряду \vec{v} . Її можна представити у вигляді векторного добутку:

$$\vec{F}_l = q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (3.1)$$

Ця сила називається *силою Лоренца* (рис. 3.1).

Напрямок сили Лоренца зручно визначати за *правилом лівої руки*. Для цього чотири витягнуті пальці руки треба спрямувати вздовж швидкості заряду \vec{v} , а долоню розташувати так, щоб лінії магнітної індукції \vec{B} входили в долоню

перпендикулярно їй. Відставлений великий палець покаже тоді напрямок сили, що діє на заряд в магнітному полі (рис. 3.2).

У системі СІ одиницею магнітної індукції служить *тесла* (Тл). З формули (3.1) випливає, що $1 \text{ Тл} = \text{кг} / (\text{Кл} \cdot \text{с})$

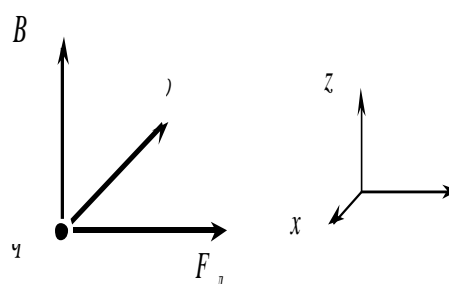


Рис. 3.1

Індукція магнітного поля складає 1 тесла, якщо на заряд в 1 кулон, що рухається в цьому полі зі швидкістю 1 м/с перпендикулярно лініям індукції, діє сила в 1 ньютон.

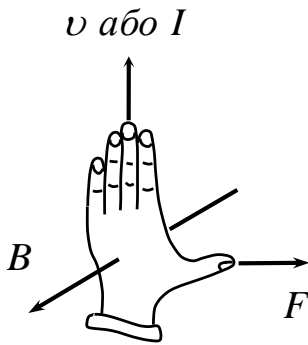


Рис. 3.2

Сила, що діє в магнітному полі на провідник із струмом, називається *силою Ампера*. Вона складається із суми сил, що діють з боку магнітного поля на кожний із зарядів, що створюють у провіднику електричний струм.

Знайдемо силу, що діє на малий прямолінійний відрізок тонкого провідника завдовжки dl , по якому тече струм I (рис. 3.3). Добуток сили струму I на вектор $d\vec{l}$ назвемо лінійним елементом

струму. Виразимо цей добуток через щільність струму та об'єм відрізка провідника. Щільність струму в провіднику:

$$j = \frac{I}{S},$$

де S – площа його поперечного перерізу.

Помножимо обидві частини на об'єм відрізка провідника $dV = S dl$ і врахуємо, що в тонкому провіднику вектор щільності струму \vec{j} і вектор $d\vec{l}$ збігаються за напрямком, тому

$$\vec{j} dV = (\vec{j} S) dl = j S d\vec{l} = I d\vec{l}. \quad (3.2)$$

В об'ємі dV провідника число носіїв струму рівне добутку їх концентрації $n = N/V$ на об'єм:

$$dN = n dV.$$

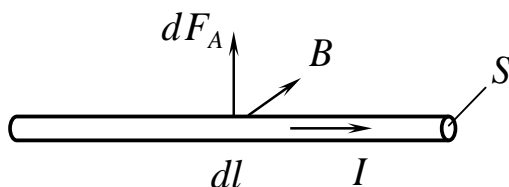


Рис. 3.3

Силу, що діє на лінійний елемент струму, одержимо множенням сили Лоренца (3.1) на dN :

$$d\vec{F}_A = \vec{F}_L dN = nq[\vec{v}, \vec{B}] dV = [\vec{j}, \vec{B}] dV,$$

оскільки, як було встановлено в розд. 2, вектор щільності струму $\vec{j} = nq\vec{v}$ (\vec{v} – дрейфова швидкість носіїв струму). Останню рівність з урахуванням (3.2) можна переписати у вигляді

$$d\vec{F}_A = I [d\vec{l}, \vec{B}], \quad (3.3)$$

що виражає закон Ампера: сила, що діє в магнітному полі на лінійний елемент струму, рівна векторному добутку лінійного елемента струму $I d\vec{l}$ на вектор магнітної індукції \vec{B} .

Напрямок сили Ампера також можна знайти за допомогою правила лівої руки, розташувавши її чотири витягнуті пальці по напрямку струму в провіднику, а долоню – перпендикулярно вектору \vec{B} (див. рис.3.2).

Силу, що діє в магнітному полі на тонкий провідник довільної форми, можна знайти, подумки розбивши його на короткі відрізки завдовжки $d\vec{l}$ і обчисливши суму сил, прикладених до кожного з них. Завдання зводиться до обчислення криволінійного інтеграла по контуру, L утвореному цим провідником:

$$\vec{F}_A = I \int_L [d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (3.4)$$

Якщо провідник прямолінійний, має довжину l і знаходиться в однорідному магнітному полі ($\vec{B} = const$), на нього діє сила

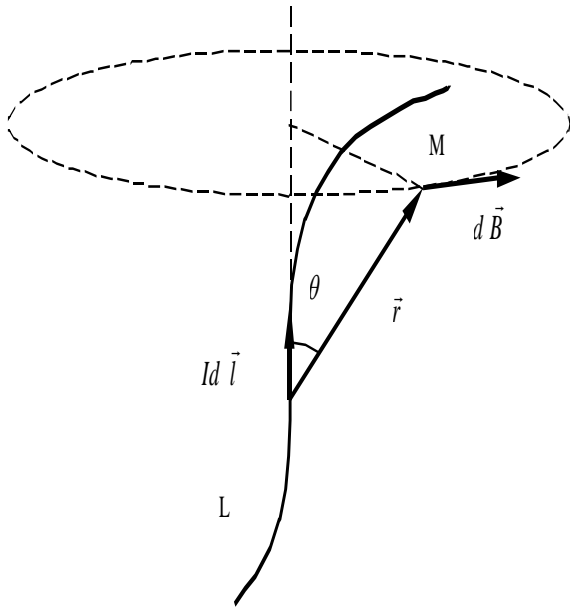
$$F_A = IlB \sin(\vec{B}, \hat{l}). \quad (3.5)$$

§ 3.2. Магнітне поле струму. Закон Біо-Савара-Лапласа

У попередньому параграфі ми встановили, як магнітне поле діє на рухомі заряди і струми. При цьому ми вважали відомою індукцію поля \vec{B} . Тепер ми сформулюємо закон, що дозволяє обчислювати магнітну індукцію \vec{B} поля, створеного струмом, який тече по провіднику. Цей закон отриманий узагальненням дослідних фактів і носить назву закону Біо-Савара-Лапласа.

Нехай струм тече по тонкому довгому провіднику довільної

форми (рис.3.4). Візьмемо який-небудь відрізок провідника $d\vec{l}$ такої малої довжини, що його можна вважати прямолінійним. Добуток $I d\vec{l}$ ми вище назвали лінійним елементом струму. Закон Біо-Савара-Лапласа стверджує, що *індукція $d\vec{B}$ магнітного поля, створеного лінійним елементом струму в точці M на відстані r від нього, виражається формулою*



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (3.6)$$

тобто пропорційна силі струму I і обернено пропорційна квадрату відстані (вектор \vec{r} сполучає лінійний елемент струму з точкою M).

Константа μ_0 називається магнітною сталою. У системі СІ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м (генрі на метр).

Рис. 3.4

Індукцію магнітного поля \vec{B} , створеного провідником у точці M (рис. 3.4), можна знайти, якщо підрахувати векторну суму магнітних полів $d\vec{B}$, створених у цій точці кожним з відрізків $d\vec{l}$, на які ми подумки розбиваємо провідник. Підсумовування полів зводиться до обчислення інтеграла по контуру L , створеному цим провідником. У разі, коли провідник і точка спостереження M знаходяться в одній площині, всі вектори $d\vec{B}$ мають однаковий напрямок, і інтеграл набуває виду

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{\sin \theta dl}{r^2}, \quad (3.7)$$

де θ – кут між векторами $d\vec{l}$ і \vec{r} .

Знайдемо за допомогою закону Біо-Савара-Лапласа індукцію магнітного поля прямого і кругового струмів.

§ 3.3. Магнітне поле прямого струму

Лінії магнітної індукції \vec{B} магнітного поля, створеного струмом I , що тече по прямолінійному провіднику, згідно з (3.6), є концентричними колами, що лежать в перпендикулярній до провідника площині (рис. 3.5). Напрямок ліній індукції визначається *правилом правого гвинта*: якщо гвинт обертає по напрямку ліній \vec{B} , він рухається вздовж напрямку струму I .

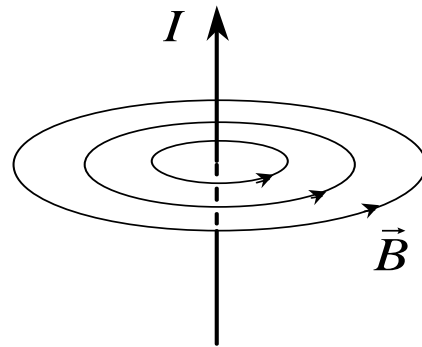


Рис. 3.5

Знайдемо індукцію магнітного поля, створеного відрізком AC такого провідника в точці M на відстані R від нього (рис. 3.6). Виділимо на провіднику AC лінійний елемент $d\vec{l}$ і з'єднаємо його кінці з точкою M відрізками KM і NM . Кут між радіус-вектором \vec{r} (відрізок KM) і елементом $d\vec{l}$ дорівнює θ . Кут, що складає з провідником відрізок NM , більший θ на малу величину $d\theta$. Під цим кутом з точки M видно елемент $d\vec{l}$, оскільки $\angle DNM = \angle KMN$ як суміжні кути при паралельних ND і KM і січною NM . Через те, що кут $d\theta$ малий, маємо

$$dl \cdot \sin \theta = dl_{\perp} = r \cdot \operatorname{tg} d\theta = r d\theta$$

$$(\operatorname{tg} d\theta \approx d\theta).$$

Підстановка цього виразу в (3.7) з урахуванням того, що $r = R / \sin \theta$, зводить криволінійний інтеграл до визначеного інтеграла по θ в межах від α до $\pi - \beta$:

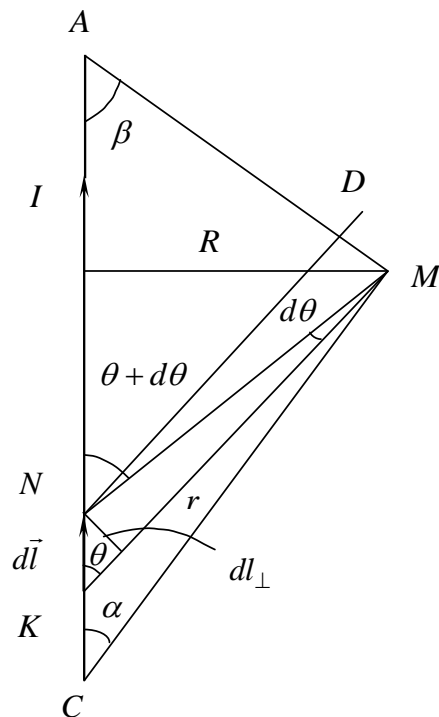


Рис. 3.6

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\alpha}^{\pi-\beta} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \alpha + \cos \beta), \quad (3.8)$$

де α і β - кути, під якими кінці відрізка провідника AC видно з точки M .

Якщо довжина провідника AC набагато перевищує відстань R , кути α і β дуже малі. Тоді $\cos \alpha = \cos \beta = 1$, і ми приходимо до формули для індукції магнітного поля нескінченно довгого провідника:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (3.9)$$

З неї випливає, що магнітне поле B пропорційне силі струму і зменшується з відстанню R від провідника обернено пропорційно до цієї відстані.

§ 3.4. Магнітне поле кругового струму

Обчислимо індукцію магнітного поля, створеного струмом,

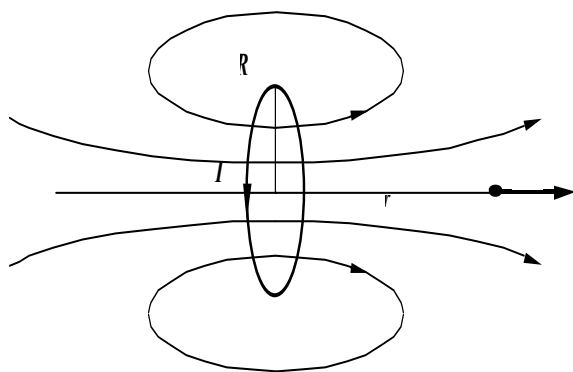


Рис. 3.7

що тече по круговому контуру. Лінії індукції \vec{B} навколо контура показані на рис. 3.7.

Знайдемо магнітне поле в точці M на осі контура на відстані x від його центра (рис. 3.8).

Елемент струму $I d\vec{l}_1$, взятий у верхній точці контура L , створює в точці

M поле $d\vec{B}_1$, а елемент $I d\vec{l}_2$ в нижній точці - поле $d\vec{B}_2$. Відстані r від цих елементів до точки M одні й ті ж. Множина елементів $I d\vec{l}$, на які ми подумки розбиваємо контур L , дає множину елементів $d\vec{B}$ створеного ними магнітного поля, які утворюють бічну поверхню конуса. Сума цих векторів і є вектор \vec{B} магнітного поля кругового струму, перпендикулярний його

площині. Модуль вектора \vec{B} дорівнює інтегралу від $dB_{\perp} = dB \cdot \cos \alpha$.

Скориставшись формулою (3.7), в якій $\sin \theta = 1$, $r = \text{const}$, маємо

$$B = \int_L dB_{\perp} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_L dl \cdot \cos \alpha$$

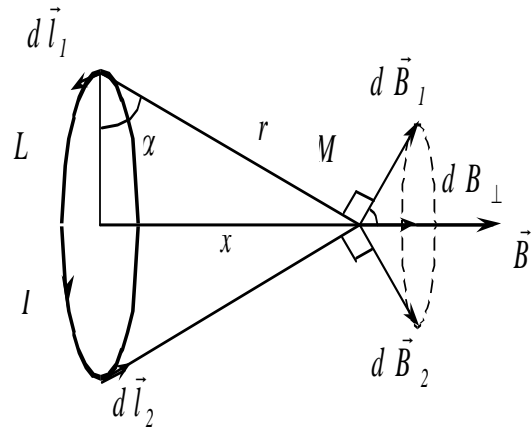


Рис. 3.8

Оскільки $\cos \alpha = R/r$,
 $r = \sqrt{R^2 + x^2}$, $\int_L dl = 2\pi R$,

отримаємо

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (3.10)$$

Індукцію магнітного поля, створеного круговим струмом, можна виразити через магнітний момент контура. *Магнітним моментом \vec{p}_m контура зі струмом називається вектор, перпендикулярний площині контура, довжина якого рівна добутку сили струму I на площу контура S , а напрямок пов'язаний з напрямком струму в контурі правилом правого гвинта:*

$$\vec{p}_m = IS \vec{n}, \quad (3.11)$$

де \vec{n} – одиничний вектор нормалі до площини контура (рис. 3.9). Оскільки площа круга $S = \pi R^2$, з формули (3.10) з урахуванням того, що $x \gg R$, отримаємо

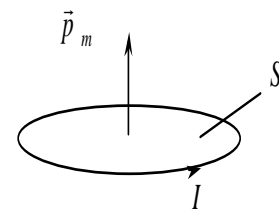


Рис. 3.9

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r^3} \vec{p}_m. \quad (3.12)$$

Вектор магнітної індукції \vec{B} на осі контура перпендикулярний площині контура, а його модуль зменшується з відстанню r від контура обернено пропорційно до куба цієї відстані. Як ми бачили в розд. 1, так само змінюється і напруженість поля електричного диполя.

Формулу індукції магнітного поля в центрі кругового контура можна отримати з формули (3.10), якщо припустити, що $x = 0$:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (3.13)$$

§ 3.5. Теорема про циркуляцію вектора магнітної індукції у вакуумі

Теорема про циркуляцію вектора магнітної індукції дозволяє обчислювати індукцію магнітного поля, створеного сукупністю струмів, що течуть по провідниках. При цьому дроти повинні бути розташовані так, щоб створене струмами магнітне поле мало яку-небудь симетрію. У практичному плані ця теорема аналогічна теоремі Остроградського-Гауса в електростатиці.

Як відомо, циркуляцією C вектора \vec{B} по замкнутому контуру L називається інтеграл по цьому контуру від скалярного добутку \vec{B} на елемент контура $d\vec{l}$:

$$C = \oint_L (\vec{B} d\vec{l}).$$

Інтегрування по контуру припускає, що значення підінтегральної функції беруться в точках цього контура. Коло на значку інтеграла означає, що контур L замкнутий.

Формулювання теореми: *циркуляція вектора магнітної індукції по довільному замкнутому контуру дорівнює алгебраїчній сумі струмів, що охоплюються цим контуром, помноженій на μ_0 :*

$$\oint_L (\vec{B} d\vec{l}) = \mu_0 \sum_{k=1}^N I_k. \quad (3.14)$$

Позитивними вважаються струми, напрямок яких зв'язаний з напрямком обходу контура за правилом правого гвинта (струми I_1 і I_3 на рис. 3.10), негативними – струми, що течуть у зворотному напрямку.

Знайдемо за допомогою теореми про циркуляцію магнітне поле, створене нескінченним прямим провідником зі струмом (рис 3.11). За контур інтегрування L візьмемо одну з ліній магнітної індукції \vec{B} , що являє собою коло радіуса R . Оскільки елемент контура $d\vec{l}$ в кожній його точці має той же напрямок, що і вектор \vec{B} , косинус кута між ними дорівнює одиниці і скалярний добуток векторів $\vec{B}d\vec{l}$ перетворюється на добуток їх модулів: $\vec{B}d\vec{l} = Bdl$. Крім того, модуль вектора \vec{B} має постійне значення в усіх точках контура, оскільки всі вони рівновіддалені від провідника. Тоді, згідно з (3.14),

$$\oint_L (\vec{B} d\vec{l}) = \oint_L B dl = B \oint_L dl = 2\pi R \cdot B = \mu_0 I,$$

звідки

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R},$$

що збігається з отриманим раніше виразом (3.9).

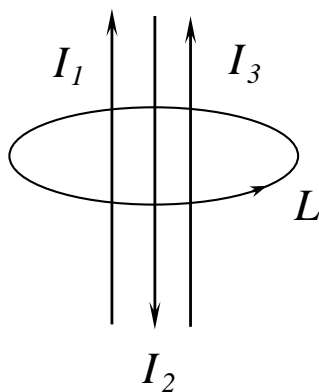


Рис. 3.10

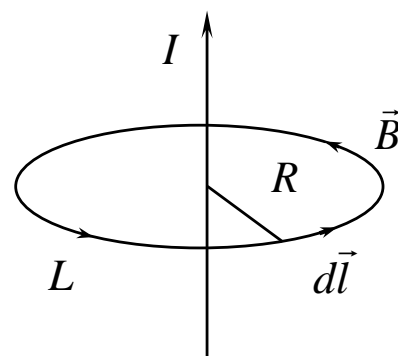


Рис. 3.11

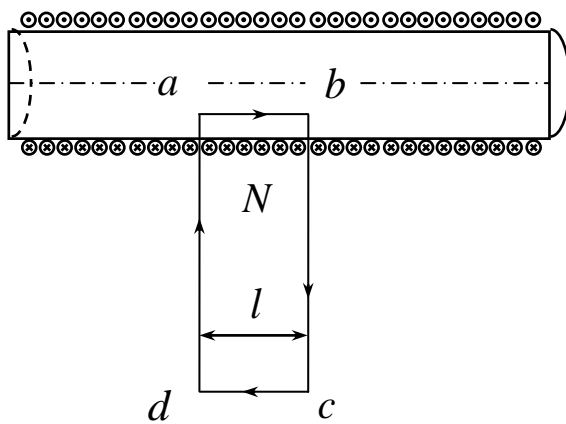
Розглянемо два приклади застосування теореми про циркуляцію – для знаходження магнітного поля довгого соленоїда і тороїда.

§ 3.6. Магнітне поле довгого соленоїда і тороїда

Соленоїдом називається циліндрична котушка, що складається з намотаних впритул один до одного витків дроту. При протіканні струму в котушці виникає магнітне поле. Якщо довжина котушки набагато більша за її діаметр, поле зосереджене головним чином усередині котушки і в середній її частині віддалік від її кінців є *однорідним* ($\vec{B} = \text{const}$). У цьому плані довгий соленоїд подібний до плоского конденсатора в електростатиці, в якому створюється однорідне електричне поле.

Розглянемо довгий соленоїд, осьовий переріз якого показаний на рис. 3.12 (кружечки позначають переріз дроту, намотаного на котушку).

Щоб застосувати теорему про циркуляцію, контур інтегрування L виберемо у вигляді прямокутника $abcd$, розташованого в площині осьового перерізу, у якого сторони ab і cd завдовжки l паралельні осі соленоїда, а bc і ad – перпендикулярні їй. Напрямок обходу контура



вказаний стрілками. Контур охоплює N витків дроту, в яких струм I спрямований за площину креслення, тобто має позитивний знак.

Згідно з (3.14),

$$\oint_L (\vec{B} d\vec{l}) = \mu_0 NI.$$

Рис. 3.12

Інтеграл по замкнутому контуру L можна представити у вигляді суми інтегралів по кожній з його сторін:

$$\oint_L (\vec{B} d\vec{l}) = \int_a^b (\vec{B} d\vec{l}) + \int_b^c (\vec{B} d\vec{l}) + \int_c^d (\vec{B} d\vec{l}) + \int_d^a (\vec{B} d\vec{l}).$$

У першому з доданків вектори \vec{B} і $d\vec{l}$ збігаються за напрямком і тому $(\vec{B}d\vec{l}) = Bdl$. Крім того, через паралельність сторони осі соленоїда модуль \vec{B} має на ній постійне значення. Тоді

$$\int_a^b (\vec{B}d\vec{l}) = \int_a^b B dl = B \int_a^b dl = B \cdot l.$$

Інтеграли по сторонах контура bc і da перетворюються в нуль, оскільки вектори \vec{B} і $d\vec{l}$ на них перпендикулярні один одному і скалярний добуток $(\vec{B}d\vec{l}) = 0$. Четвертий інтеграл – по лінії cd – можна припустити рівним нулю, оскільки віддалік від довгого соленоїда індукція поля B дуже мала.

Остаточно отримаємо

$$\oint_L (\vec{B}d\vec{l}) = B \cdot l = \mu_0 NI,$$

звідки

$$B = \mu_0 nI. \quad (3.15)$$

Через $n = N/l$ позначено число витків соленоїда на одиницю його довжини.

З формули (3.15) випливає, що всередині довгого соленоїда віддалік від його кінців магнітне поле *однорідне*. Індукція поля B пропорційна лінійній щільності числа витків соленоїда і силі струму в його обмотці.

