

**Е.Д. Чихладзе,  
С.Ю. Берестянська, І.М. Лисяков**

**ДИНАМІЧНІ РОЗРАХУНКИ  
КОНСТРУКЦІЙ**

**Підручник  
для студентів вищих навчальних закладів**

**Харків 2015**

**Е.Д. Чихладзе,  
С.Ю. Берестянська, І.М. Лисяков**

**ДИНАМІЧНІ РОЗРАХУНКИ  
КОНСТРУКЦІЙ**

**Підручник  
для студентів вищих навчальних закладів**

**Харків 2015**

**УДК 624.07  
ББК 38.112  
Ч 713**

*Рекомендовано вченою радою Українського державного  
університету залізничного транспорту як підручник  
(№ 4 від 26 травня 2015 р.).*



**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

**Рецензенти:**

професори Г.Ш. Салія (ХДТУБА),  
В.П. Кожушко (ХНАДУ)

**ДИНАМІЧНІ РОЗРАХУНКИ КОНСТРУКЦІЙ**

**Ч 713** Чихладзе, Е.Д. Динамічні розрахунки конструкцій  
[Текст]: підручник / Е.Д. Чихладзе, С.Ю. Берестянська,  
І.М. Лисяков. – Харків: УкрДУЗТ, 2015. – 161 с.,  
рис. 44., табл. 8.

ISBN 978-617-654-021-2

Дана книга, написана відповідно до програми курсів для транспортних вузів, відрізняється більш поглибленим розглядом методів розрахунків на динамічні впливи. Підручник містить велику кількість докладних прикладів розрахунку, що сприяють кращому засвоєнню навчального матеріалу і застосуванню в практичній діяльності.

УДК 624.07  
ББК 38.112

Відповідальний за випуск Берестянська С.Ю.

Редактор Ібрагімова Н.В.

---

Підписано до друку 01.02.12 р.

Формат паперу 60x84 1/16 . Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 7,25. Тираж 100. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту  
61050, Харків - 50, майдан Фейербаха, 7

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

ISBN 978-617-654-021-2

© Український державний  
університет залізничного транспорту,  
2015.

Підручник

**Чихладзе** Елгуджа Давидович,  
**Берестянська** Світлана Юріївна,  
**Лисяков** Ігор Миколайович

## ЗМІСТ

<b>Загальні положення і поняття</b> .....	5
<b>Розділ 1. Коливання систем з одним ступенем свободи</b> ...	7
1.1. Диференціальне рівняння руху системи з одним ступенем свободи.....	7
1.2. Вільні коливання без урахування сил опору.....	9
1.3. Вільні коливання з урахуванням сил опору.....	12
1.4. Вимушені коливання під дією вібраційного навантаження .....	15
1.5. Дослідження систем з одним ступенем свободи .....	20
1.6. Розрахунок на раптове навантаження.....	25
1.7. Розрахунок на дію короткочасного навантаження.....	27
1.8. Ударне навантаження.....	29
<b>Розділ 2. Коливання систем з розподіленою масою</b> .....	34
2.1. Поперечні коливання прямих брусів.....	34
2.1.1. Диференціальне рівняння поперечних коливань... ..	34
2.1.2. Вільні коливання бруса.....	35
2.1.3. Головні форми коливань.....	37
2.1.4. Вимушені коливання бруса.....	41
2.2. Поздовжні коливання прямих стержнів.....	44
2.2.1. Диференціальне рівняння поздовжніх коливань... ..	44
2.2.2. Два основних види розв'язків.....	46
2.2.3. Вимушені поздовжні коливання.....	51
2.3. Вплив постійної осьової сили на поперечні коливання бруса.....	53
2.4. Розрахунок нерозрізних балок на вібраційні впливи.....	57
2.4.1. Загальні теореми.....	57
2.4.2. Розрахунок нерозрізних балок, завантажених одночасно на декількох прогонах, методом сил.....	59
2.4.3. Розрахунок нерозрізних балок, завантажених на одному прогоні.....	63
2.4.4. Розрахунок нерозрізних балок методом переміщень.....	66
2.4.5. Розрахунок статично невизначених рам методом переміщень.....	68
<b>Розділ 3. Динамічні характеристики будівельних матеріалів і конструкцій</b> .....	70

3.1. Динамічна жорсткість.....	70
3.2. Внутрішнє тертя.....	73
3.3. Витривалість.....	88
<b>Бібліографічний список.....</b>	<b>111</b>
<b>Додаток 1.</b> Приклад дослідження.....	<b>112</b>
<b>Додаток 2.</b> Таблиця функцій Крилова.....	<b>125</b>
<b>Додаток 3.</b> Таблиця стандартних рішень.....	<b>129</b>
<b>Додаток 4.</b> Приклад розрахунку нерозрізної балки методом сил.....	<b>133</b>
<b>Додаток 5.</b> Приклад розрахунку нерозрізної балки, завантаженої на одному прогоні.....	<b>142</b>
<b>Додаток 6.</b> Приклад розрахунку нерозрізної балки методом переміщень.....	<b>152</b>
<b>Додаток 7.</b> Приклад розрахунку рами на вібраційні впливи..	<b>154</b>

## Загальні положення і поняття

Динамічними навантаженнями називають такі навантаження, що під час дії передають масам споруди прискорення, викликаючи появу інерційних сил. Динамічні навантаження викликають у споруді напруження, деформації і переміщення, змінні за часом. За своєю природою вони різноманітні і в основному можуть бути зведені до таких видів.

*Нерухоме періодичне навантаження* (розташоване на споруді у визначеному місці) характерне тим, що діаграма залежності його від часу багаторазово повторюється через певні проміжки часу (періоди). Періодичне навантаження може бути як безперервним, так і розривним. Якщо періодичне навантаження безупинно змінюється за законом синуса або косинуса, то таке навантаження називається вібраційним або гармонійним.

*Короткочасне навантаження* (імпульс) характерне швидким розвитком і швидким зникненням, тобто майже миттєвою дією. Такі навантаження створюються, наприклад, різноманітними вибухами.

*Ударне навантаження* у вигляді ударів у певному місці споруди характерне різкою зміною швидкості тіла, яке ударяють, у короткий проміжок часу. Ударне навантаження створюють тіла, що падають: копирі, молоти й ін.

*Рухоме навантаження* - це навантаження постійного або змінного значення, що змінює на споруді своє положення. Прикладами такого навантаження можуть служити електровози, автомобілі, тролейбуси.

*Сейсмічне навантаження* - це безладне рухання ґрунту, поштовхи, удари і коливання при землетрусі.

Динамічний розрахунок споруд полягає у визначенні внутрішніх сил і переміщень від динамічних навантажень, величина і характер дії яких відомі, або в перевірці системи на резонанс при періодично повторюваному навантаженні певної частоти. Якщо дія статичних навантажень визначається їх величиною, то при розрахунках на динамічні навантаження поряд із величиною істотну роль відіграє характер навантаження. Особливо в цьому відношенні є небезпечним будь яке періодичне навантаження. Іноді мале за величиною періодичне навантаження

може створити великий динамічний ефект, тобто викликати великі напруження і переміщення. Це пояснюється тим, що споруда “чутлива” до періодичної дії навантаження деякої певної для нього частоти.

Загальні методи динамічних розрахунків вивчаються в спеціальному розділі будівельної механіки “Динаміка споруд”. Нижче для ілюстрації динамічних розрахунків будуть спочатку розглянуті найпростіші системи - системи з одним ступенем свободи. До цих систем належить невагома балка з зосередженою масою  $m$ , горизонтальним переміщенням і поворотом якої нехтують. Системи з нескінченним числом ступенів свободи представлені балками і рамами. Якщо розглядувану конструкцію яким-небудь чином, наприклад імпульсом, вивести зі стану стійкої рівноваги, а потім причину, яка виводить її з цього стану, прибрати, конструкція буде здійснювати *вільні* коливання. Неминучі різноманітного роду зовнішні і внутрішні опори руху системи безперервно поглинають частину енергії, тому сам процес вільних коливань є загасальним.

*Вільні періодичні коливання, що здійснюються за гармонічним законом з однією частотою, коли відношення переміщень двох будь-яких точок у будь-який момент часу не змінюються, називаються власними.*

Якщо ж на конструкцію діє безперервно яке-небудь динамічне навантаження  $F(t)$ , то вона здійснює *вимушені* коливання. Предметом наших подальших досліджень і є вільні і вимушені коливання невагомої балки з зосередженою масою і систем з розподіленою масою балок, рам.

## РОЗДІЛ 1

### КОЛИВАННЯ СИСТЕМ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ СВОБОДИ

#### 1.1. Диференціальне рівняння руху системи з одним ступенем свободи

Розглянемо систему у вигляді невагомої балки з зосередженою масою  $m$ . На рис. 1.1, а показано переміщення маси з її вихідного стану рівноваги. Прогин маси  $y_{ст}$ , як і надалі аналізований  $y(t)$ , є величиною малою порівняно з прогоном балки.

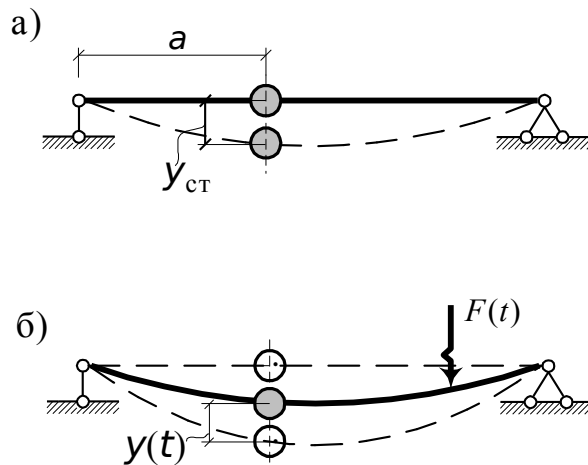


Рис. 1.1. До виведення диференціального рівняння руху маси

Нехай на балку діє динамічне навантаження  $F(t)$  (унаслідок малості прогину надалі не будемо робити різниці між початковим (рис. 1.1, а) і деформованим (рис. 1.1, б) станами балки), що призводить балку і розташовану на ній масу до руху (рис. 1.1, б). Відзначимо той момент руху маси  $m$ , коли вона переміщається униз. Відокремимо масу  $m$  від балки, додамо до маси: силу  $R$ , із якою балка діє на масу; силу  $P$ , що характеризує опір руху; силу інерції маси  $m \frac{d^2 y}{dt^2}$  (рис. 1.2). Тут необхідно зазначити, що в основу динаміки покладено принцип Даламбера - загальна теорема, що вказує, як повинні бути складені рівняння руху для будь-якої механічної системи: рівняння руху матеріальної точки утворюється з рівнянь рівноваги додаванням сил інерції до



реальних сил. Сила інерції спрямована завжди протилежно прискоренню руху.

Спроекуємо всі сили, що діють на масу, на вертикальну вісь і знайдемо

$$R = m \frac{d^2 y}{dt^2} + P. \quad (1.1)$$

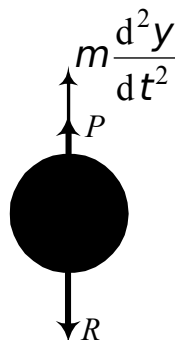


Рис. 1.2. Схема сил, що діють на масу

Переміщення маси запишемо через переміщення балки (рис. 1.3, а, б). Для цього прикладаємо до балки спочатку силу  $F = 1$  і відмічаємо  $\delta_{11}$  (рис. 1.3, а), а потім - силу  $F(t)$  і знову знаходимо переміщення балки в місці прикладення маси  $\Delta_{1F}(t)$  (рис. 1.3, б). Нагадаємо, що перший індекс у позначенні переміщень  $\delta_{11}$  і  $\Delta_{1F}(t)$  означає місце і напрямок переміщень, а другий індекс - причину, що викликала переміщення.

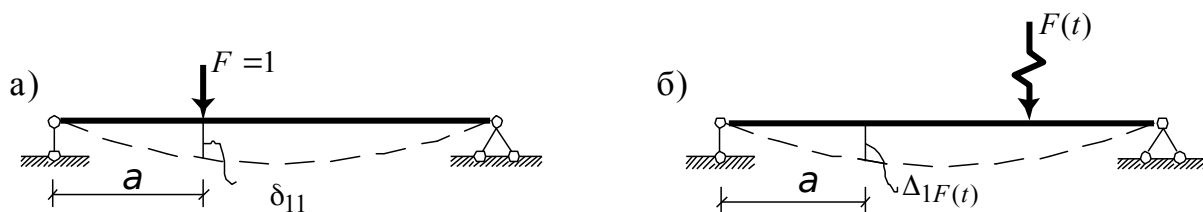


Рис. 1.3. До визначення переміщень маси через переміщення балки

У результаті

$$y = \Delta_{1F}(t) - R \delta_{11}. \quad (1.2)$$

З формули (1.2) знайдемо

$$R = \frac{\Delta_{1F}(t)}{\delta_{11}} - \frac{y}{\delta_{11}}. \quad (1.3)$$

Прирівняємо праві частини формул (1.1) і (1.3) і одержимо

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{P}{m} + \omega^2 y = \omega^2 \Delta_{1F}(t), \quad (1.4)$$

де

$$\omega^2 = \frac{1}{m \delta_{11}}. \quad (1.5)$$

Рівняння (1.4) є диференціальним рівнянням вимушеного руху маси.

Поклавши  $\Delta_{1F}(t)$  рівним нулю, одержимо диференціальне рівняння вільних коливань:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{P}{m} + \omega^2 y = 0. \quad (1.6)$$

## 1.2. Вільні коливання без урахування сил опору

Диференціальне рівняння вільних коливань без урахування сил опору визначається виразом (1.6) при  $P = 0$ :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0. \quad (1.7)$$

Розв'язок цього рівняння

$$y(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad (1.8)$$

де  $A$  і  $B$  - дійсні постійні, які визначаються з початкових умов: при

$$t = 0 \quad y = y_0; \quad v = v_0. \quad (1.9)$$

Знайдемо швидкість переміщення маси:

$$\frac{dy}{dt} = v = \omega A \cos \omega t - \omega B \sin \omega t. \quad (1.10)$$

З початкових умов (1.9) визначимо

$$y_0 = B; \quad A = \frac{v_0}{\omega}.$$

Підставляючи знайдені значення постійних  $A$  і  $B$  в рівняння (1.8), одержимо

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + y_0 \cos \omega t. \quad (1.11)$$

Або використавши формулу синуса суми двох кутів, замість формули (1.11) можна написати

$$y(t) = C \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1.12)$$

де

$$C = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{B}{A} = \frac{y_0 \omega}{v_0}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{y_0 \omega}{v_0}.$$

На графіку рис. 1.4 бачимо головні елементи гармонійних вільних коливань, що описуються рівністю (1.12), де:

$C$  - амплітуда коливань;

$\varphi_0$  - початкова кутова фаза коливань;

$T$  - період коливань, тобто тривалість одного циклу коливань;

$\omega$  - колова (кутова) частота коливань,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , рад/с.

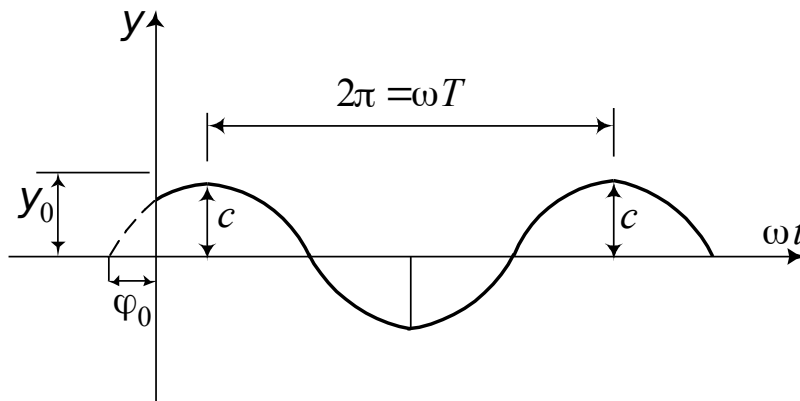


Рис. 1.4. Графік гармонійних вільних коливань системи з одним ступенем свободи

Величина  $n = \frac{1}{T}$ , що виражає число коливань за 1 с (вимірюється в герцах), іноді називається технічною частотою.

Колова частота  $\omega$ , очевидно, являє собою число циклів коливань, що відбуваються за  $2\pi$  с.

З огляду на значення  $\omega$  вираз (1.5) для періоду коливань можемо написати

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{m \delta_{11}}. \quad (1.13)$$

Обчислимо силу інерції маси в довільний момент часу:

$$J(t) = -m \frac{d^2 y}{dt^2} = \omega^2 C m \sin(\omega t + \varphi_0) = \omega^2 m y(t). \quad (1.14)$$

Вираз (1.14) показує, що при гармонійних коливаннях із частотою  $\omega$  сила інерції пропорційна відхиленню маси  $y(t)$ . Для вільних коливань без урахування сил опору ця сила є єдиною зовнішньою силою, що врівноважує реакцію  $R$  балки в будь-який момент часу.

З енергетичної точки зору, вільні незагасальні коливання характеризуються безперервним переходом кінетичної енергії руху маси в потенційну енергію деформації системи, і навпаки.

### 1.3. Вільні коливання з урахуванням сил опору

Диференціальне рівняння вільних коливань з урахуванням сил опору має вигляд виразу (1.6)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{P}{m} + \omega^2 y = 0.$$

Різноманітні види опорів коливанням умовно можна поділити на дві категорії - внутрішній опір (тертя), пов'язаний з властивостями матеріалу і конструкції (тертя в збірних закріпленнях, тертя в з'єднаннях і т. п.), і зовнішній опір

(взаємодія коливної системи з зовнішнім середовищем; відступи від ідеальних умов деформування конструкції та її основи, викликані пружними недосконаlostями реальних матеріалів). Через складність і різноманіття чинників, що впливають на опір коливанням, не існує єдиної теорії, однаково придатної для урахування усіх видів внутрішнього опору. Є численна література з цих питань. Тут ми розглядаємо насамперед важливі для будівельних конструкцій питання урахування внутрішнього опору коливанням, обумовленого властивостями матеріалу.

Скористаємося гіпотезою Фойгта<sup>\*</sup>, відповідно до котрої сили опору пропорційні швидкості:

$$P = 2\alpha m \frac{dy}{dt}, \quad (1.15)$$

де  $\alpha$  - коефіцієнт загасання, 1/с;

$m$  - точкова маса.

Незважаючи на хиби, на які звернемо увагу пізніше, модель Фойгта (так названий грузлий опір) дотепер широко застосовується через простоту і можливість одержати якісну картину явища.

Підставивши вираз (1.15) у рівняння (1.6), одержимо

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0. \quad (1.16)$$

Характеристичне рівняння

$$r^2 + 2\alpha r + \omega^2 = 0 \quad (1.17)$$

має два корені:

$$r_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}; \quad r_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2},$$

чисельне значення яких залежить від співвідношення  $\alpha$  і  $\omega$ . Розглядаємо основний випадок, що має місце в реальних конструкціях:  $\omega > \alpha$ . Тоді

$$r_1 = -\alpha + i\omega_1; \quad r_2 = -\alpha - i\omega_1;$$

---

<sup>\*</sup> Вольдемар Фойгт (W.Voigt, 1850-1919) – німецький вчений, який працював в області фізики і теорії пружності.

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}.$$

Вид коренів визначає загальний розв'язок однорідного рівняння (1.16):

$$y(t) = e^{-\alpha t} (A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t). \quad (1.18)$$

Використовуючи початкові умови: при  $t=0$   $y=y_0$ ,  $v=v_0$ , знайдемо

$$A = \frac{v_0 + \alpha y_0}{\omega_1}; \quad B = y_0.$$

Запишемо, як і раніше вираз (1.12), рівняння (1.18) із використанням формули синуса суми двох кутів у такому вигляді:

$$y(t) = C e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi), \quad (1.19)$$

де

$$C = \sqrt{y_0^2 + \left( \frac{v_0 + \alpha y_0}{\omega_1} \right)^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A} = \frac{y_0 \omega_1}{v_0 + \alpha y_0}.$$

На рис. 1.5 зображено графік загасальних коливань, що описуються рівнянням (1.19).

Обвідна коливань (пунктирна лінія на рис. 1.5) визначена рівнянням

$$y = \pm C e^{-\alpha t}. \quad (1.20)$$

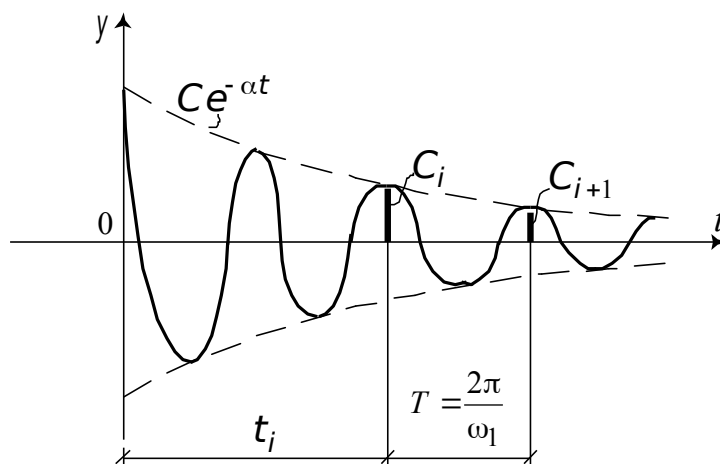


Рис. 1.5. Графік загасальних коливань системи з одним ступенем свободи

Крива виразу (1.20) торкається кривої коливань виразу (1.19) у тих точках, де  $\sin(\omega_1 t + \varphi) = \pm 1$ . Значення відношення сусідніх амплітуд  $C_i/C_{i+1}$  звичайно дуже близьке до одиниці, тому в якості кількісної характеристики загасання приймають натуральний логарифм відношення:

$$\delta = \ln(C_i/C_{i+1}). \quad (1.21)$$

Чисельні експерименти показують, що для даного матеріалу і максимального рівня напружень (при якому відбуваються коливання) значення  $\delta$  (декремент загасання) залишається практично постійним, тобто внутрішнє тертя в матеріалі виявляє себе як частотно незалежний чинник. Гіпотеза ж Фойгта призводить до того, що декремент загасання залежить від частоти  $\omega$ , що є її недоліком. Зауважимо, що пропорційна залежність загасання від частоти є очевидною. Дійсно, чим вище частота коливань, тим більше швидкість руху  $\frac{dy}{dt}$ . Але саме швидкості  $\frac{dy}{dt}$  пропорційні сили опору  $P$  виразу (1.15).

#### 1.4. Вимушені коливання під дією вібраційного навантаження

Розглянемо дію вібраційної (гармонійної) сили  $F(t) = F \sin \theta t$  на невагому балку з зосередженою масою (рис. 1.6). Тут  $\theta$  - частота вимушених коливань.

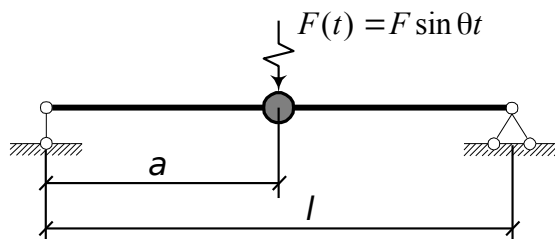


Рис. 1.6. Дія вібраційної сили на невагому балку

з зосередженою масою

Диференціальне рівняння руху має такий вигляд:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = \omega^2 \Delta_{1F}(t). \quad (1.22)$$

Це рівняння отримане з виразу (1.4) з урахуванням виразу (1.15). Виразимо праву частину рівняння (1.22) з урахуванням виразу (1.5) у такий спосіб:

$$\omega^2 \Delta_{1F}(t) = \frac{F(t) \cdot \delta_{11}}{m \delta_{11}} = \frac{F(t)}{m} = \frac{F \sin \theta t}{m}. \quad (1.23)$$

Тоді диференціальне рівняння руху аналізованої балки набуває такого вигляду:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = \frac{F \sin \theta t}{m}. \quad (1.24)$$

Частинний розв'язок рівняння (1.24) будемо шукати у вигляді

$$y(t) = A \cos \theta t + B \sin \theta t. \quad (1.25)$$

Продиференціюємо цей вираз двічі по  $t$ :

$$\frac{dy}{dt} = -A\theta \sin \theta t + B\theta \cos \theta t; \quad (1.26)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -A\theta^2 \cos \theta t - B\theta^2 \sin \theta t. \quad (1.27)$$

Підставимо вирази (1.26), (1.27) і (1.25) у рівняння (1.24) і згрупуємо члени з однаковими  $\cos \theta t$  і  $\sin \theta t$ :

$$\left[ (\omega^2 - \theta^2)A + 2\alpha\theta B \right] \cos \theta t + \left[ (\omega^2 - \theta^2)B - 2\alpha\theta A - \frac{F}{m} \right] \sin \theta t = 0.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при косинусі і синусі нулю, прийдемо до системи рівнянь відносно  $A$  і  $B$ :



$$\begin{aligned}(\omega^2 - \theta^2)A + 2\alpha\theta B &= 0; \\ (\omega^2 - \theta^2)B - 2\alpha\theta A - \frac{F}{m} &= 0.\end{aligned}\tag{1.28}$$

Розв'язуючи систему рівнянь (1.28), знайдемо

$$A = -\frac{2\alpha\theta F}{m\psi^2}, \quad B = \frac{F(\omega^2 - \theta^2)}{m\psi^2},\tag{1.29}$$

де

$$\psi^2 = 4\alpha^2\theta^2 + (\omega^2 - \theta^2)^2.\tag{1.30}$$

Підставляємо отриманий розв'язок у рівняння (1.25) і з огляду на розв'язок однорідного рівняння (1.19) одержуємо

$$y(t) = C e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi) + \frac{F}{m\psi^2} [-2\alpha\theta \cos \theta t + (\omega^2 - \theta^2) \sin \theta t].\tag{1.31}$$

На рис. 1.7 показано графік розв'язку виразу (1.31).

На початку руху має місце перехідний процес (коливання, що не усталилися). Після закінчення деякого часу  $\tau$  власні коливання виразу (1.19) практично загасають, і система здійснює усталені гармонійні коливання з частотою і періодом зміни збуджуючої сили.

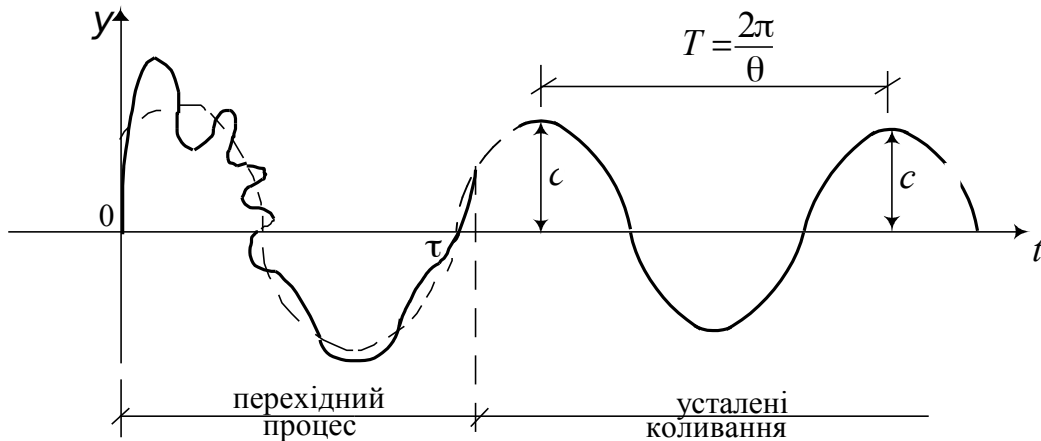


Рис. 1.7. Графік руху системи під дією вібраційного навантаження

Роздивимося усталені коливання. Вважаючи перший член правої частини рівняння (1.31) рівним нулю, запишемо рівняння сталих коливань:

$$y(t) = \frac{F}{m\psi} \left[ \frac{(\omega^2 - \theta^2)}{\psi} \sin \theta t - \frac{2\alpha\theta}{\psi} \cos \theta t \right]. \quad (1.32)$$

Введемо позначення:

$$\frac{(\omega^2 - \theta^2)}{\psi} = \cos \rho; \quad - \frac{2\alpha\theta}{\psi} = \sin \rho. \quad (1.33)$$

З огляду на формулу синуса суми двох кутів:

$$\sin(\theta t + \rho) = \sin \theta t \cdot \cos \rho + \cos \theta t \cdot \sin \rho,$$

Знайдемо

$$y(t) = \frac{F}{m\psi} \sin(\theta t + \rho). \quad (1.34)$$

Підставимо у вираз (1.34) значення  $\psi$  виразу (1.30):

$$y(t) = \frac{F}{m\omega^2} \frac{\sin(\theta t + \rho)}{\sqrt{(1 - \delta^2)^2 + \gamma^2 \delta^2}}, \quad (1.35)$$

де

$$\delta = \frac{\theta}{\omega}; \quad \gamma^2 = \frac{4\alpha^2}{\omega^2}.$$

Як показує формула (1.35), вимушені коливання за наявності сил опору відбуваються з частотою  $\theta$  сили  $F$ , що збуджує.