Розглянемо тепер *тороїд*, зображений на рис. 3.13, який є соленоїдом, зігнутим в кільце (геометрична фігура – тор). Лінії індукції магнітного поля \vec{B} є концентричними колами з центрами на осі симетрії тороїда, що проходить через точку O перпендикулярно площині

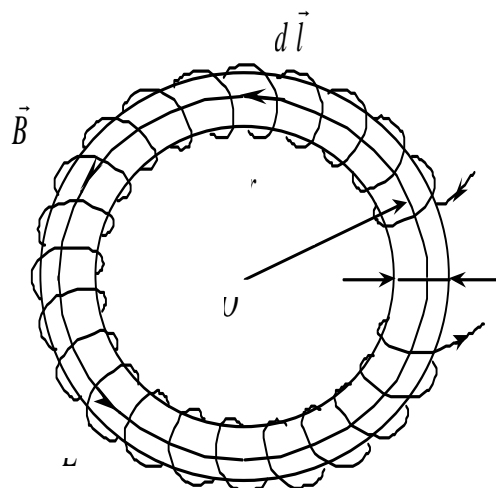


Рис. 3.13

креслення. Одне з цих кіл – радіусом r – візьмемо за контур інтегрування L . Вектори \vec{B} і $d\vec{l}$ в кожній точці цього кола паралельні один одному, тому $(\vec{B}d\vec{l}) = Bdl$. Крім того, модуль \vec{B} на цьому колі має постійне значення. З урахуванням сказаного,

$$\oint_L (\vec{B}d\vec{l}) = \oint_L Bdl = B \oint_L dl = 2\pi r \cdot B = \mu_0 NI,$$

де N – число витків тороїда. Звідси

$$B(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}. \quad (3.16)$$

З цієї формули випливає, що індукція магнітного поля тороїда зменшується з відстанню r від його осі обернено пропорційно до цієї відстані.

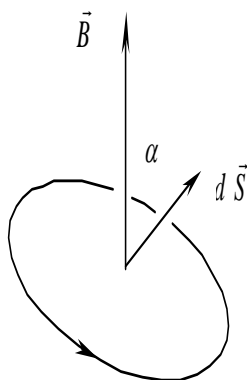
У разі тонкого тороїда, коли діаметр котушки $d \ll r$ (див. рис. 3.13), індукція магнітного поля в межах тороїда мало змінюється з відстанню і з (3.16) одержимо формулу, аналогічну формулі (3.15), для соленоїда:

$$B = \mu_0 nI, \quad (3.17)$$

де $n = \frac{N}{2\pi r}$ – лінійна щільність числа витків обмотки тороїда.

§ 3.7. Потік вектора магнітної індукції. Теорема Остроградського–Гаусса для магнітного поля

Нехай нескінченно малий майданчик dS знаходиться в магнітному полі з індукцією \vec{B} (рис. 3.14). Вкажемо стрілкою напрямок обходу контура, що обмежує цей майданчик. Він пов'язаний з напрямком позитивної нормалі до майданчика \vec{n}



правилом правого гвинта (\vec{n} – одиничний вектор).

Потоком $d\Phi$ вектора \vec{B} (магнітним потоком) крізь нескінченно малий майданчик називається добуток її площі dS на модуль \vec{B} і на косинус кута α

між вектором \vec{B} і нормаллю до майданчика:

$$d\Phi = B dS \cos \alpha. \quad (3.18)$$

Введемо вектор майданчика $d\vec{S} = \vec{n} dS$, що збігається за напрямком з \vec{n} . Тоді потік $d\Phi$ можна представити у вигляді скалярного добутку:

$$d\Phi = (\vec{B} d\vec{S}).$$

Потік крізь поверхню S дорівнює інтегралу по цій поверхні від $(\vec{B} d\vec{S})$:

$$\Phi = \int_S (\vec{B} d\vec{S}).$$

Значення підінтегральної функції беруться в точках цієї поверхні.

Одиницею вимірювання магнітного потоку в системі СІ є *вебер* (Вб). Як випливає з формули (3.18) (Вб = Тл · м²).

Розглянемо замкнуту поверхню S , що знаходиться в магнітному полі з індукцією \vec{B} (рис.3.15).

Теорема Остроградського–Гаусса для магнітного поля стверджує, що *потік вектора індукції магнітного поля через довільну замкнуту поверхню завжди рівний нулю*:

$$\oint_L (\vec{B} d\vec{S}) = 0. \quad (3.19)$$

Для доведення теореми візьмемо одну з ліній магнітної індукції \vec{B} і подумки побудуємо навколо неї циліндричну поверхню у вигляді трубки малого перерізу dS_{\perp} (рис. 3.15). Ця трубка вирізає на поверхні S майданчики dS_1 і dS_2 , вектори нормалей яких $d\vec{S}_1$ і $d\vec{S}_2$ є зовнішніми по відношенню до замкнутої поверхні S . Потік вектора \vec{B} через бічну поверхню

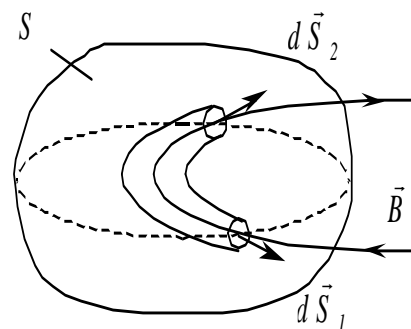


Рис. 3.15

трубки дорівнює нулю, оскільки лінії \vec{B} ніде її не перетинають. Потік вектора \vec{B} через першу основу циліндра $\vec{B}d\vec{S}_1 = -BdS_{\perp}$, а потік через другу основу $\vec{B}d\vec{S}_2 = BdS_{\perp}$. У сумі вони дають нуль. Таким чином, потік вектора \vec{B} через всю поверхню трубки дорівнює нулю.

Об'єм, обмежений замкнутою поверхнею S , можна розбити на аналогічні трубки навколо кожної з ліній магнітної індукції \vec{B} . Оскільки потік крізь поверхню будь-якої з трубок дорівнює нулю, потік вектора \vec{B} крізь всю замкнуту поверхню S також дорівнює нулю, що і доводить теорему.

Рівність нулю потоку вектора \vec{B} через будь-яку замкнуту поверхню є наслідком замкнутості ліній магнітної індукції, тобто відсутності в природі магнітних зарядів, на яких ці лінії починалися б або закінчувалися подібно до ліній електростатичного поля.

Рівняння (3.19) є одним з рівнянь Максвелла, на яких базується електродинаміка і які ми розглянемо нижче.

§ 3.8. Сила взаємодії двох паралельних провідників. Одиниця сили струму – ампер

Нехай струми I_1 і I_2 течуть в одному напрямку по двох паралельних дуже довгих провідниках, відстань між якими R

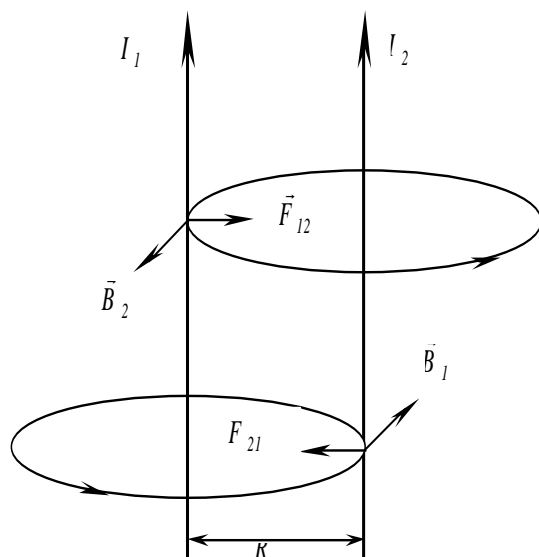


Рис. 3.16

набагато менша їх довжини (рис. 3.16). Знайдемо силу взаємодії цих струмів. Магнітна індукція поля, створеного струмом I_1 на лінії розташування другого провідника, з урахуванням (3.9)

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}.$$

Згідно з (3.5), на струм I_2 діє сила

$$F_{21} = I_2 B_1 l = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi R}, \quad (3.20)$$

де l – довжина провідника.

Сила F_{12} , що діє на перший струм з боку другого, як легко бачити, виражається тією ж формулою (3.20). Ця сила пропорційна кожному із струмів і обернено пропорційна відстані між ними.

Формула (3.20) дозволяє визначити одиницю сили струму. У системі СІ – це *ампер*.

1 ампер – сила незмінного струму, який, протікаючи по двом паралельним нескінченно довгим провідникам нескінченно малого перетину, що знаходяться на відстані одного метра один від одного, викликає силу їх взаємодії, рівну $2 \cdot 10^{-7}$ ньютонів на кожен метр довжини провідників:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I^2}{R} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н/м} \quad \text{при } I = 1 \text{ А}, \quad R = 1 \text{ м.}$$

Одиниця сили струму – *ампер* – в системі СІ є однією з основних (разом з *метром*, *кілограмом*, *секундою*). Одиниця заряду – *кулон* – похідна від *ампера*.

1 кулон – це заряд, який проходить через поперечний переріз провідника за 1 секунду, якщо по цьому провіднику тече струм силою в 1 ампер.

§ 3.9. Замкнений контур зі струмом у магнітному полі

Розглянемо поведінку в магнітному полі замкнутого провідного контура, по якому протікає струм I . За контур візьмемо прямокутну рамку зі сторонами a і b (рис. 3.17).

Спочатку припустимо, що магнітне поле однорідне ($\vec{B} = \text{const}$). Нехай площина рамки складає з напрямком вектора \vec{B} деякий кут, а сама рамка може обертатися навколо осі OO , перпендикулярної вектору \vec{B} і площі рамки, що проходить через середини сторін, завдовжки b . При повороті рамки навколо цієї осі сторона рамки завдовжки a завжди залишається перпендикулярною вектору \vec{B} і на неї, згідно з (3.5), діє сила

$$F_a = IaB. \quad (3.21)$$

Пара таких сил (рис. 3.17, а) створює обертаючий момент

$$M = F_a b \sin \alpha,$$

де α – кут між вектором магнітного моменту контура \vec{p}_m і вектором \vec{B} .

Підставляючи в останню рівність силу F_a (3.21) і враховуючи, що $p_m = I \cdot ab$, отримаємо

$$M = IBab \sin \alpha = p_m B \sin \alpha.$$

Цю рівність можна представити у векторному вигляді:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]. \quad (3.22)$$

Обертаючий момент, що діє на рамку, перетворюється в нуль у той момент, коли вектор \vec{p}_m стає паралельним вектору \vec{B} , тобто площина рамки розташовується перпендикулярно лініям магнітного поля. Таке положення рамки стійке, оскільки, як

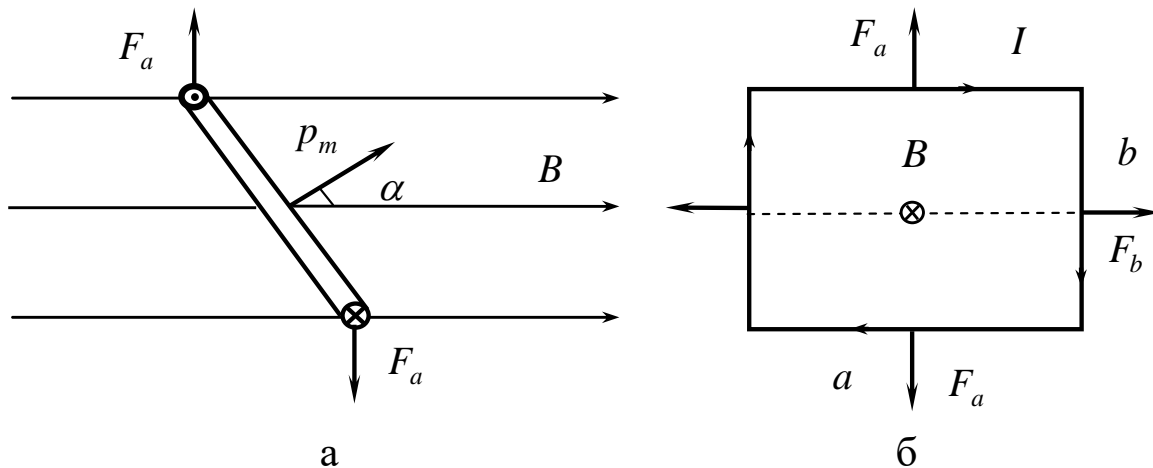


Рис. 3.17

видно на рис. 3.17,б, на неї діють розтягуючі сили, що перешкоджають рамці відхилитися від цього положення.

Таким чином, дія однорідного магнітного поля на замкнутий контур зі струмом зводиться до повороту контура та орієнтування

вектора його магнітного моменту \vec{p}_m паралельно вектору магнітної індукції \vec{B} .

Нехай контур зі струмом знаходиться в *неоднорідному* магнітному полі (рис. 3.18). Лінії магнітної індукції \vec{B} , показані на рисунку, розходяться, тобто зліва поле сильніше, ніж справа. Розкладемо вектор \vec{B} на дві складові: перпендикулярну площині контура \vec{B}_\perp і паралельну їй \vec{B}_\parallel . Дія першої з них – перпендикулярної – приводить до повороту контура та орієнтування його магнітного моменту вздовж цієї складової. Наявність паралельної складової магнітного поля \vec{B}_\parallel зумовлює поява сили F_A , яка діє на всі точки контура в одному і тому ж напрямку і втягує контур в область сильнішого поля. Сила дорівнює добутку градієнта індукції поля $\frac{\partial B}{\partial x}$ на магнітний момент контура:

$$F_A = p_m \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (3.23)$$

Градієнт $\frac{\partial B}{\partial x}$ виражає швидкість зміни магнітної індукції B у напрямі осі X , показаної на рис. 3.18.

Якщо повернути контур навколо осі OO на 180° , то він виштовхуватиметься з магнітного поля. Проте таке положення нестійке. При невеликому відхиленні від нього контур повертається в попереднє положення і втягується в область сильнішого поля.

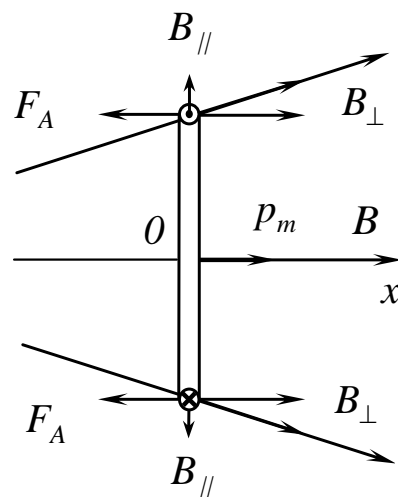


Рис. 3.18

Контур зі струмом в магнітному полі відіграє в електромагнетизмі ту ж роль, що і пробний заряд в електростатиці. Напрямок нормалі до контура, розташованого в

магнітному полі, вказує напрямок магнітних силових ліній, а обертальний момент, згідно з (3.22), характеризує індукцію магнітного поля B .

§ 3.10. Робота при переміщенні провідника і контура зі струмом у магнітному полі

В § 3.1 було показано, що на елемент струму $Id\vec{l}$, що знаходиться в магнітному полі, діє сила $dF_A = Idl \cdot B \sin \alpha$, напрямок якої визначається правилом лівої руки. При переміщенні провідника зі струмом у магнітному полі виконується робота. Знайдемо цю роботу.

Візьмемо контур, одна із сторін якого – перемичка завдовжки l – рухома і може переміщатися паралельно самій собі вздовж осі X (рис. 3.19). Магнітне поле \vec{B} спрямоване перпендикулярно площині контура – за кресленням. По контуру тече струм I , тому на перемичку діє постійна сила, спрямована за правилом лівої руки зліва направо:

$$F_A = IBl.$$

Під дією цієї сили перемичка рухатиметься. При переміщенні перемички з положення 1 в положення 2, відстань між якими dx , сила F_A здійснює роботу

$$\delta A = F_A dx = IBl dx.$$

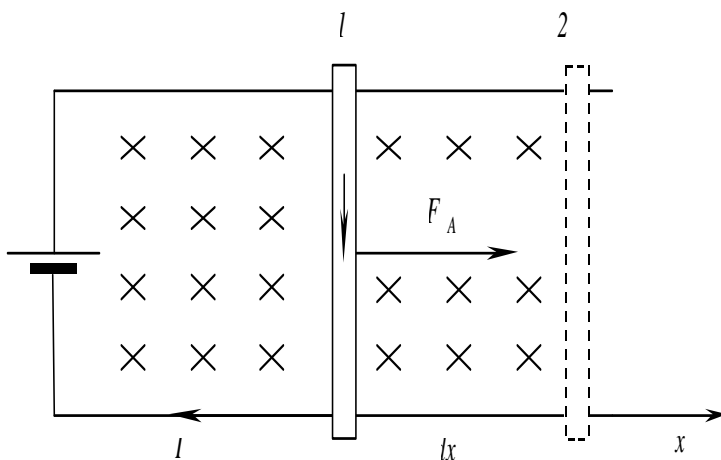


Рис. 3.19

Добуток $l dx$ рівний площі dS , яку “замітає” перемичка при своєму русі, а добуток BdS – магнітному потоку $d\Phi$ через цю площу. Тоді

$$\delta A = IBdS = I d\Phi. \quad (3.24)$$

Можна

показати, що формула (3.24) справедлива при будь-якій взаємній орієнтації контура зі струмом і вектора індукції магнітного поля. Таким чином, *механічна робота переміщення провідника зі струмом у магнітному полі дорівнює добутку сили струму в провіднику на величину потоку вектора магнітної індукції, що перетинається ним.*

Отриманий результат можна застосувати для підрахунку роботи переміщення замкнутого контура зі струмом у магнітному полі за умови, що сила струму в ньому підтримується постійною. Ця робота дорівнює

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1). \quad (3.25)$$

Механічна робота, що виконується при переміщенні замкнутого контура з постійним струмом з одного положення в інше, дорівнює добутку сили струму I в контурі на різницю потоків вектора магнітної індукції $\Phi_2 - \Phi_1$ через майданчик, обмежений контуром в його початковому і кінцевому положеннях.

За формулою (3.25) можна знайти роботу, що виконується і при повороті контура в однорідному магнітному полі. При цьому слід пам'ятати, що потік $\Phi = BS \cos \alpha$ має позитивний знак, коли кут α між вектором і вектором \vec{B} нормалі \vec{n} до контура гострий, і негативний знак – коли цей кут тупий. Напрямок позитивної нормалі \vec{n} , як відомо, пов'язаний з напрямком струму в контурі правилом правого гвинта (див. § 3.7).

§ 3.11. Рух заряджених частинок у магнітному полі. Принцип роботи циклотрона

Розглянемо рух частинки масою m і зарядом q в постійному однорідному магнітному полі \vec{B} . Лінії магнітної індукції перпендикулярні площині креслення і спрямовані за креслення (рис. 3.20). Швидкість частинки \vec{v} перпендикулярна

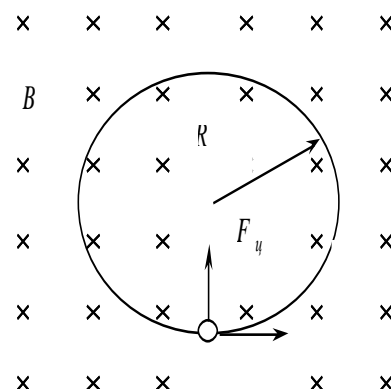


Рис. 3.20

вектору \vec{B} . Частинка рухається по колу радіусом R , оскільки сила, що діє на неї, – сила Лоренца, – в кожній точці траєкторії перпендикулярна швидкості і ϵ , таким чином, доцентровою силою:

$$\vec{F}_c = \vec{F}_l = q[\vec{v}, \vec{B}].$$

Радіус кола можна знайти, прирівнявши вирази для цих сил:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB,$$

звідки

$$R = \frac{mv}{qB}. \quad (3.26)$$

Радіус кола зменшується із збільшенням магнітної індукції поля і зростає пропорційно швидкості частинки.

Період обертання частинки по колу, тобто час, за який вона здійснює один оборот, знайдемо, розділивши довжину кола на швидкість частинки:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (3.27)$$

Період не залежить від швидкості частинки і визначається тільки відношенням її заряду до маси та індукцією магнітного поля. Ця властивість використовується в *циклотроні* – циклічному прискорювачі заряджених частинок. Принципова схема циклотрона наведена на рис. 3.21.

Вакуумна камера, в якій рухаються прискорені частинки, є порожнистим металевим циліндром, розрізаним по діаметру на дві однакові частини, що називаються *дуантами*. Змінна напруга, прикладена до дуантів, створює у проміжку між ними електричне поле напруженістю

$$E(t) = E_0 \cos \frac{2\pi}{T_E} t,$$

де T_E – період його зміни.

У центрі вакуумної камери знаходиться джерело

заряджених частинок – позитивних іонів. Під дією електричного поля частинки набувають деякої швидкості і потрапляють всередину одного з дуантів. Всередині дуантів електричне поле відсутнє, а магнітне поле, спрямоване вертикально, примушує частинки рухатися по колу. Пройшовши половину кола, частинки знову опиняються у проміжку між дуантами, але рухаються у зворотному напрямку. Якщо період зміни електричного поля дорівнює періоду обертання частинок по колу, то електричне поле у момент приходу частинок в цей проміжок змінює свій напрямок на протилежний і знову підштовхує частинки, збільшуючи їх швидкість. Із збільшенням швидкості збільшується і радіус кола, по якому рухаються частинки. Тому траєкторією частинок у магнітному полі буде плоска спіраль.

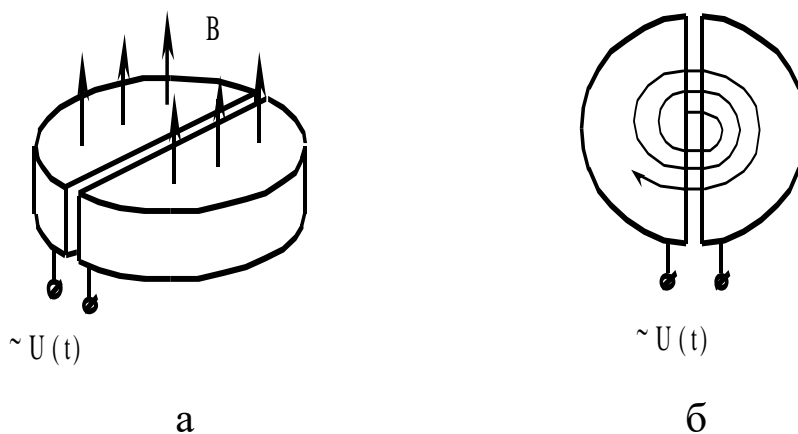


Рис. 3.21

Цінність циклічного прискорювача полягає в тому, що за допомогою порівняно невисокої напруги, прикладеної до дуантів, можна розігнати частинки до великих енергій. Проте при швидкостях руху, порівняних зі швидкістю світла, проявляється релятивістський ефект – зростання маси прискорюваних частинок зі швидкістю

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$

що, згідно з формулою (3.27), приводить до збільшення періоду їх зобертання по колу. Щоб зберегти цей період незмінним, потрібно відповідним чином збільшити індукцію магнітного поля. Прискорювачі, в яких це здійснюється, називаються

синхротронами. Можна також для збереження синхронізації частоти обертання частинок по колу і частоти прискорюючої напруги змінювати цю частоту (*фазотрони*) або робити те й інше одночасно. В останньому випадку прискорювачі носять назву *синхрофазотронів.*

Вакуумна камера першого циклотрона, побудованого в 1931 році Лоуренсом, мала діаметр 30 см. У сучасних прискорювачах частинки рухаються всередині тороїдальної камери діаметром в сотні метрів. Прискорювачі використовуються для досліджень в галузі фізики елементарних частинок і для отримання штучних хімічних елементів, що знаходяться в кінці таблиці Менделєєва.

§ 3.12. Ефект Холла

Візьмемо прямокутну пластинку, виготовлену з металу або напівпровідника, по якій тече струм I (рис. 3.22). Виберемо на верхній і нижній гранях пластинки такі точки 1 і 2, щоб їх потенціали були однаковими. Якщо цю пластинку помістити в однорідне магнітне поле з індукцією \vec{B} , перпендикулярною до її

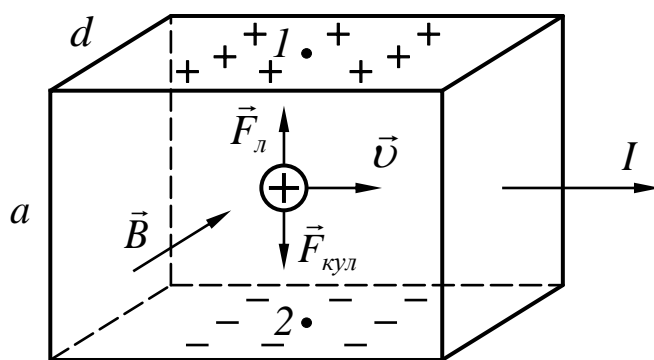


Рис. 3.22

бічних граней, між точками 1 і 2 виникає різниця потенціалів $\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$.

Виникнення в провіднику зі струмом поперечної різниці потенціалів при переміщенні його в магнітне поле носить

назву ефекту Холла.

Дослідним шляхом встановлено, що величина холлівської різниці потенціалів $\Delta\varphi_{12}$ пропорційна силі струму I , індукції поля B і обернено пропорційна товщині пластинки d :

$$\Delta\varphi_{12} = R \frac{IB}{d}. \quad (3.28)$$

Коефіцієнт пропорційності R називається *постійною Холла*. Його числове значення залежить від матеріалу, з якого виготовлена пластинка.

Розглянемо теорію ефекту Холла. Нехай концентрація носіїв струму в пластинці $n = N/V$ (число носіїв в одиниці об'єму), а середня швидкість їх впорядкованого руху – дрейфова швидкість – дорівнює v . Тоді, згідно з класичною електронною теорією електропровідності, густина струму в пластинці

$$j = \frac{I}{S} = nqv, \quad (3.29)$$

де $S = a \cdot d$ – площа її поперечного перерізу (a – ширина, d – товщина вздовж напрямку магнітного поля B); q – заряд носіїв струму.

При переміщенні пластинки в магнітне поле на кожен рухомий заряд діє сила Лоренца $\vec{F}_L = q[\vec{v}, \vec{B}]$, спрямована перпендикулярно його швидкості \vec{v} та індукції поля \vec{B} . Оскільки заряди рухаються в напрямку, перпендикулярному полю ($\vec{v} \perp \vec{B}$), її модуль $F_L = qvB$.

Під дією сили Лоренца позитивні заряди зміщуються до верхньої грані пластинки, на якій утворюється надлишок цих зарядів. Відповідно на нижній грані утворюється надлишок негативних зарядів і в зразку виникає поперечне електричне поле напруженістю \vec{E} . Це поле діє на кожний із зарядів із силою $\vec{F}_{кул} = q\vec{E}$, спрямованою у бік, протилежний силі Лоренца, тобто вниз (див. рис. 3.22).

Коли напруженість електричного поля E досягне такого значення, що його дія на рухомі заряди врівноважуватиме силу Лоренца, встановиться стаціонарний розподіл зарядів в напрямку, поперечному струму. Відповідне значення E знаходиться з умови $qE = qvB$, звідки

$$E = vB. \quad (3.30)$$

У достатньо довгій і широкій пластинці поперечне електричне поле можна вважати однорідним. Тоді різниця потенціалів між точками 1 і 2, з урахуванням (3.30),

$$\Delta\varphi_{12} = E \cdot a = vBa. \quad (3.31)$$

Виразимо швидкість впорядкованого руху зарядів v з формули (3.29) і підставимо її в (3.31). Оскільки $S = ad$, після скорочення a отримаємо

$$\Delta\varphi_{12} = \frac{I}{nq} \cdot \frac{IB}{d}.$$

Порівнюючи цю формулу з (3.28), бачимо, що стала Холла виражається через заряд q і концентрацію носіїв струму у дослідному зразку:

$$R = \frac{1}{nq}. \quad (3.32)$$

Знак сталої Холла R збігається із знаком носіїв струму. Якщо потенціал верхньої точки 1 вищий за потенціал нижньої точки 2 ($\Delta\varphi_{12} > 0$), то $R > 0$ і носії струму мають позитивний заряд. У напівпровідниках це так звані "дірки", що зумовлюють *дірчасту провідність*. Якщо, навпаки, потенціал точки 2 вищий, ніж потенціал точки 1, то $R < 0$ й існує *електронна провідність*, коли носії струму заряджені негативно. Якщо у напівпровіднику є одночасно обидва типи носіїв струму, то по знаку постійної Холла R можна судити про те, концентрація яких носіїв переважає.

Числове значення константи Холла, згідно з (3.32), дозволяє визначити концентрацію носіїв струму n , якщо відомий їх заряд q . Так, у металів, у яких носіями струму є електрони, концентрація носіїв

$$n = \frac{I}{Re},$$

де $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд електрона.

Лінійна залежність холлівської різниці потенціалів від магнітного поля B використовується у високочутливих магнітометрах для вимірювання його значень (чутливість до 10^{-8} Тл), а також у вимірювальній техніці як датчики переміщення, вимірювачі частоти обертання, безконтактні перемикачі і т.д.

§ 3.13. Явище електромагнітної індукції. Закон Фарадея

Явище електромагнітної індукції було відкрито Майклом Фарадеєм в 1831 році. Воно полягає у виникненні змінного електричного поля в результаті зміни магнітного поля. Це відкриття було першим кроком на шляху створення загальної теорії електричних і магнітних явищ – класичної електродинаміки, що було зроблене в 60-х роках XIX століття Джеймсом Клерком Максвелом.

Нехай замкнутий провідний контур L знаходиться в магнітному полі. При зміні магнітного потоку, що пронизує цей контур, в ньому виникає електричний струм. Цей струм називається індукційним, а процес його виникнення – явищем електромагнітної індукції.

Зміна магнітного потоку, згідно з (3.18), може бути зумовлена зміною індукції поля B , площі контура S або його орієнтації щодо напрямку магнітного поля.

Відкриття Фарадея було зроблене в його знаменитому досліді, коли він всував плоский магніт в котушку, підключену до гальванометра. Під час руху магніта по ланцюгу протікав електричний струм і стрілка гальванометра відхилялася. При вийманні магніта стрілка відхилялася в протилежну сторону. Узагальнення результатів цього досліді дозволило дати наведене вище формулювання явища електромагнітної індукції.

Розглянемо механізм виникнення ЕРС індукції. Візьмемо контур у вигляді прямокутної провідної рамки, одна зі сторін якої – перемичка завдовжки l – переміщується вздовж осі X паралельно самій собі зі швидкістю v , зберігаючи електричний контакт з двома іншими сторонами рамки (рис. 3.23). Вектор магнітної індукції \vec{B}

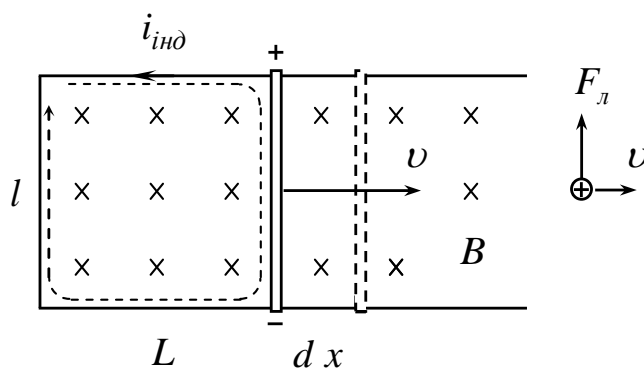


Рис. 3.23

перпендикулярній площині контура і спрямований за площину креслення. При русі перемички наявні в ній вільні заряди – носії струму – рухаються разом з перемичкою і відчують дію сили Лоренца $F_l = qvB$. У результаті цього заряди зміщуються вздовж перемички і на її кінцях виникає різниця потенціалів. Таким чином, рухома перемичка виступає в ролі джерела ЕРС в контурі L . Роль сторонньої сили грає сила Лоренца. Напруженість створеного нею електричного поля

$$E_{стор} = \frac{F_l}{q} = vB.$$

Різниця потенціалів на кінцях перемички, тобто ЕРС індукції

$$\varepsilon_{інд} = E_{стор} \cdot l = Blv.$$

На рис. 3.23 показаний напрямок індукційного струму $i_{інд}$. Він протилежний позначеному пунктирною стрілкою напрямку обходу контура, пов'язаного з напрямком магнітного поля \vec{B} правилом правого гвинта. Врахуємо це, поставивши знак “мінус” в правій частині:

$$\varepsilon_{інд} = -Blv. \quad (3.33)$$

Оскільки швидкість руху перемички $v = \frac{dx}{dt}$, що “замітається” нею за час dt , площа $dS = l dx$, а магнітний потік через цю площу $d\Phi = B \cdot dS$, з формули (3.33) отримаємо

$$\varepsilon_{інд} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (3.34)$$

Ця формула виражає закон електромагнітної індукції Фарадея: ЕРС індукції, що виникає в замкнутому контурі, дорівнює взятій зі зворотним знаком швидкості зміни магнітного потоку, що пронизує цей контур.

Знак “мінус” виражає правило Ленца, що встановлює напрямок індукційного струму.

§ 3.14. Правило Ленца

Розглянемо замкнутий провідний контур L , що знаходиться у магнітному полі \vec{B} , яке змінюється з часом (рис. 3.24). Напрямок обходу контура, позначений на рисунку стрілкою, пов'язаний з напрямком \vec{B} правилом правого гвинта.

Нехай магнітне поле B зростає. Тоді $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ і ЕРС індукції, згідно з (3.34), негативна: $\varepsilon_{інд} < 0$. Індукційний струм $i_{інд}^{(1)}$ в цьому випадку тече в напрямку, протилежному напрямку обходу контура (рис. 3.24,а), а створене цим струмом магнітне поле $\vec{B}_{інд}^{(1)}$ спрямовано проти зовнішнього поля \vec{B} , тобто перешкоджає його наростанню.

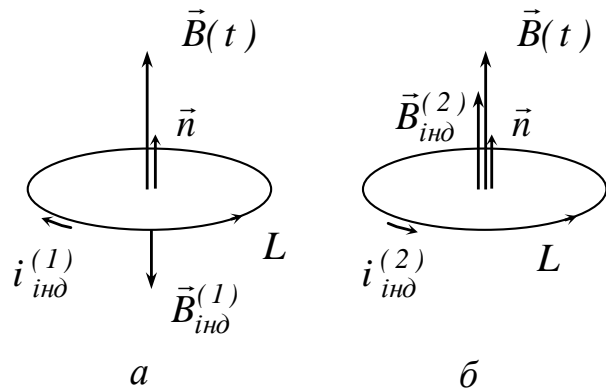


Рис. 3.24

Нехай тепер зовнішнє поле B зменшується. Тоді $\frac{d\Phi}{dt} < 0$, $\varepsilon_{інд} > 0$, а індукційний струм $i_{інд}^{(2)}$ тече у напрямку обходу контура. Магнітне поле $\vec{B}_{інд}^{(2)}$, створене індукційним струмом, спрямоване тепер в ту ж сторону, що і зовнішнє поле B , і перешкоджає його зменшенню (рис. 3.24,б).

Правило, що визначає напрямок індукційного струму, встановлено дослідним шляхом російським фізиком Е.Х.Ленцем у 1833 році. Згідно з цим правилом, *індукційний струм, що виникає в замкнутому контурі при зміні магнітного потоку, який його пронизує, має такий напрямок, що створене цим струмом магнітне поле перешкоджає зміні магнітного потоку через контур.*

§ 3.15. Явище самоіндукції

У замкнутому провідному контурі, що знаходиться в змінному магнітному полі, завдяки явищу електромагнітної

індукції виникає індукційний струм. При цьому магнітне поле може бути створене струмом, що тече по цьому ж контуру. Якщо струм змінюється, то змінюється і створене ним магнітне поле. В результаті в контурі за законом Фарадея з'являється ЕРС індукції.

Явище виникнення ЕРС індукції в контурі, по якому тече змінний струм, називається явищем самоіндукції.

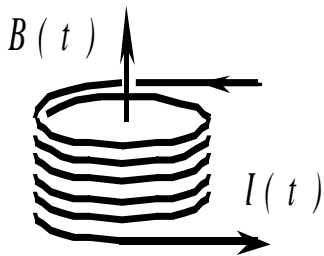


Рис. 3.25

Знайдемо електрорушійну силу самоіндукції. Візьмемо котушку, в якій тече електричний струм, що змінюється в часі $I(t)$ (рис. 3.25). Цей струм створює в котушці магнітне поле B , яке також змінюватиметься разом зі зміною струму.

Повний потік магнітної індукції Ψ , що пронизує всі витки котушки (названий *струмозчепленням*), пропорційний індукції поля B , яка у свою чергу пропорційна силі струму I в цій котушці ($\Psi \sim B \sim I$). Зв'язок повного магнітного потоку зі струмом в котушці можна представити у вигляді

$$\Psi = LI. \quad (3.35)$$

Формула (3.35) справедлива для будь-якого замкнутого провідника. Коефіцієнт пропорційності L називається *індуктивністю* або *коефіцієнтом самоіндукції* провідника.

Підставивши Ψ в (3.34) замість Φ , отримаємо (за умови $L = \text{const}$) формулу для ЕРС самоіндукції:

$$\varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3.36)$$

Електрорушійна сила самоіндукції, що виникає в замкнутому провіднику, по якому тече змінний струм, дорівнює взятому з протилежним знаком добутку коефіцієнта самоіндукції цього провідника на швидкість зміни струму в ньому.

Як випливає з формули (3.36), коефіцієнт самоіндукції L чисельно рівний електрорушійній силі, що виникає в провіднику, по якому тече струм, що змінюється на один ампер за секунду. Він залежить від розмірів і форми провідника, а також магнітних властивостей речовини, що оточує провідник. Коефіцієнт самоіндукції котушки має постійне значення, якщо в ній немає сердечника з феромагнітного матеріалу, магнітна проникність якого залежить від сили струму (див. § 3.24).

Одиницею індуктивності в системі СІ служить *генрі* (Гн). Індуктивність провідника рівна 1 генрі, якщо зміна струму в ньому на 1 ампер за 1 секунду приводить до виникнення електрорушійної сили самоіндукції в 1 вольт.

Якщо струм в провіднику зростає, ЕРС самоіндукції спрямована у бік, протилежний струму, тобто перешкоджає його наростанню. Якщо струм зменшується, то ЕРС самоіндукції перешкоджає його зменшенню. Тому явище самоіндукції приводить до збільшення опору провідника змінному струму. Разом з активним (омічним) опором провідник набуває так званого *індуктивного опору* X_L , величина якого пропорційна індуктивності провідника L і частоті змінного струму ν :

$$X_L = \omega L, \quad (3.37)$$

де $\omega = 2\pi\nu$ – циклічна частота.

Коефіцієнт самоіндукції L провідника в електродинаміці є аналогом маси тіла в механіці. Чим більше L , тим повільніше змінюється струм у провіднику внаслідок зміни прикладеної до провідника напруги.

Для ілюстрації сказаного розглянемо два приклади. Як перший приклад знайдемо індуктивність довгого соленоїда (рис. 3.26).

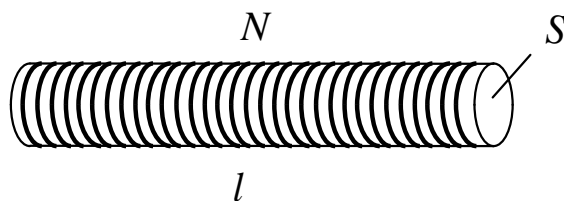


Рис. 3.26

Магнітний потік через площу поперечного перерізу соленоїда S

$$\Phi = BS.$$

Згідно з формулою (3.15), магнітне поле в соленоїді $B = \mu_0 \frac{N}{l} I$, де N – число витків, l – довжина соленоїда.

За законом Фарадея ЕРС індукції в обмотці соленоїда складається із суми ЕРС в кожному з N його витків. Тому

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 \frac{N^2}{l} S \cdot \frac{dI}{dt}.$$

Порівняння з формулою (3.36) показує, що

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l^2} lS = \mu_0 n^2 V, \quad (3.38)$$

де $n = N/l$ – лінійна густина числа витків; $V = Sl$ об'єм соленоїда.

Індуктивність соленоїда пропорційна його об'єму, тобто розміру області простору, в якій існує магнітне поле, і квадрату густини витків соленоїда.

Як другий приклад знайдемо індуктивність *коаксіального кабелю*. Коаксіальний кабель складається з внутрішнього дроту, навколо якого розташовується зовнішній дріт у вигляді трубки (рис. 3.27, а). У гнучких кабелях цим дротом є обплітка з мідних проводів. Між внутрішнім і зовнішнім дротами знаходиться ізоляція. Струм, що тече по внутрішньому дроту, рівний за величиною і протилежний за напрямком струму, що тече по зовнішньому дроту. Тому магнітне поле відмінне від нуля тільки

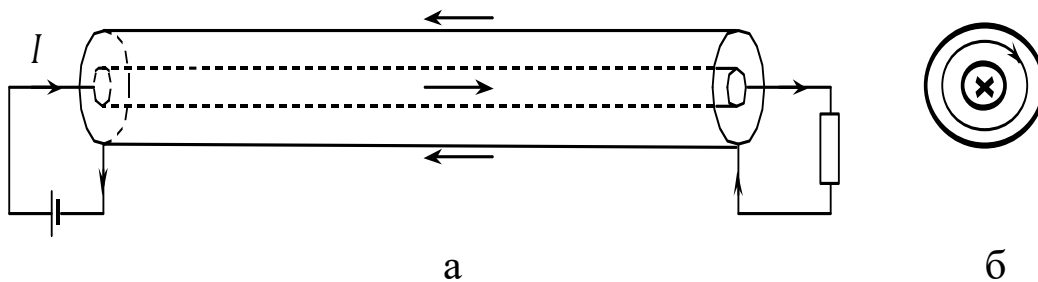


Рис. 3.27

всередині кабелю, в проміжку між внутрішнім і зовнішнім дротами. Одна з ліній магнітної індукції зображена на рис. 3.27, б.

Візьмемо відрізок коаксіального кабелю завдовжки l , внутрішній дріт якого має радіус R_1 , а зовнішній R_2 . Обчислимо його індуктивність, скориставшись формулою $\Phi = LI$. Знайдемо магнітний потік через осьовий переріз кабелю (рис. 3.28). На відстані r від осі кабелю

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (R_1 \leq r \leq R_2)$$

(див. формулу (3.9)).

Формула для потоку вектора \vec{B} крізь нескінченно малий майданчик шириною dr і площею $dS = l dr$, показаний на рис. 3.28 штрихуванням, паралельно осі кабелю і віддалений від неї на відстань, має вигляд

$$d\Phi = B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{l dr}{r}.$$

Інтегруючи по r в межах від R_1 до R_2 , отримаємо

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \cdot I.$$

Оскільки $\Phi = LI$, маємо

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (3.39)$$

Індуктивність коаксіального кабелю, а отже, і його індуктивний опір, пропорційні довжині кабелю і залежать від відношення радіусів його зовнішнього і внутрішнього дротів. Для

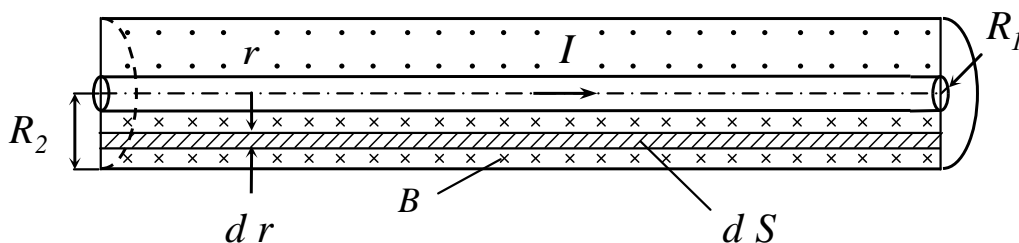


Рис. 3.28

того, щоб індуктивний опір ланцюга був невеликий, слід використовувати кабель, у якого відношення цих радіусів близьке до одиниці.

§ 3.16. Вихрові струми або струми Фуко. Скін-ефект

Якщо масивний провідник помістити в змінне магнітне поле, то в цьому провіднику завдяки явищу електромагнітної індукції виникають вихрові індукційні струми, що називаються *струмами Фуко*.

Вихрові струми виникають також при русі масивного провідника в постійному, але неоднорідному в просторі магнітному полі. Згідно з правилом Ленца, *струми Фуко мають такий напрямок, що діюча на них в магнітному полі сила Ампера гальмує рух провідника*. Маятник у вигляді суцільної металеві пластинки з немагнітного матеріалу, що здійснює коливання між полюсами електромагніту (рис. 3.29), різко зупиняється при увімкненні магнітного поля.

Струми Фуко знаходять застосування у вакуумній техніці для прогрівання металевих частин приладів, що знаходяться всередині відкачуваної посудини, при витяганні з їх поверхні залишкових газів. Виділення тепла при протіканні в провіднику вихрових струмів використовується в

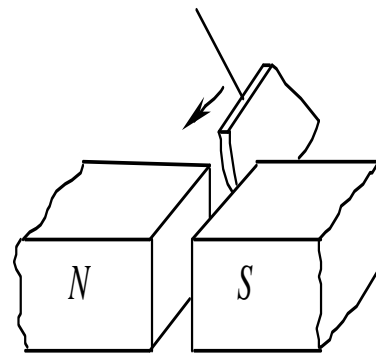


Рис. 3.29

електрометалургії для плавлення металів з метою отримання високоякісних сплавів. Метал, що розплавлюється, розміщують всередині тороїда, по обмотці якого пропускають змінний електричний струм. Гальмуючу дію магнітного поля використовують для пристрою магнітних заспокоювачів (демпферів) в гальванометрах, сейсмографах та інших приладах.

Проте у багатьох випадках нагрівання, що викликається струмами Фуко, виявляється шкідливим і з ним доводиться боротися. Сердечники трансформаторів, ротори електродвигунів набирають з окремих залізних пластин, розділених шарами ізолятора, що перешкоджає розвитку великих індукційних струмів, а самі пластини виготовляють зі сплавів, що мають високий питомий опір.

Вихрові струми можуть виникати в провіднику під дією змінного магнітного поля, створеного змінним струмом, що протікає в самому провіднику. Щільність струму всередині провідника при цьому виявляється нижчою, ніж біля його поверхні. Змінний електричний струм високої частоти повністю витісняється з об'єму провідника на його поверхню. Це явище носить назву *скін-ефекту* (від англійського слова *skin* – шкіра).

Покажемо, як виникає скін-ефект. Розглянемо циліндричний провідник (рис. 3.30), по якому тече змінний струм $I(t) = I_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$, графік якого наведений на рис. 3.31. Нехай у даний момент струм тече, як показано на рис. 3.30, тобто зліва направо і зростає (ділянка *ab* на рис. 3.31). На рис. 3.30 зображена одна з ліній індукції магнітного поля, створеного цим струмом, – коло з центром на осі циліндра. Подумки виділимо всередині провідника контур *L* в площині рисунка, що охоплює цю лінію. Оскільки магнітне поле, що пронизує контур *L*, зростає, індукційний струм $i_{\text{інд}}$ в контурі спрямований проти годинникової стрілки.

Поблизу осі провідника індукційний струм спрямований протилежно основному струму *I*, а біля поверхні провідника – в ту ж сторону. Тому сума струмів $I + i_{\text{інд}}$ біля поверхні провідника більша, ніж поблизу його осі.