Амплітуда вимушених коливань ( $\sin(\theta t + \rho) = \pm 1$ )

$$y_{\max} = \frac{F}{m\omega^2} \mu, \quad (1.36)$$

де  $\mu$  - динамічний коефіцієнт,

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1 - \delta^2)^2 + \gamma^2 \delta^2}}, \quad (1.37)$$

від початкових умов і часу не залежить. З часом вона не змінюється і, отже, вимушені коливання, на відміну від вільних, від опору не загасають.

При резонансі, коли  $\omega = \theta$  (рис. 1.8), амплітуда вимушених коливань (вираз (1.36)) залишається скінченною і притому не найбільшою з можливих її значень для даної системи.

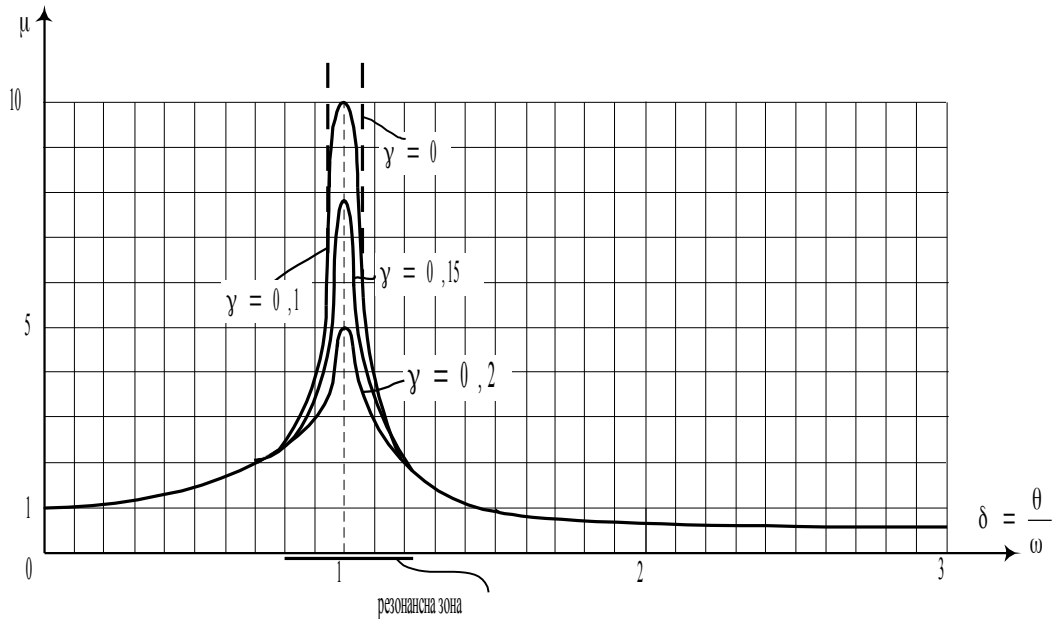


Рис. 1.8. Графіки залежності коефіцієнта  $\mu$  від коефіцієнта непружного опору  $\gamma$

Справді, відшукуючи значення  $\theta$ , при якому амплітуда досягає максимуму, бачимо, це трапиться тоді, коли

$$\theta^2 = \omega^2 - 2\alpha^2,$$

тобто до настання резонансу.

У вимушених коливаннях з опором завжди є зсув фази коливань порівняно з фазою сили, що збуджує, на величину

$$\operatorname{tg} \rho = - \frac{2\alpha\theta}{\omega^2 - \theta^2} = - \frac{2\alpha\theta}{\omega^2 - \theta^2}.$$

Викладене показує, що за відсутності сил опору ( $\gamma=0$ ) і при збігу частот вимушених і вільних коливань динамічний коефіцієнт  $\mu = \infty$ . Як показує точний розв'язок диференціального рівняння (1.24), при резонансі має місце нескінченне зростання амплітуди коливання. Слід також зазначити, що при великих амплітудах теорія малих коливань, що ми тут викладаємо, незастосовна. Тому поводження споруди при резонансі є більш складним. У будь-якому разі залишається правильним той висновок, що деформації можуть досягати значення, яке в багато разів перевищує їхній статичний розмір.

За наявності сил опору  $\gamma \neq 0$  останні відіграють істотну роль при резонансних або близьких до них коливань (резонансна зона:  $0,7 \leq \delta \leq 1,3$ ). Система ніби “вмикає” сили внутрішнього тертя як резерв, за допомогою якого вона тільки і може врівноважити зовнішнє навантаження при  $\theta = \omega$ .

### 1.5. Дослідження систем з одним ступенем свободи

На балках прогоном  $\ell$ , що мають різні граничні умови (рис. 1.9.), на відстані  $a$  від лівої опори знаходиться неурівноважений двигун вагою  $G$  з числом обертів  $n$  за хвилину. Двигун створює вертикальну складову відцентрової сили  $F \sin(\theta t)$ , яка викликає вимушені коливання балок з частотою  $\theta$ . Вагою балок нехтуємо.

Треба:

- а) визначити частоту  $\omega$  та період  $T$  вільних коливань кожної балки;
- б) розрахувати амплітуди вимушених коливань балок від вібраційного навантаження з урахуванням і без урахування сил опору;
- в) знайти, при якому числі обертів двигуна для кожної балки настає резонанс;
- г) дослідити зміну частоти вільних коливань балок залежно від довжини балки  $\ell$ , положення двигуна – відношення  $\frac{a}{\ell}$ , жорсткості перерізу  $EI$ . Побудувати графіки. Проаналізувати отримані результати;

д) розподілити масу двигуна за довжиною балки та визначити першу частоту вільних коливань балок як для систем з нескінченним числом ступенів свободи. Порівняти з результатами, отриманими в першому пункті.

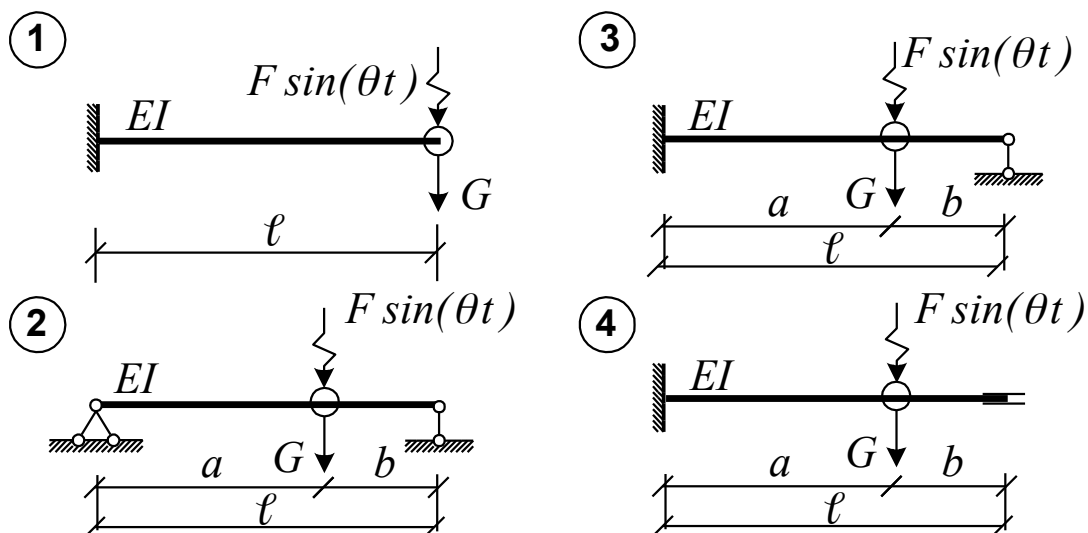


Рис. 1.9. Схеми балок

### Вказівки до виконання

1. Частоту вільних коливань,  $s^{-1}$ , визначити за формулою

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{ст}}}, \quad (1.38)$$

де  $g$  - прискорення вільного падіння;

$y_{ст}$  - статичне переміщення зосередженої маси  $m$  від сили її тяжіння.

У данному випадку масу  $m$  представляє маса двигуна. Залежно від граничних умов знайти статичне переміщення за табл. 1.1 для кожної балки.

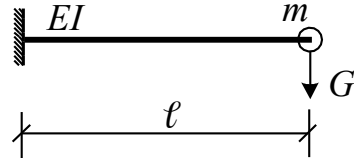
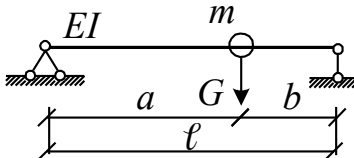
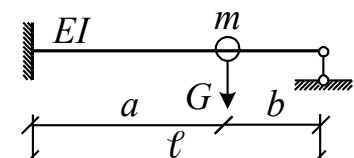
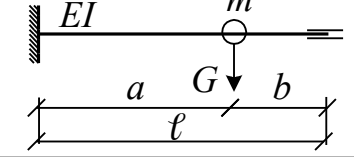
Період вільних коливань визначити за формулою

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.39)$$

Отримані результати порівняти між собою.

Таблиця 1.1

Визначення статичних переміщень маси

Номер схеми	Схема балки	Формула переміщення
1		$y_{cm(G)} = \frac{G \cdot \ell^3}{3 \cdot EI}$
2		$y_{cm(G)} = \frac{G \cdot a^2 b^2}{3 \cdot EI \cdot \ell}$
3		$y_{cm(G)} = \frac{G \cdot a^3 b^2}{12 \cdot EI \cdot \ell^3} (3\ell + b)$
4		$y_{cm(G)} = \frac{G \cdot a^3 b^3}{3 \cdot EI \cdot \ell^3}$

2. Насамперед слід визначити для кожної балки динамічні коефіцієнти  $\mu$  з урахуванням і без урахування сил опору за такими формулами:

- з урахуванням сил опору  $\alpha \neq 0$

$$\mu = \frac{l}{\sqrt{l - \frac{\theta^2}{\omega^2} + y^2 \frac{\theta^2}{\omega^2}}}, \quad (1.40)$$

де  $y = \frac{2\alpha}{\omega}$  - коефіцієнт, що характеризує опір системи;

- без урахування сил опору  $\alpha = 0$

$$\mu^* = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}. \quad (1.41)$$

Амплітуду вимушених коливань визначимо за формулою

$$y_{max} = y_{ст(G)} + \mu \cdot y_{ст(F)}, \quad (1.42)$$

де  $y_{ст(G)}$  – статичне переміщення від ваги двигуна, отримане раніше за табл. 1.1;

$y_{ст(F)}$  – статичне переміщення від вертикальної складової відцентрової сили  $F$ , яке слід також визначити за табл. 1.1.

3. Для визначення числа обертів двигуна, при якому для балки настає резонанс, слід дорівняти частоти вільних і вимушених коливань  $\theta = \omega$  та використати залежність частоти вимушених коливань  $\theta$  від числа обертів  $n$ .

Таким чином,

$$n = \frac{60 \cdot \theta}{2\pi} = \frac{30 \cdot \theta}{\pi}. \quad (1.43)$$

Замість  $\theta$  підставити  $\omega$  для кожної балки.

4. Дослідження зміни частоти вільних коливань  $\omega$  залежно від довжини балки  $\ell$ , положення двигуна  $a/\ell$ , жорсткості перерізу  $EI$  слід виконувати за формулою (1.38). При цьому в кожному випадку змінювати один параметр. Діапазон зміни змінних величин  $\ell^*$ ,  $a^*$ ,  $EI^*$  приймати у частках від заданих:

$$\begin{aligned} \ell^* &= (0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0)\ell; \\ a^* &= (0,2; 0,4; 0,6; 0,8)\ell; \\ EI^* &= (0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0)EI. \end{aligned} \quad (1.44)$$

При дослідженні зміни частоти вільних коливань залежно від довжини балки треба зберегти положення двигуна. Тобто відношення  $a/\ell$  повинно бути постійним (див. схеми 2-4 табл. 1.1). Для цього треба попередньо визначити відношення  $k = a/\ell$ , де  $a$  та  $\ell$  – задані величини. Потім для кожної нової довжини балки  $G$  визначити нові значення  $a^*$ ,  $b^*$ :

$$a^* = k \cdot \ell^*, \quad b^* = \ell^* - a^*. \quad (1.45)$$

Переміщення при різних значеннях  $a^*, b^*, \ell^*$  знайти за табл. 1.1. Жорсткість перерізу  $EI$  у цьому випадку постійна і дорівнює заданій.

Дослідження зміни частоти  $\omega$  в залежності від положення двигуна на балці виконати для схем 2-4. При цьому  $\ell$  та  $EI$  постійні. У кожному випадку змінювати параметр  $a$  у заданім діапазоні.

Для усіх схем знайти зміну частоти  $\omega$  залежно від положення двигуна, якщо довжина постійна, а положення двигуна задано.

За даними дослідження побудувати три графіки. На осі ординат відкласти частоту вільних коливань  $\omega$ , на осі абсцис – змінні величини: довжину балки  $\ell$ , відношення  $\frac{a}{\ell}$ , жорсткість перерізу  $EI$ .

5. Для подання балок як систем з нескінченним числом ступенів свободи зосереджену масу,  $\frac{\text{кН} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^2}$ , слід розподілити за довжиною балки за виразом

$$m = \frac{G}{q \cdot \ell}. \quad (1.46)$$

Визначення частоти вільних коливань,  $\omega$ , системи з нескінченним числом ступенів свободи виконати за формулою

$$\omega_k = \frac{\lambda_k^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad (1.47)$$

де  $k$  - номер частоти,  $k = 1, 2, 3, \dots$ ;

$\lambda_k$  - корені рівняння частот вільних коливань.

За формулою (1.47) визначити першу частоту ( $k = 1$ , основний тон), яка визначається першим коренем рівняння  $\lambda_1$ . Приклад розрахунку наведено в дод. 1.



## 1.6. Розрахунок на раптове навантаження

Нехай сила  $F(t) = F \cdot \varphi(t)$  змінюється, як це показано на рис. 1.10.

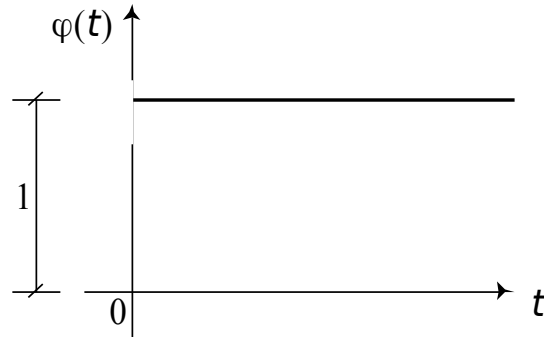


Рис. 1.10. Дія раптово прикладеної сили  $F(t) = F \cdot \varphi(t)$

Тоді для  $t > 0$  і при  $\alpha = 0$  рівняння (1.22) з урахуванням виразу (1.23) набуває вигляду

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = \frac{F(t)}{m}. \quad (1.48)$$

Будемо досліджувати сталий процес коливань, тобто візьмемо до уваги частинний розв'язок диференціального рівняння (1.48). Воно має такий вигляд:

$$y(t) = \frac{1}{\omega m} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (1.49)$$

Тут  $\tau$  - нова змінна - час, що змінюється в межах від 0 до  $t$ . Раптове навантаження характеризується тим, що (див. рис. 1.10.)

$$\begin{aligned} \text{при } t < 0 \quad \varphi(t) &= 0; \\ \text{при } t > 0 \quad \varphi(t) &= 1. \end{aligned}$$

З урахуванням цього

$$y(t) = \frac{F}{\omega m} \int_0^t \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (1.50)$$

З огляду на те, що

$$\sin \omega(t - \tau) = \sin \omega t \cdot \cos \omega \tau - \cos \omega t \cdot \sin \omega \tau,$$

одержимо

$$\int_0^t \sin \omega(t - \tau) d\tau = \frac{1}{\omega}(1 - \cos \omega t). \quad (1.51)$$

Тепер

$$y(t) = \frac{F}{m\omega^2}(1 - \cos \omega t). \quad (1.52)$$

Якщо замість  $\omega^2$  у вираз  $\frac{F}{m\omega^2}$  підставити значення виразу (1.5), то цей вираз одержить зміст статичного переміщення точки прикладення сили  $F$ . Позначимо його як

$$\frac{F}{m\omega^2} = F \delta_{11} = y_{cm}. \quad (1.53)$$

Тоді остаточний розв'язок виразу (1.52) запишеться так:

$$y(t) = y_{cm}(1 - \cos \omega t). \quad (1.54)$$

Графічно він поданий на рис. 1.11.

Він (рух) являє собою незагасальну коливання з частотою вільних коливань  $\omega$  біля статичного стану рівноваги з амплітудою  $y_{cm}$ .

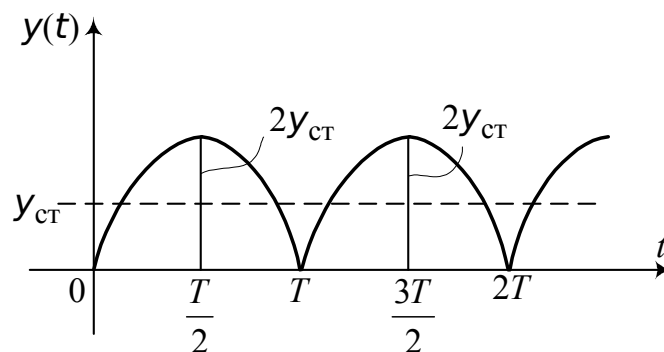


Рис. 1.11. Графік руху балки при раптовому навантаженні

Максимальне відхилення  $y_{max} = 2y_{cm}$ , а динамічний коефіцієнт  $\mu = y_{max}/y_{cm} = 2$ , тобто найбільший прогин дорівнює подвоєному статичному прогину. При  $t < \frac{\pi}{2}$  переміщення продовжують наростати під час дії сили  $F$  і максимуму досягнуть уже після її

зникнення. При  $t > \frac{\pi}{2}$  переміщення досягають максимуму, а потім починають зменшуватись. Отже, у тих випадках, коли тривалість  $t$  дії сили  $F$  менше  $\frac{T}{2}$ , максимальне переміщення варто шукати в тому процесі вільних коливань, що відбувається після припинення дії сили  $F$ .

### 1.7. Розрахунок на дію короткочасного навантаження

Графік короткочасного навантаження  $F(t) = F \cdot \varphi(t)$  показаний на рис. 1.12.

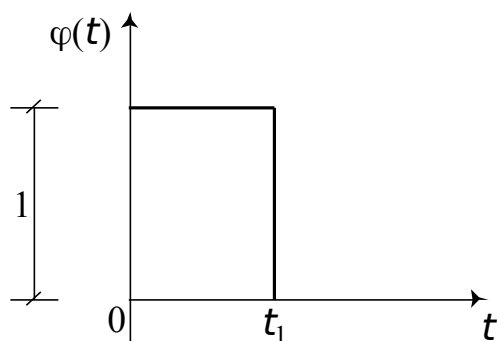


Рис. 1.12. Графік короткочасного навантаження

Як видно з цього графіка, при  $t=0$  на балці раптово з'явилося навантаження, потім залишалось без зміни до моменту  $t=t_1$ , після цього раптово зникло.

Частинний розв'язок диференціального рівняння (1.48) набуває для цього випадку навантаження такого вигляду:

$$y(t) = \frac{F}{\omega m} \left[ \int_0^{t_1} 1 \cdot \sin \omega(t - \tau) d\tau + \int_{t_1}^t 0 \cdot \sin \omega(t - \tau) d\tau \right]. \quad (1.55)$$

Використовуючи ті самі тригонометричні залежності, що й у розв'язку (1.52), знайдемо

$$y(t) = \frac{F}{m \omega^2} [\cos \omega(t - t_1) - \cos \omega t]. \quad (1.56)$$

З огляду на те, що

$$\cos \omega(t - t_1) - \cos \omega t = -2 \sin \omega \frac{t - t_1 + t}{2} \sin \omega \frac{t - t_1 - t}{2}, \quad (1.57)$$

одержимо

$$y(t) = 2y_{cm} \sin \frac{\omega t_1}{2} \sin \omega \left[ t - \frac{t_1}{2} \right]. \quad (1.58)$$

Отриманий розв'язок показує, що система здійснює вільні гармонійні коливання біля ненавантаженого стану з частотою  $\omega$  й амплітудою (рис. 1.13)

$$2y_{cm} \sin \frac{\omega t_1}{2}. \quad (1.59)$$

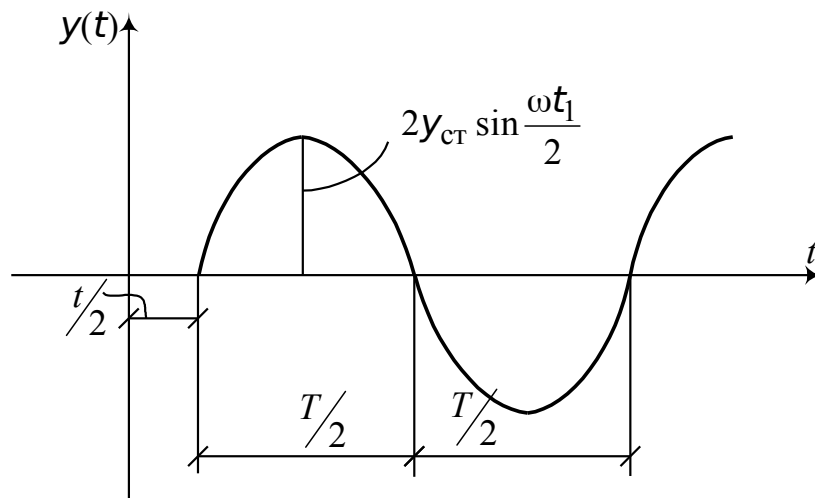


Рис. 1.13. Графік руху балки при короткочасному навантаженні

Значення динамічного коефіцієнта наведено в табл. 1.2.

Максимальне відхилення

$$y_{\max} = 2y_{cm} \sin \frac{\pi t_1}{T}. \quad (1.60)$$

Цікаво, що при  $t_1/T = k$ , де  $k$  - ціле число,  $y_{\max} = 0$ , тобто в цьому випадку після припинення дії сили  $F$  система залишається в спокої. Причину цього неважко зрозуміти: у момент часу  $t_1/T = k$  коливна система буде проходити через стан  $y = 0$ , і в цей момент часу внаслідок зникнення навантаження одержить додаткову

швидкість, що знищить наявну швидкість, отже, у цей момент часу виявиться  $y = 0$  і  $\frac{dy}{dt} = 0$ .

Як видно з табл. 1.2, ефект сили  $F$  залежить від тривалості її дії. Навіть величезна сила дасть незначний ефект, якщо її тривалість невелика.

Таблиця 1.2

Значення динамічного коефіцієнта  $\mu = y_{\max}/y_{ст}$   
при короткочасному навантаженні

$\frac{t_1}{T}$	0	0,02	0,03	0,04	0,05	0,10	0,15	0,167	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{y_{\max}}{y_{ст}}$	0	0,126	0,188	0,251	0,313	0,618	0,908	1,0	1,05	1,413	1,617	1,782	1,902	1,974	2

### 1.8. Ударне навантаження

Задача про розрахунок конструкцій на ударне навантаження містить у собі багато труднощів, що далеко не завжди можуть бути переборені найпростішими способами. Сюди належить у першу чергу аналіз напруженого стану в зоні контакту тіл, що співударяються, і процесу зміни контактних сил у часі. Обмежимося найпростішими прийомами, що не дають високої точності, але в той же час дозволяють правильно оцінити порядок переміщень, напружень і деформацій при ударі. Розглянемо, як і у всіх задачах цього розділу, систему з одним ступенем свободи у вигляді невагомої балки з точковою масою (рис. 1.14).

$$m = \frac{G_0}{g},$$

де  $G_0$  - вага балки;

$g$  - прискорення вільного падіння.

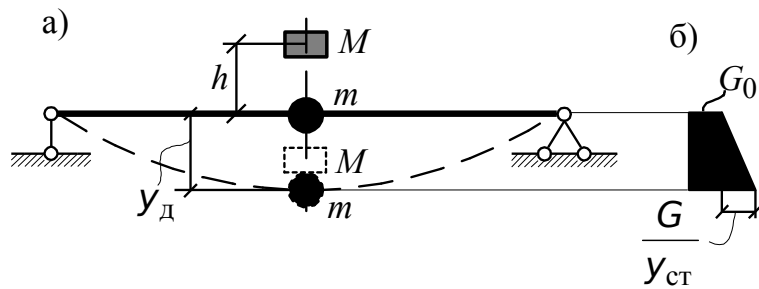


Рис. 1.14. До розрахунку невагомої балки з зосередженою масою на ударні впливи

Масу вантажу, що падає з висоти  $h$ , позначимо як

$$M = \frac{G}{g}.$$

Після того як вантаж  $G$  торкнувся балки, вони рухаються разом із швидкістю  $v_0 < v$ , яку знайдемо з умови рівності кількості руху системи до співудару і після співудару:

$$Mv = (M + m)v_0, \quad (1.61)$$

де  $v = \sqrt{2gh}$ .

Коли вся кінетична енергія вантажу перейде в потенційну енергію балки, що згинається, вантаж зупиниться, а сила, що згинає балку, досягне максимуму.

Кінетична енергія системи дорівнює

$$T_0 = \frac{(M + m)v_0^2}{2} = \frac{M^2}{2(M + m)}v^2. \quad (1.62)$$

Далі почнеться рух в оберненому напрямку. Сила взаємодії між балкою і вантажем буде зменшуватися. Коли балка цілком розпрямиться, вантаж за відсутності сил тертя одержить середню швидкість в оберненому напрямку.

Процес спільного руху вантажу  $G$  і балки може бути описаний рівнянням (1.8)

$$y(t) = A \sin \omega^* t + B \cos \omega^* t$$

при початкових умовах: при  $t = 0$   $y(t) = 0$ ,

$$\frac{dy}{dt} = v_0 = \frac{M}{M+m} v.$$

Використовуючи початкові умови, знайдемо (див. формулу (1.11))

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega^*} \sin \omega^* t. \quad (1.63)$$

Максимальне переміщення (при  $\sin \omega^* t = \pm 1$ )

$$y_{\max} = \frac{v_0}{\omega^*}, \quad (1.64)$$

а максимальна сила

$$F_{\max} = \frac{y_{\max}}{\delta_{11}} = \frac{v_0}{\omega^* \delta_{11}}. \quad (1.65)$$

Для визначення динамічного коефіцієнта  $\mu = \frac{y_{\max}}{y_{ст}}$  використовуємо відому з теоретичної механіки теорему про те, що збільшення кінетичної енергії системи дорівнює роботі зовнішніх сил. Тоді можна написати

$$T_1 - T_0 = A, \quad (1.66)$$

де  $T_1 = 0$  - кінетична енергія системи при  $y = y_d$ ;

$A$  - робота сил ваги  $G$  й  $G_0$  і сили  $R$ , що діє на маси з боку балки:

$$A = (G + G_0) y_d - R y_d. \quad (1.67)$$

Сила  $R$  виражається площею трапеції, що відображує зміну сили  $R$  на шляху  $y_d$  (рис. 1.14, б):

$$R = G_0 + \frac{1}{2} \frac{G y_d}{y_{ст}}.$$

Враховуючи  $T_0$  з виразу (1.62), одержимо квадратне рівняння відносно  $y_d$ :

$$y_d^2 - 2 y_d y_{ст} - 2h \frac{M}{M+m} y_{ст} = 0. \quad (1.68)$$

Два корені цього рівняння будуть

$$y_{\partial} = y_{cm} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{cm}} \frac{M}{M+m}} \right]. \quad (1.69)$$

У цій формулі знак плюс відповідає нижньому амплітудному положенню мас, а знак мінус – верхньому положенню.

Прийнявши знак плюс, остаточно одержимо формулу динамічного коефіцієнта:

$$\mu = \frac{y_{\partial}}{y_{cm}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{cm}} \frac{M}{M+m}}. \quad (1.70)$$

При  $h=0$  формула (1.70) дає  $\mu=2$ , що відповідає так званому раптовому завантаженню (див. п. 1.6).

На рис. 1.15 подана залежність  $\mu$  від параметрів удару  $\frac{h}{y_{cm}}$  і  $\frac{m}{M}$ .

З рис. 1.15 видно, що чим більше ударна маса, тим менше динамічний коефіцієнт. Пов'язано це з утратами кінетичної енергії тіла, що вдаряє, при непружному ударі. Щоб це підтвердити, достатньо порівняти енергію перед ударом

$$T = \frac{Mv^2}{2}$$

і енергію  $T_0$  (див. формулу (1.62)) після удару. Їхнє відношення дорівнює

$$\frac{T_0}{T} = \frac{M}{M+m} \leq 1. \quad (1.71)$$

Як бачимо, це відношення тим менше, чим більше відношення  $m/M$ .



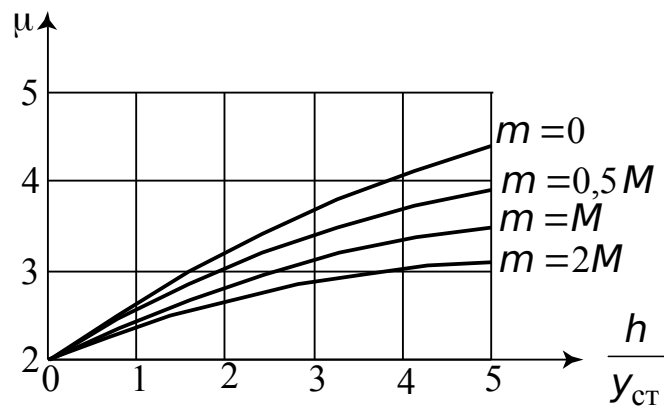


Рис. 1.15. Залежність динамічного коефіцієнта від відносної висоти падіння  $\frac{h}{y_{ст}}$  і співвідношення мас

## РОЗДІЛ 2

### КОЛИВАННЯ СИСТЕМ З РОЗПОДІЛЕНОЮ МАСОЮ

#### 2.1. Поперечні коливання прямих брусів

##### 2.1.1. Диференціальне рівняння поперечних коливань

Брус з розподіленою масою являє собою систему з нескінченним числом ступенів свободи. Його положення в будь-який момент часу визначається пружною лінією, що при динамічних навантаженнях описується функцією двох змінних: координати перерізу  $x$  і часу  $t$ , тобто

$$y = f(x, t).$$

Диференціальна залежність між кривизною пружної лінії і згинальним моментом при позитивних прогинах бруса, спрямованих униз, як відомо, має вигляд

$$EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -M(x, t). \quad (2.1)$$

**Диференціюємо двічі цей вираз по  $x$ :**

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -p(x, t), \quad (2.2)$$

де  $p(x, t)$  - діюче на брус поперечне навантаження, спрямоване знизу нагору (позитивний напрям).

Під час руху бруса розподілене навантаження  $p(x, t)$  в загальному випадку складається з навантажень таких видів: активного заданого навантаження інтенсивністю  $q(x, t)$ ; інерційних сил  $m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ , якщо знехтувати поздовжніми зсувами перерізів, їхніми поворотами і зсувами (тут  $m(x) = G/g$  - погонна маса балки,  $G$  - вага балки,  $g$  - прискорення вільного падіння); сил опору руху  $p^*(x, t)$ .

Таким чином,

$$p(x, t) = q(x, t) + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p^*(x, t). \quad (2.3)$$

**Підставляючи вираз (2.3) у вираз (2.2), одержимо**

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p^*(x, t) = -q(x, t). \quad (2.4)$$

Це і є диференціальним рівнянням поперечного руху бруса змінного перерізу в загальному вигляді. Воно лінійне зі змінними коефіцієнтами, що не залежать від діючого навантаження. Тому для дослідження руху  $y(x, t)$  може бути застосований принцип незалежності дії сил. Диференціальне рівняння (2.4) досить точно описує поведінку балки при не дуже швидких впливах (не миттєвих) і широко використовується при розв'язанні багатьох динамічних задач.

Будемо надалі розглядати балки з постійною жорсткістю  $EJ = \text{const}$  і рівномірно-розподіленою масою  $m$ . Будемо також розглядати сталі коливання; прийmemo  $p^*(x, t) = 0$ . Тоді диференціальне рівняння (2.4) набуває такого вигляду:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -q(x, t). \quad (2.5)$$

Диференціальне рівняння вільних коливань одержимо з виразу (2.5), приймаючи в ньому  $q(x, t) = 0$ :

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (2.6)$$

### 2.1.2. Вільні коливання бруса

Розв'язок диференціального рівняння (2.6) будемо шукати в такому вигляді:

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(x) \Phi_k(t), \quad (2.7)$$

де  $y_k(x)$  - функція, що залежить тільки від  $x$  ( $k$ -та форма коливань),

$\Phi_k(t)$  - функція, що залежить від часу  $t$ .

Підставимо вираз (2.7) у вихідне рівняння (2.6):

$$EJ \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} y_k(x) \Phi_k(t) \right] + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} y_k(x) \Phi_k(t) \right] = 0.$$

Прирівняємо до нуля однойменні доданки:

$$EJ \frac{\partial^4 y_k}{\partial x^4} \Phi_k(t) + m \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial t^2} y_k(x) = 0. \quad (2.8)$$

Розділимо це рівняння почленно на добуток функцій  $m \cdot y_k(x) \cdot \Phi_k(t)$ :

$$EJ \frac{\partial^4 y_k}{\partial x^4} = - \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial t^2} \cdot \frac{m y_k(x)}{\Phi_k(t)}. \quad (2.9)$$

З отриманої рівності видно, що ліва частина не залежить від  $t$ , а права – від  $x$ . Це дозволяє кожен з них прирівняти до постійної величини, що позначимо  $\omega_k^2$ . Після цього одержимо два незалежних одне від одного рівняння (цей процес називається процесом поділу змінних):

$$\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial t^2} + \omega_k^2 \Phi_k(t) = 0; \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^4 y_k}{\partial x^4} - s_k^4 y_k = 0. \quad (2.11)$$

Тут  $\omega_k$  - частота вільних коливань для  $k$ -ї форми;  $s_k^4$  - характеристичне число,

$$s_k^4 = \frac{m \omega_k^2}{EJ}. \quad (2.12)$$

Розв'язок диференціального рівняння (2.10) має такий вигляд:

$$\Phi_k(t) = A_k \sin \omega_k t + B_k \cos \omega_k t, \quad (2.13)$$

де  $A_k, B_k$  - довільні постійні, що характеризують початкові умови руху при  $t=0$ .

Як видно з виразу (2.13), вільні коливання  $y(x, t)$  відбуваються за гармонічним законом з частотою  $\omega_k$ . Кожній частоті вільних коливань відповідає головна форма  $y_k(x)$ .

### 2.1.3. Головні форми коливань

Знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння (2.11). Для цього складемо спочатку характеристичне рівняння

$$r^4 - s_k^4 = 0.$$

Корені цього рівняння

$$r_1 = s_k, \quad r_2 = -s_k, \quad r_3 = i s_k, \quad r_4 = -i s_k.$$

З виду коренів випливає, що загальний розв'язок має бути поданий у такому вигляді:

$$y_k(x) = A \operatorname{ch} s_k x + B \operatorname{sh} s_k x + C \cos s_k x + D \sin s_k x,$$

де  $\operatorname{ch} s_k x$ ,  $\operatorname{sh} s_k x$  - гіперболічні функції,

$$\operatorname{ch} s_k x = \frac{e^{s_k x} + e^{-s_k x}}{2}, \quad \operatorname{sh} s_k x = \frac{e^{s_k x} - e^{-s_k x}}{2}.$$

Довільні постійні  $A, B, C, D$  виражаться через початкові параметри (при  $x=0$ ). Тоді загальний розв'язок виразу (2.11) запишеться так:

$$y_k(x) = y_0 A_{s_k} + \frac{y_0'}{s_k} B_{s_k} - \frac{M_0}{s_k^2 E J} C_{s_k} - \frac{Q_0}{s_k^3 E J} D_{s_k}, \quad (2.14)$$

де  $y_0, y_0', M_0, Q_0$  - початкові параметри, відповідно прогин, кут повороту, згинальний момент, поперечна сила на початку координат;

$A_{s_k}, B_{s_k}, C_{s_k}, D_{s_k}$  - функції А.М. Крилова ,

$$\begin{aligned} A_{s_k} &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} s_k x + \cos s_k x), & B_{s_k} &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} s_k x + \sin s_k x); \\ C_{s_k} &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} s_k x - \cos s_k x), & D_{s_k} &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} s_k x - \sin s_k x). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Чисельні значення функцій (2.15) наведено в дод. 2.

Якщо продиференціювати рівняння (2.14) тричі по  $x$ , одержимо відповідно, рівняння для визначення кута повороту, згинального моменту, поперечної сили:

$$y_k''(x) = s_k y_0 D_{s_k} + y_0' A_{s_k} - \frac{M_0}{s_k E J} B_{s_k} - \frac{Q_0}{s_k^2 E J} C_{s_k}; \quad (2.16)$$

$$M_k(x) = -s_k^2 y_0 EJC_{sx} - s_k y_0^{\prime\prime} EJD_{sx} + M_0 A_{sx} + \frac{Q_0}{s_k} B_{sx}; \quad (2.17)$$

$$Q_k(x) = -s_k^3 y_0 EJB_{sx} - s_k^2 y_0^{\prime\prime} EJC_{sx} + s_k M_0 B_{sx} + Q_0 A_{sx}. \quad (2.18)$$

Початкові параметри  $y_0, y_0^{\prime\prime}, M_0, Q_0$  визначаються з умов закріплення балки (рис. 2.1). Незавжно переконатися, що при звичайних закріпленнях лівого кінця бруса два початкових параметри завжди відомі. Інші два невідомих початкових параметри визначаються з умов закріплення бруса на правому кінці при  $x=l$ . Оскільки складені при цьому два рівняння не містять вільних членів (однорідні), то для одержання відмінних від нуля розв'язків необхідно визначник складеної системи двох рівнянь прирівняти до нуля, що і дає рівняння частот у загальному вигляді. Це рівняння містить нескінченне число коренів  $s_k l$ , що визначають нескінченну кількість частот вільних коливань.

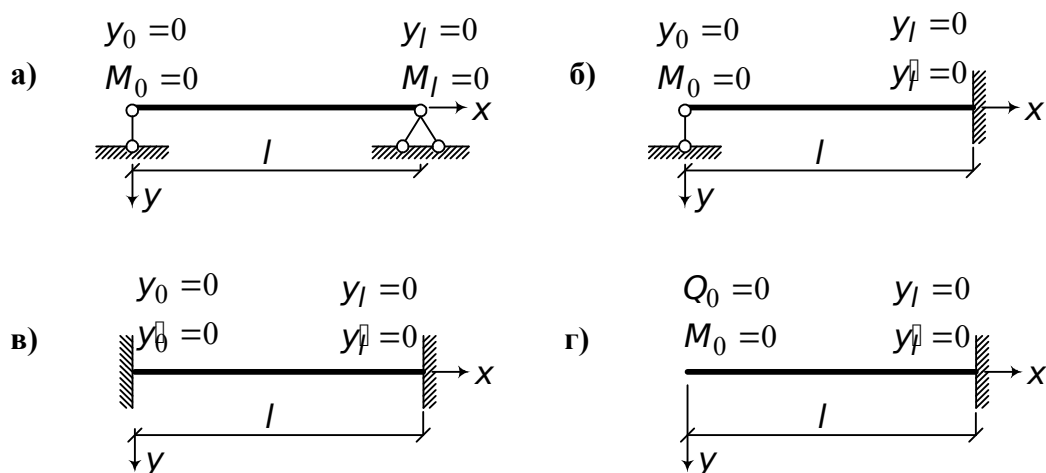


Рис. 2.1. Значення параметрів при різних умовах закріплення кінців балки

Розглянемо як приклад шарнірно обперту балку (рис. 2.1, а). Початкові параметри

$$y_k(0) = 0 \quad \text{і} \quad M_k(0) = 0.$$

Запишемо рівняння (2.14) і (2.17) для протилежного кінця балки:

$$y_k(l) = \frac{y_0}{s_k} B_{sl} - \frac{Q_0}{s_k^3 EJ} D_{sl} = 0;$$

$$M_k(l) = -s_k y_0 EJ D_{sl} + \frac{Q_0}{s_k} B_{sl} = 0.$$

Складаємо визначник отриманої системи рівнянь і прирівнюємо його до нуля:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{B_{sl}}{s_k} & -\frac{D_{sl}}{s_k^2 EJ} \\ -s_k EJ D_{sl} & \frac{B_{sl}}{s_k} \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваємо визначник і одержуємо рівняння частот:

$$B_{sl}^2 - D_{sl}^2 = 0. \quad (2.19)$$

Підставляємо в рівняння (2.19) функціональні залежності для  $B_{sl}$  і  $D_{sl}$  (у рівняннях (2.15) замінюємо  $x = l$ ):

$$\frac{1}{4}(\operatorname{sh} sl + \sin sl)^2 - \frac{1}{4}(\operatorname{sh} sl - \sin sl)^2 = 0.$$

Після найпростіших перетворень одержуємо

$$\operatorname{sh} sl \cdot \sin sl = 0. \quad (2.20)$$

Щоб була справедлива отримана рівність, досить, щоб один зі співмножників дорівнював нулю, але

$$\operatorname{sh} sl = \frac{e^{sl} - e^{-sl}}{2} \neq 0,$$

отже,  $\sin sl = 0$ , а це можливо у випадку, коли  $sl = k\pi$ , де  $k = 1, 2, \dots$

Звідси знайдемо  $s_k = \frac{k\pi}{l}$ .

З урахуванням виразу (2.15) одержуємо формулу для визначення частот вільних коливань шарнірно обпертої балки:

$$\omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

Знайдемо тепер головні форми коливань. Запишемо рівняння (2.14) у такому вигляді:

$$y_k(x) = \frac{Q_0}{s_k^3 EJ} \left[ \frac{y_0 s_k^2 EJ}{Q_0} B_{sx} - D_{sx} \right].$$

З рівняння  $\frac{y_0}{s_k} B_{sl} - \frac{Q_0}{s_k^3 EJ} D_{sl} = 0$  знайдемо

$$\frac{y_0 s_k^2 EJ}{Q_0} = \frac{D_{sl}}{B_{sl}} = 1.$$

Таким чином,

$$y_k(x) = \frac{Q_0}{s_k^3 EJ} \sin s_k x. \quad (2.22)$$

Форма коливань виразу (2.22) має вигляд синусоїди (рис. 2.2).

Для балок з іншими граничними умовами (рис. 2.2, б, в, г) задачі визначення частот і форм вільних коливань розв'язуються аналогічно.

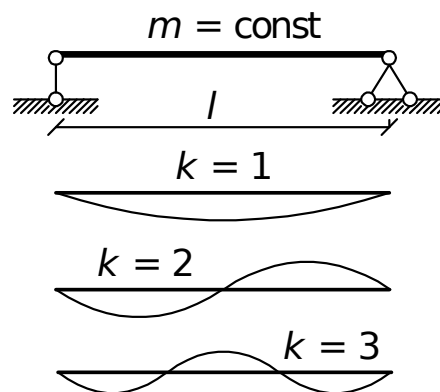


Рис. 2.2. Головні форми коливань шарнірно обпертої балки

#### 2.1.4. Вимушені коливання бруса



Припускаємо, що вантаж завантажений поперечним навантаженням, що змінюється за гармонічним законом

$$q(x, t) = q(x) \sin \theta t, \quad (2.23)$$

де  $\theta$  - частота вимушених коливань,

$q(x)$  - амплітудна функція навантаження, що залежить тільки від  $x$ .

З урахуванням виразу (2.23) диференціальне рівняння (2.5) набуває такого вигляду:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - q(x) \sin \theta t. \quad (2.24)$$

Розв'язок диференціального рівняння (2.24) без правої частини, що визначає вільні коливання бруса, отриманий в п. 2.1.2. Тут ми знайдемо окремі розв'язки виразу (2.24) (із правою частиною), що і будуть давати вимушені коливання при вібраційному навантаженні виразу (2.23). Розв'язок виразу (2.24) будемо шукати у вигляді

$$y(x, t) = y(x) \sin \theta t, \quad (2.25)$$

де  $y(x)$  - невідома амплітудна функція прогинів.

Підставивши вираз (2.25) у вихідне рівняння (2.24), одержимо для амплітудного стану ( $\sin \theta t = \pm 1$ )

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - s^4 y = - \frac{q(x)}{EJ}, \quad (2.26)$$

де

$$s^4 = \frac{m\theta^2}{EJ}. \quad (2.27)$$

На відміну від вільних коливань вираз (2.12), тут  $S$  включає частоту збуджуючої сили (допускаємо, що частота збуджуючої сили знаходиться досить далеко від резонансної зони).

Розв'язок рівняння (2.26) без правої частини можна записати за виразом (2.14), оскільки рівняння (2.26) без правої частини подібно до рівнянь (2.16). Тоді загальний розв'язок (повний

інтеграл) рівняння (2.26) при  $q(x) = q_0 = q = \text{const}$  буде мати такий вигляд:

$$y(x) = y_0 A_{sx} + \frac{y_0'}{s} B_{sx} - \frac{M_0}{s^2 EJ} C_{sx} - \frac{Q_0}{s^3 EJ} D_{sx} - \frac{q}{s^4 EJ} (A_{sx} - 1). \quad (2.28)$$

Як і раніше, якщо продиференціювати послідовно вираз (2.28) по  $x$ , знайдемо

$$y_x' = s y_0 D_{sx} + y_0' A_{sx} - \frac{M_0}{s EJ} B_{sx} - \frac{Q_0}{s^2 EJ} C_{sx} - \frac{q}{s^3 EJ} D_{sx}; \quad (2.29)$$

$$M_x = -s^2 EJ y_0 C_{sx} - s EJ y_0' D_{sx} + M_0 A_{sx} + \frac{Q_0}{s} B_{sx} + \frac{q}{s^2} C_{sx}; \quad (2.30)$$

$$Q_x = -s^3 EJ y_0 B_{sx} - s^2 EJ y_0' C_{sx} + s M_0 D_{sx} + Q_0 A_{sx} + \frac{q}{s} B_{sx}. \quad (2.31)$$

У рівняннях (2.28) – (2.31), як і раніше (див. також рівняння (2.14), (2.16) – (2.18)),  $y_0, y_0', M_0, Q_0$  - початкові параметри (у дод. 3 наведено значення зазначених параметрів для однопрогонових балок з різними закріпленнями і різним навантаженням),  $A_{sx}, B_{sx}, C_{sx}, D_{sx}$  - функції Кривола.

Рівняння (2.28) – (2.31) для бруса, завантаженого рівномірно розподіленим навантаженням, зосередженим навантаженням і зосередженим моментом (рис. 2.3), на підставі принципу суперпозиції записуються в такий спосіб:

$$y(x) = y_0 A_{sx} + \frac{y_0'}{s} B_{sx} - \frac{M_0}{s^2 EJ} C_{sx} - \frac{Q_0}{s^3 EJ} D_{sx} + \frac{q}{s^4 EJ} (A_{s(x-a)} - 1) - \frac{q}{s^4 EJ} (A_{s(x-b)} - 1) + \frac{F}{s^3 EJ} D_{s(x-c)} - \frac{M}{s^2 EJ} C_{s(x-d)}; \quad (2.32)$$

$$y_x'(x) = s y_0 D_{sx} + y_0' A_{sx} - \frac{M_0}{s EJ} B_{sx} - \frac{Q_0}{s^2 EJ} C_{sx} + \frac{q}{s^3 EJ} D_{s(x-a)} - \frac{q}{s^3 EJ} D_{s(x-b)} + \frac{F}{s^2 EJ} C_{s(x-c)} - \frac{M}{s EJ} B_{s(x-d)}; \quad (2.33)$$

$$M_x = -s^2 EJ y_0 C_{sx} - s EJ y_0' D_{sx} + M_0 A_{sx} + \frac{Q_0}{s} B_{sx} - \frac{q}{s^2} C_{s(x-a)} + \frac{q}{s^2} C_{s(x-b)} - \frac{F}{s} B_{s(x-c)} + M A_{s(x-d)}; \quad (2.34)$$

$$Q_x = -s^3 EJ y_0 B_{sx} - s^2 EJ y_0 C_{sx} + s M_0 D_{sx} + Q_0 A_{sx} - \frac{q}{s} B_{s(x-a)} + \frac{q}{s} B_{s(x-b)} - FA_{s(x-c)} + sMD_{s(x-d)} + M \quad (2.35)$$

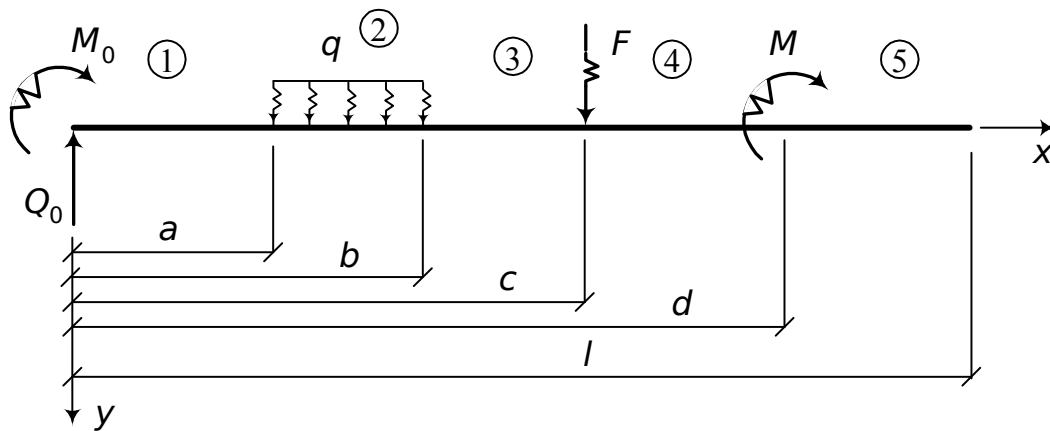


Рис. 2.3. Схема навантаження бруса

Розглянемо докладніше порядок складання рівняння (2.32). Оскільки на першій ділянці (рис. 2.3) навантаження відсутнє, то рівняння зігнутої осі для нього виражається розв'язком однорідного рівняння (2.14). Таким чином, для першої ділянки балки рівняння зігнутої осі визначається виразом, розташованим ліворуч символу  $|_1$ . Для того щоб одержати рівняння зігнутої осі на другій ділянці, до рівняння зігнутої осі на першій ділянці додамо член, що враховує вплив рівномірно розподіленого навантаження вираз (2.28), змінивши знак перед ним на протилежний (нагадуємо, що додатний напрямок навантаження прийнятий знизу нагору). Для того щоб записати рівняння зігнутої осі на третій ділянці, продовжимо задане рівномірно розподілене навантаження на третю ділянку і введемо компенсуюче навантаження такої самої інтенсивності. На четвертій і п'ятій ділянках додамо члени, що враховують вплив зосередженого навантаження і моменту. Рівняння (2.32) – (2.35) є універсальними. За їх допомогою можна описати зігнуту вісь, кут повороту, згинальний момент і поперечну силу на кожній ділянці, при цьому умови сполучення суміжних ділянок автоматично задовольняються.

## 2.2. Поздовжні коливання прямих стержнів

### 2.2.1. Диференціальне рівняння позовжніх коливань

Розглянемо однорідний ідеально прямий стержень постійного перерізу, що зазнає деформації розтягання-стискання, викликані осьовим позовжнім впливом на кінці (рис. 2.4).

Позначимо позовжнє переміщення перерізу з координатою  $X$  через  $u(x, t)$ , а сусіднього з координатою  $x + dx$  відповідно через  $u(x + dx, t)$ . Відносно позовження нескінченно малого елемента між цими перерізами буде

$$\varepsilon = \frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.36)$$

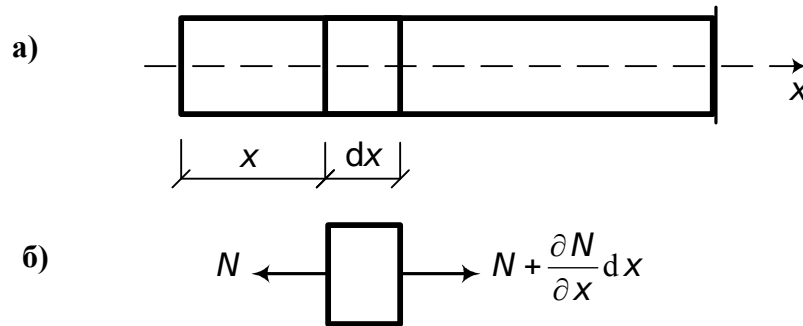


Рис. 2.4. До виведення диференціального рівняння позовжніх коливань

Відповідно напруження

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.37)$$

Поздовжня сила

$$N = \sigma A = EA \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.38)$$

Рівновага нескінченно малого елемента

$$- N + \left[ N + \frac{\partial N}{\partial x} dx \right] - m dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (2.39)$$

Звідси

$$\frac{\partial N}{\partial x} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.40)$$

де  $m$  - маса одиниці довжини стержня.

З урахуванням виразу (2.38) будемо мати диференціальне рівняння поздовжніх коливань

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ EA \frac{\partial u}{\partial x} \right] = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.41)$$

Для стержнів постійного перерізу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.42)$$

де

$$c^2 = \frac{EA}{m}. \quad (2.43)$$

Якщо щільність матеріалу позначити через  $\rho$ , то  $m = \rho A \cdot l$  і

$$c^2 = \frac{E}{\rho}. \quad (2.44)$$

Рівняння (2.42) називається хвильовим рівнянням і в математиці належить до так званих рівнянь гіперболічного типу.

### 2.2.2. Два основних види розв'язків

Розглянемо два характерних види розв'язків, що допускає це рівняння.

Насамперед зазначимо, що вираз

$$u = f(x - ct) \quad (2.45)$$

задовольняє рівняння (2.42). Знайдемо умову, при якій переміщення  $u_1$  перерізу з координатою  $x + dx$  при часі  $t + dt$  дорівнює переміщенню  $u$  перерізу з координатою  $x$  при часі  $t$ . Це дозволить визначити рух поздовжньої хвилі переміщень по стержню. Очевидно, що для цього повинна виконуватися рівність

$$dx - c dt = 0. \quad (2.46)$$

Тут  $dx$  - шлях, пройдений хвилею за час  $dt$ . Отже,

$$\frac{dx}{dt} = c. \quad (2.47)$$

Це означає, що величина  $C$  є швидкістю поширення поздовжньої хвилі по стержню, що відповідає закону (2.45). Наприклад, для сталі  $E \approx 2 \cdot 10^5$  МПа ( $2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>),  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup> і  $c = \sqrt{2 \cdot 10^{11} / 7800} = 5100$  м/с.

Якщо замість  $f(x - ct)$  узяти функцію  $\varphi(x + ct)$ , то і вона задовольняє рівняння (2.42), тільки для неї швидкість буде від'ємною, тобто спрямованою в інший бік. Функції  $f$  і  $\varphi$  визначають форму хвиль. Вони можуть бути знайдені з умов контакту тіла, що впливає на лівий кінець стержня, і рівності нулю зсуву в защемленні (рис. 2.4).

Як деяку, досить близьку, аналогію нагадаємо поширення ефекту поздовжнього удару локомотива в довгому потязі. Звук від послідовного співударяння вагонів дозволяє відчутно простежити за поздовжнім рухом ударної хвилі. Вивчення поширення хвиль деформації в середовищах дозволяє пояснити багато явищ, що зустрічаються в інженерній практиці. Наприклад, у довгому залізобетонному стержні, що має вільний кінець, поздовжня хвиля стискання, створена ударом, може викликати появу поперечних тріщин. Це пояснюється тим, що поздовжня хвиля стискання відбивається від вільного кінця, як така сама хвиля, але вже розтягання. Ця хвиля і може викликати розрив матеріалу.