У наступні чверть періоду (ділянка *bc* на рис. 3.31) струм *I* зменшується й індукційний струм повинен тепер збігатися з ним за напрямком. Але оскільки основний струм *I* поблизу осі провідника частково компенсується індукційним струмом, створене ним магнітне поле \vec{B} всередині провідника невелике.

Отже, індукційний струм $i_{\text{інд}}$ теж буде замалий і не зможе змінити загальної картини розподілу струмів по перерізу дроту.

У другому напівперіоді зміни струму I (ділянка cde на рис. 3.31) всі розглянуті величини – основний струм I , індукція поля B , індукційний струм $i_{\text{інд}}$ – мають протилежні напрямки, так що знову відбуватиметься послаблення струму біля осі провідника і посилення – біля його поверхні.

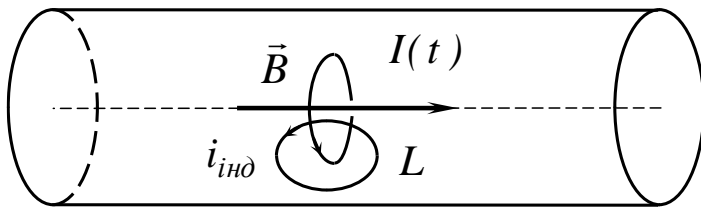


Рис. 3.30

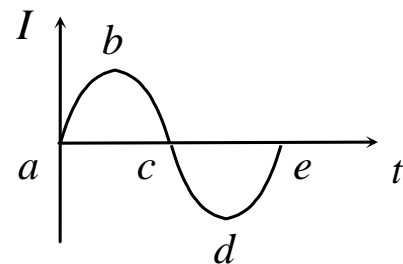


Рис. 3.31

Зі збільшенням частоти сила індукційного струму зростає настільки, що він повністю компенсує основний струм усередині провідника. У результаті виявляється, що *високочастотний струм протікає тільки по тонкому поверхневому шару провідника*. Опір провідника змінному струму більший, ніж постійному, оскільки внутрішня частина провідника не бере участь в електропровідності. Тому провідники, по яких пропускають струми високої частоти, виготовляють порожнистими, у вигляді трубок.

Скін-ефект також знаходить практичне застосування. Наприклад, для збільшення твердості поверхні зубчатих шестерень її нагрівають струмами високої частоти, а потім швидко охолоджують у маслі. У результаті поверхня стає твердою і протистоїть зносу, а сама шестерня залишається пластичною і може протистояти ударам.

§ 3.17. Електричний струм при замиканні і розмиканні ланцюга, що містить індуктивність

Явище самоіндукції можна спостерігати на простому досліді: при підключенні до джерела ЕРС лампи розжарювання і

послідовно з'єднаної з нею котушки (рис. 3.32) лампа спалахує не миттєво, а протягом деякого часу, тим більшого, чим більша індуктивність котушки. Це пов'язано з виникненням в котушці ЕРС самоіндукції, яка перешкоджає наростанню струму. У момент відключення джерела напрямок ЕРС самоіндукції збігається з напрямком ЕРС джерела і лампа на мить спалахує яскравішим світлом.

Розглянемо це явище детальніше. Скористаємося схемою, зображеною на рис. 3.33. При підключенні джерела струму (перемикач Π переводиться в положення 1) наростання струму внаслідок наявності в ланцюгу індуктивності L відбувається поступово, оскільки разом з ЕРС джерела ε діє зворотна за

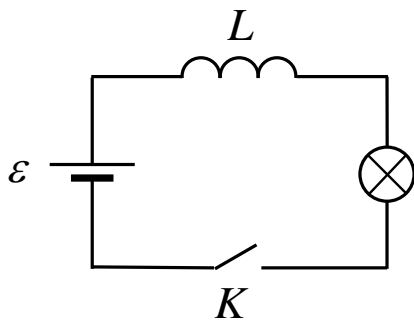


Рис. 3.32

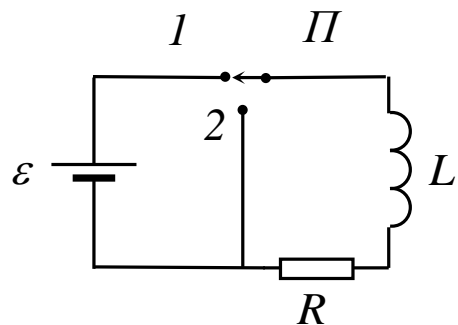


Рис. 3.33

напрямком електрорушійна сила самоіндукції (3.36). За законом Ома струм в ланцюзі

$$I = \frac{\varepsilon + \varepsilon_c}{R} = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{L}{R} \cdot \frac{dI}{dt},$$

де R – опір ланцюга.

Змінні I і t в цьому диференціальному рівнянні можна розділити. Позначивши $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$, отримаємо

$$\frac{dI}{I_0 - I} = \frac{R}{L} dt.$$

Після інтегрування маємо

$$-\ln(I_0 - I) = \frac{R}{L}t + \ln C,$$

де C – константа інтегрування.

Оскільки при $t=0$ сила струму $I=0$, то $\ln C = -\ln I_0$. Після потенціювання одержимо формулу, що виражає закон наростання струму:

$$I(t) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \quad (3.40)$$

З неї випливає, що I_0 – сила постійного струму, який протікає в ланцюзі після завершення перехідних процесів, тобто при $t \rightarrow \infty$.

При розмиканні ланцюга (перемикач Π в положенні 2) спостерігається плавне падіння струму. За законом Ома

$$I = \frac{\varepsilon_c}{R} = -\frac{L}{R} \cdot \frac{dI}{dt}$$

Розділяючи змінні та інтегруючи за початковою умовою $I(0) = I_0$, отримаємо закон спадання струму:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (3.41)$$

На рис. 3.34 наведені графіки залежності струму від часу при замиканні і розмиканні ланцюга при двох значеннях індуктивності. Графіки прояснюють сенс індуктивності як міри

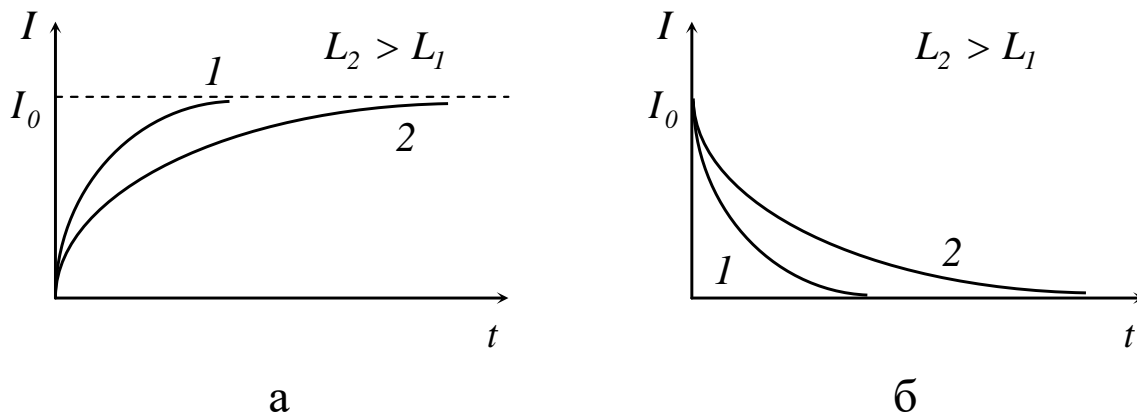


Рис.3.34

інертності електричного ланцюга по відношенню до зміни струму в ній. При даному опорі R наростання або спадання струму буде тим більш плавним, чим більше індуктивність ланцюга L .

Обчислення коефіцієнтів самоіндукції L , взагалі кажучи, викликає значні труднощі і може бути зроблене тільки для окремих простих випадків. Проте завжди є можливість визначити L безпосередньо з досліду. Для цього можна використовувати формули (3.40) і (3.41). Якщо прологарифмувати кожен з них, то логарифм відношення струмів буде лінійною функцією часу (рис. 3.35) відповідно:

$$\ln \frac{I_0}{I_0 - I} = \frac{R}{L} t \quad \text{і} \quad \ln \frac{I_0}{I} = \frac{R}{L} t.$$

Вимірявши силу струму і побудувавши графіки залежності логарифмів від часу, по тангенсу кута нахилу прямих до осі t

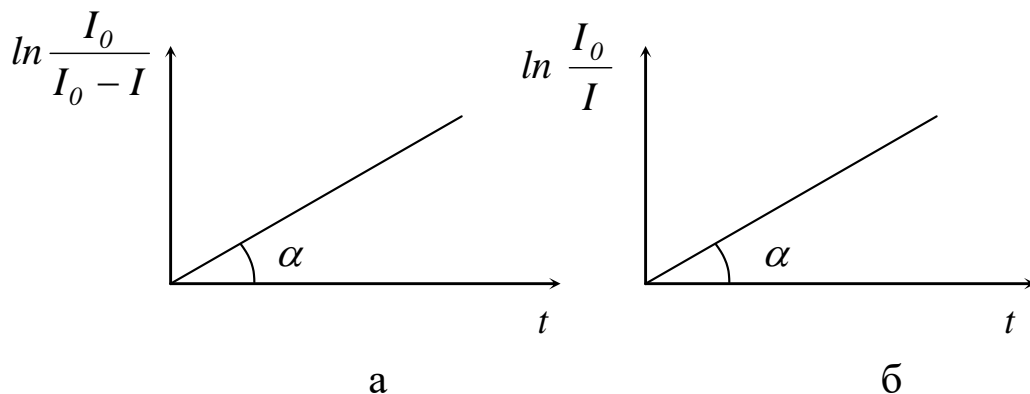


Рис. 3.35

можна знайти відношення R/L . Тоді, знаючи R , можна знайти індуктивність L .

§ 3.18. Енергія магнітного поля струму. Об'ємна густина енергії

При замиканні ланцюга, в якому є котушка індуктивності, струм у ланцюгу зростає плавно, при розмиканні ланцюга — плавно спадає. Робота джерела струму в першому випадку

частково йде на створення в котушці магнітного поля, енергія якого при розмиканні ланцюга витрачається на підтримку струму. Знайдемо енергію магнітного поля.

Потужність, що витрачається джерелом струму на подолання ЕРС самоіндукції $P_c = I \varepsilon_c$. Оскільки по модулю $\varepsilon_c = L \frac{dI}{dt}$, робота, що здійснюється джерелом за час dt , дорівнює

$$\delta A = P_c dt = LI \frac{dI}{dt} dt = LI dI.$$

Енергія магнітного поля котушки індуктивністю L дорівнює роботі джерела, виконаної ним за час встановлення стаціонарного значення струму I , тобто інтегралу від $P_c dt$:

$$W_m = \int_0^{\infty} P_c dt = L \int_0^I I dI = \frac{LI^2}{2}. \quad (3.42)$$

Виразимо енергію магнітного поля через індукцію магнітного поля B . Візьмемо довгий соленоїд об'ємом V , в якому магнітне поле однорідне. Індуктивність соленоїда, згідно з (3.38), $L = \mu_0 n^2 V$, а індукція поля в ньому, згідно з (3.15), $B = \mu_0 nI$, звідки $I = \frac{B}{\mu_0 n}$. Підставивши L і I в (3.42), отримаємо

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0} V.$$

Енергія магнітного поля, що запасена в одиниці об'єму, тобто *об'ємна густина енергії*, обчислюється діленням на V :

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

У разі неоднорідного поля

$$w_m = \frac{dW_m}{dV}. \quad (3.43)$$

Повну енергію магнітного поля можна знайти, проінтегрувавши w за об'ємом у тій частині простору, в якій існує магнітне поле:

$$W = \int_V w_m dV.$$

Питання для самоперевірки

1. Що є силовою характеристикою магнітного поля?
2. Яка сила діє в магнітному полі на заряд і струм?
3. Сформулюйте закон Біо–Савара–Лапласа. Як можна знайти магнітне поле, створене провідником зі струмом?
4. Зобразіть картину ліній індукції магнітного поля, створеного лінійним і круговим струмами.
5. Що називається магнітним моментом контура зі струмом?
6. Які застосування теореми про циркуляцію вектора магнітної індукції вам відомі?
7. Дайте визначення потоку вектора магнітної індукції.
8. Як вводиться одна з основних одиниць системи СІ – ампер?
9. Опишіть дію магнітного поля на замкнутий контур зі струмом.
10. Чому дорівнює робота переміщення провідника і контура зі струмом у магнітному полі?
11. На якому принципі заснована робота циклічного прискорювача заряджених частинок?
12. У чому полягає ефект Холла?
13. У чому полягає явище електромагнітної індукції, самоіндукції?
14. Сформулюйте правило Ленца.
15. Поясніть фізичний сенс коефіцієнта самоіндукції провідника.
16. Коли виникають вихрові струми Фуко?
17. Дайте пояснення скін-ефекту.
18. Запишіть формулу для об'ємної густини енергії магнітного поля і порівняйте її з аналогічною формулою для густини енергії електричного поля.

Магнітне поле в речовині

§ 3.19. Намагнічення тіл. Дослід Ейнштейна–де Гааза

При переміщенні у магнітне поле всі тіла приходять в особливий стан, що виражається зокрема в тому, що ці тіла самі починають створювати власне магнітне поле. Поява цього поля зумовлена змінами, що відбуваються в характері руху електронів в атомах або молекулах, і їх взаємною орієнтацією. Ми в цьому випадку говоримо про *намагнічення тіл*. *Магнетиками*, тобто здатними намагнічуватися в магнітному полі, є всі без винятку речовини. Проте кількісно здатність до намагнічення у різних тіл різна.

Намагнічення за своїми зовнішніми проявами нагадує поляризацію діелектриків, але за своєю природою воно глибоко відрізняється від останньої. Намагнічення пов'язане з поведінкою в магнітному полі молекулярних струмів. Електрони, що входять до складу атома, можна уявити собі такими, що обертаються навколо ядра. Рух електрона по орбіті еквівалентний маленькому круговому струму. Магнітний момент цього струму називають *орбітальним моментом* електрона. Сума таких моментів електронів, які входять до складу молекул, дає результуючий магнітний момент молекули.

Наявність у молекул магнітних моментів \vec{p}_m дає можливість пояснити намагнічення більшості речовин подібно до того, як у випадку електричного поля представлення молекул у вигляді електричних диполів з дипольними моментами \vec{p} дозволяє пояснити поляризацію діелектриків.

Гіпотезу про існування незгасаючих молекулярних струмів, що зумовлюють магнетизм речовини, висунув в 1820 році Ампер. Проте природа цих струмів до початку ХХ століття залишалася неясною. У рамках моделі атома Резерфорда–Бора струми Ампера створюються електронами, що обертаються навколо ядер атомів. Цю гіпотезу в 1915 році обґрунтували дослідним шляхом Ейнштейн і де Гааз.

Розглянемо електрон, що рухається зі швидкістю v навколо ядра атома по круговій орбіті радіусом r (рис. 3.36). Маса

електрона m , заряд $-e$. Сила замкнутого струму I_{orb} , створеного електроном на цій орбіті, дорівнює відношенню заряду електрона до періоду його обертання по орбіті T :

$$I_{orb} = \frac{e}{T}.$$

Струм, створений рухом електрона, спрямований протилежно вектору швидкості \vec{v} , оскільки заряд електрона негативний, а за напрямком струму прийнятий напрямок руху позитивних зарядів. Магнітний момент цього струму

$$p_m = I_{orb} S = \frac{\pi r^2 e}{T} = \frac{1}{2} e \omega r^2,$$

де $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – кругова частота.

Момент імпульсу електрона

$$L = m v \cdot r = m \omega \cdot r^2.$$

Відношення цих величин називається *гіромагнітним відношенням*:

$$\frac{p_m}{L} = \frac{e}{2m}. \quad (3.44)$$

Таким чином, зміна магнітного моменту $\vec{P}_m = \sum_{i=1}^N \vec{p}_{mi}$ сукупності електронів, що входять до складу атомів, спричиняє за собою зміну їх сумарного моменту імпульсу \vec{L} .

Ідея досліду Ейнштейна–де Гааза полягає ось у чому. Береться зразок якого-небудь магнетика. У стані спокою його момент імпульсу дорівнює нулю: $\vec{L}_0 = 0$. Вектор \vec{L}_0 можна представити у вигляді суми двох доданків: моменту імпульсу кристалічної решітки \vec{L}_0^{resh} і моменту імпульсу електронів

$$\vec{L}_0^{el} = \sum_{i=1}^N m r_i^2 \vec{\omega}.$$

Обидва доданки спочатку дорівнюють нулю:

$$\vec{L}_0^{resh} = \vec{L}_0^{el} = 0, \text{ отже,}$$

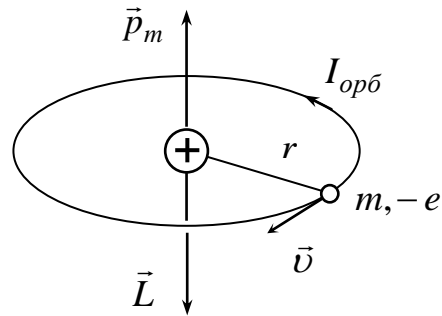


Рис. 3.36

$$\vec{L}_0^{resh} + \vec{L}_0^{el} = 0. \quad (3.45)$$

При увімкненні магнітного поля вектори магнітних моментів електронів орієнтуються вздовж вектора \vec{B} і створюють магнітний момент $\vec{P}_m = \sum_{i=1}^N \vec{p}_{mi}$. Згідно з формулою (3.44), відмінним від нуля стає і сумарний механічний момент $\vec{L}^{el} = -\frac{2m}{e} \vec{P}_m$. Вектори \vec{P}_m і \vec{L}^{el} спрямовані протилежно один одному, оскільки негативно заряджені електрони створюють струм, спрямований протилежно швидкості їх руху (див. рис.3.36).

Через закон збереження моменту імпульсу сумарний момент імпульсу кристалічної решітки та електронів (3.45) при увімкненні поля не змінюється, тобто

$$\vec{L}^{resh} + \vec{L}^{el} = \vec{L}_0^{resh} + \vec{L}_0^{el} = 0.$$

Оскільки тепер $\vec{L}^{el} \neq 0$, момент імпульсу кристалічної решітки теж стає відмінним від нуля і рівним моменту імпульсу електронів, узятому з протилежним знаком

$$\vec{L}^{resh} = -\vec{L}^{el}.$$

Виникає обертання досліджуваного зразка як цілого навколо напрямку вектора \vec{B} в бік, протилежний напрямку обертання електронів по орбітах.

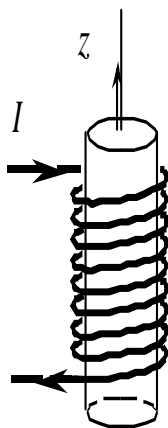


Рис. 3.37

У досліді Ейнштейна–де Гааза циліндричний зразок підвішувався всередині соленоїда вертикально на дуже тонкій пружній нитці (рис. 3.37). Після вмикання струму в соленоїді зразок починав обертатися і закручував нитку на кут, величина якого пропорційна моменту імпульсу кристалічної решітки \vec{L}^{resh} .

Результат досліді Ейнштейна–де Гааза

через слабкість ефекту вдалося спостерігати тільки на зразках із сильними магнітними властивостями – феромагнетиках. При цьому відношення (3.44) магнітного моменту до механічного виявилось вдвічі більшим. Як було з'ясовано згодом, у феромагнетиків магнітні властивості зумовлені наявністю в електрона *власного* магнітного і пов'язаного з ним *власного* механічного моменту – *спіну* (по-англійськи spin – обертатися), а для них гіромагнітне відношення у два рази перевищує те значення, яке ми отримали, розглядаючи рух електрона по орбіті навколо ядра атома. Поняття спіну електрона вводиться у *квантовій механіці*, яка буде розглядатися у наступних розділах курсу.

- 1) Згідно із сучасними уявленнями, магнетизм речовини зумовлений трьома причинами:
- 2) орбітальним рухом електронів в атомах або молекулах;
- 3) наявністю в електрона власного магнітного моменту;
- 4) наявністю магнітних моментів у ядер атомів.

Магнетизм ядер атомів дуже слабкий і проявляє себе тільки при температурах поблизу абсолютного нуля.

§ 3.20. Вектор намагніченості. Напруженість магнітного поля струму

Речовина, розміщена у зовнішньому магнітному полі, намагнічується. У ній виникає переважаюча орієнтація магнітних моментів молекул, що підсилює або послаблює зовнішнє поле.

Кількісною характеристикою намагніченості речовини служить *вектор намагніченості*. Він дорівнює векторній сумі магнітних моментів молекул \vec{p}_{mi} , що знаходяться в одиниці об'єму речовини:

$$\vec{P}_m = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_{mi} . \quad (3.46)$$

Ця формула справедлива у разі однорідного магнітного поля, яке створюється всередині довгого соленоїда. Вектор \vec{P}_m в цьому випадку має постійне значення в будь-якій точці далеко від його кінців.

Виразимо вектор намагніченості \vec{P}_m через густину мікрострумів. Візьмемо зразок речовини у вигляді циліндра, вісь якого спрямуємо вздовж зовнішнього поля \vec{B}_0 (рис. 3.38,а). У намагніченому зразку площини мікрострумів перпендикулярні вектору \vec{B}_0 . Як видно з рис. 3.38,б, мікроструми всередині зразка компенсують один один. На поверхні циліндра залишається струм, створений цими ж мікрострумами, що не компенсується. Його лінійна густина, тобто струм, що припадає на одиницю довжини зразка l :

$$I_0 = \frac{I^{\text{мікро}}}{l}.$$

Магнітне поле в речовині \vec{B} складається із зовнішнього поля \vec{B}_0 і поля \vec{B}' , створеного мікрострумами:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \quad (3.47)$$

Індукція поля мікрострумів \vec{B}' виражається через лінійну густину мікрострумів I_0 аналогічно індукції магнітного поля соленоїда (див. формулу (3.15)):

$$B' = \mu_0 \frac{I^{\text{мікро}}}{l} = \mu_0 I_0. \quad (3.48)$$

Оскільки магнітний момент, створений мікрострумами, дорівнює добутку сили мікрострумів $I^{\text{мікро}}$ на площу поперечного перерізу циліндра S , а об'єм циліндра $V = lS$, згідно з (3.46), маємо

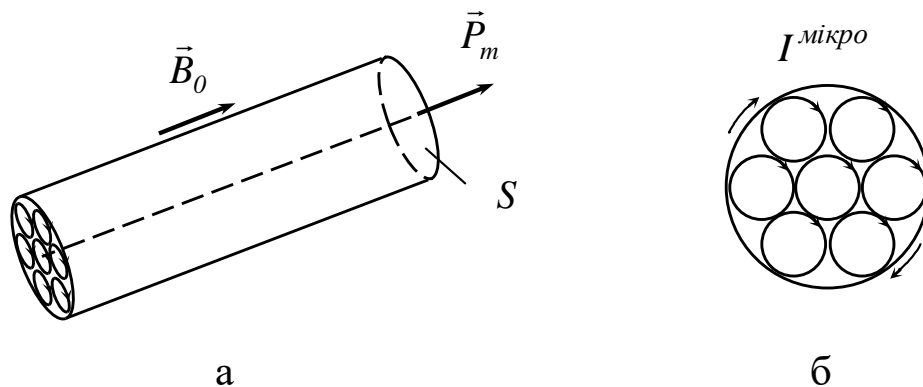


Рис. 3.38

$$P_m = \frac{I}{V} I^{\text{мікро}} \cdot S = \frac{I}{V} I_0 \cdot l S = I_0. \quad (3.49)$$

Вектор намагніченості чисельно дорівнює силі поверхневого мікроструму, що припадає на одиницю довжини магнетика циліндричної форми, розміщеного у магнітному полі.

Формули (3.48) і (3.49) дозволяють записати (3.47) у вигляді

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{P}_m. \quad (3.50)$$

Права частина цієї рівності – сума двох величин різної природи – індукції поля у вакуумі \vec{B}_0 і сумарного магнітного моменту молекул речовини \vec{P}_m . Щоб знайти \vec{B} , потрібно зв'язати \vec{B}_0 і \vec{P}_m ще одним рівнянням. З досліду відомо, що для переважної більшості речовин зі слабкими магнітними властивостями (пара- і діамagnetиків) вектор намагніченості \vec{P}_m пропорційний індукції магнітного поля \vec{B} , яку в цьому випадку можна прийняти рівною індукції магнітного поля \vec{B}_0 у вакуумі. Зв'язок між ними виражається формулою

$$\vec{P}_m = \frac{I}{\mu_0} \chi \vec{B}_0 = \chi \vec{H}_0, \quad (3.51)$$

Коефіцієнт пропорційності χ називається *магнітною сприйнятливістю* речовини, а відношення $\vec{B}_0 / \mu_0 = \vec{H}_0$ – *напруженістю* магнітного поля у вакуумі.

Підставивши (3.51) в (3.50), отримаємо

$$\vec{B} = (1 + \chi) \vec{B}_0 = \mu \vec{B}_0 = \mu \mu_0 \vec{H}_0, \quad (3.52)$$

де

$$\mu = 1 + \chi$$

– *магнітна проникність* речовини.

Зв'язок між індукцією магнітного поля \vec{B} і напруженістю \vec{H} в речовині вводить співвідношенням

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}. \quad (3.53)$$

Порівнюючи його з попереднім, отримаємо, що напруженість магнітного поля в речовині збігається з напруженістю магнітного поля у вакуумі:

$$\vec{H} = \vec{H}_0.$$

Це відбувається у разі, коли об'єм, що займає речовина, обмежений лініями напруженості зовнішнього поля \vec{H}_0 або коли речовина займає весь простір, де магнітне поле відмінне від нуля.

Напруженість \vec{H} – допоміжна величина, що характеризує магнітне поле, створене *макрострумами*, тобто струмами, що протікають по провіднику. Напруженість магнітного поля відіграє в магнетизмі ту ж роль, що й індукція електричного поля \vec{D} в електростатиці.

Як видно з рівняння (3.52), *магнітна проникність* показує, у скільки разів магнітне поле в речовині відрізняється від магнітного поля у вакуумі:

$$\mu = \frac{B}{B_0}.$$

На відміну від діелектричної проникності речовини, магнітна проникність може бути як більше, так і менше одиниці.

§ 3.21. Теорема про циркуляцію вектора напруженості магнітного поля в речовині

Розглянемо довгий соленоїд, заповнений речовиною з магнітною проникністю μ (рис. 3.39). Виберемо контур L у вигляді прямокутника шириною l і застосуємо теорему про циркуляцію вектора магнітної індукції (3.14). Згідно з цією теоремою, в праву частину рівняння (3.14) слід додати доданок, що враховує мікроструми, що течуть по поверхні магнетика і пронизують контур інтегрування:

$$\oint_L (\vec{B} d\vec{l}) = \mu_0 \sum_{k=1}^N I_k + \mu_0 \cdot I_0 l, \quad (3.54)$$

де I_0 – лінійна густина мікрострумів.

Згідно з формулою (3.49), цей доданок можна представити у вигляді

$$\mu_0 \cdot I_0 l = \mu_0 \oint_L (\vec{P}_m d\vec{l}),$$

оскільки $I_0 = P_m$, напрямки векторів \vec{P}_m і $d\vec{l}$ на відрізку ab контура L збігаються, через що $P_m dl = (\vec{P}_m d\vec{l})$, а інтеграли від $(\vec{P}_m d\vec{l})$ по трьох інших сторонах прямокутного контура $abcd$ дорівнюють нулю (див. § 3.6). Перенесемо цей доданок в ліву частину рівняння і скористаємося формулою (3.50). Тоді

$$\oint_L (\vec{B} - \mu_0 \vec{P}_m) d\vec{l} = \oint_L (\vec{B}_0 d\vec{l}) = \mu_0 \sum_{k=1}^N I_k.$$

Розділивши обидві частини на μ_0 і враховуючи, що $\vec{H} = \vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$, остаточно

отримаємо

$$\oint_L (\vec{H} d\vec{l}) = \sum_{k=1}^N I_k. \quad (3.55)$$

Ця формула виражає теорему про циркуляцію вектора напруженості магнітного поля в речовині, що також називається *законом повного струму*:

Циркуляція вектора напруженості магнітного поля по довільному замкнутому контуру дорівнює алгебраїчній сумі струмів, що охоплюються цим контуром.

Застосовуючи теорему до довгого соленоїда, подібно до того, як це було зроблено в § 3.6, знайдемо напруженість його магнітного поля

$$H = nI, \quad (3.56)$$

де $n = \frac{N}{l}$ – лінійна густина числа витків соленоїда.

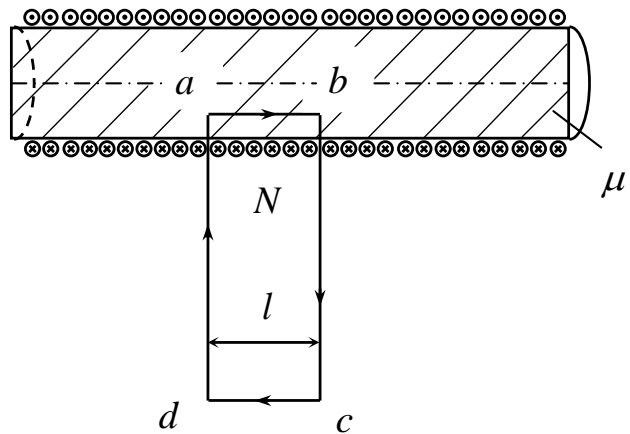


Рис. 3.39

§ 3.22. Типи магнетиків: діа-, пара- і феромагнетики. Природа діамагнетизму

Магнітні властивості різних речовин набагато різноманітніші, ніж електричні. Тоді як діелектрична проникність речовини ε завжди більше одиниці, магнітна проникність μ може бути як більше, так і менше одиниці. Речовини, у яких $\mu < 1$, називаються *діамагнетиками*, а речовини з $\mu > 1$ – *парамагнетиками*. Оскільки магнітна сприйнятливість $\chi = \mu - 1$, то у парамагнетиків χ позитивна ($\chi > 0$), а у діамагнетиків – негативна ($\chi < 0$).

Переважає більшість речовин проявляють свої магнітні властивості дуже слабо і мають магнітну сприйнятливість χ в межах від 10^{-6} до 10^{-3} одиниць ($\chi = 10^{-6} \dots 10^{-3}$). До парамагнетиків відносяться, наприклад, кисень, алюміній, платина; до діамагнетиків – срібло, вісмут, вода, вуглекислий газ, азот.

Разом з діа- і парамагнетиками є речовини, здатні намагнічуватися дуже сильно. Вони називаються *феромагнетиками*. Магнітна проникність у них складає сотні і тисячі одиниць, а у спеціально оброблених феромагнетиків досягає мільйона. Свою назву вони отримали від латинської назви основного представника цих речовин – заліза (ferrum). До феромагнетиків належать залізо, нікель, кобальт, гадолій і їх сплави. Крім того, існує безліч сплавів немагнітних речовин, що проявляють сильні магнітні властивості (MnO, NiO, CaO, MnF₂, KMnF₃ і ін.).

Приналежність речовини до того або іншого типу магнетиків легко визначити дослідним шляхом. Оскільки вектор намагніченості речовини $\vec{P}_m = \chi \vec{H}$, в діамагнетиках він спрямований проти зовнішнього поля, в пара- і феромагнетиках – по полю. У неоднорідному полі діамагнетики виштовхуються з магнітного поля. Так, наприклад, паличка з вісмуту, розміщена між полюсами магніту, встановлюється перпендикулярно до напрямку поля.

Гіпотеза про молекулярні струми дозволяє пояснити виникнення діа- і парамагнетизму речовини. Розглянемо атом, що знаходиться у зовнішньому магнітному полі, спрямованому вздовж осі Z (рис. 3.40). Електрон, що обертається навколо ядра атома по орбіті радіусом r зі швидкістю v , має момент імпульсу $L = m v \cdot r$ і створює протилежно йому спрямований магнітний

момент $\vec{p}_m = -\frac{e}{2m} \vec{L}$ (e –

заряд, m – маса електрона).

Завдяки цьому орбіта електрона, згідно з рівнянням (3.22), підлягає дії

моменту сили $\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}_0]$.

Він прагне розташувати площину орбіти електрона

перпендикулярно вектору індукції поля \vec{B}_0 , подібно до

площини рамки зі струмом у магнітному полі (див. § 3.9).

Проте електрон на орбіті поводить

як дзига і площина його орбіти здійснюватиме

прецесію (тобто обертатиметься) навколо

напрямку магнітного поля \vec{B}_0 .

Насправді вектор моменту сили \vec{M} перпендикулярний площині,

в якій лежать вектор моменту імпульсу електрона \vec{L} і вектор \vec{B}_0 .

Оскільки $\vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$, вектор \vec{L} за час Δt отримає приріст

$\Delta \vec{L} = \vec{M} \cdot \Delta t$ і займе положення \vec{L}' , обернувшись навколо осі Z на кут $\Delta \varphi$. При цьому кут θ , який вектор \vec{L} утворює з віссю Z ,

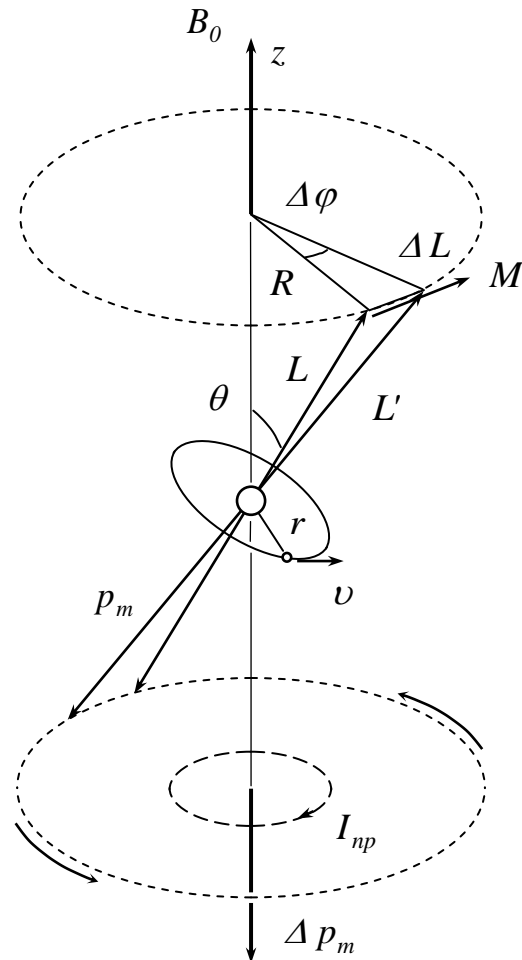


Рис. 3.40

залишиться тим самим. У наступний проміжок часу Δt картина повториться і вектор \vec{L}' знову обернеться на кут $\Delta\varphi$. Таким чином, вектор \vec{L} , а з ним і вектор магнітного моменту \vec{p}_m , обертаються навколо напрямку зовнішнього поля \vec{B}_0 , а площина орбіти електрона здійснює прецесію подібно до прецесії дзиги в полі тяжіння Землі. На рис. 3.40 напрямок прецесії позначений стрілками. Він не залежить від того, який кут складають вектори \vec{p}_m і \vec{B}_0 – гострий або тупий, як на рис. 3.40.

Рух електрона за рахунок прецесії його орбіти можна розглядати, як додатковий круговий струм I_{np} , що охоплює лінію \vec{B}_0 . Оскільки електрон заряджений негативно, напрямок цього струму протилежний напрямку прецесії і він створює додатковий магнітний момент $\Delta\vec{p}_m$, спрямований проти зовнішнього поля \vec{B}_0 . Магнітне поле в речовині \vec{B} виявляється слабшим за поле \vec{B}_0 у вакуумі, тобто існує діамагнітний ефект.

Щоб знайти магнітну сприйнятливість речовини χ , скористаємося зв'язком між вектором намагніченості \vec{P}_m та індукцією зовнішнього поля \vec{B}_0 :

$$\vec{P}_m = \frac{I}{\mu_0} \chi \vec{B}_0. \quad (3.57)$$

Вектор намагніченості дорівнює сумі магнітних моментів $\Delta\vec{p}_m$, що створюються прецесуючими атомами одиниці об'єму магнетика. Оскільки орбітальні магнітні моменти атомів \vec{p}_m зорієнтовані в просторі хаотично, проекції додаткових магнітних моментів $\Delta\vec{p}_m$ на напрямок зовнішнього магнітного поля \vec{B}_0 (вісь Z) мають різні значення. Тому, щоб знайти \vec{P}_m , потрібно взяти середнє по всіх атомах значення $\overline{\Delta p_{mz}}$ цієї проекції і помножити його на число атомів в одиниці об'єму $n = N/V$. Тоді

$$P_{mz} = n \overline{\Delta p_{mz}}. \quad (3.58)$$

Середнє значення магнітного моменту, що виникає в результаті прецесії орбіти електрона, можна знайти, помноживши силу струму прецесії I_{np} на середнє значення проекції площі орбіти електрона $\overline{S_{\perp}}$ на перпендикулярну до магнітного поля площину:

$$\overline{\Delta p_{mz}} = I_{np} \overline{S_{\perp}}.$$

Струм прецесії

$$I_{np} = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi} \Omega,$$

де T – період, а Ω – кутова швидкість прецесії орбіти електрона.

Знайдемо Ω . На рис. 3.40 $\Delta L = R \cdot \Delta\varphi = R \cdot \Omega \Delta t$. Але $R = L \cdot \sin\theta$ тому

$$\Delta L = L \cdot \Omega \sin\theta \Delta t.$$

З іншого боку, як впливає з формули (3.22),

$$\Delta L = M \cdot \Delta t = p_m B_0 \sin\theta \Delta t.$$

Прирівнюючи праві частини і скорочуючи $\sin\theta \Delta t$, маємо $L\Omega = p_m B_0$.

Згідно з рівнянням (3.44), $\frac{p_m}{L} = \frac{e}{2m}$ (m – маса, e – заряд електрона). Тому

$$\Omega = \frac{e}{2m} B_0.$$

Підставляючи Ω , I_{np} , $\overline{\Delta p_{mz}}$ в (3.58), враховуючи (3.57) і те, що вектори \vec{p}_m і \vec{B}_0 спрямовані протилежно один одному (знак “мінус”), отримаємо магнітну сприйнятливість діамагнетика:

$$\chi_{dia} = -\mu_0 \frac{e^2 n}{4\pi m} \overline{S_{\perp}}.$$

Виразимо середнє значення площі орбіти $\overline{S_{\perp}}$ через її радіус. Середнє значення квадрата радіуса орбіти електрона, що

обертається в просторі навколо ядра атома $\overline{r^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2} + \overline{z^2}$. Оскільки всі напрямки в просторі рівноправні, середні значення квадратів координат $\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = \overline{r^2} / 3$. Тоді площа орбіти $\overline{S_{\perp}} = \pi(\overline{x^2} + \overline{y^2}) = \frac{2}{3} \pi \overline{r^2}$. Підставляючи цей вираз в попередню формулу, отримаємо

$$\chi_{dia} = -\mu_0 \frac{ne^2}{6m} \overline{r^2}. \quad (3.59)$$

Магнітна проникність

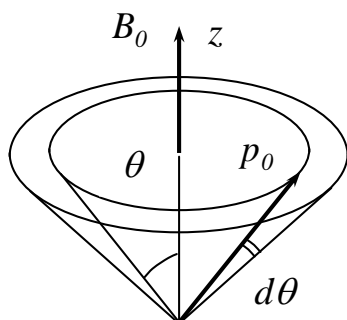
$$\mu = 1 - \mu_0 \frac{ne^2}{6m} \overline{r^2}.$$

Магнітна сприйнятливість, а з нею і магнітна проникність діамагнетику, не залежать ні від напруженості зовнішнього поля, ні від температури, що підтверджується дослідом.

Діамагнетиками є речовини, у яких сумарний магнітний момент електронів, що входять до складу атомів, рівний нулю. Діамагнетизм властивий всім без винятку речовинам, оскільки прецесія орбіт електронів в атомах або молекулах виникає завжди, коли речовину поміщають в магнітне поле. Проте у ряді речовин переважають інші ефекти, що приводять до виникнення пара- або феромагнетизму.

§ 3.23. Теорія парамагнетизму Ланжевена

Французький фізик Поль Ланжевен в 1905 році розглядав модель парамагнітної речовини у вигляді сукупності магнітних



стрілок, що не взаємодіють одна з одною, з магнітним моментом p_0 .

Кожна з них є магнітним моментом атома або молекули. Парамагнетизм зумовлений переважуючою орієнтацією цих магнітних моментів у напрямку зовнішнього магнітного поля \vec{B}_0 . Тепловий рух розорієнтує

Рис. 3.41

їх, тому вектор намагніченості \vec{P}_m залежить від температури.

Як і в попередньому параграфі, спрямуємо вісь Z вздовж \vec{B}_0 і знайдемо середнє значення проекції вектора намагніченості на вісь Z . Нехай p_0 – магнітний момент однієї молекули. Проекція вектора \vec{p}_0 на вісь Z $p_{0z} = p_0 \cos \theta$ (рис. 3.41). Щоб знайти її середнє по всіх можливих напрямках значення, скористаємося розподілом Больцмана.

Імовірність орієнтації вектора \vec{p}_0 щодо осі Z в межах кутів від θ до $\theta + d\theta$ пропорційна величині тілесного кута $d\omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ з множником $e^{-\frac{W}{kT}}$, що залежить від енергії магнітного моменту в зовнішньому полі $W = -p_0 B_0 \cos \theta$ (k – стала Больцмана, T – абсолютна температура).

Середнє значення проекції

$$\overline{p_{0z}} = p_0 \cdot \overline{\cos \theta} = p_0 \frac{\int_0^\pi \cos \theta e^{-\frac{W}{kT}} d\omega}{\int_0^\pi e^{-\frac{W}{kT}} d\omega}.$$

Виконаємо заміну змінною інтегрування, ввівши позначення $x = \cos \theta$. Тоді $dx = -\sin \theta d\theta$, а межі інтегрування по x 1 і -1 .

Позначивши $\alpha = \frac{p_0 B_0}{kT}$, маємо

$$\overline{p_{0z}} = p_0 \frac{\int_{-1}^1 x e^{\alpha x} dx}{\int_{-1}^1 e^{\alpha x} dx}.$$

Інтеграл у знаменнику $J(\alpha) = \int_{-1}^1 e^{\alpha x} dx = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{\alpha}$. Інтеграл у

чисельнику рівний похідній $J(\alpha)$ і його можна знайти диференціюванням:

$$\int_{-1}^1 x e^{\alpha x} dx = J'(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{\alpha} \right) = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{\alpha^2}.$$

Для середнього значення $\overline{p_{0z}}$ однієї молекули виходить

$$\overline{p_{0z}} = p_0 \left\{ \operatorname{cth} \alpha - \frac{1}{\alpha} \right\} = p_0 L(\alpha)$$

($\operatorname{cth} \alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}$ – котангенс гіперболічний). Функція

$L(\alpha) = \operatorname{cth} \alpha - \frac{1}{\alpha}$ називається *функцією Ланжевена*. Графік цієї функції зображений на рис. 3.42.

Проекція вектора намагніченості на напрямок зовнішнього магнітного поля \vec{B}_0

$$P_{mz} = \frac{N}{V} \overline{p_{0z}} = n p_0 L(\alpha), \quad \left(n = \frac{N}{V} \right). \quad (3.60)$$

Розглянемо поведінку парамагнетика в малих полях. Малими, очевидно, слід називати такі поля, в яких енергія взаємодії магнітного моменту молекули з полем мала $p_0 B_0$ у порівнянні з енергією kT її теплового руху. Інакше кажучи, аргумент функції Ланжевена $\alpha = \frac{p_0 B_0}{kT} \ll 1$. Тоді її можна розкласти в ряд Тейлора:

$$L(\alpha) = \operatorname{cth} \alpha - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^2}{45} + \dots - \frac{1}{\alpha} \cong \frac{\alpha}{3}.$$

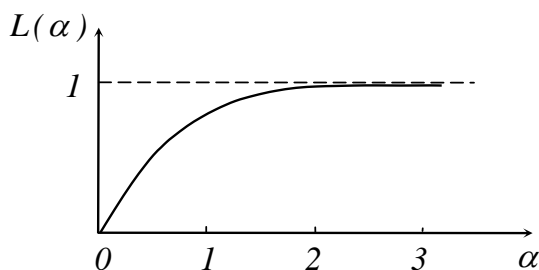


Рис. 3.42

Підставляючи цей ряд у формулу (3.60), отримуємо

$$P_{mz} = \frac{n p_0^2 B_0}{3kT}.$$

Порівнюючи цей вираз з (3.57), знайдемо магнітну сприйнятливість

$$\chi_{\text{пар}} = \mu_0 \frac{n p_0^2}{3kT}. \quad (3.61)$$

Ця формула узгоджується з відомим експериментальним законом, відкритим П'єром Кюрі в 1895 році:

$$\chi_{\text{пар}} = \frac{C}{T}, \quad (3.62)$$

де C – константа, що характеризує дану речовину.

Наприклад, для алюмінію величина $C = \mu_0 \frac{n p_0^2}{3k} \approx 0,3 \text{ K}$, так що при кімнатній температурі ($T = 300 \text{ K}$) магнітна сприйнятливість $\chi_{\text{пар}}$ складає приблизно 10^{-3} одиниць. Намагніченість парамагнетика при кімнатній температурі дуже мала навіть при тих значеннях індукції магнітного поля B_0 , які досяжні в даний час в земних умовах.

Значної намагніченості можна досягти при низьких температурах ($T \approx 1 \text{ K}$), оскільки в цьому випадку магнітна сприйнятливість $\chi_{\text{пар}}$ на два порядки більше ($\chi_{\text{пар}} \approx 0,1$) і магнітне поле вже не можна вважати малим.

Сильно намагнічені парамагнетики використовують для охолодження речовини до дуже низьких температур. Якщо парамагнітну речовину помістити в магнітне поле, охолодити відомими методами отримання низьких температур до температури в декілька кельвінів, теплоізолювати, а потім магнітне поле вимкнути, розмагнічування парамагнетика відбудеться за рахунок теплової енергії, що залишається в ньому. В результаті температура речовини ще більше знизиться. Цей метод отримання наднизьких температур називається методом адіабатичного розмагнічування. Таким шляхом можна досягти температури $T \approx 0,01 \text{ K}$.