Велике значення теорія поширення хвиль деформацій має в сейсмології, акустиці, описі явища удару, у питаннях інженерного використання вибуху і т. д.

Розглянемо тепер другий вид розв'язку рівняння (2.42). Будемо шукати розв'язок у такому вигляді:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) T_k(t), \quad (2.48)$$

де  $u_k(x)$  - функція, що залежить від  $x$ ;

$T_k(t)$  - функція часу.

Підставляючи один член ряду (2.48) у рівняння (2.42), одержимо

$$u_k(x) \frac{\partial^2 T_k}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} T_k(t).$$

Розділивши змінні, будемо мати два незалежних диференціальних рівняння:

$$\frac{\partial^2 T_k}{\partial t^2} + \omega_k^2 T_k(t) = 0; \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \left[ \frac{\omega_k}{c} \right]^2 u_k(x) = 0. \quad (2.50)$$

Розв'язок рівняння (2.49)

$$T_k(t) = A_k \sin \omega_k t + B_k \cos \omega_k t. \quad (2.51)$$

Постійні  $A_k$  і  $B_k$  визначаються з початкових умов руху: при  $t=0$   $T_k(0) = y_k(0)$ ,  $T_k'(0) = y_k'(0)$ . З урахуванням початкових умов рівняння (2.51) набуває вигляду

$$T_k(t) = \frac{y_k'(0)}{\omega_k} \sin \omega_k t + y_k(0) \cos \omega_k t. \quad (2.52)$$

Розв'язок рівняння (2.50)

$$u_k(x) = C_k \sin \frac{\omega_k}{c} x + D_k \cos \frac{\omega_k}{c} x. \quad (2.53)$$

З виразу (2.53) видно, що для конкретного  $X$  коливання в часі відбуваються за гармонічним законом з частотою  $\omega_k$ . Якщо до  $x$  у виразі (2.53) додати величину  $l_k = 2\pi c / \omega_k$ , то  $u_k(x + l_k) = u_k(x)$ . Отже,  $l_k$  - довжина хвилі поздовжніх коливань  $u_k(x)$ , а  $c$  - швидкість її поширення.

Довільні постійні у виразі (2.53) визначаються з граничних умов на кінцях стержня. Виразимо  $C_k$  і  $D_k$  через початкові параметри  $u_k(0)$  і  $N_k(0)$ . Для цього складемо вирази для

поздовжньої сили з урахуванням виразу (2.38):

$$N_k(x) = EA \frac{\partial u_k}{\partial x} = EA \left[ C_k \frac{\omega_k}{c} \cos \frac{\omega_k x}{c} - D_k \frac{\omega_k}{c} \sin \frac{\omega_k x}{c} \right]. \quad (2.54)$$

Записуємо граничні умови на лівому кінці (на початку координат):

$$\text{при } x=0 \quad u_k(x) = u_k(0), \quad N_k(x) = N_k(0).$$

Звідси одержуємо

$$D_k = u_k(0), \quad C_k = N_k(0) \left[ \frac{c}{\omega_k} \right] \frac{1}{EA}. \quad (2.55)$$

З урахуванням знайдених довільних постійних  $C_k$  і  $D_k$  маємо

$$u_k(x) = \frac{N_k(0)}{EA} \left[ \frac{c}{\omega_k} \right] \sin \frac{\omega_k x}{c} + u_k(0) \cos \frac{\omega_k x}{c}; \quad (2.56)$$

$$N_k(x) = N_k(0) \cos \frac{\omega_k x}{c} - EA u_k(0) \frac{\omega_k}{c} \sin \frac{\omega_k x}{c}. \quad (2.57)$$

Один з параметрів  $u_k(0)$  чи  $N_k(0)$  завжди відомий, а другий параметр визначається з граничних умов на правому кінці стержня (при  $x=l$ ).

Визначимо частоти і головні форми власних поздовжніх коливань консольного стержня (рис. 2.5).

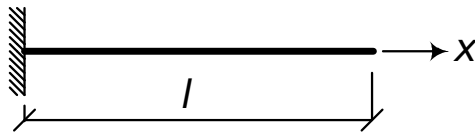


Рис. 2.5. До визначення частот і форм поздовжніх коливань

При  $x=0 \quad u_k(0) = 0$ . Тоді рівняння (2.56) і (2.57) запишуться в такий спосіб:

$$u_k(x) = \frac{N_k(0)}{EA} \left[ \frac{c}{\omega_k} \right] \sin \frac{\omega_k x}{c};$$



$$N_k(x) = N_k(0) \cos \frac{\omega_k x}{c}.$$

При  $x = l$   $N_k(l) = 0$ ,

$$N_k(l) = N_k(0) \cos \frac{\omega_k l}{c} = 0,$$

$N_k(0) \neq 0$ , отже,  $\cos \frac{\omega_k l}{c} = 0$ . А це можливо тоді, коли

$$\frac{\omega_k l}{c} = \frac{k\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

З урахуванням виразу (2.43)

$$\omega_k = \frac{k\pi}{2l} \sqrt{\frac{EA}{m}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.58)$$

Форма коливань визначається рівнянням (2.53) з урахуванням того, що  $D_k = u_k(0) = 0$ :

$$u_k(x) = A_k \sin \frac{k\pi x}{2l}. \quad (2.59)$$

Таким чином, рівняння (2.58) і (2.59) визначають спектр частот і форм власних поздовжніх коливань розглянутої континуальної моделі стержня. На відміну від дискретних систем, що володіють кінцевим числом ступенів свободи, цей спектр нескінченний.

### 2.2.3. Вимушені поздовжні коливання

Припускаємо, як і раніше, що брус завантажений поздовжнім навантаженням, яке змінюється за гармонічним законом

$$F(x, t) = F_x \sin \theta t. \quad (2.60)$$

Розв'язок диференціального рівняння (2.42) будемо шукати в такому вигляді:

$$u(x, t) = u(x) \sin \theta t. \quad (2.61)$$

Підставимо вираз (2.61) у вираз (2.42). У результаті одержимо

$$- u(x) \theta^2 \sin \theta t = c^2 \sin \theta t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

або

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = - \frac{\theta^2}{c^2} u(x) = 0. \quad (2.62)$$

Це рівняння збігається з рівнянням (2.50), якщо в ньому замінити  $\omega_k$  на  $\theta$ , що дозволяє на основі виразів (2.56) і (2.57) записати готові вирази

$$u(x) = \frac{N(0)}{EA} \frac{c}{\theta} \sin \frac{\theta x}{c} + u(0) \cos \frac{\theta x}{c}; \quad (2.63)$$

$$N(x) = N(0) \cos \frac{\theta x}{c} - EA u(0) \frac{\theta}{c} \sin \frac{\theta x}{c}. \quad (2.64)$$

У тих випадках, коли на стержень діють поздовжні навантаження в проміжних точках між кінцями чи де-небудь задано вимушений зсув  $\Delta u \sin \theta t$ , вирази (2.63) і (2.64) справедливі тільки для першої ділянки.

Як приклад розглянемо розрахунок консольного стержня, завантаженого на кінці поздовжньою силою, що змінюється за законом синуса (рис. 2.6).



Рис. 2.6. До розрахунку стержня, що зазнає вимушених поздовжніх коливань

Визначимо початкові параметри.

При  $x=0$   $u(x)=0$ . З рівняння (2.63) одержуємо  $u(0)=0$ .

При  $x = l$   $N(l) = F$ .

Використовуємо рівняння (2.64):

$$N(0) \cos \frac{\theta l}{c} = F.$$

Звідси

$$N_0 = \frac{F}{\cos \frac{\theta l}{c}}.$$

Маємо остаточно

$$u(x) = \frac{F}{EA} \frac{c}{\theta} \frac{\sin \frac{\theta x}{c}}{\cos \frac{\theta l}{c}};$$
$$N(x) = F \frac{\cos \frac{\theta x}{c}}{\cos \frac{\theta l}{c}}.$$

На закінчення цього пункту зауважимо, що ми розглянули поперечні і поздовжні коливання бруса і вивели два диференціальних рівняння (2.5) і (2.42). Таким чином, ми припустили, що брус виконує або тільки поздовжні, або тільки поперечні коливання. У дійсності можливість цих двох рухів може наступити одночасно. Ми не будемо давати тут диференціальних рівнянь зв'язаних поздовжніх і поперечних коливань тому, що цей зв'язок настільки слабкий, що практично для прямих стержнів обидва види коливань завжди можна розглядати окремо. Для рамних конструкцій окреме обчислення поздовжніх і поперечних коливань, власне кажучи, уже неможливо, тому що при фактичних формах власних коливань елементи виконують як поперечні, так і поздовжні рухи, причому величина тих і інших переміщень одного порядку. Наближено, однак, можна нехтувати згинаючою дією поздовжньої сили і враховувати тільки з викликаючим її стисканням.

### 2.3. Вплив постійної осьової сили на поперечні

## коливання бруса

Розглянемо брус з поперечним навантаженням, додатково стиснутий чи розтягнутий постійними силами  $N$ , прикладеними по кінцях. Силу  $N$ , що розтягує, будемо приймати зі знаком плюс, а стискаючу – зі знаком мінус. Виходимо з диференціального рівняння (2.1). У розглянутому в цьому пункті випадку згинальний момент дорівнює

$$M = M^0 \mp Ny, \quad (2.65)$$

де  $M^0$  - згинальний момент від поперечних навантажень. Верхній знак належить до розтягнуто-зігнутого бруса, а нижній – до стиснуто-зігнутого.

Наслідуючи викладенням, наведеним у п. 2.1.1, одержимо диференціальні рівняння вимушених і вільних коливань бруса з постійною осьовою силою  $N$ :

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \mp N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -q(x, t); \quad (2.66)$$

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \mp N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \quad (2.67)$$

Після поділу змінних (див. п. 2.1.1) отримаємо два незалежних одне від одного диференціальних рівняння. Диференціальне рівняння функції  $\Phi_k(t)$ , що залежить від часу, збігається з виразом (2.10), а диференціальне рівняння головної форми коливань має вигляд

$$\frac{\partial^4 y_k}{\partial x^4} \mp \frac{N}{EJ} \frac{\partial^2 y_k}{\partial x^2} - s_k^4 y_k = 0, \quad (2.68)$$

де  $s_k^4$  має значення таке саме, як і у виразі (2.12).

Перш ніж одержати загальний розв'язок рівняння (2.68), складемо його характеристичне рівняння:

$$r^4 \mp \frac{N}{EJ} r^2 - s_k^4 = 0. \quad (2.69)$$

Корені цього рівняння дорівнюють

$$r_{12} = \pm a_k, \quad r_{34} = \pm b_k i,$$

де

$$a_k = \sqrt{\pm \frac{N}{2EJ} + \sqrt{\frac{N^2}{4(EJ)^2} + S_k^4}}, \quad b_k = \sqrt{\mp \frac{N}{2EJ} + \sqrt{\frac{N^2}{4(EJ)^2} + S_k^4}}. \quad (2.70)$$

Зазначимо, що

$$a_k^2 - b_k^2 = \pm \frac{N}{EJ}, \quad a_k^2 + b_k^2 = 2 \sqrt{\frac{N^2}{4(EJ)^2} + S_k^4}.$$

Відповідно до коренів характеристичного рівняння розв'язок виразу (2.68) буде мати вигляд

$$y_k(x) = y_k(0)I_x + y_k'(0)J_x - \frac{M_k(0)}{EJ}K_x - \frac{Q_k(0)}{EJ}L_x, \quad (2.71)$$

де

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{a_k^2 + b_k^2} (b_k^2 \operatorname{ch} a_k x + a_k^2 \cos b_k x); \\ J_x &= \frac{1}{a_k^2 + b_k^2} \left[ \frac{b_k^2}{a_k} \operatorname{sh} a_k x + \frac{a_k^2}{b_k} \sin b_k x \right]; \\ K_x &= \frac{1}{a_k^2 + b_k^2} (\operatorname{ch} a_k x - \cos b_k x); \\ L_x &= \frac{1}{a_k^2 + b_k^2} \left[ \frac{1}{a_k} \operatorname{sh} a_k x - \frac{1}{b_k} \sin b_k x \right]. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Як і в п. 2.1.3, продиференціювавши рівняння (2.70) по  $x$ , одержимо рівняння для визначення кута повороту, згинального моменту, поперечної сили. Нагадаємо, що згинальний момент і поперечна сила пов'язані з пружною лінією такими залежностями:

$$y_k''(x) = - \frac{M_k(x)}{EJ}, \quad y_k'''(x) = - \frac{Q_k(x)}{EJ}.$$

Визначимо тепер частоти і головні форми вільних коливань балок, показаних на рис. 2.7:

$$\text{при } x=0 \quad y_k(0)=0, \quad M_k(0)=0;$$

$$\text{при } x=l \quad y_k(l)=0, \quad M_k(l)=0.$$

Далі записуємо рівняння прогину і згинального моменту для протилежного кінця балки ( $x=l$ ), складаємо визначник отриманої системи рівнянь і прирівнюємо його до нуля. Частотне рівняння має вигляд

$$\text{sh } a_k l \cdot \sin b_k l = 0.$$

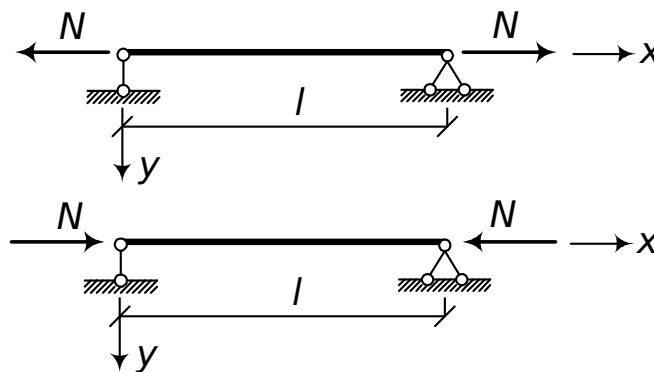


Рис. 2.7. До визначення частот і форм вільних коливань шарнірно обпертих балок, завантажених по кінцях постійними осьовими силами

Далі, слідуючи міркуванням, наведеним у п. 2.1.3, одержуємо

$$\omega_k = \omega_k^0 \sqrt{1 \pm \frac{N}{F_{кр}}}, \quad k=1, 2, \dots, \quad (2.73)$$

де (див. формулу (2.21))

$$\omega_k^0 = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}};$$

$F_{кр}$  - Ейлерова критична сила,

$$F_{кр} = \frac{k^2 \pi^2 EJ}{l^2}.$$

З рівності (2.73) можна зробити такі висновки: сила, що розтягує (верхній знак), збільшує частоту вільних коливань, а стискаюча - зменшує; частота коливань зменшується при зростанні поздовжньої сили, і при  $N \rightarrow F_{кр}$  частота коливань дорівнює нулю.

Рівняння (2.73) цікаве можливістю більш широкого практичного застосування. З цього рівняння випливає, що, спостерігаючи поперечні коливання стержня, можна судити про ступінь його стійкості.

Головна форма коливань визначається звичайним способом (див. рис. 2.2) і тут вона має вигляд синусоїди з напівхвилями.

Задача про вимушені коливання, викликані поперечним навантаженням, що змінюється за гармонічним законом, розв'язується відповідно до п. 2.1.4.

Загальний розв'язок рівняння (2.66) має вигляд

$$y_x = y_0 I_x + y_0 J_x - \frac{M_0}{EJ} K_x - \frac{Q_0}{EJ} L_x - \frac{q}{s^4 EJ} (I_x - 1). \quad (2.74)$$

## 2.4. Розрахунок нерозрізних балок на вібраційні впливи

### 2.4.1. Загальні теореми

Розкриття статичної невизначності систем при динамічному розрахунку може бути проведено різними способами. Тут ми розглянемо застосування двох основних методів: методу сил і методу переміщень. Будемо далі під динамічним переміщенням розуміти переміщення, що змінюється в часі за законом

$$\Delta_{km}(t) = \Delta_{km} \sin \theta t. \quad (2.75)$$

При цьому

$$\frac{d^2 \Delta_{km}(t)}{dt^2} = -\theta^2 \Delta_{km} \sin \theta t = -\theta^2 \Delta_{km}(t). \quad (2.76)$$

Розглянемо яку-небудь систему в деякий момент часу, що знаходиться під різними вібраційними навантаженнями з однаковою частотою у двох станах « $k$ » і « $m$ » (рис. 2.8).

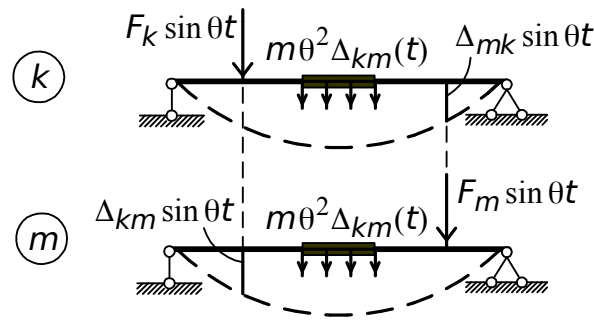


Рис. 2.8. Загальні теореми про роботу і переміщення при вібраційному навантаженні

Візьмемо для досліджень принцип можливих переміщень. Розглянемо роботу сил стану « $k$ » на переміщеннях стану « $m$ », а потім навпаки. Під час коливань на систему діють сили інерції мас, що змінюються за законом  $\sin \theta t$ :

$$\sum F_k \sin \theta t \Delta_{km}(t) + \sum \int (m \theta^2 \Delta_{mk}(t) ds) \Delta_{km}(t) = \sum \int M_k(t) \frac{M_m(t)}{EJ} ds; \quad (2.77)$$

$$\sum F_m \sin \theta t \Delta_{mk}(t) + \sum \int (m \theta^2 \Delta_{km}(t) ds) \Delta_{mk}(t) = \sum \int M_m(t) \frac{M_k(t)}{EJ} ds. \quad (2.78)$$

У виразах (2.77) і (2.78) враховано тільки згинальні моменти. За рівністю правих частин написаних виразів одержуємо рівняння взаємності робіт вібраційних навантажень:

$$\sum (F_k \sin \theta t) \Delta_{km}(t) = \sum (F_m \sin \theta t) \Delta_{mk}(t). \quad (2.79)$$

Якщо в кожному стані буде по одній силі, причому  $F_k \sin \theta t = F_m \sin \theta t$ , то

$$\Delta_{km}(t) = \Delta_{mk}(t) \quad (2.80)$$

або

$$\Delta_{km} \sin \theta t = \Delta_{mk} \sin \theta t. \quad (2.81)$$

Аналогічно можна установити при одиничних амплітудних значеннях діючих сил рівності:



$$\begin{aligned}
\delta_{km} \sin \theta t &= \delta_{mk} \sin \theta t ; \\
r_{km} \sin \theta t &= r_{mk} \sin \theta t ; \\
\delta_{km} \sin \theta t &= - r_{mk} \sin \theta t .
\end{aligned}
\tag{2.82}$$

Розглянемо тепер роботу одиничної статичної сили  $F_k = 1$  у стані « $k$ » на дійсних динамічних переміщеннях стану « $m$ », викликаних динамічним навантаженням  $F_m(t)$  (див. вираз (2.24), рис. 2.9):

$$1 \cdot \Delta_{km}(t) = \sum \int M_k(t) \frac{M_m(t)}{EJ} ds , \tag{2.83}$$

де  $M_k$  - вираз згинальних моментів від одиничної сили  $F_k = 1$  ;  
 $M_m(t)$  - вираз згинальних моментів від динамічного навантаження (вираз (2.30)).

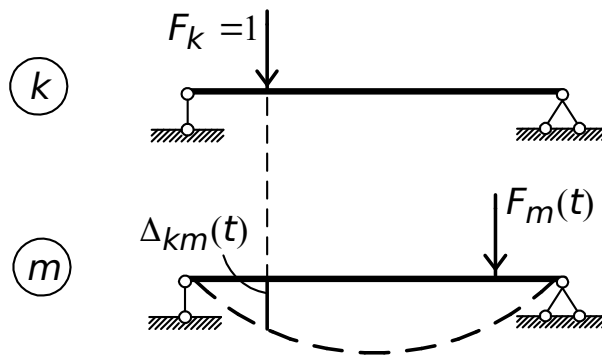


Рис. 2.9. Робота одиничної статичної сили  $F_k$  на динамічних переміщеннях

#### **2.4.2. Розрахунок нерозрізних балок, завантажених одночасно на декількох прогонах, методом сил**

Розглянемо нерозрізні балки на абсолютно жорстких опорах, що знаходяться під дією гармонічних сил, що змінюються з частотою  $\theta$ , і мають постійний поперечний переріз  $EJ = \text{const}$  (рис. 2.10).

Основна система (рис. 2.10, б) утворюється постановкою необхідного числа шарнірів над опорами. Якщо нерозрізна балка на одному чи обох кінцях має защемлення, то для скорочення числа невідомих можна основну систему утворити постановкою

шарнірів тільки над проміжними опорами (рис. 2.10, б). Оскільки невідомі ліворуч  $M_{n-1}$  і праворуч  $M_{n+1}$  (рис. 2.11) не будуть викликати згинання прогонів  $l_n$  і  $l_{n+1}$ , то вони і не будуть давати переміщень у напрямку моменту  $M_n$ .

Оскільки основна система методу сил складається зі стандартних елементів, то визначення початкових параметрів  $U_0, U_0^0, M_0, Q_0$ , що входять у рівняння (2.28) – (2.31), не викликає великих труднощів. У дод. 3 наведено значення зазначених параметрів для стандартних елементів.

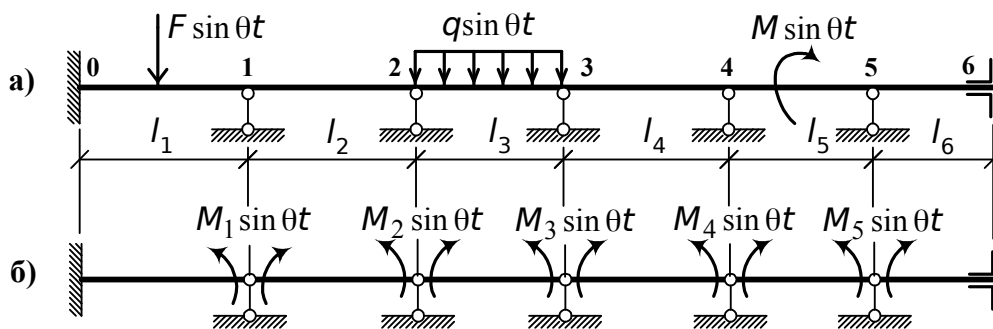


Рис. 2.10. Схеми нерозрізної балки (а) і основної системи (б)

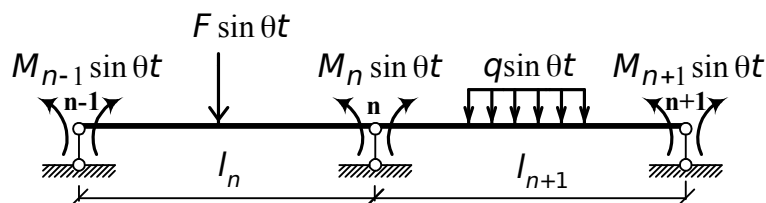


Рис. 2.11. Схема двох суміжних прогонів нерозрізної балки в основній системі

Загальне канонічне рівняння динамічних переміщень у напрямку моментів  $M_n$  (рис. 2.11) буде мати вигляд

$$\delta_{n,n-1}M_{n-1} + \delta_{nn}M_n + \delta_{n,n+1}M_{n+1} + \Delta_{nF} = 0. \quad (2.84)$$

Це рівняння трьох моментів динаміки споруд цілком відповідає відомому рівнянню трьох моментів статки споруд, причому останнє можна розглядати як окремий випадок першого: при статичному навантаженні  $\theta = 0, sI = 0$ . Число рівнянь (2.84)

дорівнює числу невідомих.

Визначимо коефіцієнти і вільні члени рівняння (2.84) (рис. 2.12).

Тут  $\delta_{n,n-1}$  - амплітудне значення кута повороту лівого прогону на  $n$ -й опорі, викликане  $M_{n-1}=1$  (рис. 2.12, а). Шуканий кут повороту визначається за таблицею стандартних розв'язків. Для зручності обчислень прогін  $l_n$  розвертаємо на  $180^\circ$  у горизонтальній площині так, щоб кут повороту виявився на початку координат. Тоді відповідно до схеми 2 дод. 3 маємо

$$\delta_{n,n-1} = y_n^I = \frac{1}{sEJ} \frac{D_{sl_n}}{B_{sl_n}^2 - D_{sl_n}^2}. \quad (2.85)$$

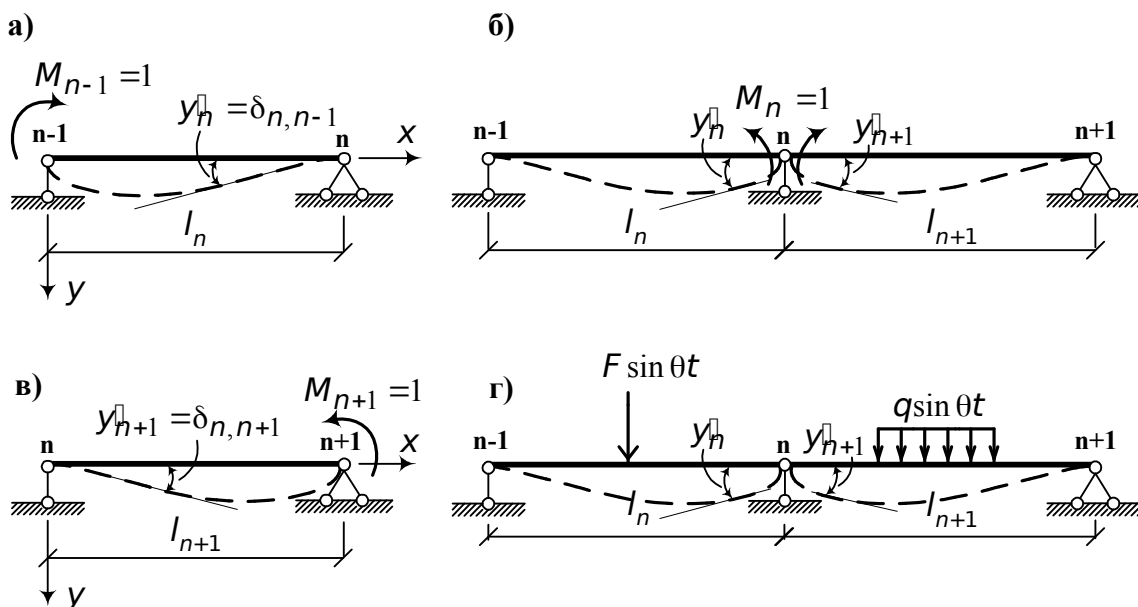


Рис. 2.12. До визначення коефіцієнтів і вільних членів системи рівнянь (2.84)

Аналогічно визначаємо амплітудне значення взаємного кута повороту перерізів лівого і правого прогонів на опорі  $n$  від  $M_n=1$  (рис. 2.12, б). Відповідно до схеми 1 дод. 3 одержуємо

$$\delta_{nn} = y_{n+1}^I + y_n^I = \frac{1}{sEJ} \frac{B_{sl_{n+1}} C_{sl_{n+1}} - A_{sl_{n+1}} D_{sl_{n+1}}}{B_{sl_{n+1}}^2 - D_{sl_{n+1}}^2} + \frac{1}{sEJ} \frac{B_{sl_n} C_{sl_n} - A_{sl_n} D_{sl_n}}{B_{sl_n}^2 - D_{sl_n}^2}. \quad (2.86)$$

Амплітудне значення кута повороту правого прогону (рис. 2.12, в) на опорі  $\mathbf{n}$  від  $M_{n+1} = 1$  визначається в такий спосіб (див. дод. 3, схема 2):

$$\delta_{n,n+1} = \gamma_{h+1}^{\square} = \frac{1}{sEJ} \frac{D_{sl_{n+1}}}{B_{sl_{n+1}}^2 - D_{sl_{n+1}}^2}. \quad (2.87)$$

У формулах (2.85) – (2.87)  $A_{sl_n}$ ,  $A_{sl_{n+1}}$ ,  $B_{sl_n}$ ,  $B_{sl_{n+1}}$ ,  $C_{sl_n}$ ,  $C_{sl_{n+1}}$ ,  $D_{sl_n}$ ,  $D_{sl_{n+1}}$  - функції впливу (функції Крилова), які визначаються за дод. 2 залежно від значень  $sl_n$  і  $sl_{n+1}$ .

Визначення амплітудного значення кута повороту  $\Delta_{nF}$  на опорі  $\mathbf{n}$  від зовнішнього навантаження пов'язано з розглядом заданого вібраційного навантаження в кожному конкретному випадку. Геометрично  $\Delta_{nF}$  визначається як сума кутів повороту на опорі двох суміжних балок (рис. 2.12, г):

$$\Delta_{nF} = \gamma_h^{\square} + \gamma_{h+1}^{\square}.$$

Формули для кутів повороту  $\gamma_h^{\square}$  і  $\gamma_{h+1}^{\square}$  від заданого вібраційного навантаження наведено в дод. 3. Тут, як і раніше, при обчисленні  $\gamma_h^{\square}$  можна прогін  $l_n$  повернути на  $180^\circ$  в горизонтальній площині і визначити  $\gamma_h^{\square}$  як початковий параметр.

Після розв'язання системи рівнянь (2.84) і визначення опорних моментів кожен прогін нерозрізної балки розглядається під дією навантаження і знайдених опорних моментів.

Прогин, кут повороту, згинальний момент і поперечна сила в будь-якому перерізі прольоту визначаються рівняннями (2.28) – (2.31).

Канонічні рівняння вільних коливань одержимо, приймаючи у виразі (2.54) вільні члени рівними нулю, тобто

$$\delta_{n,n-1} M_{n-1} + \delta_{nn} M_n + \delta_{n,n+1} M_{n+1} = 0. \quad (2.88)$$

У цих рівняннях частоти діючих навантажень замінюються частотами вільних коливань  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Рівняння (2.88) однорідні, а тому в загальному випадку потрібно визначник системи цих рівнянь прирівняти до нуля, після розкриття визначника одержати рівняння частот вільних коливань:

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.89)$$

Приклад розрахунку приведено у дод. 4.

### 2.4.3. Розрахунок нерозрізних балок, завантажених на одному прогоні

Як було зазначено раніше, рівняння трьох (і п'яти) моментів у динаміці споруд (формула (2.84)) мають зовнішню форму таку саму, як і в статиці споруд. Тому є очевидним, що і для балки, яка коливається, відношення амплітуд опорних моментів для двох суміжних опор незавантаженого прогону не залежить від амплітуд сил і їхнього розташування на завантажених прогонах.

Позначимо відношення правого опорного моменту до лівого через

$$K_n = \frac{M_n}{M_{n+1}},$$

назвемо це відношення лівим моментним відношенням, а відношення лівого опорного моменту до правого –

$$K_n^{\square} = \frac{M_{n-1}}{M_n} -$$

правим моментним відношенням.

Використовуючи рівняння (2.84), одержимо формули для визначення цих відношень через амплітудні переміщення:

$$K_{n+1} = - \frac{1}{\delta_{n,n-1}} \begin{vmatrix} \delta_{nn} \\ \delta_{n,n+1} \end{vmatrix} + \frac{\delta_{n,n-1}}{K_n} \begin{vmatrix} \delta_{nn} \\ \delta_{n,n+1} \end{vmatrix}; \quad (2.90)$$

$$K_n^{\square} = - \frac{1}{\delta_{n,n-1}} \begin{vmatrix} \delta_{nn} \\ \delta_{n,n+1} \end{vmatrix} + \frac{\delta_{n,n+1}}{K_{n+1}^{\square}} \begin{vmatrix} \delta_{nn} \\ \delta_{n,n+1} \end{vmatrix}, \quad (2.91)$$

де  $\delta_{n,n-1}$ ,  $\delta_{nn}$ ,  $\delta_{n,n+1}$  визначаються відповідно за формулами (2.85),

(2.86), (2.87).

Величини  $K_1$  на першому прогоні і  $K_n$  на останньому прогоні залежать від умов закріплення балки на лівому і правому кінцях. Якщо балка ліворуч шарнірно обперта, то

$$K_1 = \infty, \quad K_2 = -\frac{\delta_{11}}{\delta_{12}}, \quad K_3 = -\frac{1}{\delta_{23}} \left[ \delta_{22} + \frac{\delta_{21}}{K_2} \right] \quad \text{і т. д.} \quad (2.92)$$

При затисненому лівому кінці балки

$$K_1 = -\frac{\delta_{00}}{\delta_{01}} = -\frac{B_{sl_1} C_{sl_1} - A_{sl_1} D_{sl_1}}{D_{sl_1}}. \quad (2.93)$$

Аналогічно для останнього прогону (наприклад, балка має чотири прогони, тобто  $m=4$ ):

при шарнірному обпиранні правого кінця балки

$$K_4 = \infty, \quad K_3 = -\frac{\delta_{33}}{\delta_{32}}, \quad K_2 = -\frac{1}{\delta_{21}} \left[ \delta_{22} + \frac{\delta_{23}}{K_3} \right] \quad \text{і т. д.;} \quad (2.94)$$

при защемленні правого кінця

$$K_4 = -\frac{\delta_{44}}{\delta_{43}} = -\frac{B_{sl_4} C_{sl_4} - A_{sl_4} D_{sl_4}}{D_{sl_4}}. \quad (2.95)$$

Розглядаючи тепер завантажений прогін разом із прогонами, розташованими від нього ліворуч і праворуч, і складаючи для  $n-1$  і  $n$  опор рівняння трьох моментів (2.84), знайдемо

$$M_{n-1} = \frac{\Delta_{n-1,F} K_n + \Delta_{nF}}{\delta_{n-1,n} (K_n K_n - 1)}; \quad (2.96)$$

$$M_n = \frac{\Delta_{nF} K_n + \Delta_{n-1,F}}{\delta_{n-1,n} (K_n K_n - 1)}, \quad (2.97)$$

де  $\Delta_{n-1,F}$ ,  $\Delta_{nF}$  - амплітудні значення кутів повороту прогону  $l_n$  на опорах  $n-1$  і  $n$  від вібраційного навантаження. Ці переміщення визначаються як кути повороту на початку координат однопрогонової балки від заданого навантаження за дод. 3.

Наприклад, для завантаженого зосередженою силою прогону (рис. 2.13) за схемою 4 дод. 3 знайдемо спочатку  $\Delta_{n-1,F}$ ,

$$\Delta_{n-1,F} = \frac{F}{s^2 E J} \frac{B_{sb} D_{sl_n} - D_{sb} B_{sl_n}}{B_{sl_n}^2 - D_{sl_n}^2}; \quad (2.98)$$

а потім, розвернувши прогін на  $180^\circ$  у горизонтальній площині, –  $\Delta_{nF}$ :

$$\Delta_{nF} = \frac{F}{s^2 E J} \frac{B_{sa} D_{sl_n} - D_{sa} B_{sl_n}}{B_{sl_n}^2 - D_{sl_n}^2}. \quad (2.99)$$

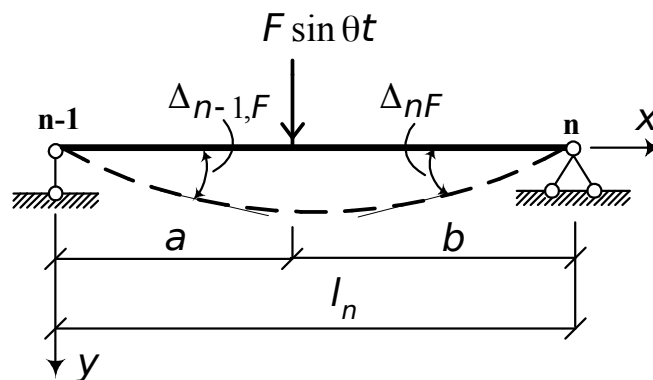


Рис. 2.13. Схема прогону  $l_n$ , завантаженого зосередженою вібраційною силою

Після визначення опорних моментів на завантаженому прогоні у виразах (2.96), (2.97) моменти на інших опорах знаходяться за допомогою коефіцієнтів за залежностями:

- ліворуч від завантаженого прогону

$$M_{n-2} = \frac{M_{n-1}}{K_{n-1}}, \quad M_{n-3} = \frac{M_{n-2}}{K_{n-2}}, \quad \dots; \quad (2.100)$$

- праворуч від завантаженого прогону

$$M_{n+1} = \frac{M_n}{K_{n+1}^\square}, \quad M_{n+2} = \frac{M_{n+1}}{K_{n+2}^\square}, \quad \dots \quad (2.101)$$

Далі, як було зазначено вище (див. п. 2.4.2), кожен прогін нерозрізної балки розглядається окремо. При цьому на

завантажений прогін діють зовнішнє вібраційне навантаження і знайдені опорні моменти, а незавантажені між опорами прогони знаходяться тільки під дією опорних моментів. Епюри згинальних моментів і поперечних сил будуються за допомогою рівнянь (2.30) і (2.31).

Приклад розрахунку наведено в дод. 5.

#### 2.4.4. Розрахунок нерозрізних балок методом переміщень

Розглянемо нерозрізну балку, що знаходиться під дією вібраційного навантаження (рис. 2.14).

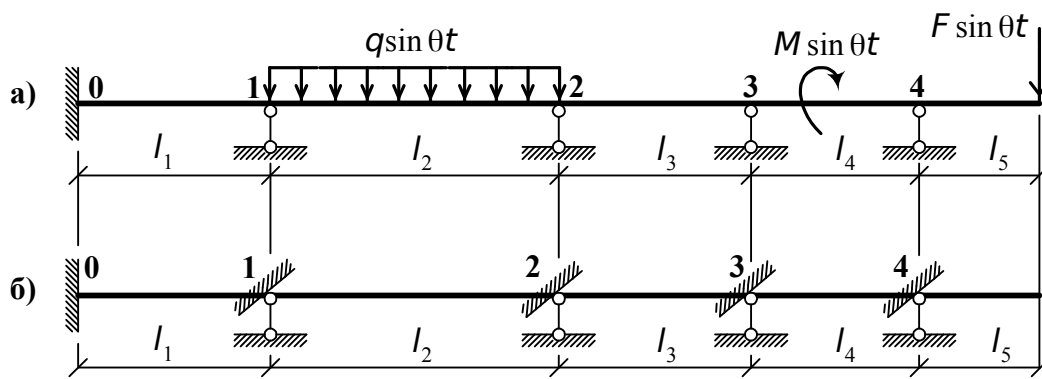


Рис. 2.14. Розрахункова схема (а) і основна система (б) нерозрізної балки

Основну систему одержимо способом уведення зв'язків, що перешкоджають кутовим переміщенням проміжних опор балки (рис. 2.14, б). Загальне канонічне рівняння вібраційних реактивних моментів для  $n$ -го зв'язку має вигляд

$$Z_{n-1} r_{n,n-1} + Z_n r_{nn} + Z_{n+1} r_{n,n+1} + R_{nF} = 0. \quad (2.102)$$

Основна система методу переміщень, як і методу сил, складається зі стандартних елементів, для яких у дод. 3 наведено розв'язки. На підставі цих розв'язків знайдемо коефіцієнти і вільний член рівняння (2.102).

У цьому рівнянні  $r_{n,n-1}$  - реактивний момент у зв'язку  $n$  від одиничного вібраційного зсуву зв'язку  $n - 1$  (рис. 2.15, а).

Розвернемо прогін  $l_n$  на  $180^\circ$  у горизонтальній площині і скористаємося дод. 3 (схема 15):



$$r_{n,n-1} = sEJ \frac{D_{sl_n}}{B_{sl_n} D_{sl_n} - C_{sl_n}^2} . \quad (2.103)$$

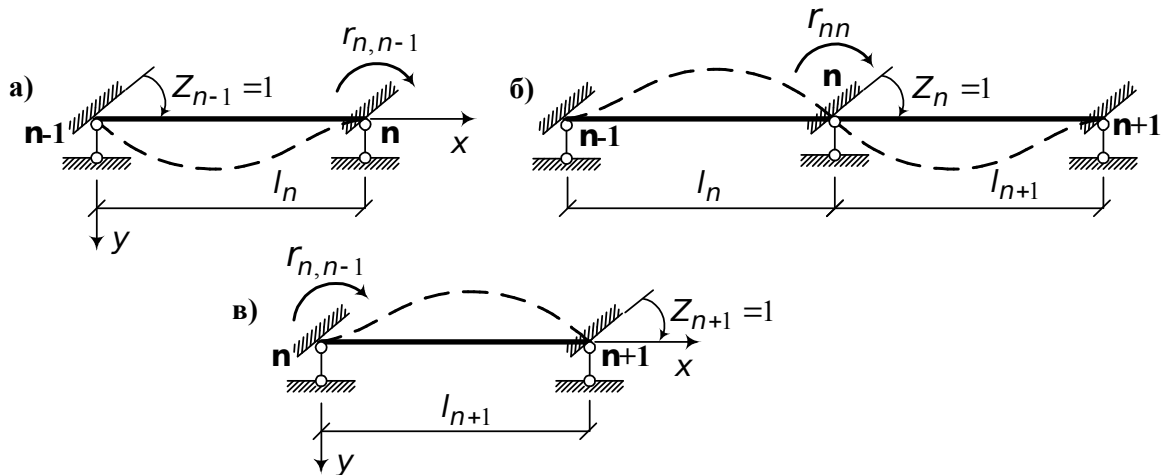


Рис. 2.15. До визначення коефіцієнтів канонічного рівняння

Амплітудне значення реактивного моменту у зв'язку  $n$  від повороту цього самого зв'язку на кут  $Z_n = 1$  (рис. 2.15, б) дорівнює (див. дод. 3, схема 14)

$$r_{nn} = sEJ \frac{A_{sl_{n+1}} D_{sl_{n+1}} - B_{sl_{n+1}} C_{sl_{n+1}}}{B_{sl_{n+1}} D_{sl_{n+1}} - C_{sl_{n+1}}^2} + sEJ \frac{A_{sl_n} D_{sl_n} - B_{sl_n} C_{sl_n}}{B_{sl_n} D_{sl_n} - C_{sl_n}^2} . \quad (2.104)$$

Тепер визначимо амплітудні значення реактивного моменту у зв'язку  $n$  від повороту зв'язку  $n+1$  на кут  $Z_{n+1} = 1$  (рис. 2.15, в). За дод. 3 (схема 15) маємо

$$r_{n,n+1} = -sEJ \frac{D_{sl_{n+1}}}{B_{sl_{n+1}} D_{sl_{n+1}} - C_{sl_{n+1}}^2} . \quad (2.105)$$

Амплітудне значення реактивного моменту у зв'язку  $n$  від зовнішнього вібраційного навантаження визначається в кожному конкретному випадку за допомогою дод. 3.

Після розв'язання системи рівнянь (2.33) і визначення реактивних зусиль в уведених зв'язках визначаються параметри напружено-деформованого стану балки та частоти вільних коливань (див. п. 2.1.4).

Приклад розрахунку нерозрізної балки дивись у дод. 6.

### 2.4.5. Розрахунок статично невизначних рам методом переміщень

Розглянемо статично невизначну раму, що знаходиться під дією вібраційного навантаження (рис. 2.16).

Перш ніж обґрунтувати застосовану тут методику розрахунку, зазначимо наступне. У той час, як ригель зображеної рами коливається вниз, у стійках виникають як згинальні моменти, так і стискаючі сили, що будуть збільшувати прогин стійок і одночасно викликати їхнє стискання. Для спрощення розрахунку будемо зневажати згинаючою дією поздовжньої сили і рахуватися в необхідних випадках із викликаючим його стисканням (див. п. 2.3). Основну систему одержимо шляхом уведення зв'язків, що перешкоджають кутовим і лінійним переміщенням вузлів рами (рис. 2.16, б). Канонічне рівняння, що включає як невідомі кутові і лінійні переміщення введених зв'язків, має такий вигляд:

$$Z_1 r_{k1} + Z_2 r_{k2} + \dots + Z_n r_{kn} + R_{kF} = 0. \quad (2.106)$$

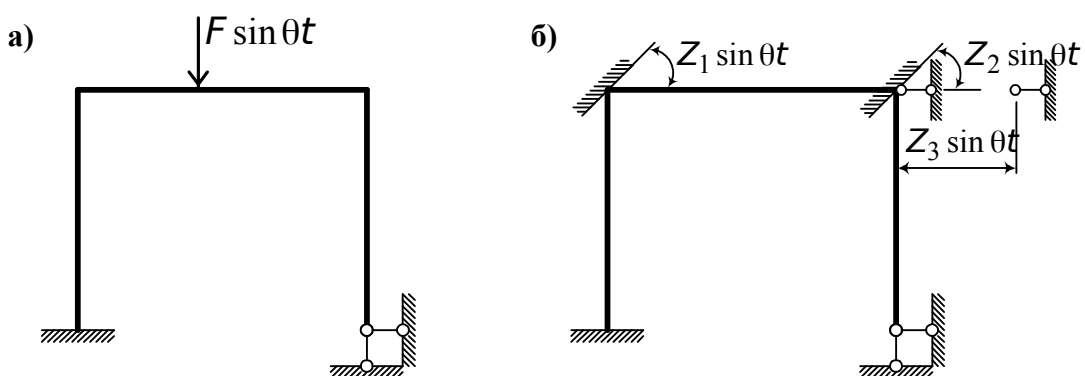


Рис. 2.16. Розрахункова схема статично невизначної рами (а) і основна система (б)

За цим рівнянням при  $k = 1, 2, \dots, n$  одержимо  $n$  канонічних рівнянь (число рівнянь дорівнює числу невідомих).

У рівнянні (2.106)  $r_{km}$  - амплітудне значення реакції у зв'язку  $k$  від одиничного вібраційного стискання зв'язку  $m$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ );  $R_{kF}$  - амплітудна реакція того самого зв'язку від заданого вібраційного навантаження. Формули для визначення

амплітудних значень реакцій  $r_{km}$  і  $R_{kF}$  наведено в дод. 3 (це відповідні зусилля  $M_0$  або  $Q_0$ ).

Після розв'язання системи рівнянь (2.106) кожен елемент рами розглядається як однопрогонова балка, завантажена зовнішнім навантаженням і знайденими реакціями введених зв'язків. Величини напружено-деформованого стану визначаються за рівняннями (2.28) – (2.31) або за рівняннями типу (2.74).

Канонічні рівняння вільних коливань мають такий вигляд:

$$Z_1 r_{k1} + Z_2 r_{k2} + \dots + Z_n r_{kn} = 0. \quad (2.107)$$

Далі складаємо визначник цієї системи рівнянь і прирівнюємо його до нуля:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.108)$$

Після розкриття визначника одержуємо рівняння частот вільних коливань.

Приклад розрахунку рами на вібраційні впливи дивись у дод. 7.

## РОЗДІЛ 3

### ДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ БУДІВЕЛЬНИХ МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ

У цьому розділі розглядаються основні динамічні характеристики будівельних матеріалів і конструкцій (пружні, непружні і міцнісні) і способи їх обліку в динамічних розрахунках споруджень на періодичні та імпульсивні навантаження. До них належать: 1) динамічна жорсткість при циклічному процесі деформування; 2) внутрішнє тертя, що обумовлює розсіювання енергії циклічних деформацій у зовнішнє середовище; 3) витривалість або динамічна міцність при циклічному процесі деформування.

Всі характеристики даються при помірному рівні динамічних деформацій і їх швидкостей. Ударна жорсткість і ударна міцність, тобто жорсткість і міцність при високошвидкісному процесі деформування, викликаному додаванням потужних однократних імпульсів (вибухів і т. п.), виключаються з розгляду. Пояснюється це тим, що експлуатаційні динамічні навантаження, що діють на промислові конструкції й спорудження, звичайно невеликі порівняно зі статичними<sup>1</sup>.

#### 3.1. Динамічна жорсткість

Фактична жорсткість елементів будівельних конструкцій, на відміну від жорсткості уявлених конструкцій з ідеального лінійно-пружного ізотропного однорідного матеріалу, не може бути визначена як деяка постійна величина, тому що вона може залежати від швидкості та закону зміни напруження в часі, рівня статичних і динамічних напружень, температури, вологості тощо.

---

<sup>1</sup> Виключенням є динамічні навантаження на споруди в сейсмічних районах, правила розрахунку і проектування яких передбачено відповідними нормами, інструкціями і посібниками.

Розрізняються поняття «статичної» і «динамічної» жорсткості елементів будівельних конструкцій. Під «статичною» розуміється жорсткість при повільних процесах деформування конструкцій, що вводиться в розрахунок споруджень на статичні навантаження. Під «динамічною» будемо розуміти жорсткість при досить швидких циклічних процесах деформування конструкцій (звичайно за частотами власних коливань), що вводиться в розрахунок споруджень на динамічні навантаження.

Статична жорсткість при тривалій дії навантаження менше від динамічної внаслідок впливу деформацій повзучості і релаксації напружень і залежить від часу, відлічуваного після початку навантаження.

Динамічна жорсткість залежить від періоду коливань, але для традиційних будівельних матеріалів (сталь, дерево, залізобетон, цегляна кладка) у межах звичайних частот періодичних навантажень вона змінюється слабо, наближаючись до статичної жорсткості, обумовленої короткочасними випробуваннями при низькому рівні напружень.

При призначенні розрахункового значення статичної жорсткості виходять із граничного стану за міцністю або деформаціями, що досягається при повному розрахунковому статичному навантаженні. Тому розрахунковому значенню статичної жорсткості відповідають верхні межі статичних напружень або деформацій.

При дії ж динамічних навантажень нижнім значенням жорсткостей елементів конструкції можуть не відповідати верхні значення амплітуд коливань і динамічних напружень; часто буває навпаки, і це пояснюється тим, що амплітуди залежать більшою мірою від відношення основного періоду власних коливань конструкції до періоду циклічного навантаження або до тривалості дії імпульсного навантаження. Тому розрахункове значення динамічної жорсткості повинне бути по можливості ближче до її фактичного значення і, як наслідок, має призначатися як найбільш імовірне її значення при даних експлуатаційних умовах. Фактично ж значення жорсткостей елементів конструкції звичайно вище значень, прийнятих у статичних розрахунках, внаслідок того, що фактичне статичне навантаження звичайно не досягає розрахункової величини, а в конструкції є невраховані

запаси жорсткості (обумовлені просторовою роботою монолітної конструкції, впливом жорсткості підлоги або заповнень і т. п.). Крім того, динамічна жорсткість вище від статичної внаслідок того, що при циклічному навантаженні виключаються деформації повзучості, вплив тріщин позначається менше, а модуль пружності з підвищенням частоти циклів зростає.

Хоча зі сказаного випливає, що при призначенні розрахункового значення динамічної жорсткості з метою наближення її до фактичного значення варто враховувати вплив багатьох чинників, проте облік їхнього впливу більш складний. Ці ускладнення можна обійти, вводячи в динамічний розрахунок деяке середнє значення динамічної жорсткості і поряд з цим можливі межі відхилення фактичного значення динамічної жорсткості від цього середнього розрахункового значення в той та інший бік. Відносні межі цих відхилень задаються як двозначні похибки визначення частот власних коливань конструкції, визначені шляхом порівняння розрахункових і дослідних значень частот [9]. Досліди в натурних умовах [9] показують, що ці середні значення динамічної жорсткості близькі до статичної жорсткості виходячи з припущення пружної роботи матеріалу.

Отже, динамічну жорсткість елементів будівельних конструкцій при розрахунку на помірні динамічні навантаження (періодичні та імпульсні) можна визначати виходячи з пружної стадії роботи матеріалу і вважати рівною добутку динамічного модуля пружності на відповідну геометричну характеристику поперечного перерізу елемента. Виключенням є випадки потужних динамічних навантажень, що викликають появу макропластичних деформацій, які тут не розглядаються<sup>2</sup>.

При динамічному розрахунку сталевих і дерев'яних конструкцій динамічні модулі пружності можна приймати такими, що дорівнюють статичним, без урахування післядії (при короткочасних випробуваннях). При розрахунку цегляних будинків на горизонтальні коливання модуль зсуву приймається  $0,3E$ , де  $E$  — модуль пружності цегляної кладки на стискання.

При динамічному розрахунку елементів залізобетонних каркасних будинків, що згинаються, а також монолітних

---

<sup>2</sup> Щоб уникнути непорозумінь, зазначимо, що в розрахунку конструкцій на періодичні навантаження так званим «методом динамічних жорсткостей» у термін «динамічна жорсткість» вкладається зовсім інший зміст.

залізобетонних конструкцій перекриття і покриття, плит і балок, що лежать на пружній основі, днищ і стінок резервуарів розрахункові динамічні жорсткості можна приймати такими, що дорівнюють жорсткостям суцільного бетонного перерізу (без обліку арматур), при цьому динамічний модуль пружності бетону приймається таким, що дорівнює нормативному значенню  $E_s$  відповідно до діючих норм проектування залізобетонних конструкцій. Відхилення розрахункового значення динамічної жорсткості залізобетонних елементів, що згинаються, від її фактичного значення, які можуть бути суттєвими внаслідок залежності динамічної жорсткості від рівня статичних напружень та інших чинників, враховуються призначенням більших відносних похибок визначення частот власних коливань залізобетонних конструкцій [9].

### 3.2. Внутрішнє тертя

#### *Визначення*

При циклічних деформаціях (коливаннях) конструкції частина енергії цих деформацій необоротно поглинається і розсіюється у вигляді тепла в зовнішнє середовище внаслідок внутрішнього тертя в матеріалі, тертя прослизання в з'єднаннях елементів конструкції («конструкційного гістерезису»), внутрішнього тертя в деформованій основі, а також зовнішніх опорів (тертя ковзання в опорах і аеродинамічному опорі). Аеродинамічний опір для звичайних конструкцій незначний (внаслідок їхньої великої жорсткості), і головну роль у загальному розсіюванні енергії коливань конструкції відіграють звичайно три перших чинники, об'єднані загальною назвою «внутрішнє тертя в конструкції». У збірних залізобетонних конструкціях, виконаних за розрізною схемою, помітну роль у загальному розсіюванні енергії може відіграти також сухе тертя в опорах, яке за способом його обліку як дисипативного чинника в завданнях динаміки може бути віднесене умовно до внутрішнього тертя<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> Крім того, сухе тертя в опорах може впливати на умови їхнього закріплення, підвищуючи загальну динамічну жорсткість конструкції.

Пояснення природи внутрішнього тертя в традиційних будівельних матеріалах варто шукати в неоднорідності структури матеріалу.

Внутрішнє тертя в будівельних конструкціях відіграє важливу сприятливу роль, будучи причиною швидкого загасання вільних коливань конструкції, порушуваних ударами, і обмеження амплітуд резонансних коливань при дії періодичних навантажень.

При циклічних деформаціях ідеально пружної лінійної системи діюча на неї зовнішня циклічна сила  $P$  прямо пропорційна пружному переміщенню  $z$  системи, і залежності  $P(z)$  при навантаженні і розвантаженні збігаються, являючи собою пряму лінію  $ab$  (рис. 3.1, а). Для реальної ж системи, що має внутрішнє тертя, ця залежність нелінійна і двозначна та являє собою при сталих циклах навантаження і розвантаження замкнуту криву, названу петлею гістерезису. При гармонійних коливаннях петля є еліпсом (рис. 3.1, б) із центром у початку координат  $P, z$ , а при вільних коливаннях залежність  $P(z)$  являє собою еліптичну спіраль (рис. 3.1, в).