Наступний крок у напрямку зниження температури можна здійснити, застосувавши розмагнічування ядерних магнітних моментів. Величини ядерних магнітних моментів атомів у декілька тисяч разів менші, ніж електронних, тобто відношення

$\frac{p_{яд} B_0}{kT}$, а з ним і магнітна сприйнятливість ядер атомів, дуже малі навіть при температурах в декілька кельвінів ($p_{яд}$ – магнітний момент ядра). Тому для істотного намагнічення ядер необхідна початкова температура $T \approx 10^{-2} K$. При розмагнічуванні міді з такою початковою температурою вдалося охолодити речовину до наднизької температури $10^{-8} K$.

§ 3.24. Властивості феромагнетиків. Гістерезис

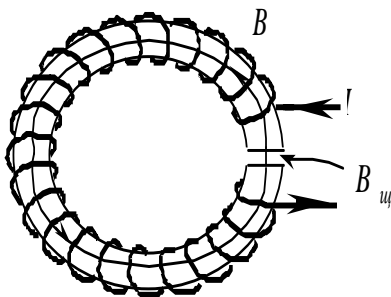
Феромагнетики – сильномагнітні речовини, тобто магнітна проникність μ у них набагато більша одиниці. Особливостями феромагнетиків є:

- 1) збереження намагніченості після того, як поле, що намагнічує, вимикається;
- 2) магнітна проникність μ – величина не постійна, а залежить від напруженості поля H , що намагнічує;
- 3) наявність точки Кюрі (див. нижче).

Залежність намагнічення заліза від напруженості зовнішнього поля вперше була досліджена російським фізиком О.Г.Столетовим у 1872 році.

Покажемо, як можна експериментально досліджувати магнітні властивості феромагнетиків. Візьмемо тороїдальну котушку, всередину якої помістимо сердечник з досліджуваного феромагнітного матеріалу. Магнітне поле \vec{B} усередині сердечника складається з індукції зовнішнього поля \vec{B}_0 , створеного струмом в котушці, і поля \vec{B}' , що створюється молекулярними струмами:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' .$$



Якщо зробити в сердечнику вузьку поперечну щілину (рис. 3.43), то в цій щілині, через безперервність ліній магнітної індукції, поле буде таким же, як і в сердечнику:

Рис. 3.43

$$B_{щ} = B.$$

Вимірюючи поле в щілині $B_{щ}$ (наприклад, по дії на контур із струмом), ми тим самим виміряємо значення B у сердечнику. Оскільки сердечник заповнює практично весь простір, зайнятий полем (щілина в сердечнику дуже вузька), напруженість магнітного поля H в сердечнику рівна напруженості H_0 в тороїді без сердечника, а її можна обчислити за формулою (3.56). Тоді

$$H = H_0 = nI,$$

де n – густина числа витків тороїда.

Вважатимемо, що у феромагнетиків, так само як і у пара- і діамагнетиків, зв'язок між магнітною індукцією і напруженістю поля виражається формулою (3.53)

$$B = \mu_0 \mu H.$$

З неї можна знайти магнітну проникність феромагнетика:

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}.$$

Враховуючи, що $\chi = \mu - 1$, за формулою (3.51) знайдемо намагніченість:

$$P_m = \chi H = (\mu - 1)H = \frac{B}{\mu_0} - H.$$

Обчисливши напруженість H для різних значень сили струму I і вимірявши відповідні їм значення B , можна визначити залежність μ і P_m від H для даного феромагнетика.

На рис. 3.44 показана залежність намагніченості P_m від напруженості поля H . Як видно з рисунка, намагніченість спершу круто зростає, а потім залишається сталою. Подальше збільшення напруженості H не приводить до збільшення намагніченості. Це явище, відкрите О.Г.Столетовим, носить назву *магнітного насичення*. Такий

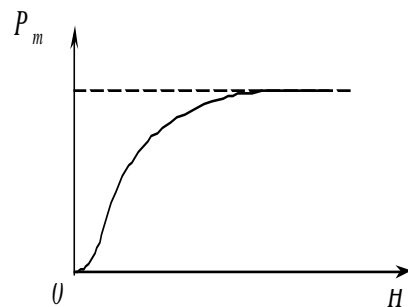


Рис. 3.44

характер залежності P_m від H можна пояснити тим, що спочатку під дією зростаючого поля, що намагнічує, збільшується ступінь орієнтації магнітних моментів атомів по полю. Починаючи з деякого значення H , коли всі магнітні моменти атомів вишикуються вздовж поля, подальше збільшення P_m припиняється, настає насичення.

Явище залежності магнітної індукції B від напруженості поля H виражається схожим графіком (рис. 3.45), який, проте, не має горизонтальної ділянки. Оскільки $B = B_0 + B'$, другий доданок $B' = \mu_0 P_m$ при насиченні залишається сталим, а перший $B_0 = \mu_0 H$ росте з H лінійно.

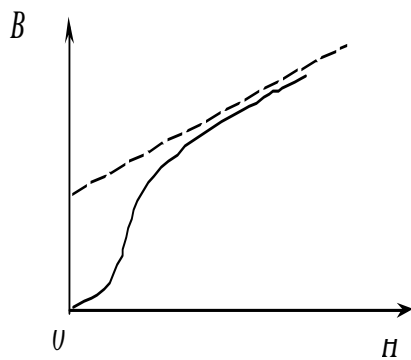


Рис. 3.45

Залежність магнітної проникності μ від H (рис. 3.46) характеризується тим, що μ зі збільшенням напруженості поля H , що намагнічує, спочатку різко зростає, а потім, досягнувши максимуму, починає спадати. При великих H магнітна проникність μ спрямована до одиниці. Насправді,

оскільки

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{B_0 + \mu_0 P_m}{\mu_0 H} = 1 + \frac{P_m}{H},$$

зі зростанням H другий доданок правої частини спрямований до нуля, оскільки намагніченість P_m при великих H , досягнувши насичення, стає сталою.

Важливою особливістю феромагнетиків є так званий *гістерезис*, що в перекладі на українську мову означає запізнення. Явище гістерезису полягає в тому, що намагніченість P_m , а отже, і магнітна індукція B , залежать не тільки від значення напруженості магнітного поля H в

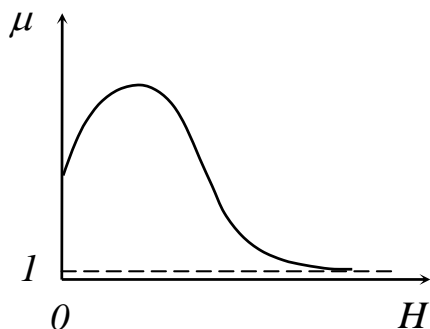


Рис. 3.46

даний момент, але і від того, яка напруженість була раніше.

На рис. 3.47 показаний графік залежності P_m від H . Гілку кривої Oa дає зростання намагніченості P_m при збільшенні поля H , коли намагнічення проводиться вперше. Точка a , в якій P_m досягає свого максимуму, відповідає насиченню. Якщо, після того, як насичення досягнуте, почати зменшувати напруженість поля H , намагніченість P_m спадатиме не по кривій aO , а по новій кривій ab ; цим же самим значенням H , що проходять у зворотному порядку, відповідають великі значення P_m . При $H = 0$ намагніченість зберігає

нерівне нулю значення P_{mr} , яке називається *залишковою намагніченістю* (відрізок Ob на рис. 3.47). Щоб викликати подальше зменшення намагніченості P_m , треба змінити напрямок поля, що намагнічує, на зворотний. При деякому значенні $H = H_c$ намагніченість зникає. Це значення H_c називається

коерцитивною силою. При ще

більшому зростанні зворотного по напрямку поля H виникає намагніченість зворотного знака. Тут може бути також досягнуте насичення (точка a' на рис. 3.47). Якщо магнітне поле H зменшувати до нуля, а потім, змінивши знак, збільшувати, залежність P_m від H відобразиться симетричною кривою $a'b'c'a$. Петля гістерезису замикається.

В результаті явища гістерезису одному й тому ж значенню намагнічуючого поля H можуть відповідати декілька значень P_m . Наприклад, значенню $H = 0$ відповідають:

1) відсутність намагніченості (точка O); 2) намагніченість, що виражається відрізком Ob (існує після намагнічення

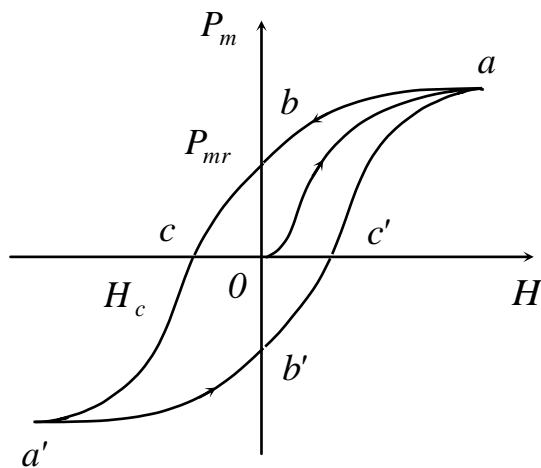


Рис. 3.47

сердечника); 3) намагніченість, що виражається відрізком Ob' (існує після перемагнічування сердечника).

Різні феромагнітні речовини дають різні криві гістерезису. “М'які” магнітні матеріали, що характеризуються малою

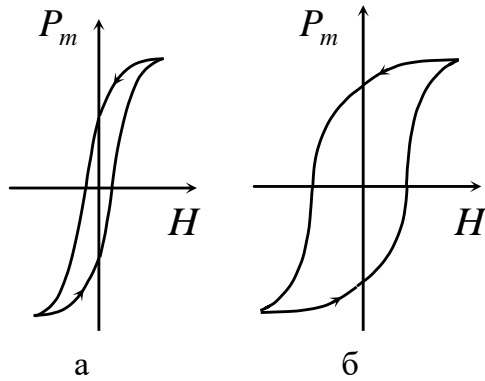


Рис. 3.48

коерцитивною силою, мають вузьку петлю гістерезису (рис. 3.48,а), а “жорсткі” – характеризуються великою коерцитивною силою і широкою петлею гістерезису (рис. 3.48,б). До перших належать м'яке залізо, кремнієва сталь, сплави заліза з нікелем (“пермалой”, що містить 78% нікелю). Ці

матеріали використовуються для виготовлення сердечників трансформаторів. До “жорстких” магнітних матеріалів належать вуглецеві і спеціальні сталі (наприклад, сплав “магніко”, що містить у своєму складі Fe, Al, Cu, Ni і Co). “Жорсткі” матеріали живляються для виготовлення постійних магнітів.

§ 3.25. Природа феромагнетизму

Магнітні властивості феромагнетиків зумовлені, як впливає з досліду Ейнштейна–де Гааза (див. § 3.19), власними (спінами) магнітними моментами електронів. Об'єм феромагнетика розпадається на безліч мікроскопічних областей, що називаються *доменами*. У межах кожного з доменів спостерігається стан магнітного насичення. Магнітні моменти доменів при відсутності зовнішнього поля H , що намагнічує, зорієнтовані в просторі хаотичним чином, так що сумарний магнітний момент феромагнетика рівний нулю (рис. 3.49). У міру збільшення H ці магнітні моменти починають орієнтуватися вздовж поля і, досягнувши магнітного насичення, стають паралельними один одному.

Межі доменів можна спостерігати під мікроскопом при невеликому збільшенні. Поверхню феромагнетика полірують і

обробляють кислотою. Якщо на цю поверхню насипати дуже дрібні залізні ошурки, вони розташуються вздовж меж доменів, роблячи їх видимими.

Існування областей спонтанного намагнічення підтверджується також стрибкоподібним ходом кривих намагнічення в слабких полях. При повільному зростанні магнітного поля намагніченість феромагнетика зростає стрибкоподібно (див. рис. 3.50). Це відбувається завдяки раптовій зміні орієнтації магнітних моментів окремих доменів.

З погляду існування доменів, явище гістерезису можна пояснити свого роду “тертям”, що заважає зміні орієнтації окремих доменів. При вимиканні поля H , що намагнічує, завдяки цьому тертю зберігається деяка переважна орієнтація доменів, що зумовлює залишкову намагніченість P_{mr} феромагнетика. Ця точка зору підтверджується тим, що струси зразка сприяють розмагнічуванню. Залишкове намагнічення зникає також при нагріванні. Для кожного феромагнетика є певна температура T_c , при якій області спонтанного намагнічення розпадаються і

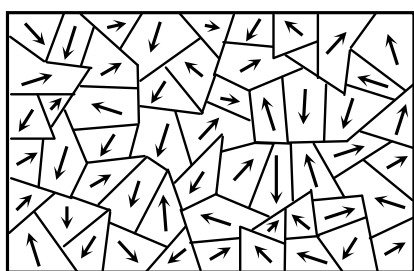


Рис. 3.49

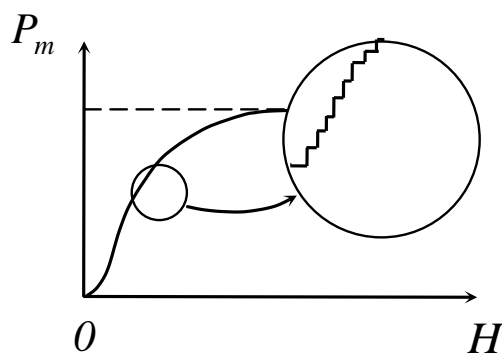


Рис. 3.50

речовина втрачає феромагнітні властивості. Ця температура називається *точкою Кюрі*. Для заліза вона дорівнює 768°C , для нікелю – 365°C . При температурі вище за точку Кюрі феромагнетик стає звичайним парамагнетиком, магнітна сприйнятливість якого підкоряється закону Кюрі-Вейсса:

$$\chi = \frac{C}{T - T_c}, \quad (T > T_c),$$

де C – стала, що характеризує даний феромагнетик.

При охолодженні феромагнетика нижче за точку Кюрі в ньому знову виникають домени.

Згідно з теорією феромагнетизму, створеною в 1928 році Я.І.Френкелем і В.Гейзенбергом, виникнення доменів – областей спонтанного намагнічення – пояснюється існуванням у кристалах феромагнетика так званих обмінних сил неелектричного походження. Ці сили примушують магнітні моменти спінів електронів орієнтуватися паралельно один одному, чим забезпечується стан магнітного насичення в межах кожного домена. Уявлення про обмінні сили, як і поняття про спін електрона, виникли в рамках створеної на початку ХХ століття квантової механіки – механіки, що описує поведінку мікрочастинок.

Питання для самоперевірки

1. Яка фізична природа магнетизму речовини? Що доводить дослід Ейнштейна–де Гааза?
2. Дайте визначення вектора намагніченості.
3. Для чого вводиться поняття напруженості магнітного поля? Поясніть її фізичний сенс.
4. Сформулюйте теорему про циркуляцію вектора напруженості магнітного поля в речовині.
5. Які типи магнетиків вам відомі?
6. Опишіть фізичне явище, що приводить до виникнення діамагнетизму речовини.
7. Як можна пояснити парамагнетизм?
8. Опишіть метод адіабатичного розмагнічування для отримання наднизьких температур.

9. Які магнітні властивості притаманні феромагнетикам? Що таке гістерезис?
10. Яка природа феромагнетизму?

Електромагнітне поле

§ 3.26. Коливальний LC -контур

Розглянемо замкнутий ланцюг, що складається з конденсатора ємністю C і котушки індуктивністю L (рис. 3.51). Такий ланцюг називається коливальним LC -контуром. Якщо надати конденсатору заряд, а потім замкнути ключ K , то конденсатор почне розряджатися і по ланцюгу потече електричний струм, що змінюється з часом. За відсутності в ланцюгу котушки індуктивності струм протікатиме до тих пір, поки потенціали обкладок конденсатора не зрівняються. За наявності ж індуктивності процес іде інакше. В мить, коли різниця потенціалів між обкладками стає рівною нулю, ЕРС самоіндукції підтримує струм і відбувається перезарядка обкладок. Після цього знову виникне струм, але вже зворотного напрямку. У результаті знову відбудеться перезарядка конденсатора. У ланцюгу, що складається з ємності і індуктивності, виникають електричні коливання. Періодично змінюватимуться заряд конденсатора q , напруга на його обкладках U і струм в ланцюгу I .

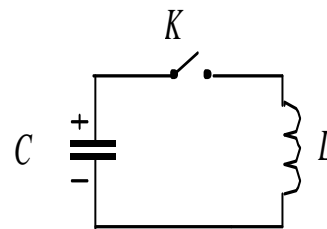


Рис. 3.51

Електричні коливання в контурі аналогічні коливанням маятника. Відхилений від положення рівноваги маятник завдяки інерції проходить положення рівноваги і відхиляється у зворотний бік (рис. 3.52). Потім він знову починає рух і повертається в початкове положення. При коливаннях маятника його потенційна енергія в крайньому лівому положенні переходить в кінетичну енергію в нижній точці, яка у свою чергу

переходить у потенційну енергію в крайньому правому положенні. Аналогічно, у коливальному контурі первинний запас енергії електричного поля зарядженого конденсатора перетвориться в енергію магнітного поля котушки зі струмом, яка потім знову перетвориться в енергію зарядженого конденсатора. На рис. 3.52 наявність електричного і магнітного полів показана пунктирними лініями та ілюструє вказану аналогію. З цього

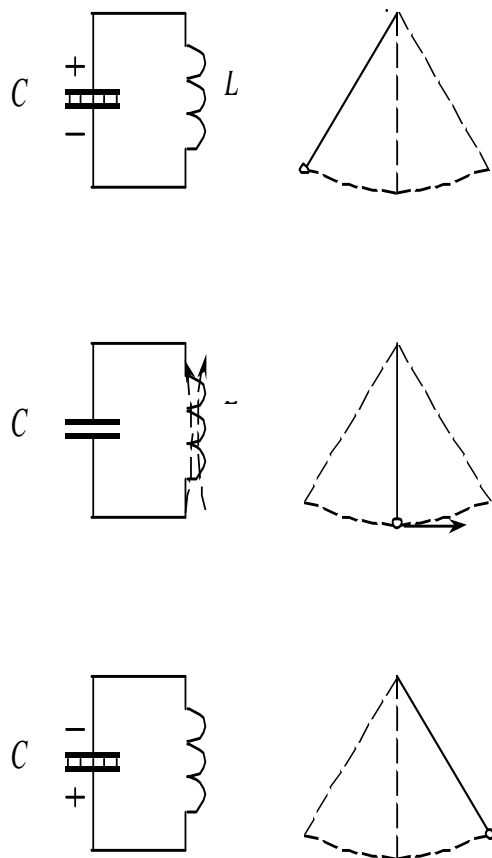


Рис. 3.52

порівняння видно, що котушка індуктивності відіграє роль інертної маси в механіці, на що вже наголошувалося вище.

Розглянемо детальніше електричні коливання, що відбуваються в LC -контурі. Нехай q – заряд одного з обкладок конденсатора. Сила струму в ланцюгу чисельно рівна швидкості його зміни з часом:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (3.63)$$

Напруга на конденсаторі U дорівнює такій, що діє в ланцюзі ЕРС самоіндукції \mathcal{E}_c (див. рис. 3.51):

$$U = -L \frac{dI}{dt}.$$

Підставляючи сюди $U = q/C$ і I з формули (3.63), а потім переносячи все в ліву частину рівняння, отримаємо

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0.$$

Розв'язуючи це диференціальне рівняння, можна знайти залежність q від часу. Перепишемо його, ввівши позначення

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (3.64)$$

Тоді

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0.$$

Це рівняння аналогічне рівнянню вільних гармонійних коливань маятника, що розглядається в механіці. Розв'язок його має вигляд

$$q(t) = q_0 \cos \omega_0 t,$$

де q_0 – початковий заряд конденсатора, ω_0 – циклічна частота.

Згідно з (3.63), струм у ланцюзі

$$I(t) = -I_0 \sin \omega_0 t = I_0 \cos \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right),$$

де $I_0 = \omega_0 q_0$ – амплітудне значення струму.

Графіки залежності від часу сили струму в ланцюзі I і заряду конденсатора q (рис. 3.53) зміщені один відносно одного на чверть періоду.

Періоди коливань заряду конденсатора і струму в ланцюзі виражаються *формулою Томсона*, яка впливає з формули (3.64):

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (3.65)$$

У реальному коливальному контурі коливання будуть затухаючими, оскільки котушка і дроти мають опір, завдяки чому запасена в контурі енергія поступово перетворюється на теплоту.

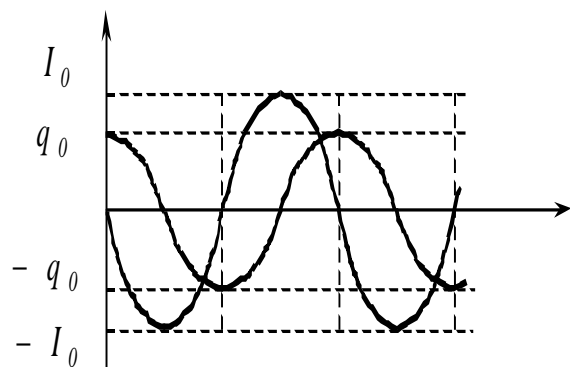


Рис. 3.53

§ 3.27. Струм зміщення

Розглянемо процес розрядки конденсатора. Візьмемо плоский повітряний конденсатор, обкладки якого мають однакові за величиною і протилежні за знаком заряди, поверхнева густина яких $\sigma = \frac{q}{S}$ (q – заряд, S – площа кожної з обкладок (рис.3.54)).

Якщо з'єднати обкладки провідником, в ланцюзі виникне короткочасний струм, який протікатиме до тих пір, поки потенціали обкладок не зрівняються. Струм у ланцюзі може існувати тільки в тому випадку, якщо ланцюг замкнутий. Конденсатор же являє собою розрив ланцюга, оскільки між його обкладками відсутні носії струму. Лінії струму, зображені на рис. 3.54 стрілками всередині обкладок конденсатора, обриваються на поверхні цих обкладок. Струм провідності, який протікає по провіднику, що сполучає обкладки, виявляється розімкненим. Цей струм можна зробити замкненим, якщо ввести поняття про *струм зміщення*.

Густина струму провідності всередині кожної з обкладок

$$j = \frac{I}{S} = \frac{1}{S} \cdot \frac{dq}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}. \quad (3.66)$$

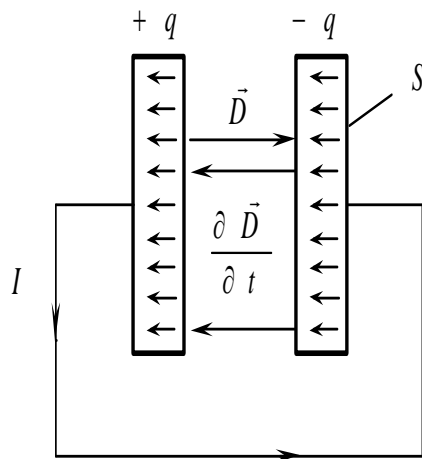


Рис. 3.54

У просторі між обкладками конденсатора існує електричне поле, індукція якого $D = \sigma$ (див. §1.20). Взавши похідні від обох частин цієї рівності, отримаємо

$$\frac{dD}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}. \quad (3.67)$$

Вектор \vec{D} спрямований від позитивної обкладки конденсатора до негативної, тобто зліва направо, вектор $\frac{d\vec{D}}{dt}$ – в протилежну

сторону, оскільки при розрядці конденсатора заряд його обкладок зменшується ($\frac{d\vec{D}}{dt} < 0$). Напрямок вектора $\frac{d\vec{D}}{dt}$ між обкладками

збігається з напрямком струму в обкладках. З формул (3.66) і (3.67) випливає рівність модулів векторів \vec{j} і $\frac{d\vec{D}}{dt}$. Таким чином, лінії густини струму \vec{j} і лінії $\frac{d\vec{D}}{dt}$ змінюють одна одну під час переходу через поверхню обкладок.