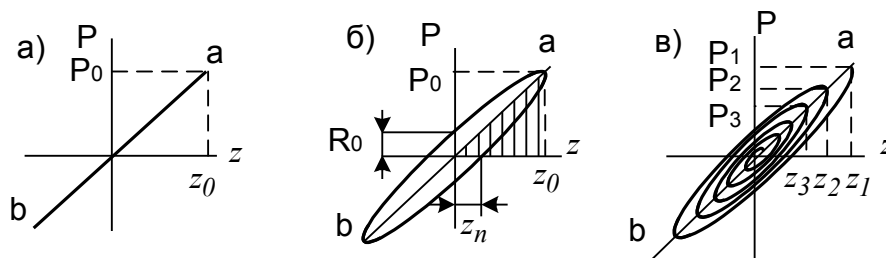


Рис. 3.1. Залежності сили  $P$  від переміщення  $z$ :  
 а — для ідеально пружної системи; б — для системи з внутрішнім тертям при гармонійних коливаннях; в — для системи з внутрішнім тертям при вільних коливаннях

Площа замкнutoї петлі гістерезису пропорційна роботі  $\Delta W$ , спричиненої силами внутрішнього тертя за один цикл деформацій, а площа заштрихованого трикутника (рис. 3.1, б) пропорційна роботі  $W$  пружних сил при зростанні деформації від 0 до максимуму. Відношення



$$\psi = \frac{\Delta W}{W} = 2\pi \frac{z_n}{z_0} = 2\pi \frac{R_0}{S_0}, \quad (3.1)$$

яке характеризує величину розсіяної за цикл енергії в частках енергії  $W$ , називається коефіцієнтом поглинання енергії. Тут  $z_0$  і  $Z_n$  – амплітуди пружної і непружної деформації, а  $S_0 = P_0$  і  $R_0$  – амплітуди пружної й непружної сили відповідно (рис. 3.1, б). При вільних коливаннях, коли амплітуда деформації змінна і змінюється по кривій, що знижується монотонно,  $Z_0 = Z_0(f)$  (рис. 3.2), за визначенням

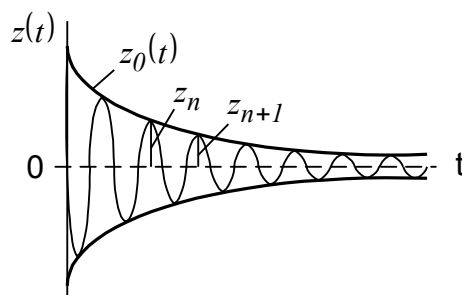


Рис. 3.2. Вільні загасальні коливання  $z(t)$  і їх обвідна  $z_0(t)$

$$\psi = - \int_t^{t+T} \frac{dW}{W}, \quad (3.2)$$

де  $T$  — період циклу.

Підставляючи сюди

$$W = \frac{c}{2} z_0^2(t),$$

де  $c$  - коефіцієнт пружності системи,

одержимо

$$\psi = -2 \int_t^{t+T} \frac{dz_0}{z_0} = 2 \ln \frac{z_n}{z_{n+1}} = 2\delta, \quad (3.3)$$

де  $\delta = \ln z_n - \ln z_{n+1}$  - логарифмічний декремент коливань;

$z_n$  і  $z_{n+1}$  ординати обвідної  $z_0(t)$  і  $z_0(t+T)$  відповідно в  $n$  і  $(n+1)$  циклах.

Співвідношення (3.1) і (3.3) справедливі для непружних опорів будь-якої природи і будь-якого закону загасання в часі.

Якщо коефіцієнт  $\psi$  або  $\delta$  змінюється зі зміною амплітуди  $z_0$ , він повинен визначатися як функція амплітуди найбільшого напруження (нормального  $\sigma_0$  — при коливаннях згину і розтягання-стискання та дотичного  $\tau_0$  — при коливаннях крутіння), що відповідає амплітуді переміщення  $z_0$  при сталих коливаннях і ординаті обвідної при вільних загасальних коливаннях.

$$z_0 = \sqrt{\frac{z_n^2 - z_{n+1}^2}{2(\ln z_n - \ln z_{n+1})}} \approx \frac{z_n + z_{n+1}}{2}, \quad (3.4)$$

### *Дослідні дані*

Як показують досліди, коефіцієнт внутрішнього поглинання  $\psi$  залежить від амплітуди напруження, але залежність ця різна для різних матеріалів і різних рівнів напружень. На рис. 3.3 показано характер цієї залежності для деяких будівельних матеріалів при коливаннях згину; на осі абсцис відкладено відношення  $\sigma_0/|\sigma|$ , де  $|\sigma|$  - допустиме напруження (для залізобетону -  $|\sigma|$  арматури). Загальним для всіх матеріалів є майже лінійне зростання коефіцієнта  $\psi$  і зростання  $\sigma_0$  в області дуже малих амплітуд напружень. У цій області  $\psi$  зростає від 0 до якогось більш-менш стабільного значення  $\psi_0$ , що відповідає малій амплітуді напруження  $\sigma_0^*$  (приблизно  $\sigma_0^* = 0,025[|\sigma|]$ ). При подальшому збільшенні  $\sigma_0$  коефіцієнт  $\psi$  для дерева, целулоїду, скла, гуми залишається постійним, для сталі марки Ст. 3 і алюмінію він повільно зростає в області середніх і швидше в області більших амплітуд напружень; для бетону і залізобетону він слабо зростає, а потім починає повільно знижуватися. Для багатьох машинобудівних сталей і кольорових металів коефіцієнт  $\psi$  безупинно швидко зростає зі збільшенням амплітуди напруження, починаючи з  $\sigma_0 = 0$ . Всі ці залежності  $\psi(\sigma_0)$ , що мають одну або дві точки перегину, можна задовільно апроксимувати аналітичним виразом

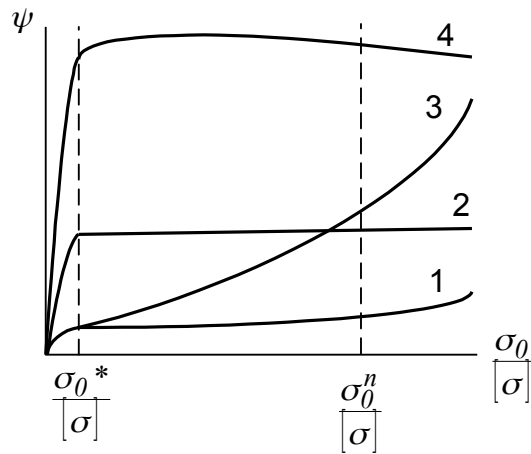


Рис. 3.3. Залежності коефіцієнта поглинання  $\psi$  від амплітуди напружень  $\sigma_0$  для будівельних матеріалів:  
 1 – Ст 3, алюміній; 2 – дерево, скло, гума; 3 – машинобудівні сталі;  
 4 – бетон, залізобетон, цегляна кладка

$$\psi = \psi_0 \left[ \frac{\sigma_0}{\alpha + \sigma_0} + \beta \sigma_0^k \right], \quad (3.5)$$

де  $\psi_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  і  $k$  – постійні параметри.

Аналогічні залежності  $\psi(\sigma_0)$  спостерігаються і для натурних конструкцій з відповідних матеріалів.

Для будівельних конструкцій промислових будинків, де динамічні навантаження звичайно малі порівняно зі статичними (виключенням є сейсмічні навантаження), практичний інтерес має область напружень від 0 до  $\sigma_0'$ , для якої залежність  $\psi(\sigma_0)$  можна замінити більше простою наближеною залежністю (рис. 3.4, а). Тоді для області малих напружень (від 0 до  $\sigma_0^*$ ), важливої в тих випадках, коли рівень коливань варто обмежувати виходячи з вимог санітарних норм і технології точних виробничих процесів,  $\psi$  можна вважати лінійно зростаючим від 0 до  $\psi_0$  і подавати залежністю (3.5), вважаючи  $\alpha = \infty$ ,  $\beta = \sigma_0^{*-1}$ ,  $k = 1$ .

$$\psi = \psi_0 \frac{\sigma_0}{\sigma_0^*} \text{ при } \sigma_0 \leq \sigma_0^*. \quad (3.6)$$

При середньому рівні напружень на рис. 3.4 (від  $\sigma_0^*$  до  $\sigma_0' \approx 0,5|\sigma|$ ), а у випадку кривої 2— для всієї області напружень від  $\sigma_0^*$  до  $|\sigma|$ ,  $\psi$  можна приймати постійним (вважаючи у формулі (3.6)  $\alpha = \beta = 0$ ):

$$\psi = \psi_0, \text{ при } \sigma_0 \geq \sigma_0^*. \quad (3.7)$$

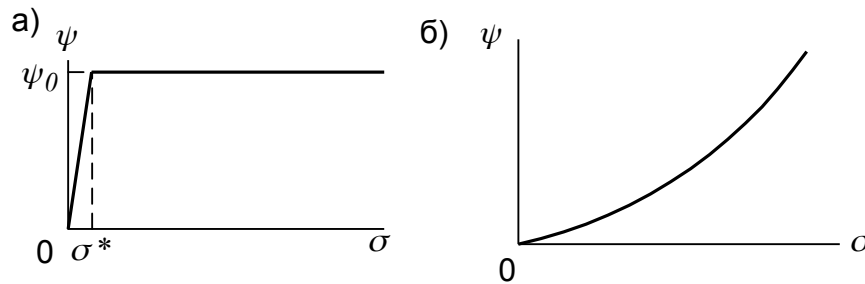


Рис. 3.4. Розрахункові залежності коефіцієнта поглинання від амплітуди напруження  $\sigma_0$ :

*a* – для будівельних матеріалів і конструкцій;  
*б* – для машинобудівних матеріалів і конструкцій

Для задач машинобудування, де динамічні навантаження на елементи машин можуть бути більшими і область малих напружень не має звичайно практичного значення, залежність  $\psi$  ( $\sigma_0$ ) можна замінити при розрахунку наближеною (рис. 3.4, б), що впливає з виразу (3.5) при  $\alpha = \infty$ ,  $\beta_0 = \psi_0 \beta$ :

$$\psi = \beta_0 \sigma_0^*. \quad (3.8)$$

Коефіцієнт  $\psi$  залежить від виду напруженого стану матеріалу при коливаннях (розтягання-стискання, згин, крутіння), однак встановити зв'язок між значеннями  $\psi$  при різних видах коливань поки не вдалося.

Для традиційних будівельних і машинобудівних матеріалів  $\psi$  практично не залежить від швидкості деформації (і, отже, від частоти коливань)<sup>4</sup>, а також від температури в межах її природних коливань (від  $-30$  °С до  $+40$  °С). Для деяких типів

<sup>4</sup> Цей факт установлено численними дослідженнями, описаними у вітчизняній і закордонній літературі [10], дослідями і різними методами.

пластмас  $\psi$  може залежати від частоти коливань і від температури; для таких матеріалів  $\psi$  варто вважати функцією амплітуди напруження  $\sigma_0$ , колової частоти  $\omega$  і температури  $T^0$ :  $\psi = \psi(\sigma_0, \omega, T^0)$ .

Для всіх матеріалів  $\psi$  не залежить від розмірів зразка, але залежить від його форми (зокрема від форми поперечного перерізу); залежність  $\psi$  від форми можна врахувати аналітичним шляхом.

Коливання будівельних конструкцій відбуваються біля положення статичної рівноваги, що відповідає звичайно значним статичним напруженням  $\sigma_c$ , тобто при істотно несиметричних циклах напружень. Коефіцієнт  $\psi$  зі збільшенням показника динамічності циклу напруження  $S = \sigma_0 / \sigma_c$  при  $\sigma_0 = const$  звичайно трохи зростає, однак для більшості матеріалів залежність  $\psi$  ( $\sigma_c$ ) слаба і в практичних розрахунках можна приймати  $\psi(\sigma_c) = const$ .

До формул динамічного розрахунку коефіцієнт поглинання  $\psi$  завжди входить у вигляді відношення до числа  $2\pi$ , що характеризує циклічність процесу деформацій, тому в розрахунках вводиться коефіцієнт

$$\gamma = \frac{\psi}{2\pi} = \frac{\delta}{\pi}, \quad (3.9)$$

що називається коефіцієнтом непружного опору.

Величина  $1/\gamma$  при гармонійних коливаннях системи з одним ступенем свободи дорівнює відношенню  $z_{рез}/z_c$ , де  $z_{рез}$  — максимальна амплітуда коливань системи при резонансі;  $z_c$  - переміщення системи при статичній дії сили, що дорівнює амплітуді гармонійної збурювальної сили.

У табл. 3.1 наведено середні значення  $\psi_{cp}$  й  $\gamma_{cp}$  для деяких будівельних конструкцій, отримані різними авторами при різних умовах. Там же вказано діапазони зміни значень  $\psi$ , отримані для кожної конструкції. Широта цих діапазонів пояснюється сильним зростанням  $\psi$  зі збільшенням амплітуд напружень в області їхніх малих значень (див. рис. 3.3), при яких звичайно і виконувались випробування натурних конструкцій. При цьому рівень амплітуд напружень експериментаторами, як правило, не фіксувався.

Таблиця 3.1

Значення коефіцієнта поглинання  $\psi$  для будівельних  
конструкцій (поперечний згин)

Конструкція	Значення $\psi$			Значення $\psi_{ср}$	Автор дослідження
	від	до	середн		
1	2	3	4	5	6
Сталеві мости	0,04 0,02	0,3 0,29	0,17 0,17	0,027 0,027	С.О. Бернштейн, С.О. Ільясевич
Сталеві димарі	0,08	0,16	0,11	0,0175	М.Ф. Барштейн
Залізобетонні ребристі перекриття	0,39	0,78	0,57	0,091	Є.С. Сорокін
Залізобетонні без- балкові перекриття	-	-	0,56	0,089	Хорт
Залізобетонні великопанельні перекриття висотних будинків: а) до замонолічу- вання стиків 0,2      0,24 0,22    0,035 1 б) після замонолі- чування стиків 0,44    0,6 0,52    0,083 >	0,2 0,44	0,24 0,6	0,22 0,52	0,35 0,083	О.І. Томсон
Залізобетонні перекриття	0,32	0,57	0,44	0,07	М. Росен
Залізобетонні склепіння по сталевих балках	0,36	1	0,68	0,108	М.Ф. Барштейн
Цегляні склепіння по сталевих балках	0,47	0,9	0,68	0,108	Є.С. Сорокін

Продовження табл. 3.1

1	2	3	4	5	6
Залізобетонні підкранові балки: а) до замонолічування стиків б) після замонолічування стиків	0,24 0,38	0,4 0,56	0,32 0,47	0,051 0,075	Є.С. Сорокін
Залізобетонні балки рами мости	0,35 0,35 0,16 -	0,78 0,45 0,33 -	0,56 0,38 0,25 0,63	0,089 0,061 0,04 0,1	М.П. Павлюк, О.О. Савінов, М. Росен
Дерев'яні клеєні балки	-	-	0,12	0,019	І.Л. Корчинський, В.С. Мартишкін
Дерев'яні балки на цвяхах з перехресною стінкою	0,17	0,41	0,3	0,048	Р.О. Мелік-Адамян
Дерев'яне перекриття по коробчастих клеєних балках	0,23	0,43	0,33	0,053	Р.О. Мелік-Адамян
Перекриття по деревоплиті	0,38	0,47	0,42	0,067	Р.О. Мелік-Адамян
Звичайне дерев'яне перекриття	-	-	0,35	0,056	Р.О. Мелік-Адамян
Моделі самонесучих цегляних стін товщиною в 0,5 цегли	0,2	0,55	0,37	0,059	А.І. Рабинович
Цегельна кладка (стиснена) на складному розчині марки 30	-	-	0,24	0,038	Б.К. Карапетян
Кам'яна кладка (стиснена): а) на цементному розчині марки 100 б) на складному розчині марки 30 в) на вапняному розчині марки 4	- - -	- - -	0,19 0,22 0,33	0,03 0,035 0,053	Б.К. Карапетян

У табл. 3.2 дано значення  $\gamma_0 = \frac{\psi}{2\pi}$  для різних матеріалів, які рекомендується приймати в динамічних розрахунках будівельних конструкцій, виконаних із цих матеріалів, при середніх значеннях амплітуд напружень, що відповідають звичайно дії машин III і IV категорій за динамічністю [9]. Тут  $\psi_0$  — постійний коефіцієнт поглинання, що відповідає області середніх амплітуд напружень (рис. 3.4, а), обумовлений нерівністю у виразі (3.7). Якщо отримана в результаті розрахунку амплітуда напруження  $\sigma_0$  попадає в область малих амплітуд напружень ( $\sigma_0 \leq \sigma_0^*$ ), треба розрахунок повторити, приймаючи значення  $\gamma$ , визначене за формулою, що відповідає формулі (3.6):

$$\gamma = \gamma_0 \frac{\sigma_0}{\sigma_0^*}, \quad 0 < \sigma_0 \leq \sigma_0^* \quad (3.10)$$

Таблиця 3.2

Розрахункові коефіцієнти непружного опору  $\gamma_0$  матеріалу в конструкціях для області середніх напружень ( $\sigma_0 \leq \sigma_0^*$ )

Матеріал	Бетон і залізобетон	Цегляна кладка	Дерево	Сталь прокатна
Коефіцієнт $\gamma_0$	0,1	0,08	0,05	0,025

Якщо ж конструкція знаходиться під впливом машин I або II категорій за динамічністю, то амплітуди напружень у конструкції звичайно не перевищують  $\sigma_0^*$ , і  $\gamma$  варто визначати за формулою (3.10). Але оскільки амплітуда напружень  $\sigma_0$  заздалегідь невідома, тому що сама залежить від  $\gamma$ , рекомендується в цьому випадку приймати для  $\gamma$  в попередньому динамічному розрахунку постійне значення

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{2} \quad (3.11)$$



і потім в уточненому розрахунку приймати значення  $\nu$  або за формулою (3.10), або  $\nu = \nu_0$  залежно від значення  $\sigma$ , знайденого попереднім розрахунком.

Значення коефіцієнта  $\nu_0$  в табл. 3.2 близькі до середніх значень коефіцієнта  $\nu_{cp}$  для відповідних конструкцій у табл. 3.1. Виключенням є цегляна кладка, оскільки для неї значення  $\nu_{cp}$  визначалися для малих амплітуд напружень.

### *Спосіб урахування внутрішнього тертя*

Для урахування впливу внутрішнього тертя на напружений стан конструкцій при коливаннях встановлюється залежність у системі з внутрішнім тертям між повним змінним напруженням і повною змінною деформацією, що складається з пружної й непружної. Очевидно, закон Гука тут уже не застосовується. Ця залежність розглядається на прикладі одноосьового напруженого стану зразка матеріалу, що перебуває в процесі гармонійного деформування. Вона формулюється на основі дослідних даних у такий спосіб.

Вектор змінної деформації відстає по фазі від вектора змінного напруження на кут  $\chi$ , що залежить від коефіцієнта непружного опору  $\nu$  [10]:

$$\chi = \arctg \frac{\nu}{1 - \nu^2/4}. \quad (3.12)$$

Цю залежність найбільш зручно виразити в комплексній формі, оскільки, як відомо з теорії комплексних функцій дійсного змінного, зсув вектора по фазі на кут  $\chi$  досягається множенням цього вектора на  $e^{i\chi}$ . Таким чином, можна записати

$$\sigma^*(t) = E_0 e^{i\chi} \varepsilon^*(t), \quad (3.13)$$

де  $\sigma^*$  й  $\varepsilon^*$  — відповідно комплексні напруження і відносна деформація (зірочкою тут і надалі позначаються комплексні величини);

$t$  — час;

$E_0$  — нормальний модуль пружності матеріалу;

$i$  – уявна одиниця.

Перехід від показової форми числа  $e^{i\mathcal{X}}$  до алгебраїчної з заміною  $\mathcal{X}$  виразом (3.12) призводить до такої залежності:

$$\sigma^*(t) = E_0(a + ib)\varepsilon^*(t) = (a + ib)\sigma_y^*(t), \quad (3.14)$$

де  $\sigma_y^* = E_0\varepsilon^*$  - напруження в ідеально пружній системі ( $\mathcal{Y}=0$ );

$$a = \frac{4 - \mathcal{Y}^2}{4 + \mathcal{Y}^2}, \quad b = \frac{4\mathcal{Y}}{4 + \mathcal{Y}^2}. \quad (3.15)$$

Очевидно,  $|\sigma^*(t)| = E_0|\varepsilon^*(t)|$  або  $\sigma_0 = E\varepsilon_0$ , тобто між амплітудами змінного напруження і змінної деформації зберігається закон Гука.

Подавши залежність (3.14) у вигляді

$$\sigma^*(t) = E_y\varepsilon^*(t) + E_n\varepsilon^*(t)e^{i\frac{\pi}{2}} = \tilde{\sigma}_y^*(t) + \sigma_n^*(t), \quad (3.16)$$

де  $E_y = aE_0$ ,  $E_n = bE_0$ ,  $\tilde{\sigma}_y^*$ ,  $\sigma_n^*$  — відповідно пружні і непружні модулі та комплексні напруження в системі з внутрішнім тертям, можна дати їй інше формулювання: вектор непружного напруження відстає по фазі від вектора пружного напруження на кут  $\pi/2$ . При малих значеннях  $\mathcal{Y}$  можна приймати  $a=1$ ,  $b=\mathcal{Y}$ . Зі зростанням  $\mathcal{Y}$  збільшується пластичність матеріалу і при  $\mathcal{Y}=2$ , коли у виразі (3.15)  $a=0$ ,  $b=1$  і, отже,  $E_y=0$ ,  $E_n=E_0$ , матеріал стає абсолютно непружним (пластичним).

Якщо  $\mathcal{Y}$  не залежить від рівня напруження, то вираз (3.14) внаслідок його лінійності справедливий не тільки для гармонійних, але й для періодичних і квазігармонійних<sup>6</sup> процесів деформування. Цей найбільш простий випадок важливий тому, що для багатьох будівельних матеріалів  $\mathcal{Y}$  можна вважати постійним майже на всьому діапазоні напружень (за винятком вузької області дуже малих напружень).

<sup>5</sup> У теорії внутрішнього тертя [10] величини виразу (3.15) звичайно позначалися через  $u$  і  $v$ . Перехід до позначень у виразі (3.15) пов'язаний з необхідністю використання цих залежностей у динамічній теорії пружності, де через  $u$  і  $v$  позначають переміщення тіла що деформується.

<sup>6</sup> З повільно мінливою амплітудою і частотою.

У загальному вигляді рівняння коливань будь-якої пружної системи можна записати як умову рівноваги всіх діючих на систему сил, використовуючи принцип Даламбера. Для лінійних систем (при лінійній пружній силі) його зручніше записувати в комплексній формі, використовуючи комплексну залежність (3.16):

$$J^*(t) + \tilde{S}^*(t) + R^*(t) + Q^*(t). \quad (3.17)$$

Тут  $J^*$ ,  $\tilde{S}^*$ ,  $R^*$ ,  $Q^*$  — відповідно комплексні сили інерції, пружності, внутрішнього тертя і зовнішнього збурювання. При постійному  $\mathcal{Y}$  залежність сумарної внутрішньої сили  $\tilde{S}^* + R^*$  в системі з внутрішнім тертям від пружної сили  $S^*$  в ідеально пружній системі ( $\nu=0$ ) буде такою, як і залежність (3.14) сумарного напруження  $\sigma^*$  від напруження  $\sigma_y^*$ :

$$\tilde{S}^* + R^* = (a + ib)S^*. \quad (3.18)$$

Якщо ж  $\mathcal{Y}$  є функцією амплітуди напруження, залежність (3.18) буде точною для однорідного напруженого стану і наближеною для неоднорідного напруженого стану. В останньому випадку точний вираз для сумарної внутрішньої сили можна одержати з виразу (3.14) за правилами теорії пружності [11].

З формули (3.18) видно, що сила внутрішнього тертя  $R^* = ibS^*$  відстає по фазі на кут  $\pi/2$  від пружної сили  $\tilde{S}^* = aS^*$ . Підстановка виразу (3.18) у вираз (3.17) дає

$$J^*(t) + (a + ib)S^* + Q^* = 0. \quad (3.19)$$

З формули (3.19) випливає зручне правило складання рівняння коливань будь-якої лінійної системи з внутрішнім тертям. Для цього треба скласти рівняння коливань відповідної ідеально пружної системи, вважати всі сили комплексними і помножити пружну силу на комплексний коефіцієнт  $(a + ib)$ . Наприклад, для системи з одним ступенем свободи з масою  $m$ , коефіцієнтом пружності  $c$ , на яку діє гармонійна сила, що збурює, з амплітудою  $Q_0$ , коловою частотою  $\omega$  і початковою

фазою  $\mu$  диференціальне рівняння коливань з урахуванням внутрішнього тертя в комплексній формі буде мати вигляд

$$m \ddot{z}^* + (a + ib) \dot{z}^* = Q_0 e^{i(\omega t + \mu)}, \quad (3.20)$$

де  $z^*$  – комплексне переміщення.

Загальний розв'язок комплексного рівняння (3.20) містить дві комплексні (або чотири дійсних) довільні постійні, для яких одна (або пара дійсних) виключається з умови стійкості розв'язку:

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} |z^*| \leq M(Q_0), \quad (3.21)$$

де  $M$  – обмежене додатне число, що залежить від амплітуди, сили  $Q_0$ , що збурює.

При  $Q_0 = 0$  (вільні коливання)  $M = 0$ . Після того як задоволена умова (3.21), дійсна частина комплексного переміщення  $z^*$ , що відповідає дійсній частині комплексної сили, що збурює, при заданих початкових умовах є загальним розв'язком поставленої задачі. Метод інтегрування рівнянь типу (3.20) викладено, наприклад, у роботі [10]. Дійсні розв'язки мають такий вигляд: для вільних коливань  $Q_0 = 0$  після задоволення початкових умов  $z(0) = z_0$ ,  $\dot{z}(0) = v_0$ :

$$z = a_0 e^{-\frac{\gamma}{2} p t} \cos(p t + \alpha), \quad (3.22)$$

де

$$a_0 = \sqrt{z_0^2 + \left(\frac{v_0}{p} + \frac{\gamma}{2} z_0\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_0}{p z_0} + \frac{\gamma}{2}, \quad (3.23)$$

а для сталих змушених коливань

$$z = \frac{Q_0 \cos(\omega t + \mu + \beta)}{m p^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2} - \frac{\gamma^2}{4}\right)^2 + \gamma^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{-\gamma}{1 - \frac{\omega^2}{p^2} - \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (3.24)$$

Тут  $P$  – колова частота вільних загасальних коливань,

$$p = \frac{p_0}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}}, \quad p_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad (3.25)$$

а  $p_0$  — колова частота незагасальних коливань (при  $\gamma=0$ ).

З виразу (3.22) логарифмічний декремент коливань дорівнює  $\delta = \pi\gamma$  відповідно до формули (3.9). З виразу (3.24) при  $\omega \rightarrow 0$  виливає, що амплітуда коливань дорівнює статичному переміщенню системи під дією сили  $Q_0$ :  $z_0 = z_c = Q_0/c$ , а при  $\omega = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}$ ,  $p = \sqrt{a}p_0$  впливає, що максимум амплітуди коливання при резонансі дорівнює

$$(z_0)_{\text{рез}} = \frac{z_c}{\gamma}. \quad (3.26)$$

Ці висновки співвідносяться з дослідними даними за коливаннями систем, пружним елементом яких служить зразок з матеріалів, що характеризується постійним коефіцієнтом внутрішнього тертя  $\gamma$ . Навпаки, висновки з розв'язків, що відповідають гіпотезі Фойгта про пропорційність внутрішнього тертя швидкості деформацій, не підтверджуються цими дослідними даними.

Так, декремент  $\delta$  відповідно до досліду і формули  $\delta = \pi\gamma$  не залежить від частоти коливань, тоді як, за гіпотезою Фойгта, він пропорційний їй. З досліду і формули (3.25) не спостерігається критичного загасання ні при яких значеннях  $c$  і  $m$ , тоді як, за гіпотезою Фойгта, такі значення  $c$  і  $m$  існують. Резонансна амплітуда відповідно до досліду і формули (3.26) не залежить від резонансної частоти коливань, а за гіпотезою Фойгта вона є обернено пропорційною цій частоті. Гіпотеза Фойгта не враховує також залежність коефіцієнта поглинання від напруження.

Якщо коефіцієнт  $\gamma$  залежить від рівня амплітуд напруження  $\sigma_0$ , то його треба вводити в рівняння коливань як відповідну функцію амплітуди переміщення  $\gamma(z_0)$ , яка згідно з формулами (3.5) і (3.6) у загальному випадку має вигляд

$$y = y_0 \left[ \frac{z_0}{\alpha_0 + z_0} + \beta_0 z_0^k \right]. \quad (3.27)$$

Рівняння (3.20) у цьому випадку стає нелінійним відносно амплітуди переміщення  $z_0$ , але залишається лінійним відносно шуканої функції часу  $z(t)$  і має постійні коефіцієнти в задачах про сталі змушені коливання і змінні коефіцієнти в задачах про вільні коливання. Способи інтегрування таких рівнянь викладено в роботах [10, 11].