Позначимо

$$\vec{j}_{зм} = \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad (3.68)$$

Величину $\vec{j}_{зм}$ вперше ввів в розгляд Максвелл. Він назвав її *густиною струму зміщення*. Лінії струму провідності всередині провідних обкладок конденсатора безперервно переходять в лінії струму зсуву між його обкладками.

Назва “струм зміщення” виникла в результаті того, що тепер втрачено значення уявлення про те, що електростатичні сили зумовлені механічною деформацією гіпотетичного пружного середовища – ефіру. Тепер ми говоримо, що *струм зміщення – це змінне електричне поле*.

Ввівши струм зміщення, ми зробили електричний ланцюг замкнутим. Однак насправді мова йде не тільки про формальну аналогію між струмом провідності і струмом зсуву. Згідно з гіпотезою Максвелла, *струм зміщення створює в навколишньому просторі таке ж змінне магнітне поле, яке створюється еквівалентним струмом провідності*.

У діелектриці струм зміщення складається з двох істотно різних доданків. За визначенням, вектор електричної індукції $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, де \vec{E} – напруженість електричного поля, \vec{P} – вектор поляризованості. Тому

$$\vec{j}_{зм} = \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} + \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

Другий доданок тут – *густина струму поляризації*. Струмом поляризації є електричний струм, зумовлений рухом зв'язаних зарядів, молекул діелектрика, що знаходяться

всередині. Ці заряди принципово нічим не відрізняються від вільних зарядів. Тому немає нічого несподіваного в тому, що струми поляризації створюють магнітне поле. Принципово новим є твердження про те, що і та частина струму зміщення, яка виражається першим доданком $\epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$ і не пов'язана з ніяким

рухом зарядів, а зумовлена тільки зміною електричного поля в часі, також є джерелом магнітного поля. Навіть у вакуумі будь-яка зміна електричного поля в часі генерує в навколишньому просторі магнітне поле. Відкриття цієї обставини – найбільш істотний крок, зроблений Максвеллом при побудові його електродинаміки.

Гіпотеза Максвелла про струм зміщення повністю виправдалася. Як ми побачимо нижче, уявлення про струм зміщення дозволяє отримати рівняння *електромагнітної хвилі*, реальність якої в теперішній час для всіх очевидна.

§ 3.28. Рівняння Максвелла. Електромагнітне поле

До цього часу ми розглядали емпіричні закони електромагнетизму і записували рівняння, що виражають ці закони. Тепер ми запишемо ці рівняння окремо і спробуємо розібратися, які відомі і невідомі нам наслідки впливають з них. Вперше це зробив в 60-х роках XIX століття великий англійський фізик Джеймс Клерк Максвелл, тому система цих рівнянь носить його ім'я. Рівняння мають вигляд:

$$(I) \quad \oint_L (\vec{E} d\vec{l}) = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \quad (3.69a)$$

$$(II) \quad \oint_S (\vec{B} d\vec{S}) = 0, \quad (3.69b)$$

$$(III) \quad \oint_L (\vec{H} d\vec{l}) = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}, \quad (3.69b)$$

$$(IV) \oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = \int_V \rho dV. \quad (3.69г)$$

Рівняння (I) – (IV) називаються *рівняннями Максвелла в інтегральній формі*. Ми використали ті позначення фізичних величин, які нам відомі, а саме: \vec{E} і \vec{D} – відповідно вектор напруженості і вектор індукції електричного поля, \vec{H} і \vec{B} – вектор напруженості і вектор магнітної індукції, \vec{j} – вектор густини струму провідності, ρ – об'ємна густина вільних зарядів. Всі ці величини є, взагалі кажучи, функціями координат і часу. Значок \oint_L позначає інтеграл по замкнутому контуру, а \oint_S – по замкнутій поверхні, $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ і $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ – похідні за часом.

Рівняння (I) виражає *закон електромагнітної індукції Фарадея*. У лівій його частині стоїть ЕРС індукції $\varepsilon_{инд} = \oint_L (\vec{E} d\vec{l})$, а в правій – швидкість зміни магнітного потоку $\oint_S (\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}) = \frac{\partial}{\partial t} \oint_S (\vec{B} d\vec{S}) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$. З цього рівняння випливає, що змінне магнітне поле створює змінне електричне поле $\vec{E}(t)$, лінії якого замкнуті. Отже, змінне електричне поле, як і поле магнітне, є *вихровим*.

Формулюючи закон електромагнітної індукції, ми розглядали замкнутий провідний контур, в якому виникає ЕРС індукції і тече індукційний струм, якщо цей контур знаходиться в змінному магнітному полі. Максвелл припустив, що *вихрове електричне поле виникає в просторі завжди, коли є змінне магнітне поле*, а провідний контур слугує лише інструментом, який дозволяє виявити це поле.

На рис. 3.55 зображені лінії електричного поля \vec{E} , створеного змінним магнітним полем $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Рівняння (II) виражає теорему *Остроградського-Гаусса* для *магнітного поля*. Рівність нулю потоку вектора \vec{B} через замкнену поверхню, як було сказано вище, відображає замкнутість ліній магнітної індукції і відсутність у природі магнітних зарядів.

Рівняння (III) виражає *закон повного струму*. У правій його частині разом з густиною струму провідності \vec{j} присутня введена Максвеллом густина струму зсуву $\vec{j}_{зм} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Сума їх складає

густину *повного струму*

$$\vec{j}_{повн} = \vec{j} + \vec{j}_{зм}.$$

З рівняння (III) випливає, що магнітне поле породжується як струмом провідності, так і струмом зміщення, тобто змінним електричним полем (рис. 3.56).

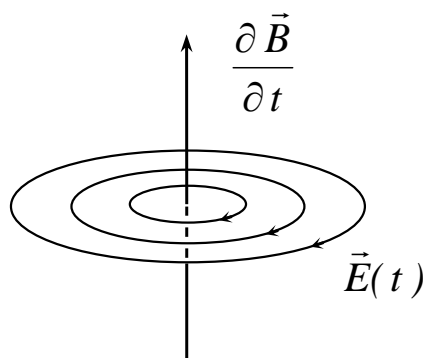


Рис. 3.55

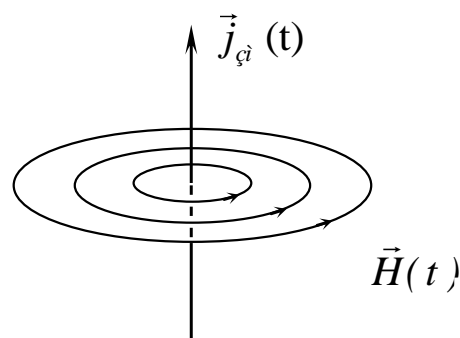


Рис. 3.56

І, нарешті, рівняння (IV) – це *теорема Остроградського-Гаусса* для електростатичного поля: вільні заряди створюють у просторі електростатичне поле індукцією \vec{D} , яка визначається об'ємною густиною вільних зарядів ρ .

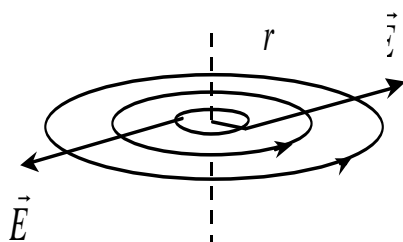


Рис. 3.57

З рівнянь Максвелла випливає існування *електромагнітного поля* – сукупності змінного електричного і змінного магнітного полів, які породжують одне одне. Електромагнітне поле є *вихровим*.

Це означає, що в просторі завжди можна знайти дві нескінченно близькі точки, в яких вектор поля має протилежні напрямки (рис. 3.57, при $r \rightarrow 0$).

Електромагнітне поле поширюється в просторі у вигляді електромагнітної хвилі зі швидкістю світла. Щоб це показати, слід записати рівняння Максвелла в диференціальній формі. Для цього нам знадобляться поняття *дивергенції* і *ротора* вектора поля, які ми введемо.

§ 3.29. Дивергенція вектора поля.

Теорема Остроградського-Гаусса про перетворення поверхневого інтеграла в об'ємний

Нехай задано поле вектора \vec{A} . Це означає, що в кожній точці простору (x, y, z) відомі три незалежні одна від одної функції $A_x(x, y, z)$, $A_y(x, y, z)$ і $A_z(x, y, z)$, названі *складовими* або *компонентами* вектора \vec{A} по осях координат, тобто

$$\vec{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}.$$

Для наочності говоритимемо про поле швидкостей $\vec{v}(x, y, z)$ деякої фіктивної рідини. З цієї точки зору легко з'ясувати сенс інтеграла по поверхні, який називається *поток* вектора через цю поверхню.

Нехай рідина протікає крізь нескінченно малий майданчик, зображений на рис. 3.58 вектором $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$ (\vec{n} – одиничний вектор зовнішньої нормалі до майданчика, dS – площа його поверхні). За час Δt через майданчик протече кількість рідини, що міститься в об'ємі косоного циліндра

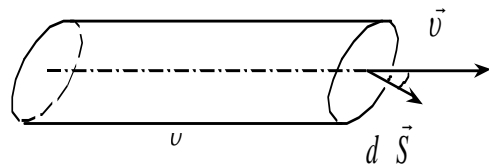


Рис. 3.58

$$\Delta V = v \Delta t \cdot dS \cos \alpha = (\vec{v} d\vec{S}) \Delta t.$$

Об'єм рідини, що протікає через майданчик dS за одиницю часу, буде $(\vec{v} d\vec{S})$, а об'єм рідини, що протікає через поверхню кінцевої величини S , дорівнює інтегралу

$$\int_S (\vec{v} d\vec{S}).$$

Його називають *поток вектора* \vec{v} через поверхню S . Таким чином, потік вектора швидкості S – це об'єм рідини, що протікає через цю поверхню за одну секунду. У загальному випадку потіком вектора \vec{A} через яку-небудь поверхню S називають інтеграл по цій поверхні від скалярного добутку ($\vec{A}d\vec{S}$):

$$\int_S (\vec{A}d\vec{S}).$$

Визначимо *дивергенцію вектора* \vec{A} як суму приватних похідних його компонент по однойменних координатах і позначимо її $div\vec{A}$:

$$div\vec{A} \stackrel{def}{=} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (3.70)$$

Теорема Остроградського–Гаусса про перетворення поверхневого інтеграла в об'ємний формулюється так: *потік вектора* \vec{A} *через довільну замкнену поверхню* S *дорівнює інтегралу дивергенції вектора за об'ємом, обмеженим цією поверхнею:*

$$\oint_S (\vec{A}d\vec{S}) = \int_V div\vec{A}dV. \quad (3.71)$$

Формула (3.71) дозволяє з'ясувати фізичний сенс дивергенції вектора. Для цього розглянемо яку-небудь точку P всередині малого об'єму ΔV , обмеженого поверхнею S . Об'єм візьмемо таким малим, щоб функцію $div\vec{A}$ в межах цього об'єму можна було вважати сталою ($div\vec{A} = const$). Тоді $div\vec{A}$ можна винести з-під знака інтеграла. Права частина (3.71) перетвориться до виду

$$\int_{\Delta V} div\vec{A}dV = div\vec{A} \cdot \Delta V.$$

З формули (3.71), спрямувавши ΔV до нуля, отримаємо

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint (\vec{A} d\vec{S})}{\Delta V},$$

тобто дивергенція вектора \vec{A} в точці P дорівнює віднесеному до одиниці об'єму потоку вектора \vec{A} через поверхню, що оточує нескінченно малий об'єм, що містить дану точку.

Якщо звернутися до фіктивної рідини, то дивергенція вектора швидкості рідини $\operatorname{div} \vec{v}$ рівна кількості рідини, що витікає з одиничного об'єму ($\Delta V = 1$) за одиницю часу. Вважаючи, що всередині цього об'єму є джерела рідини, можна сказати, що дивергенція характеризує потужність цих джерел. (У випадку, якщо $\operatorname{div} \vec{v} < 0$, рідина втікає в об'єм ΔV , тобто в ньому є стоки).

Векторні поля, у яких $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, називаються *вільними від джерел* або *вихровими*, або *соленоїдальними*, тобто *трубчастими*. Остання назва пов'язана з тією обставиною, що в полі соленоїда векторні лінії не можуть ніде ні починатися, ні закінчуватися; вони можуть іти в нескінченність або бути замкнутими. Вихровим є розглянуте вище електромагнітне поле.

§ 3.30. Ротор вектора поля. Теорема Стокса

Розглядаючи поле вектора $\vec{A}(x, y, z)$, можна ввести поняття інтеграла вектора вздовж кривої L :

$$\int_L (\vec{A} d\vec{l}).$$

Такий інтеграл назвемо *інтегралом по контуру L* . Значення підінтегральної функції беруться в точках цього контура. Вектор $d\vec{l} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$ є елемент довжини контура.

Розглянемо замкнутий контур L . Взятий по цьому контуру криволінійний інтеграл

$$\oint_L (\vec{A} d\vec{l}) = \oint_L (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \quad (3.72)$$

називається *циркуляцією вектора \vec{A}* .

Якщо контур L плоский, то напрямок позитивної нормалі до цього контура пов'язаний з напрямком обходу контура за правилом правого гвинта (рис. 3.59): при обертанні гвинта вздовж лінії L він переміщується у напрямку вектора нормалі \vec{n} .

Справедлива теорема Стокса про перетворення інтеграла по контуру в інтеграл по поверхні: *циркуляція вектора \vec{A} по довільному замкненому контуру дорівнює потоку ротора вектора \vec{A} через поверхню, обмежену даним контуром:*

$$\oint_L (\vec{A} d\vec{l}) = \int_S (\text{rot } \vec{A} d\vec{S}). \quad (3.73)$$

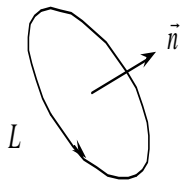


Рис. 3.59

Тут використовується нове поняття *ротора вектора*.

Ротором вектора \vec{A} називається вектор, компонентами якого є такі комбінації приватних похідних компонент вектора \vec{A} за осями координат, що ротор можна представити у вигляді визначника:

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad (3.74)$$

Розкриваючи визначник за елементами першого ряду, отримаємо компоненти ротора за осями координат. Наприклад, z -а компонента вектора $\text{rot } \vec{A}$ має вигляд

$$(\text{rot } \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

З'ясуємо сенс ротора. Для цього розглянемо поле швидкостей точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі (осі Z) з кутовою швидкістю ω (рис. 3.60). Вектор швидкості v точки M , що знаходиться від осі обертання на відстані r , розкладемо на складові вздовж осей X і Y . Як видно з рисунка,

$$v_x = -v \sin \varphi = -v \cdot \frac{y}{r} = -\omega \cdot y,$$

$$v_y = v \cos \varphi = v \cdot \frac{x}{r} = \omega \cdot x.$$

Тоді

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\omega x) - \frac{\partial}{\partial y}(-\omega y) \right] \vec{k} = 2\omega \vec{k}.$$

Таким чином, вектор $\operatorname{rot} \vec{v}$ спрямований уздовж осі обертання тіла (осі Z), а його модуль рівний подвоєній кутовій швидкості обертання:

$$|\operatorname{rot} \vec{v}| = 2\omega.$$

Поле вектора \vec{A} називається *вихровим* або *соленоїдальним*, якщо в будь-якій його точці $\operatorname{rot} \vec{A} \neq 0$.

Вектор потенційного поля, яким є, наприклад, поле електростатичне, можна представити у вигляді градієнта деякої скалярної функції – потенціалу φ (див. (1.22)). Безпосереднім обчисленням можна показати, що ротор градієнта дорівнює нулю:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0.$$

Таким чином, *поле вектора \vec{A} є потенційним, якщо $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$.*

Дивергенція ротора будь-якого вектора \vec{A} дорівнює нулю:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0,$$

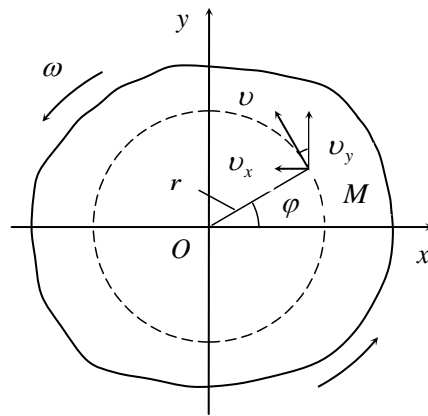


Рис. 3.60

тобто векторне поле ротора будь-якого вектора \vec{A} є вихровим або соленоїдальним (що не має джерел).

Можна знайти також ротор від ротора вектора \vec{A} . Шляхом безпосереднього обчислення неважко показати, що

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}, \quad (3.75)$$

де $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа або *лапласіан*.

§ 3.31. Рівняння Максвелла в диференціальній формі

Рівняння Максвелла (3.69) можна записати у такому вигляді, щоб функції в лівих і правих частинах цих рівнянь розглядалися в одній і тій же точці простору, тобто між ними був би локальний зв'язок. Ця форма запису рівнянь називається *диференціальною*. Для перетворення рівнянь Максвелла в диференціальну форму використаємо розглянуті вище теореми Остроградського–Гаусса і Стокса.

У рівнянні (3.69а), користуючись формулою (3.73), перетворимо лінійний інтеграл його лівої частини в інтеграл по поверхні:

$$\oint_L (\vec{E} d\vec{l}) = \int_S (\text{rot } \vec{E} d\vec{S}) = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S},$$

звідки випливає, що $\int_S (\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) d\vec{S} = 0$ і

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.76)$$

Рівняння (3.69в) аналогічним чином приведемо до вигляду

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (3.77)$$

Використовуючи формулу (3.71), ліву частину рівняння (3.69б) можна перетворити до вигляду

$$\oint_S (\vec{B} d\vec{S}) = \int_V \operatorname{div} \vec{B} dV = 0,$$

звідки

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (3.78)$$

Таким же шляхом з (3.69г) отримаємо рівняння

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (3.79)$$

Рівняння (3.76) – (3.79) дають локальний зв'язок вищезазначених величин і є *фундаментальними рівняннями*. Їх слід розглядати як *основні аксіоми електродинаміки, отримані шляхом узагальнення дослідних фактів*. Проте ці рівняння не складають ще повної системи рівнянь електромагнітного поля. Рівняння (3.76) і (3.77) – векторні, а рівняння (3.78) і (3.79) – скалярні. Якщо їх записати в координатній формі, то вийде вісім рівнянь, що зв'язують 16 величин: 15 складових векторів \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{H} , \vec{j} і скаляр ρ . Ясно, що для 16 величин восьми рівнянь недостатньо. Необхідно доповнити ці рівняння співвідношеннями, в які входять величини, що характеризують властивості середовища. Ці співвідношення називаються *матеріальними рівняннями*. Вони зв'язують змінні \vec{D} і \vec{E} , \vec{B} і \vec{H} , а також густину струму \vec{j} з напруженістю електричного поля. Ці рівняння нам відомі і мають вигляд:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad (3.80)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (3.81)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (3.82)$$

Останнє рівняння виражає закон Ома в диференціальній формі, де σ – *електропровідність* середовища.

Рівняння (3.80) – (3.82) не є фундаментальними, оскільки отримані на підставі яких-небудь моделей середовища, що більш-менш правильно описують її властивості. Ці рівняння справедливі для ізотропних середовищ, що не мають феромагнітних і сегнетоелектричних властивостей, в слабких полях, що порівняно повільно змінюються в просторі і часі.

У випадку, коли поля не змінюються з часом, система рівнянь (3.76) – (3.79) розпадається на дві пари незалежних рівнянь – рівняння електростатики:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

і рівняння магнітостатики:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}, \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Перша пара рівнянь показує, що електростатичне поле *безвихрове* або *потенційне* ($\operatorname{rot} \vec{E} = 0$), а джерелами поля вектора індукції \vec{D} слугують вільні заряди ($\operatorname{div} \vec{D} = \rho$).

З другої пари рівнянь випливає, що магнітне поле створюється електричним струмом провідності ($\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}$) і що поле це *вихрове*, тобто *не має джерел* ($\operatorname{div} \vec{B} = 0$).

§ 3.32. Плоска електромагнітна хвиля

Електромагнітне поле існує і поширюється в просторі у вигляді *електромагнітної хвилі*. Щоб показати це, запишемо рівняння Максвелла (3.76) – (3.79) для однорідного непровідного середовища з діелектричною проникністю ε і магнітною проникністю μ ($j = \rho = 0$). Тоді, з урахуванням рівнянь (3.80) і (3.81), маємо:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (3.83a)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad (3.83б)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (3.83в)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0. \quad (3.83г)$$

Як видно з цих рівнянь, напруженості електричного і магнітного полів входять в них симетрично, тобто є *рівноправними*.

Обчислимо ротор обох частин рівняння (3.83а). Згідно з формулою (3.75), з урахуванням (3.83в) і (3.83г), отримаємо рівняння для напруженості електричного поля:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\Delta \vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = -\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

звідки

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (3.84)$$

де Δ – оператор Лапласа.

Повторюючи цю ж операцію з рівнянням (3.83в) і враховуючи при цьому (3.83а) і (3.83б), отримаємо аналогічне рівняння для напруженості магнітного поля:

$$\Delta \vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (3.85)$$

Порівнюючи його з хвильовим рівнянням

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

бачимо, що рівняння (3.84) і (3.85) теж є *хвильовими рівняннями*.

Таким чином, змінне електричне і пов'язане з ним змінне магнітне поля поширюються в просторі у вигляді електромагнітної хвилі. Множник при приватних похідних другого порядку за часом у правих частинах отриманих рівнянь дорівнює квадрату оберненої величини фазової швидкості цієї хвилі, тобто

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad (3.86)$$

де c – швидкість електромагнітної хвилі у вакуумі ($\varepsilon = \mu = 1$):

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Її числове значення збігається зі швидкістю світла.

Одним з розв'язків рівнянь (3.84) і (3.85) є *рівняння плоскої хвилі*, що поширюється вздовж осі X :

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx), \quad (3.87a)$$

$$\vec{H}(x,t) = \vec{H}_0 \cos(\omega t - \kappa x), \quad (3.876)$$

де $\omega = 2\pi\nu$ – циклічна частота, $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число.

Хвиля називається *плоскою*, оскільки поля векторів \vec{E} і \vec{H} залежать тільки від однієї декартової координати (в даному випадку від x) і при цьому мають одне і те ж значення в кожній площині, перпендикулярній напрямку поширення хвилі (не залежать від координат y і z).

З рівнянь Максвелла $\operatorname{div}\vec{E}=0$ і $\operatorname{div}\vec{H}=0$ випливає, що електромагнітна хвиля *поперечна*. Щоб це довести, підставимо в ці рівняння $\vec{E}(x,t)$ і $\vec{H}(x,t)$ з (3.87). Отримаємо

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0,$$

звідки випливає, що $E_x = \text{const}$; $H_x = \text{const}$. Оскільки ми розглядаємо змінні, а не постійні поля, можна вважати, що $E_x = H_x = 0$, тобто змінні електричне і магнітне поля не мають складових вздовж напрямку поширення хвилі і, отже, є поперечними. Відмінними від нуля в них можуть бути тільки y -а і z -а складові. Легко встановити зв'язок між цими складовими. Нехай, наприклад, електричний вектор хвилі спрямований уздовж осі Y : $\vec{E}(x,t) = E(x,t)\vec{j}$, тобто хвиля лінійно поляризована вздовж цієї осі. Тоді магнітний вектор $\vec{H}(x,t)$ буде спрямований вздовж осі Z . Це випливає з рівняння (3.83а):

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E(x,t) & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial x} \vec{k} = -\mu_0\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

тобто $\vec{H} // \vec{k}$.