Інтегрування рівняння (3.20) можливо також і в більш загальних випадках, коли  $\mathcal{Y}$  є відомою функцією декількох параметрів — амплітуди переміщення  $z_0$ , частоти  $\omega$ , температури  $T^0$ , числа циклів  $n$  і т. п., що може становити інтерес при динамічному розрахунку конструкцій із пластмас деяких типів, для яких коефіцієнт  $\mathcal{Y}$  чутливий до зміни зазначених параметрів.

### 3.3. Витривалість

#### *Визначення*

Під втомою матеріалу розуміється його стан, що характеризується виникненням локальних осередків руйнування (втомлених тріщин) внаслідок тривалого впливу змінного циклічного напруження даного виду. Найбільша абсолютна величина такого напруження може бути значно менше відповідної межі статичної міцності матеріалу і тим менше, чим більше амплітуда циклічного напруження порівняно з його постійною (статичною) складовою. Тому перевірка конструкції на втому має першорядне значення в тих випадках, коли конструкція піддається систематичному впливу циклічних напружень, амплітуда яких не дуже мала порівняно зі статичним напруженням у конструкції.

На думку сучасної науки, втома, як і внутрішнє тертя, зв'язується з неоднорідністю мікроструктури матеріалу, що, викликаючи досить нерівномірний розподіл напружень по елементарних площадках, яке обумовлює появу мікропластичних деформацій у частинках матеріалу, призводить до різних

результатів у випадках тривалої дії постійного (статичного) і змінного (динамічного) навантажень [12].

Здатність матеріалу протистояти втомі, тобто витримувати, не руйнуючись, певний рівень змінного циклічного напруження при заданому числі циклів напружень називають витривалістю матеріалу. Найбільшу абсолютну величину максимуму циклічного напруження (що дорівнює сумі його середнього й амплітудного значень), що матеріал здатний витримувати, не руйнуючись, при скільки завгодно великій кількості циклів напружень, називають межею витривалості матеріалу.

Як циклічний вплив при випробуваннях матеріалів на витривалість звичайно застосовують гармонійне навантаження. Надалі під циклічним буде розумітися гармонійне навантаження.

Межа витривалості матеріалу залежить від показника динамічності циклу напружень  $S$ , що дорівнює відношенню амплітуди циклічного (динамічного) напруження  $\sigma_0$  (величини істотно додатною) до середнього (статичного) напруження циклу  $\sigma_c$ , відносно якого змінюється циклічне напруження і яке завжди вважається додатним:

$$S = \frac{\sigma_0}{\sigma_c}. \quad (3.28)$$

Можливі значення  $S$  знаходяться в межах  $0 \leq S \leq \infty$ . Максимальні  $\sigma_{max}$  і мінімальні  $\sigma_{min}$  напруження циклу пов'язані з напруженнями  $\sigma_c$  і  $\sigma_0$  співвідношеннями

$$\sigma_{max} = \sigma_c + \sigma_0; \quad \sigma_{min} = \sigma_c - \sigma_0 \quad (3.29)$$

або

$$\sigma_c = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}; \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}. \quad (3.30)$$

За  $\sigma_{max}$  приймається напруження, найбільше за абсолютною величиною, що вважається додатним. Чи є  $\sigma_c$  або  $\sigma_{max}$  напруженнями розтягання або стискання, треба оговорювати окремо.

Замість показника динамічності циклу напружень  $S$  у літературі частіше вводиться коефіцієнт асиметрії циклу напружень  $\rho$  (або  $r$ ):

$$\rho = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}, \quad (3.31)$$

значення якого при домовленому правилі знаків знаходиться в межах  $-1 \leq \rho \leq 1$ . Коефіцієнти  $\rho$  й  $S$  пов'язані залежностями

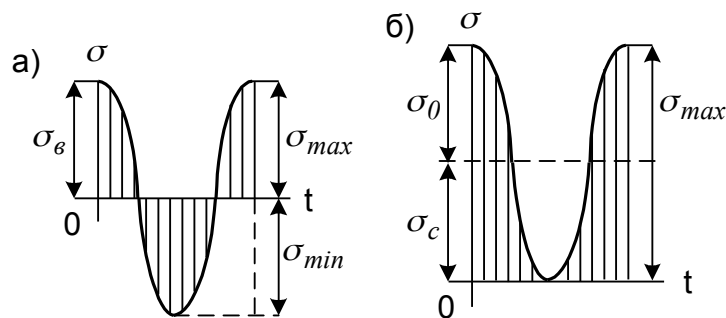
$$\rho = \frac{1-S}{1+S}, \quad S = \frac{1-\rho}{1+\rho}. \quad (3.32)$$

Значенням  $S=0$  або  $\rho=1$  відповідає тільки статичне напруження; значенням  $S=\infty$  або  $\rho=-1$  — тільки динамічне напруження або симетричний цикл (рис. 3.5, а); значенням  $S=1$  або  $\rho=0$  — так званий пульсуючий або одnobічний цикл

(рис. 3.5, б); значенням  $|S|$  або  $|\rho|$  відповідають знакопостійні

несиметричні цикли (рис. 3.5, в), а значенням  $|S|$  або  $|\rho|$  —

знакозмінні несиметричні цикли (рис. 3.5, г)<sup>7</sup>.



<sup>7</sup> При звичайному правилі знаків напружень ( $+\sigma$  при розтяганні,  $-\sigma$  при стисканні)  $S$  і  $\rho$  змінювалися б у межах  $-\infty \leq S \leq +\infty$ ,  $-\infty \leq \rho \leq 1$ , а пульсуючому циклу відповідали б значення  $\rho=0$  при розтяганні і  $\rho=-\infty$  при стисканні, що було б незручним для розрахунків.



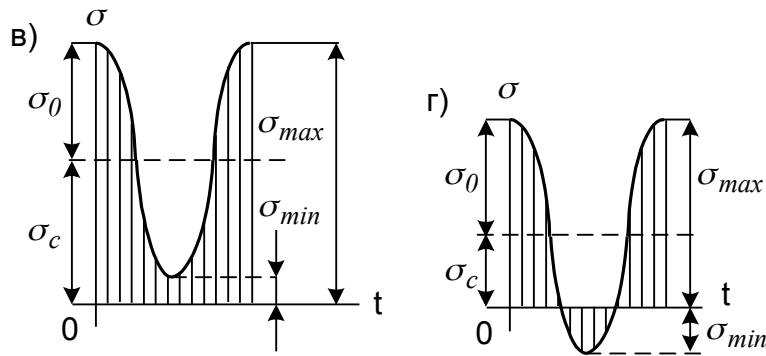


Рис. 3.5. Цикли напруги:  
*a* – симетричний; *б* – несиметричний пульсуючий;  
*в* – несиметричний знакопостійний; *г* – несиметричний  
знакозмінний

Межа витривалості  $\sigma^*$  є найбільшим значенням суми напружень  $\sigma_c$  і  $\sigma_0$ , що матеріал здатний сприймати, не руйнуючись, при даній базі (числі циклів) випробувань  $n^*$ :

$$\sigma^* = \sigma_{max} = \sigma_c + \sigma_0. \quad (3.33)$$

Із двох величин  $\sigma_c$  і  $\sigma_0$  (або  $\sigma_{max}$  й  $\sigma_{min}$ ) одна є незалежною у досліді, інша визначається залежно від заданої. У дослідях і розрахунках на витривалість за незалежну величину, крім зазначених, приймають нерідко їхні відношення  $S$  у виразі (3.28) або  $\rho$  у виразі (3.31); можна приймати також коефіцієнт динамічності циклу напружень, що дорівнює

$$\beta = \frac{\sigma_0}{\sigma_c + \sigma_0} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2\sigma_{max}} = \frac{S}{1+S} = \frac{1-\rho}{2}, \quad (3.34)$$

значення якого знаходяться в межах  $0 \leq \beta \leq 1$ . Цим межам відповідає дія тільки статичних ( $\beta = 0$ ) або тільки динамічних ( $\beta = 1$ ) напружень, а значенню  $\beta = 0,5$  відповідає пульсуючий цикл. З формул (3.33) і (3.34) випливає, що  $\sigma_0 = \beta\sigma^*$ .

Межа витривалості  $\sigma^*$  при обраній базі випробувань  $n^*$  є шуканою функцією кожної з величин  $\beta$ ,  $\sigma_c$ ,  $\sigma_{min}$ ,  $S$ ,  $\rho$ . Будемо для визначеності вважати його функцією  $\beta$ :  $\sigma^* = f(\beta)$ , знаючи яку, можна визначити  $\sigma^*$  як функцію кожної з інших змінних за допомогою співвідношень (3.34).

У дослідях про величину  $\sigma^*$  можна судити тільки визначивши величину межі втоми  $\sigma_y^*$ , тобто найменшого

руйнуючого циклічного напруження, і прийнявши  $\sigma^* \approx \sigma_y^*$ . Але оскільки в одному досліді неможливо вгадати величину  $\sigma^*$ , вводиться поняття часткових або обмежених меж втоми  $\sigma_n^*$ , що відповідають кількості циклів  $N$  і є функцією вже двох змінних

$\beta$  і  $n$ :  $\sigma_n^* = \varphi(\beta, n)$ . З дослідів визначають саме обмежені межі втоми  $\sigma_n^*$ . Для цього роблять серію дослідів над зразками-близнюками, доводячи кожний з них до руйнування при різних напруженнях, зменшуваних ступінчасто, починаючи з тимчасового опору і вимірюючи кількість циклів  $n$  у момент руйнування, що збільшується зі зменшенням напруження. Таким чином, шукана кількість циклів, при якому зразок руйнується, є функцією  $n = F(\sigma_n^*, \beta)$ .

За результатами дослідів над серією зразків звичайно будуються криві  $\sigma_n^* = \varphi(n)$  або  $\sigma_n^* = \varphi(\lg n)$ , вигляд яких показано на рис. 3.6. З рис. 3.6 видно, що межа втоми  $\sigma^*$ , яка відповідає значенню  $n = n^*$ , практично збігається з ординатою «асимптоти» кривої  $\sigma_n^*(n)$  або прямої  $\sigma_n^*(\lg n)$ , паралельній осі  $n$ .

### *Дослідні дані*

**Вплив статичної складової напруження  $\sigma_c$ .** Результати дослідів з вивчення межі витривалості  $\sigma^*$  для різних матеріалів - сталей, кольорових металів, бетону, залізобетону, дерева, пластмас та ін. — показують, що при будь-якому виді напруженого стану межа витривалості істотно залежить від величини  $\sigma_c$  і, отже, повинна розглядатися як функція  $\sigma_c$  або будь-який інший параметр ( $\beta$ ,  $\rho$ ,  $S$ ,  $\sigma_{min}$ ), виражений через  $\sigma_c$ . На рис. 3.7-3.9 дано залежності  $\sigma^*(\sigma_c)$ , що відповідають дослідним даним різних авторів, систематизованим у роботах [9, 13]<sup>8</sup>.

<sup>8</sup> Надалі посилання даються не на першоджерела, а на монографії [9, 13], у яких наведена відповідна література.

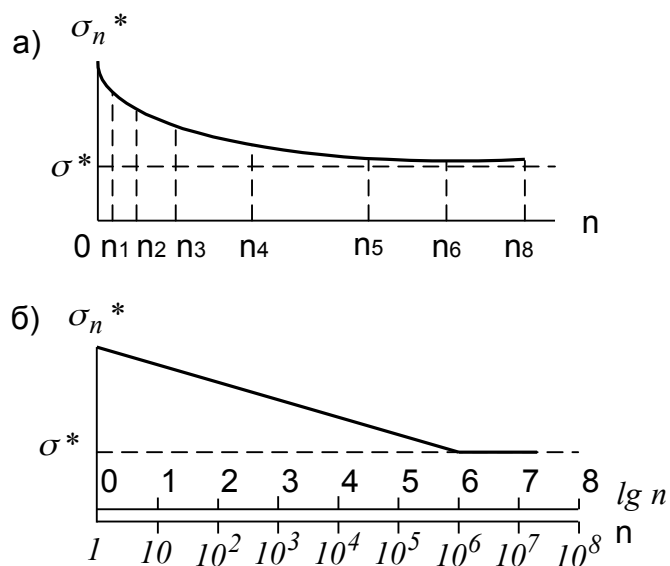


Рис. 3.6. Графіки руйнівного напруження:  
*a* — залежно від кількості циклів  $n$ ; *б* — залежно від  $\lg n$

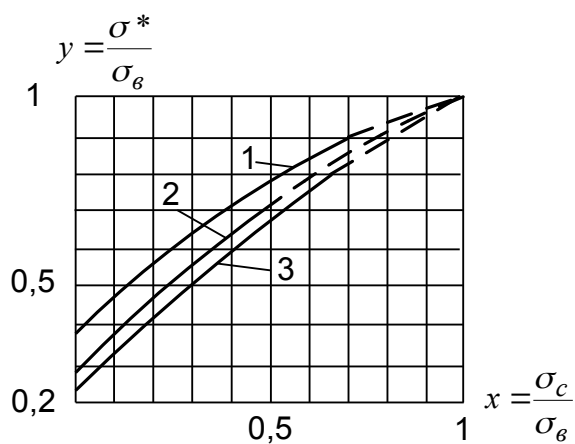


Рис. 3.7. Залежності межі витривалості  $\sigma^*$  від статичного напруження  $\sigma_c$ , за дослідними даними Велера, на згин сталей з різними тимчасовими опорами  $\sigma_s$ ,  $\text{кгс}/\text{мм}^2$ : 1 - 37,5; 2 - 81,5; 3 - 90,5

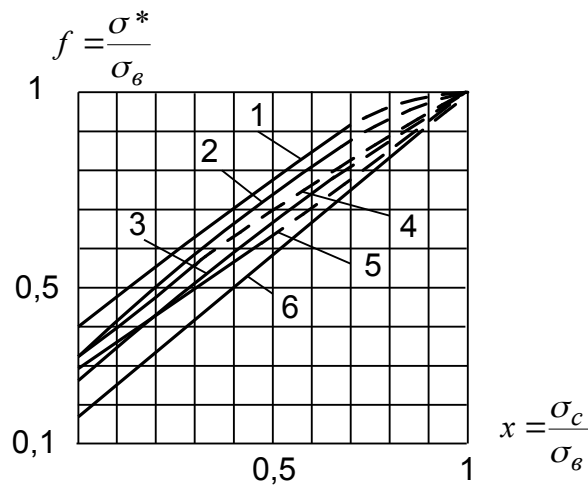


Рис. 3.8. Залежності межі витривалості  $\sigma^*$  від статичного напруження  $\sigma_c$  при розтяганні-стисканні з різними тимчасовими опорами  $\sigma_0$ ,  $\text{кгс}/\text{мм}^2$ :  
 1 – 50; 2 – 36; 3 – 62; 4 – 41,5; 5 – 63;  
 6 – 48,7 (алюмінієвий сплав)

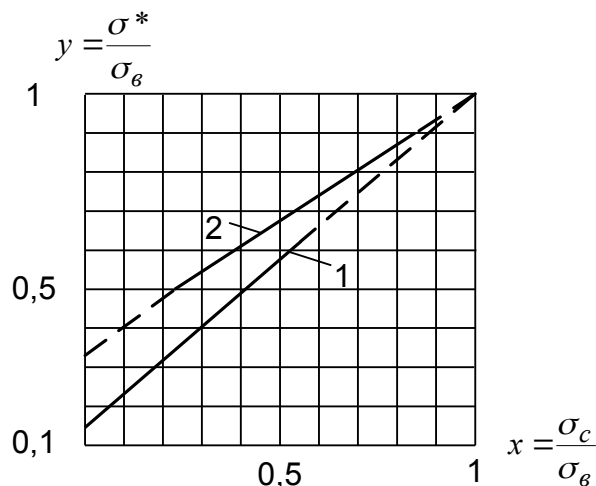


Рис. 3.9. Залежності межі витривалості  $\sigma^*$  від статичного напруження  $\sigma_0$ :  
 1 – бетон на стискання (досліди багатьох авторів); 2 – склопластик ВФТ-С ( $\sigma_0 = 14,6 \text{ кгс}/\text{мм}^2$ , досліди Ф.П. Белянкіна та ін.) [13]

Точки досліду добре лягають на плавні криві, і тільки для бетону спостерігається розкид точок, що вимагає проведення кореляційної прямої [13]. По осях координат відкладено значення  $\sigma_0$  і  $\sigma_c$  у частках тимчасового опору  $\sigma_0$  при дії статичного навантаження, що визначається стандартним шляхом (короткочасним навантаженням). Верхні кінці всіх кривих

продовжені пунктиром до точки, що відповідає  $\sigma_e$ . У дійсності криві повинні сходитися, в точці, що відповідає тимчасовому опору  $\sigma_e$  при тривалій дії статичного навантаження (протягом часу досліджень). Ця точка  $\sigma_e^0/\sigma_e$  повинна лежати трохи нижче і ліворуч точки (1,1), однак дослідних даних для її визначення нема.

Дослідні залежності на рис. 3.7-3.9 є або пологими кривими, зверненими опуклістю нагору, або прямими. Ці два типи залежностей  $\sigma^*$  ( $\sigma_c$ ) (рис. 3.10) добре апроксимуються одним рівнянням, утримуючи два параметри — межі утоми  $\sigma_o^*$  і  $\sigma_l^*$  відповідно при симетричному і якому-небудь несиметричному циклі напружень, що відповідають значенням  $\sigma_c = 0$  і  $\sigma_c = \sigma_{c1}$ :

$$y = a + (1 - a)x + b\sqrt{x(1 - x)}, \quad (3.35)$$

де

$$y = \frac{\sigma^*}{\sigma_e}, \quad x = \frac{\sigma_c}{\sigma_e}, \quad b = \frac{y_1 - a - (1 - a)x_1}{\sqrt{x_1(1 - x_1)}}, \quad y_1 = \frac{\sigma_l^*}{\sigma_e}, \quad x_1 = \frac{\sigma_{c1}}{\sigma_e}. \quad (3.36)$$

При  $b = 0$  одержуємо рівняння прямої (рис. 3.10)

$$y = a + (1 - a)x, \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (3.37)$$

для визначення якої досить знати один параметр  $a$ . У випадку матеріалів, для яких вигляд кривої  $\sigma^*$  ( $\sigma_c$ ) не вивчався і значення  $\sigma_l^*$  невідомо, можна в запас витривалості користуватися рівнянням (3.37).

Крім  $\sigma_c$ , по осі абсцис можна відкладати значення інших змінних -  $\sigma_{min}$ ,  $\rho$ ,  $\beta$  і  $S$  (найчастіше використовуються з них  $\sigma_{min}$  і  $\rho$ ), для переходу до яких служать співвідношення (3.36) і  $\xi = \sigma_{min}/\sigma_e$ :

$$x = \frac{y + \xi}{2} = y \frac{1 + \rho}{2} = y(1 - \beta) = \frac{y}{1 + S}. \quad (3.38)$$

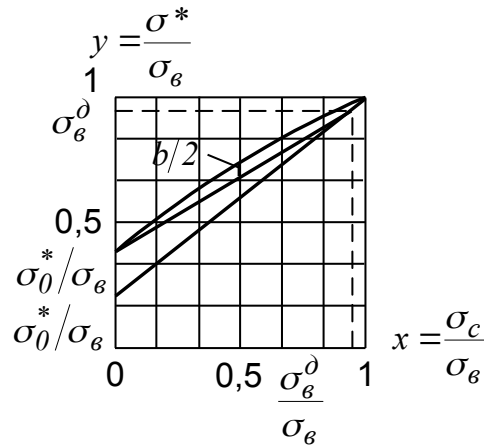


Рис. 3.10. Типові залежності межі витривалості  $\sigma^*$  від статичного напруження  $\sigma_0$

У нових змінних  $\xi$ ,  $\rho$ ,  $\beta$  і  $S$  рівняння прямої (3.36) перетвориться в рівняння таких виглядів:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{2a}{1+a} + \frac{1-a}{1+a} \xi, \quad (-a \leq \xi \leq 1); \\
 y &= \frac{2a}{1+a - (1-a)\rho}, \quad (-1 \leq \rho \leq 1); \\
 y &= \frac{2a}{a + (1-a)\beta}, \quad (0 \leq \beta \leq 1); \\
 y &= \frac{a(1+S)}{a+S}, \quad (0 \leq S \leq \infty).
 \end{aligned}
 \tag{3.39}$$

Використовуючи ті самі змінні, можна записати групу рівнянь, що відповідають виразу (3.35), які тут не наводяться. На рис. 3.11 лініями 1 і 2 показано графіки залежностей (3.37) і (3.35) від різних змінних при значеннях  $a=0,25$  і  $b=0,2^*$ . Найбільш зручною є залежність  $y(x)$  (3.37).

**Межа витривалості матеріалів при  $\sigma_c = 0$ .** Із зазначеного випливає, що межа витривалості  $\sigma_0$  при симетричному циклі напружень ( $\sigma_c = 0$ ) є важливою характеристикою, що дозволяє визначити точно межу витривалості при будь-якій величині статичного напруження, якщо залежність  $\sigma^*$  ( $\sigma_c$ ) лінійна, і в запас витривалості, якщо ця залежність нелінійна. У табл. 3.3 наведено значення  $\sigma_0^*$  в частках  $\sigma_b$  для деяких матеріалів при розтяганні і

стисканні, а також межі текучості  $\sigma_T$ , граничного подовження  $\varepsilon$  і бази  $n^*$  [13]. Середнє значення  $\sigma_0^*$  становить для сталей  $0,26\sigma_e$ , для дерева й склопластиків  $0,30\sigma_e$ , найменше і найбільше значення  $\sigma_0^*$  для сталей у табл. 3.3 відрізняються між собою вдвічі ( $0,22\sigma_e$  і  $0,45\sigma_e$ ).

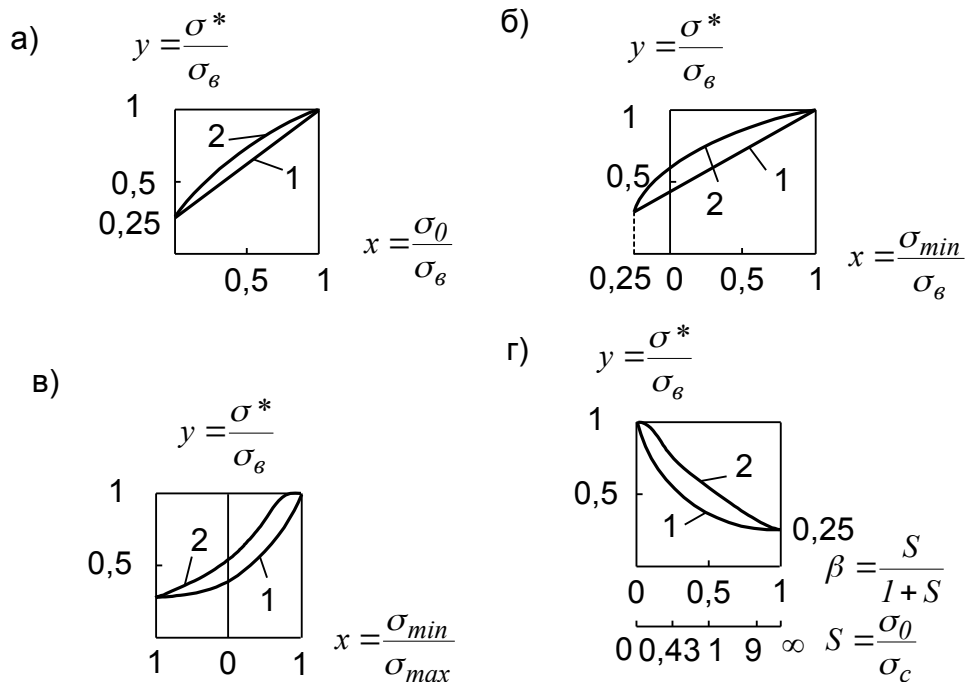


Рис. 3.11. Залежності межі витривалості  $\sigma_0^*$  від різних аргументів:

$a - \sigma^* (\sigma_c)$ ;  $б - \sigma^* (\sigma_{min})$ ;  $в - \sigma^* (\rho)$ ;  $г - \sigma^* (\beta)$ :  
 1 – лінійна залежність  $\sigma^* (\sigma_c)$ ;  
 2 – нелінійна залежність  $\sigma^* (\sigma_c)$ .

**Вплив виду напруженого стану.** Межа витривалості матеріалу при циклічних деформаціях істотно залежить від виду напруженого стану. У табл. 3.4 [13] для деяких матеріалів дано межі витривалості в частках  $\sigma_e$  при симетричних циклах напружень згину, розтягання-стискання і крутіння. Відомості про хімічний склад і термообробку сталей наведено в роботі [13]. Для полімерів межі втоми віднесено до тимчасових опорів, що відповідають даному виду деформацій, які зазначені в знаменниках дробів. Середні значення  $\sigma_0^*/\sigma_e$  для деяких матеріалів, отримані шляхом обробки більш ранніх дослідних даних [9], наведено в табл. 3.5.

Таблиця 3.3

Межі витривалості при симетричному циклі напружень

Матеріал	$\sigma_e$ , кгс/м <sup>2</sup>	$\sigma_T$ , кгс/м <sup>2</sup>	$\varepsilon$ , %	$n^*$ , $10^{-6}$	$a = \sigma_0^*/\sigma_e$
Ст. 3	36-37	-	-	2	0,31-0,32
Ст. 3 для зварювальних мостів	45	-	-	2	0,31-0,33
Ст. 5	54	-	-	2	0,3
Вуглеродиста сталь С-0,37 %	52-50,8	28,6-23,7	21-21,5	10	0,27-0,31
Вуглеродиста сталь С-0,93 %	59,1-81	23,5-47,5	25-23	10	0,24-0,31
Вуглеродиста сталь С-0,49 %	64,3	33,1	27	10	0,22
Вуглеродиста сталь С-0,36 %	73,4	49,6	28	10	0,38
Сталь 15ГС	63	43,1	23,2	2	0,20
Легована сталь Ni-3,5%	71,4	45,5	26	10	0,355
Сталі 35ХМ, 34ХНМ, 35ХЕЗМА	105-110	-	-	10	0,45
Алюмінієвий сплав 75S-T	59,7	54,4	10	10	0,183-0,27
Алюмінієвий сплав 24S-T	50,2	36,3	18	10	0,252-0,308
Сосна	9,72	-	-	-	0,3
Ялина	10	-	-	-	0,3
Склотекстоліт на смолі:					
- фенольний	33	-	-	10	0,28
- епоксидний	30	-	-	10	0,39
- кремнеорганічний	26	-	-	10	0,22

Таблиця 3.4

Межа витривалості  $\sigma_0^*$  при різних видах деформацій

Матеріал	$\sigma_e$ , кгс/мм <sup>2</sup>	Значення $a = \sigma_0^*/\sigma_e$		
		згин	розтягання-стискання	крутіння



Сталь марки:				
10	34-42	0,51	0,37	0,27
20	45-50	0,43	0,31	0,255
30	48-60	0,435	0,35	0,215
45	60-75	0,435	0,325	0,26
40ХН	90	0,44	0,32	0,28
12ХН3А	95	0,455	0,31	0,25
ГУТАП 5140	90-100	0,435	0,30	0,25
25ХНВА	110	0,455	0,305	0,265
18ХНВА	115	0,49	0,33	0,3
Середні значення	-	0,454	0,324	0,261
для сталей	-	0,367	-	0,221
Алюміній	-	0,25	0,30	0,245
Сосна	-	0,28	0,30	0,26
Ялина	-	-	-	-
Склопластик на	-	0,22	0,28	-
смолі	-	0,25	0,39	-
- фенольний	-	0,28	0,25	-
- епоксидний	-	-	-	-
- поліефірний	-	-	-	-

Таблиця 3.5

Середні значення  $\sigma_0^*/\sigma_s$  для деяких матеріалів при різних видах деформацій

Матеріал	$a = \sigma_0^*/\sigma_s$		
	згин	розтягання-стискання	крутіння
Сталі різних марок	0,5	0,38	0,27
Чавун сірий	0,42	-	0,38
Кольорові метали	0,36	-	0,21
Сосна	0,33	0,29	0,24

З табл. 3.2 і 3.3 видно, що для металів мінімум  $\sigma_0^*/\sigma_s$  відповідає крутінню, максимум - згину; межі втоми сталей при згині, розтяганні - стисканні і крутінні співвідносяться приблизно як числа 1,8:1,3:1.