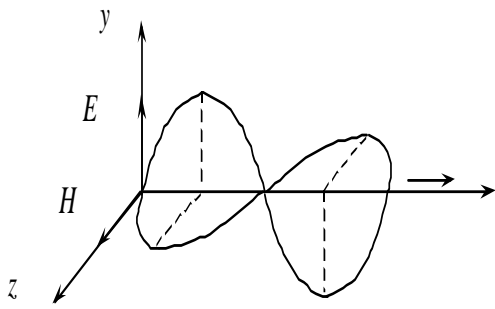


Рис. 3.61

Таким чином, вектори \vec{E} і \vec{H} перпендикулярні один одному і напрямку поширення хвилі, тобто електромагнітна хвиля подібно до світлової хвилі є поперечною.

Вектори \vec{E} , \vec{H} і \vec{v} утворюють праву трійку векторів (рис. 3.61). Така їх взаємна

орієнтація – внутрішня властивість хвилі, не залежить від вибору системи координат. З теорії Максвелла випливає, що світлова хвиля – хвиля електромагнітна.

Площину, в якій коливається вектор \vec{E} , в оптиці називають площиною *поляризації*, а перпендикулярну до неї площину, в якій коливається вектор \vec{H} – площиною *коливань*.

Підставивши в останню рівність $\vec{E}(x,t)$ і $\vec{H}(x,t)$ з рівнянь (3.87), отримаємо, з урахуванням (3.86), співвідношення між амплітудними значеннями напруженості електричного і магнітного полів:

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_0 = \sqrt{\mu_0 \mu} H_0. \quad (3.88)$$

§ 3.33. Енергія електромагнітної хвилі. Вектор Пойнтінга

Електромагнітне поле є сукупністю змінного електричного і змінного магнітного полів. Об'ємну густину його енергії можна представити у вигляді суми густини енергії w_E електричного і густини енергії w_H магнітного полів:

$$w = w_E + w_H = \frac{\vec{D}\vec{E}}{2} + \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}.$$

Через співвідношення (3.88), яке завдяки рівності фаз коливань $\vec{E}(x,t)$ і $\vec{H}(x,t)$ виконується для будь-яких їх значень, доданки в правій частині дорівнюють один одному, тому з урахуванням (3.86)

$$w = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E \cdot \sqrt{\mu_0 \mu} H = \frac{EH}{v}. \quad (3.89)$$

Електромагнітне поле поширюється в просторі у вигляді електромагнітної хвилі, яка, як і хвиля в пружному середовищі, переносить енергію.

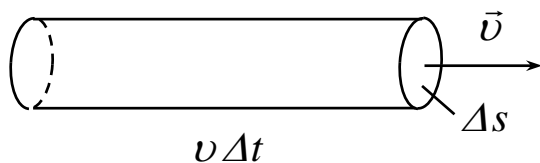
Введемо *вектор густини потоку енергії* \vec{S} , модуль якого рівний енергії ΔW , яка переноситься хвилею за 1 секунду через одиничний майданчик, перпендикулярний напрямку поширення хвилі:

$$\vec{S} = \frac{\Delta W}{\Delta s \cdot \Delta t} \vec{n}$$

($\vec{n} = \frac{\vec{v}}{v}$ – одиничний вектор нормалі до фронту хвилі).

Візьмемо циліндр, твірні якого паралельні напрямку поширення хвилі, а основи – перпендикулярні йому (рис. 3.62). Висота циліндра $v\Delta t$. Енергія електромагнітного поля, що міститься в цьому циліндрі, за час Δt переноситься через його праву основу. Вона рівна густині енергії електромагнітного поля, помноженій на об'єм циліндра $\Delta V = v\Delta t \cdot \Delta s$. Тоді

$$\vec{S} = \frac{w \cdot \Delta V}{\Delta s \cdot \Delta t} \vec{n} = w\vec{v}.$$



Підставляючи в цю формулу вираз (3.89), отримаємо

Рис. 3.62

$$\vec{S} = EH \cdot \vec{n}.$$

Оскільки вектори \vec{E} , \vec{H} і \vec{n} утворюють праву трійку, вектор \vec{S} можна представити у вигляді векторного добутку

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (3.90)$$

Записаний у такому вигляді вектор густини потоку енергії електромагнітного поля називається *вектором Пойнтінга*. Його напрямок збігається з напрямком поширення хвилі. Вектор \vec{S} не

містить ніяких величин, що характеризують властивості середовища, в якому поширюється електромагнітна хвиля.

§ 3.34. Випромінювання електромагнітних хвиль. Досліди Герца

У коливальному контурі, розглянутому в § 3.26, при коливаннях електричного струму і заряду відбувається перехід енергії електричного поля зарядженого конденсатора в енергію магнітного поля котушки і, навпаки, – енергії магнітного поля котушки в енергію електричного поля конденсатора. Коливальний контур слугує генератором електромагнітних коливань. При цьому електричне і магнітне поля розміщені відповідно всередині конденсатора і котушки. Щоб отримати електромагнітну хвилю, потрібно зробити коливальний контур відкритим. Якщо розвести обкладки конденсатора, як показано на рис. 3.63, то його ємність зменшиться, а частота коливань ω , згідно з (3.64), збільшиться, змінне електричне поле вийде назовні і породжуватиме змінне магнітне поле. Відкритий коливальний контур випромінює електромагнітну хвилю. Як можна показати шляхом відповідних розрахунків, інтенсивність випромінювання пропорційна четвертому степеню частоти ($I \sim \omega^4$). Таким чином, чим менші ємність або індуктивність коливального контура, тим сприятливіші умови для випромінювання хвиль у простір.

Перші досліди з випромінювання і прийом електромагнітних хвиль поставив видатний німецький фізик Генріх Герц у 80-х роках XIX століття. Він використав випромінювач у вигляді диполя, що є двома металевими стрижнями, розділеними “іскровим” проміжком (“диполь Герца”) (рис. 3.64). Така система по суті є відкритим коливальним контуром, оскільки має і

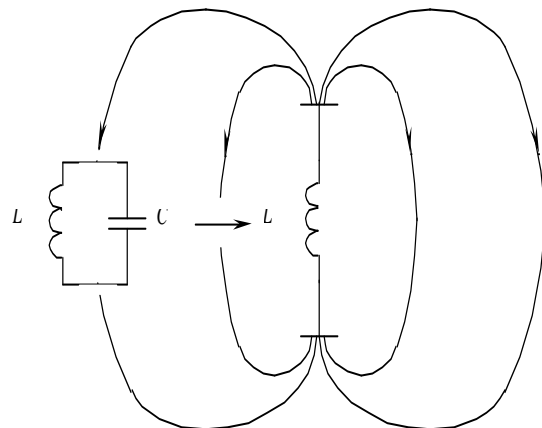


Рис. 3.63

ємність і індуктивність. До стрижнів приєднуються полюси джерела високої напруги – індуктора I . Коли напруга джерела досягає значення, достатнього для пробоя повітря, між стрижнями проскакує іскра. За час існування іскри ($\sim 0,1$ с) в коливальному контурі (стрижнях) встигає відбутися величезне число електромагнітних коливань, енергія яких випромінюється в простір у вигляді електромагнітної хвилі. Зображені на рис. 3.64 котушки індуктивності L перешкоджають проходженню високочастотного струму по ланцюгу індуктора, оскільки їх опір змінному струму $X_L = \omega L$ дуже великий.

Як приймач електромагнітних хвиль Герц використовував аналогічну систему з двох стрижнів, між якими знаходилася скляна трубочка, заповнена інертним газом – неоном (рис. 3.65). Електричне поле падаючої електромагнітної хвилі порушувало в стрижнях електричний струм, який, проходячи через трубку, викликав сяяння газу.

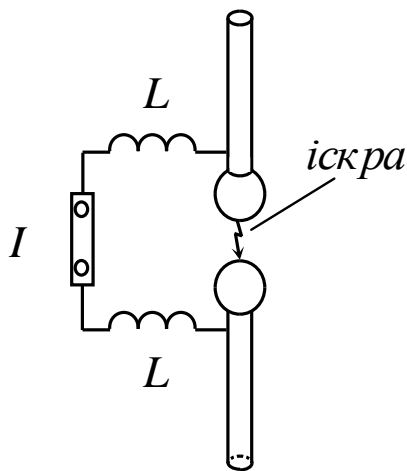


Рис. 3.64

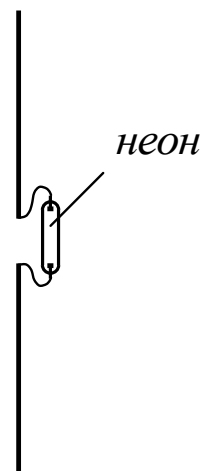


Рис. 3.65

Герц вивчав відбиття електромагнітних хвиль від поверхні металевих екранів, їх заломлення і поляризацію і показав, що електромагнітна хвиля, подібно до світлової хвилі, є поперечною.

§ 3.35. Тиск електромагнітної хвилі. Досліди Лебедева з вимірювання тиску світла

При падінні на поверхню якого-небудь тіла електромагнітна хвиля чинить на неї тиск. Щоб показати це, розглянемо плоску хвилю, що падає на нескінченну провідну площину, фрагмент якої у вигляді пластинки зображений на рис. 3.66. Завдяки наявності в пластині вільних зарядів в ній за рахунок електричної складової електромагнітної хвилі індукується електричний струм I . Напрямок струму збігається з напрямком вектора \vec{E} електромагнітної хвилі. На цей струм з боку магнітної хвилі $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ діє сила Ампера F_A . Протягом першого напівперіоду, коли вектор \vec{E} і відповідно струм I спрямований вгору (див. рис. 3.66), вектор \vec{H} спрямований управо, так що сила Ампера діє у напрямку поширення хвилі. У другому напівперіоді напрямки векторів \vec{E} і \vec{H} змінюються на протилежні, проте сила Ампера зберігає свій колишній напрямок. Такий механізм дії на провідну поверхню електромагнітної хвилі, що прозводить тиск на цю поверхню.

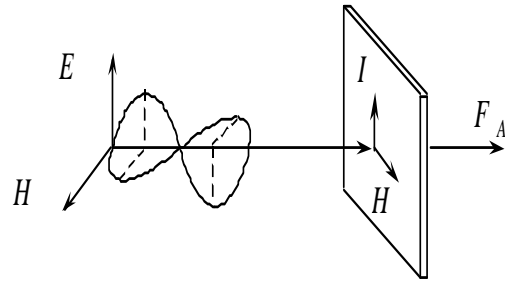


Рис. 3.66

Розрахунок тиску згідно з теорією Максвелла приводить до виразу

$$p = (1 + \rho)w, \quad (3.91)$$

де w – об'ємна густина енергії хвилі; ρ – коефіцієнт відбиття хвилі від поверхні, на яку вона падає. Для блискучого тіла $\rho = 1$, для чорного – $\rho = 0$.

Вперше тиск електромагнітної хвилі (світла) виміряв російський фізик Петро Миколайович Лебедев у 1899 році. Це стало прямим підтвердженням електромагнітної теорії світла і сприяло остаточному затвердженню теорії Максвелла.

Тиск світла дуже малий. У яскравий сонячний день світло тисне на 1 м^2 поверхні з силою, рівною вазі пухової пір'їнки.

Тому вимірювання тиску світла – дуже складне експериментальне завдання.

Прилад Лебедева для вимірювання тиску світла являє собою дуже чутливі крутильні терези, що складаються з коромисла на пружній нитці, до якого прикріплено два тонкі кружечки (крильця). Один з них блискучий, а другий – чорний (рис. 3.67). Все це знаходиться в балоні, в якому створений глибокий вакуум. Світло падає на обидва кружечки, але більший тиск припадає на блискучий. Тому коромисло повертається і закручує нитку на деякий кут.

Кут повороту відраховується за шкалою, на яку падає промінь світла, відбитий від дзеркала, сполученого з коромислом. Знаючи пружність нитки і кут повороту, можна знайти силу тиску.

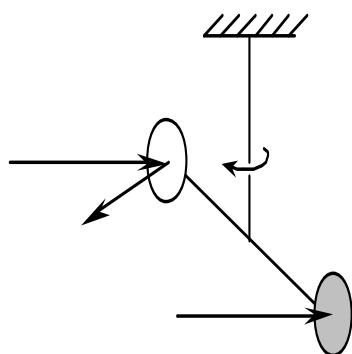


Рис. 3.67

Проста ідея досліду на практиці стикається з великими експериментальними труднощами. Так, при поглинанні світла кружечки нагріваються. Тепло у свою чергу передається молекулам газу, що залишаються в балоні. Тому тиск газу на кружечки зростає, причому цей “радіаційний ефект” сильніший, ніж вимірюваний тиск світла.

Використання дуже тонких кружечків дозволило усунути цей ефект, оскільки кружечки встигали прогрітися і температура, а з нею і тиск газу на обох їх поверхнях були практично однаковими.

Результати, отримані Лебедевим, збіглися з теоретичним значенням (3.91) з точністю до 20%, що не перевищувало похибки експерименту. У 1907 році Лебедеву вдалося розв’язати ще складнішу задачу – виміряти тиск світла на газі.

§ 3.36. Винахід радіотелеграфу О.С.Поповим

у Росії

Випромінювання і прийом електромагнітних хвиль, здійснений Г.Герцом у Німеччині, знайшли своє практичне застосування. У 1895 році російський фізик, викладач офіцерських мінних класів у Кронштадті Олександр Степанович Попов уперше продемонстрував свій пристрій, що дозволяв передавати за допомогою азбуки Морзе інформацію без проводів. Цей пристрій називався тоді бездротовим телеграфом. Перша радіограма, передана на відстань 250 м, містила всього два слова: “Генріх Герц”. Це відбулося 7 травня 1895 року на засіданні Російського фізико-хімічного товариства.

О.С.Попов з'єднав передавач Герца з телеграфним ключем, а як приймач використав винайдений ним пристрій, що складається з приймальної антени (стрижнів Герца), між якими знаходилася скляна трубочка, наповнена окисдованими залізними ошурками, – *когерер Бранлі*. Трубочка була увімкнена в електричний ланцюг, який складався з джерела постійного струму і дзвінка (рис. 3.68). Покриті оксидом заліза ошурки, що знаходились у трубочці, мали великий електричний опір, тому струм в ланцюзі був дуже малий. У момент приходу сигналу – електромагнітного імпульсу від джерела – ошурки спікались і опір різко зменшувався. Дзвінок починав дзвеніти, використовуючи енергію джерела струму в ланцюзі. Щоб вимкнути дзвінок, потрібно струснути трубочку і тим самим відновити її початковий високий опір.

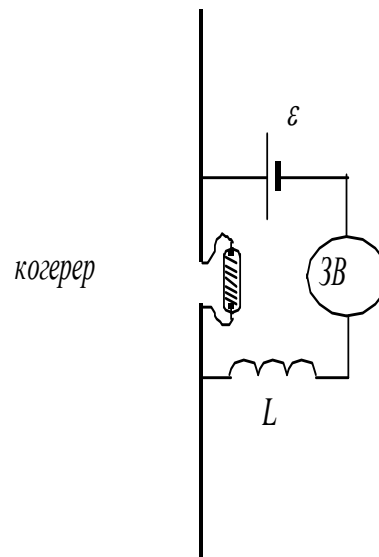


Рис. 3.68

О.С.Попов використовував принцип негативного зворотного зв'язку. Він примусив молоточок дзвінка

одночасно струшувати і трубочку. Тоді електромагнітний імпульс, що надходив в антену, викликав короточасний звуковий сигнал, а молоточок дзвінка повертав пристрій у стан готовності до прийому нового імпульсу. Так можна було передавати за допомогою електромагнітних хвиль (радіохвиль) телеграфні повідомлення. Надалі О.С.Попов, для підвищення чутливості приймача, вперше застосував довгий дріт, піднятий над землею, – антену.

Одночасно з О.С.Поповим у Росії подібний винахід був зроблений Гульєльмо Марконі в Італії. Марконі запатентував свій винахід, і він набув значного поширення у світі під його ім'ям. Це були перші радіоприймачі, створені людством. Подальший розвиток радіозв'язку привів до створення широкої мережі радіостанцій та впровадження радіозв'язку і телебачення в повсякденне життя.

Питання для самоперевірки

1. Що таке коливальний контур? Опишіть протікаючі в ньому процеси.
2. Що називається струмом зміщення?
3. Дайте розгорнене визначення електромагнітного поля.
4. Запишіть систему рівнянь Максвелла і покажіть, що з неї випливає існування електромагнітного поля.
5. Дайте визначення і вкажіть фізичний сенс дивергенції вектора поля.
6. Що таке ротор вектора поля і який його фізичний сенс?
7. Запишіть рівняння Максвелла в диференціальній формі.
8. Отримайте з рівнянь Максвелла рівняння плоскої електромагнітної хвилі. Які її властивості?
9. Що називається вектором густини потоку енергії електромагнітного поля?
10. Поясніть принцип роботи диполя Г.Герца. Що довели його досліді?

11. Поясніть механізм виникнення тиску електромагнітної хвилі на провідну поверхню.
12. На чому оснований дослід П.М.Лебедева з вимірювання тиску світла?
13. Поясніть принцип дії приймача О.С.Попова.

Бібліографічний список

1. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. – М.: Физматгиз, 1962.– 480 с.
2. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика.– М.: Наука, 1985.– 400 с.
3. Горелик Г.С. Колебания и волны. – М.: Физматгиз, 1959. – 572 с.
4. Детлаф А.А., Яворский Б.М., Милковская Л.Б. Курс физики: В 3 т. М.: Наука.– Т.2. Видання різних років.
5. Задачі з фізики / Попов А.В., Вовк Р.В., Глейзер Н.В. та ін. – Харків.: УкрДАЗТ, 2009.– 104 с.
6. Зильберман Г.Е. Электричество и магнетизм. – М.: Наука, 1970. – 384 с.
7. Зоммерфельд А. Электродинамика.– М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1958.– 502 с.
8. Зисман Г.А., Годес О.М. Курс общей физики: В 3 т.– М.: Наука, 1972.– Т.2.– 368 с.
9. Калашников С.Г. Электричество.– М.: Наука, 1985.– 576 с.
10. Крот Ю.Є., Пастушенко С.М. Загальна фізика. Електрика і магнетизм.– К.: Діал, 2006.– 252 с.
11. Кудрявцев П.С. История физики: В 3 т.– М.: Учпедгиз, 1956.– Т.2.– 488 с.
12. Курс физики / Под ред. Н.Д.Папалекси: В 2 т.– М.;Л.: Техтеоретиздат, 1948.– Т.2.– 696 с.
13. Орир Дж. Физика: В 2 т.– М.: Мир, 1981.– Т.1.– 336 с.
14. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика.– М.: Физматгиз, 1963.– 432 с.
15. Парселл Э. Электричество и магнетизм. – М.: Наука, 1971.– 448 с.
16. Планк М. Введение в теоретическую физику: Теория электричества и магнетизма.– М.: УРСС, 2004.– 184 с.

17. Поль Р.В. Учение об электричестве.– М.: Физматгиз, 1962. – 516 с.
18. Путилов К.А. Курс физики: В 3 т.– М.: Физматгиз, 1963.–Т.2.– 584 с.
19. Савельев И.В. Курс общей физики: В 3 т. Т.2. Издания разных лет.
20. Сивухин Д.В. Общий курс физики: В 5 т.– М.: Наука, 1977, Т.3: Электричество.– 688 с.
21. Смайт В. Электростатика и электродинамика.– М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1954.– 640 с.
22. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма.– М.: Гостехиздат, 1948. – 520 с.
23. Тамм И.Е. Основы теории электричества.– М.: Наука, 1966.– 624 с.
24. Трофимова Т.И. Курс физики.– М.: Высш. шк., 2004.– 544 с.
25. Уиттекер Э. История теории эфира и электричества: Современные теории 1900–1926 гг.– М.: Ин-т компьютерных исследований, 2004.– 464 с.
26. Фриш С.Э., Тиморева А.В. Курс общей физики: В 3 т.– М.: Техтеоретиздат, 1953.– Т.2.– 464 с.

Предметний покажчик

- Адіабатичного розмагнічування метод 139
- Ампера закон 86
- Біо-Савара-Лапласа закон 87
- Вектор електричної індукції 52
– поляризованості 48
- Відемана–Франца закон 80
- Герца досліди 166
- Гістерезис 61, 142
- Градiєнт 24
- Густина струму 72
- Діелектрики 45
- Джоуля–Ленца закон 71
– – у диференціальній формі 74, 79
- Діамагнетики 132
- Діелектрична проникність діелектрика 53
- Дрейфова швидкість 73, 77
- Дивергенція вектора поля 156
- Диполь електричний 13
- Друде й Лоренца теорія 76
- Дюлонга і Пті закон 82
- Ейнштейна–де Гааза дослід 126
- Еквіпотенціальні поверхні 23
- Електростатичний генератор Ван де Граафа 35
- Електрична ємність провідників і конденсаторів 36, 56
– провідність провідників 68, 79
- Електричний опір 67
– струм 66

Електромагнітної індукції явище 108
Електромагнітна хвиля 162
Електрорушійна сила джерела струму 66
Енергія електричного поля 43
– електромагнітної хвилі 165
– зарядженого провідника й конденсатора 42
– магнітного поля 122
– системи нерухомих зарядів 40
Ерстеда дослід 85
Закон збереження заряду 10
Заряд поляризаційний 45
Індуктивність провідника 111
– коаксіального кабелю 115
– соленоїда 113
Квантування заряду 9
Коерцитивна сила 61, 143
Коливальний *LC*-контур 147
Кулона закон 10
Кюрі закон 138
– точка 146
Лебедєва дослід 168
Ленца правило 110
Лоренца сила 86
Магнетики 132
Магнітна сприйнятливність 129
Магнітний момент контура із струмом 91
Максвелла рівняння 152, 160
Мандельштама і Папалексі дослід 72

Намагніченості вектор 127
Напруженість електричного поля 11
— — — в діелектрику 54
— — — зарядженої кулі 16
— — — — площини 18
— — — — циліндра 17
Напруженість магнітного поля 127
Ома закон 67
— — у диференціальній формі 73, 78
Остроградського–Гаусса теорема 14
— — для діелектриків 50
— — для магнітного поля 96
Парамагнетики 132, 136
Питомий опір провідника 67
Пойнтінга вектор 165
Поляризація діелектриків 45, 46, 47
Пондеромоторні сили 56
Потенціал електростатичного поля 20
— — — зарядженої кулі 25
— — — — площини 26, 27
— — — — циліндра 26
Потік вектора напруженості електричного поля 14
— — магнітної індукції 96
Потужність струму 70, 75, 79
Принцип суперпозиції полів 10
Радіотелеграф О.С.Попова 170
Різниця потенціалів 22
Рікке дослід 71
Ротор вектора поля 157

Самоіндукції явище 111
Сегнетоелектрики 60
Сила струму 66
Сименс 69
Скін-ефект 117
Стокса теорема 157
Струм зміщення 150
Стюарта і Толмена дослід 71
Томсона формула 148
Точковий заряд 10
Фарадея закон 108
Феромагнетики 117, 140
Фуко струми 116
Хвильове рівняння 163
Холла ефект 106
Циклотрон 103
Циркуляція вектора напруженості електричного поля 22
– – магнітної індукції 92
– – – магнітного поля в речовині 130