**Вплив розмірів і форми зразка.** Межа втоми знижується зі збільшенням розмірів зразка, причому ступінь зниження тим

менше, чим більше розміри і чим однорідніший напружений стан матеріалу. Найсильніший вплив масштабного чинника отримано в дослідах Леєра [9] на згин обертових валів зі сталей семи різних марок (зниження  $\sigma_o^*$  на 35 % зі збільшенням  $d$  з 15 до 100 мм). У дослідах же на розтягання-стискання круглих сталевих зразків отримано зниження  $\sigma_o^*$  лише на 5 % зі збільшенням  $d$  з 7 до 35 мм [9]. Зниження  $\sigma_o^*$  зі збільшенням розмірів зразка має у всіх випадках швидкозагасальний характер. Аналогічні результати отримано для вуглеродистих і легованих сталей [13]. Ці закономірності тісно пов'язані зі статистичним характером розподілу дефектів у матеріалі. Аналогічний вплив на межу втоми при неоднорідному напруженому стані має форма поперечного перерізу зразка: чим більше однорідний розподіл напружень по перетину, обумовлений його формою при даному максимальному напруженні, тим нижче  $\sigma_o^*$ . Знижують межу втоми також різкі переходи від одного перетину зразка до іншого, що пов'язано з концентрацією напружень у місцях переходів [9].

**Вплив частоти циклічних напружень.** Вплив закону зміни напружень за цикл на межу втоми матеріалу не вивчено. Що стосується впливу частоти циклічного навантаження на величину межі втоми, то всі відомі дослідження призводять до висновку, що в діапазоні частот коливань 1-100 Гц, звичайних для конструкцій (принаймні, будівельних), такий вплив практично відсутній [9, 13].

Відсутність впливу частоти циклів на межу витривалості і на коефіцієнт непружного опору в традиційних будівельних матеріалах зайвий раз свідчить про тісний зв'язок між явищами втоми і внутрішнього тертя.

**Вплив інших чинників.** Корозійне середовище (вода, вологе повітря, пара агресивних газів) істотно знижують межу витривалості металів, підданих корозії. При цьому зниження межі втоми виявляється тим значніше, чим більший час дослідження зразка при заданій базі  $n^*$  [9, 13].

На величину межі втоми впливає також стан поверхні зразка (чим більше на ній подряпин або надирів, тим нижче межа втоми), тренування циклічними напруженнями (що підвищують межу втоми), термічна обробка і температура [9, 13].

**Межа витривалості з'єднань.** Межі витривалості різних типів з'єднань елементів металевих і дерев'яних конструкцій можуть бути істотно нижче, ніж цілих елементів. Причина зниження полягає в концентрації циклічних напружень, у зварених швах, на контурах заклепувальних отворів, у місцях стрибкоподібного переходу перерізів у з'єднаннях і т. д.

Зниження межі витривалості з'єднань можна характеризувати коефіцієнтом концентрації напружень  $\mu$ , що враховують зниження межі витривалості  $\sigma_0^*$  при симетричному циклі, маючи на увазі, що тимчасовий опір зразків з ослабленнями, як показують досліди, не нижче, ніж для тих самих зразків без ослаблень:

$$\mu = \frac{\sigma_0^*}{\sigma_0^*} = \frac{a}{\bar{a}}, \quad (3.40)$$

де  $\sigma_0^*$  й  $\bar{\sigma}_0^*$  — межі витривалості при симетричному циклі напружень відповідно для основного металу і з'єднань;  $a = \sigma_0^*/\sigma_e$ ,  $\bar{a} = \bar{\sigma}_0^*/\sigma_e$ .

З погляду розрахунку з'єднань на витривалість важливо зазначити, що залежності  $\sigma^*$  ( $\sigma_c$ ) не для з'єднань, а для цільного елемента конструкцій за своїм характером аналогічні. На рис. 3.12 криві 1 і 2 представляють ці залежності відповідно для основного металу і звареного з'єднання встик з обробленим швом за дослідями Порра. Прямі 3—6 побудовані за даними дослідів О.Є. Кочергової (результати цих досліджень приведено у [13]). Вони сходяться в одній точці (1,1). Отже, рівняння (3.36), (3.37) і (3.38) справедливі і для з'єднань. Звичайно для з'єднань приймається лінійна залежність

$$y = \bar{a} + (1 - \bar{a})x, \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (3.41)$$

яка у випадку, коли істинна функція  $y(x)$  нелінійна, забезпечує деякий запас витривалості. Тут, як видно з формули (3.40),  $\bar{a} = a/\mu$ . Коефіцієнт  $\mu$  обчислюється за формулою (3.40), якщо дослідні дані відповідають симетричному циклу напружень ( $x=0$ ). Якщо ж межі витривалості основного металу і з'єднання визначено при несиметричних циклах напружень, що відповідають у першому випадку значенню  $x=x_1$ , а в другому — значенню  $x=x_2$ , то

коефіцієнт  $\mu$  повинен визначатися за формулою, що випливає з формули (3.37) при  $x = x_1$

$$\mu = \frac{a}{a} = \frac{(y_1 - x_1)(1 - x_2)}{(y_2 - x_2)(1 - x_1)} \text{ при } x = x_2, \quad (3.42)$$

де  $y_1$  і  $y_2$  - відносні межі міцності для основного металу і з'єднання відповідно для значень  $x_1$  і  $x_2$ .

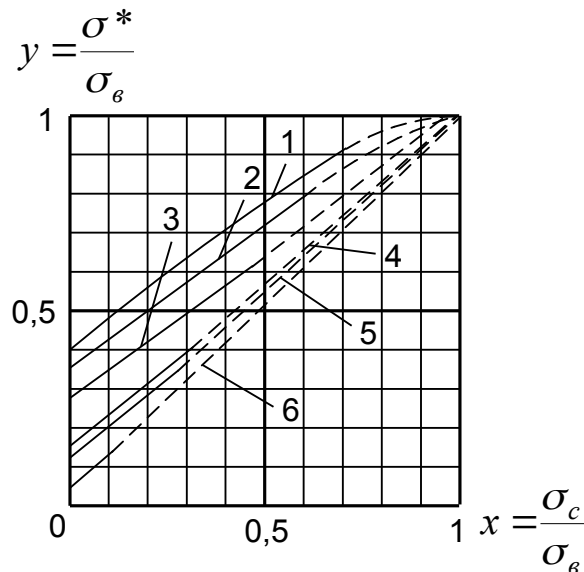


Рис. 3.12. Залежності межі втоми з'єднань  $\sigma^*$  при розтяганні-стисканні від статичного напруження  $\sigma_0$ :

- 1 – St-57 ( $\sigma_0 = 50,5 \text{ кгс/мм}^2$ ), еталонний зразок основного металу;
- 2 – St-57, зварене з'єднання встик з обробкою шва;
- 3 – сталь 15ГС  $\sigma_0 = 63 \text{ кгс/мм}^2$ , еталонний зразок основного металу;
- 4 – сталь 15ГС, зварене з'єднання встик без обробки шва;
- 5 – сталь 15ГС, зварене з'єднання внапусток з лобовими швами 1:1,5;
- 6 – сталь 15ГС, зварене з'єднання внапусток із фланговими швами

Коефіцієнти концентрації напружень  $\mu$  зведено в табл. 3.6 [13].

**Розрахункова перевірка конструкцій на витривалість.** Для перевірки конструкцій на витривалість можна прийняти загальну залежність (3.35), що добре погоджується з дослідними даними і для з'єднаних елементів конструкцій після заміни  $y$  і  $x$  їхніх виразів з формули (3.36) набуває вигляду

$$\sigma^* = \sigma_s \bar{a} + (1 - \bar{a})\sigma_c + \bar{v} \sqrt{\sigma_c(\sigma_s - \sigma_c)}, \quad (3.43)$$

де  $\bar{a}$  й  $\bar{v}$  визначаються за формулою (3.36) для  $a$  й  $v$ , у яких  $\sigma_0^*$  і  $\sigma^*$  відповідають тепер з'єднанням. Для монолітних елементів конструкцій без ослаблень  $\bar{a} = a$ ,  $\bar{v} = v$ .

Таблиця 3.6

Коефіцієнти концентрації напружень для з'єднань елементів  
і для ослаблених елементів конструкцій

Конструкція	Тип з'єднання або ослаблення	Характеристика типу з'єднання або ослаблення	Коефіцієнт $\mu$
1	2	3	4
Будь-яка	Монолітний елемент без ослаблень, а також основний матеріал за межами стиків і з'єднань		1
Сталева	Заклепування	Гаряче клепання	1,2
		Холодне клепання	1,35
		Пластини з отворами	1,4
	Ручне зварювання встик	З обробкою швів	1,2
Без обробки швів		1,5 (2)*	
Елементи з привареними фасонками		1,2	
	Елементи з привареними ребрами	1,7	

Продовження табл. 3.6

1	2	3	4	
	Ручне зварювання внапусток	З лобовими швами 1:2** з їхньою обробкою	1	
		З лобовими швами 1:2** без їхньої обробки	1,1	
		З лобовими швами 1:3**	1,2	
		З лобовими швами І:1,5** з їхньою обробкою	1,7***	
		З лобовими швами 1:1** без їхньої обробки	2,2***	
		З лобовими швами 1:1**	2,4	
		З комбінованими швами - двома фланговими й одним лобовим	1,8	
		Із фланговими швами	3,3(6,5)*	
		Автоматичне зварювання внапусток	З додатковими накладками	1,4
			З лобовими швами 1:3" без їхньої обробки	1,5
З комбінованими швами - двома фланговими й одним лобовим	2,4			
З алюмінієвих сплавів	Заклепування	Зі сплаву Д1-Т із заклепками зі сплаву Д18-Т	1,72	
		Зі сплаву АМ6І із заклепками зі сплаву В65-Т	1,77	
		Пластини з отворами зі сплавів АВ-Т1 і Д16-Т	1,4	

Продовження табл. 3.6

1	2	3	4
	Напівавтоматичне аргоново-дугове зварювання пластин зі сплавом АМг6	Встик з наплавленим металом	1,16
		Встик з обробленими швами	1,28
		Встик з необробленими швами	1,6
		Встик із проміжною прокладкою	2,46
		Внапусток з лобовими швами	2,54
		Внапусток із фланговими швами	4,43
	Аргоново-дугове зварювання пластин зі сплавом АВ-ТУ	Автоматичне встик з обробленими швами	1,7
		Автоматичне встик з необробленими швами	2,5
		Ручне внапусток з фланговими швами	4,5
Складена дерев'яна	Ослаблення по всій висоті перерізу, що згинається	Отвір на всю висоту перерізу	1,3
		Забивання цвяхів на всю висоту перерізу	1,55
	Ослаблення по найбільш напружених волокнах перерізу, що згинається	Прямокутна поперечна канавка	1,95
		Овальна поперечна вм'ятинка	2,1

**Примітки:** \* - значення в дужках відповідають високоміцним сталям ( $\sigma_b \approx 60 \text{ кг/мм}^2$ ).

\*\* - відношення катетів шва.

\*\*\* - дані з роботи [9].

Звичайно при перевірці конструкцій на витривалість приймається лінійна залежність  $\sigma^*(\sigma_c)$ , що для одних матеріалів буде точною, а для інших — наближеною в запас витривалості. Ця залежність випливає з формули (3.43) при значенні  $\vartheta = 0$ . Якщо ввести для зручності запису характерну величину  $\alpha$ , що показує, у скільки разів  $\sigma_\epsilon$  більше  $\sigma_0^*$  -

$$\alpha = \frac{1}{a} = \frac{\sigma_\epsilon}{\sigma_0^*} \quad (3.44)$$

так що на підставі формули (3.40)  $\bar{\alpha} = 1/\mu\alpha$ , то можна цю залежність записати у такому вигляді:

$$\sigma^* = \frac{\sigma_\epsilon}{\mu\alpha} + \frac{\mu\alpha - 1}{\mu\alpha} \sigma_c, \quad (0 \leq \sigma_c \leq \sigma_\epsilon). \quad (3.45)$$

Через розмаїтість формул, що зустрічаються в літературі, для перевірки на витривалість, причина якої в тім, що різними авторами в якості аргументу функції  $\sigma^*$  прийнято різні змінні  $\sigma_{min}$ ,  $\rho$ ,  $\beta$  і  $S$ , важливо встановити зв'язок між цими формулами. Заміняючи у формулі (3.39)  $a$  на  $\alpha = (\mu\alpha)^{-1}$ , одержимо для  $\sigma^*$  ще чотири вирази:

$$\sigma^* = \frac{\mu\alpha - 1}{\mu\alpha + 1} \sigma_{min} + \frac{2\sigma_\epsilon}{\mu\alpha + 1}, \quad \left[ \frac{\sigma_0}{\mu\alpha} \leq \sigma_{min} \leq \sigma_\epsilon \right], \quad (3.46)$$

$$\sigma^* = \frac{2\sigma_\epsilon}{(\mu\alpha + 1) - (\mu\alpha - 1)\rho}, \quad (-1 \leq \rho \leq 1), \quad (3.47)$$

$$\sigma^* = \frac{\sigma_\epsilon}{1 + (\mu\alpha - 1)\beta}, \quad (0 \leq \beta \leq 1), \quad (3.48)$$

$$\sigma^* = \frac{1 + S}{1 + \mu\alpha S} \sigma_\epsilon, \quad (0 \leq S \leq \infty). \quad (3.49)$$



Становить інтерес ще формула особливого виду, що зв'язує напруження  $\sigma_c$  і  $\sigma_0$ , яку одержують з виразу (3.45), замінюючи  $\sigma^*$  виразом (3.33):

$$\sigma_c + \mu\alpha\sigma_0 = \sigma_\epsilon, \quad (0 \leq \sigma_c \leq \sigma_\epsilon). \quad (3.50)$$

Формули (3.43), (3.45) — (3.50) кількісно тотожні, однак з погляду зручності перевірки на витривалість перевагу варто віддати формулам (3.47)—(3.49). При перевірці на витривалість вводиться розрахункова межа витривалості  $\sigma^{sum}$ , яку одержують з виразів для  $\sigma^*$  заміною  $\sigma_\epsilon$  розрахунковим значенням  $\sigma_\epsilon^p$ . Але оскільки за тимчасовим опором перевіряються тільки крихкі матеріали (бетон, чавун і т. п.), а пластичні матеріали (сталі, дерево і т. п.) перевіряються за межею текучості, то в останньому випадку межа витривалості повинна бути виражена через межу текучості шляхом заміни  $\sigma_\epsilon = \rho_0\sigma_T$ .

Таким чином, розрахунковий опір статичного навантаження  $\sigma^p$  дорівнює для крихких матеріалів  $\sigma^p = \sigma_\epsilon^p$ , а для пластичних  $\sigma^p = \rho_0\sigma_T^p$ , де  $\rho_0 = \sigma_\epsilon/\sigma_T$ . Перевірка елементів конструкцій на витривалість виконується за формулою [9]

$$\sigma_c + \sigma_0 \leq \sigma^{sum}, \quad (3.51)$$

де  $\sigma_c$  і  $\sigma_0$  — статичне і динамічне напруження, обумовлені відповідно зі статичного і динамічного розрахунків конструкції.

Розрахункову межу витривалості, якщо для  $\sigma^*$  прийнято вирази (3.47) — (3.49), можна подати у вигляді формули

$$\sigma^{sum} = k^{sum}\sigma^p, \quad (3.52)$$

де коефіцієнт витривалості  $k^{sum}$  обчислюється за формулами

$$k^{sum} = \frac{2}{\mu\alpha + 1 - (\mu\alpha - 1)\rho}, \quad (-1 \leq \rho \leq 1), \quad (3.53)$$

$$k^{sum} = \frac{2}{1 + (\mu\alpha - 1)\beta}, \quad (0 \leq \beta \leq 1), \quad (3.54)$$

$$k^{sum} = \frac{1+S}{1+\mu\alpha S}, \quad (0 \leq S \leq \infty). \quad (3.55)$$

Для одержання  $\sigma^{sum}$  за формулами (3.45) і (3.46) в них варто зробити заміну  $\sigma_e$  на  $\sigma^p$  і  $\sigma^*$  на  $\sigma^{sum}$ . Нарешті, перевірку на витривалість можна зробити за формулою, що відповідає виразу (3.50):

$$\sigma_c + \mu\alpha\sigma_0 \leq \sigma^p. \quad (3.56)$$

У випадку розрахунку за методикою допустимих напружень в усі попередні формули варто вводити замість розрахункового опору  $\sigma^p$  допустиме напруження  $[\sigma]$  (при статичному навантаженні).

Досі всі формули для перевірки на витривалість були виражені через напруження. Аналогічний вигляд будуть мати формули, що зв'язують внутрішні зусилля. Позначаючи через  $M$  внутрішнє зусилля будь-якого виду (згинальний момент, поперечну силу, поздовжню силу), через  $M_c$  – внутрішнє зусилля від статичного навантаження, а через  $M_0$  – амплітуду внутрішнього зусилля від динамічного навантаження, можна записати замість формули (3.51)

$$M_c + M_0 \leq M^{sum}, \quad (3.57)$$

де

$$M^{sum} = k^{sum} M^p, \quad (3.58)$$

де  $k^{sum}$  визначається за формулою (3.53)—(3.55), а

$M^p$  – допустиме зусилля, що визначається за розрахунковим опором  $\sigma^p$  в припущенні статичної дії навантаження.

Формулу (3.56) також можна записати в зусиллях:

$$M_c + \mu\alpha M_0 \leq M^p. \quad (3.59)$$

Що стосується параметрів  $\alpha$  і  $\mu$ , що входять в усі ці формули, то можна приймати для  $\alpha$  значення, оберненим числам  $a$ , наведеним у табл. 3.3—3.5, а для  $\mu$  — значення з табл. 3.6.

Розглянемо приклад розрахунку на міцність. Нехай розкіс сталевий прогонової будівлі залізничного моста при проходженні поїзда зазнає впливу змінного осевого зусилля. Найбільше зусилля, що розтягує, дорівнює  $N_{\max} = 1200$  кН. Найменше (стискальне) зусилля  $N_{\min} = 200$  кН. Розрахунковий опір  $R$  низьколегованої сталі марки 15ХСНД дорівнює 295 МПа. Коефіцієнт умов роботи  $m = 0,9$ . Поперечний переріз - складовий (рис. 3.13) і його площа дорівнює  $A = 75$  см<sup>2</sup>.

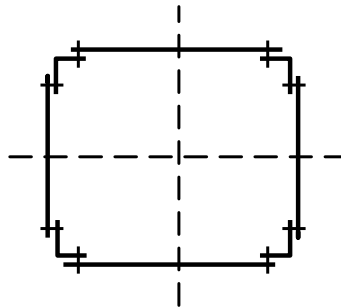


Рис. 3.13. Конструкція поперечного перерізу розкосу сталевий прогонової будівлі залізничного моста

Коефіцієнт асиметрії циклу визначається так:

$$r = - \frac{|N_{\min}|}{N_{\max}} = - \frac{1}{6}.$$

Відповідно до СНіПу 2.05.03-84 коефіцієнт  $\beta = 1,5$ ; параметри  $\alpha = 0,72$ ,  $\delta = 0,24$ .

При розрахунку сталевих конструкцій мостів використовується така нерівність:

$$\sigma_{\max} \leq \gamma_v m R, \quad (3.60)$$

де  $R$  - розрахунковий опір при розтяганні, стисканні і згині по границі текучості матеріалу;

$m$  - коефіцієнт умов роботи;

$$\gamma_v = \frac{1}{(\alpha^* \beta + \delta) - (\alpha^* \beta - \delta)r}, \quad (3.61)$$

де  $\alpha^*$ ,  $\delta$  - коефіцієнти, що враховують марку сталі і нестационарність навантаження;

$r$  - коефіцієнт асиметрії циклу змінних напружень;

$\beta$  - ефективний коефіцієнт концентрації напружень.

Тоді за виразом (3.61)  $\gamma_v = 0,85$ .

Максимальне напруження

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{1200 \cdot 10^3}{75 \cdot 10^{-4}} = 160 \text{ МПа}.$$

Права частина нерівності (3.60) набуває значення

$$\gamma_v m R = 0,85 \cdot 0,9 \cdot 295 = 226,4 \text{ МПа} > 160 \text{ МПа}.$$

Отже, умова втомленісної міцності виконується.

### Бібліографічний список

1. Строительная механика: Динамика и устойчивость сооружений [Текст] / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Н. Лащеников, Н.Н. Шапошников; под ред. А.Ф. Смирнова. – М.:

Стройиздат, 1984. – 415 с.

2. Киселев, В.А. Строительная механика. Специальный курс: Динамика и устойчивость сооружений [Текст] / В.А. Киселев. – 3-е изд. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.

3. Безухов, Н.И. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах [Текст] / Н.И. Безухов, О.В. Лужин, Н.В. Колтунов. – 2-е изд. – М., 1969. – 429 с.

4. Строительная механика [Текст] / Ю.И. Бутенко, Н.А. Засядько, С.Н. Кан [и др.]; под. ред. Ю.И. Бутенко. – К.: Вища школа, 1989. – 479 с.

5. Снитко, Н.К. Строительная механика [Текст] / Н.К. Снитко. – 3-е изд. – М.: Высшая школа, 1980. – 431 с.

6. Дарков, А.В. Строительная механика. [Текст] / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – 8-е изд. – М.: Высшая школа, 1986. – 607 с.

7. Строительная механика [Текст] / А.В. Дарков, Г.К. Клейн, В.И. Кузнецов [и др.]; под. ред. А.В. Даркова. – М.: Высш. шк., 1982. – 400 с.

8. Ржаницын, А.Р. Строительная механика [Текст] / А.Р. Ржаницын. – М.: Высш. шк., 1982. – 400 с.

9. Сорокин, Е.С. Динамический расчет несущих конструкций зданий [Текст] / Е.С. Сорокин. – М.: Госстройиздат, 1956. – 340 с.

10. Сорокин, Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем [Текст] / Е.С. Сорокин. – М.: Госстройиздат, 1960. – 130 с.

11. Пановко, Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем [Текст] / Я.Г. Пановко. – М.: Физматгиз, 1960. – 160 с.

12. Афанасьев, Н.М. Статистическая теория усталостной прочности металлов [Текст] / Н.М. Афанасьев. – К.: Изд. АН УССР, 1953. – 128 с.

13. Корчинский, И.Л. Прочность строительных материалов при динамических нагрузениях [Текст] / И.Л. Корчинский, Г.В. Беченева. – М.: Стройиздат, 1966. – 212 с.

Додаток 1

### Приклад дослідження

Дані для дослідження коливань систем, що зображені на рис. 1.9, наведено в табл. Д.1.1.

1. Визначимо за табл. Д.1.2 статичні переміщення точки прикладання зосередженої маси  $y_{ст}$ , а за формулами (3.8) і (3.9) частоту  $\omega$  та період вільних коливань  $T$  для кожної балки (див. рис. 1.9).

Для першої балки:

$$y_{ст(G)} = \frac{G \cdot \ell^3}{3 \cdot EI} = \frac{17 \cdot 6^3}{3 \cdot 3,5 \cdot 10^4} = 0,03497 \text{ м};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{ст}}} = \sqrt{\frac{10}{0,03497}} = 16,91 \text{ с}^{-1}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3,14}{16,91} = 0,37 \text{ с}.$$

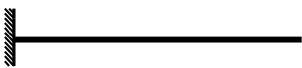
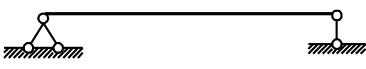
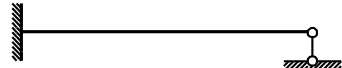
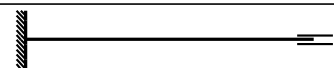
Таблиця Д.1.1

Дані для дослідження

$\ell, \text{м}$	$a, \text{м}$	$EI, \text{кН} \cdot \text{м}^2$	$G, \text{кН}$	$F, \text{кН}$	$\theta, \text{с}^{-1}$	$\alpha, \text{с}^{-1}$
6	4	$3,5 \cdot 10^4$	17	6	160	$0,2\omega$

Таблиця Д.1.2

Значення першого кореня рівняння частот

Номер схеми	Схема балки	$a_z$
1		1,8751
2		3,1416
3		3,9266
4		4,7300

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{ст}}} = \sqrt{\frac{10}{0,03497}} = 16,91 \text{ с}^{-1}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3,14}{16,91} = 0,37 \text{ с}.$$

Для другої балки ( $b = \ell - a = 6 - 4 = 2\text{м}$ ):

$$y_{cm(G)} = \frac{G \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot EI \cdot \ell} = \frac{17 \cdot 4^2 \cdot 2^2}{3 \cdot 3,5 \cdot 10^4 \cdot 6} = 0,00173 \text{ м};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{10}{0,00173}} = 76,03 \text{ с}^{-1}; \quad T = \frac{2 \cdot 3,14}{76,03} = 0,082 \text{ с}.$$

Для третьої балки:

$$y_{cm(G)} = \frac{G \cdot a^3 b^2}{12 \cdot EI \cdot \ell^3} (3\ell + b) = \frac{17 \cdot 4^3 \cdot 2^2}{12 \cdot 3,5 \cdot 10^4 \cdot 6^3} (3 \cdot 6 + 2) = 0,00096 \text{ м};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{10}{0,00096}} = 102,06 \text{ с}^{-1}; \quad T = \frac{2 \cdot 3,14}{102,06} = 0,062 \text{ с}.$$

Для четвертої балки:

$$y_{cm(G)} = \frac{G \cdot a^3 \cdot b^3}{3 \cdot EI \cdot \ell^3} = \frac{17 \cdot 4^3 \cdot 2^3}{3 \cdot 3,5 \cdot 10^4 \cdot 6^3} = 0,000384 \text{ м};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{10}{0,000384}} = 161,37 \text{ с}^{-1}; \quad T = \frac{2 \cdot 3,14}{161,37} = 0,039 \text{ с}.$$

2. Для всіх балок за формулами (1.40) та (1.41) визначимо динамічні коефіцієнти  $\mu$ , та за формулою (1.42) - амплітуду коливань. У кожному випадку підставляється значення  $\omega$ , отримане у пункті 1.

Для першої балки, коли  $\alpha \neq 0$ ,  $y = \frac{2\alpha}{\omega} = \frac{2 \cdot 0,2 \cdot \omega}{\omega} = 0,4$ :

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{160^2}{16,91^2} + 0,4^2 \frac{160^2}{16,91^2}}} = 0,11285$$

$$y_{\max} = y_{cm(G)} + \mu \cdot y_{cm(F)} = \frac{G \cdot \ell^3}{3 \cdot EI} + \mu \frac{F \cdot \ell^3}{3 \cdot EI} = \frac{\ell^3}{3 \cdot EI} (G + \mu \cdot F) =$$

$$= \frac{6^3}{3 \cdot 3,5 \cdot 10^4} (17 + 0,11285 \cdot 6) = 0,0351 \text{ м};$$

КОЛИ  $\alpha = 0$ ,  $y = 0$ :

$$\mu^* = \frac{1}{1 - \frac{160^2}{16,91^2}} = -0,011296;$$

$$y_{\max} = \frac{6^3}{3 \cdot 3,5 \cdot 10^4} (17 + 0,011296 \cdot 6) = 0,0351 \text{ м}.$$

Коефіцієнт  $\mu^*$  підставляють за абсолютною величиною.

Для другої балки, коли  $\alpha \neq 0$ ,  $\gamma = \frac{2\alpha}{\omega} = \frac{2 \cdot 0,2 \cdot \omega}{\omega} = 0,4$ :

$$\mu = \frac{I}{\sqrt{\left(1 - \frac{160^2}{76,03^2}\right)^2 + 0,4^2 \frac{160^2}{76,03^2}}} = 0,28325,$$

$$y_{\max} = \frac{G \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot E \cdot I \cdot \ell} + \mu \frac{F \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot E \cdot I \cdot \ell} = \frac{a^2 \cdot b^2}{3 \cdot E \cdot I \cdot \ell} (G + \mu \cdot F) =$$

$$= \frac{4^2 \cdot 2^2}{3 \cdot 3,5 \cdot 10^4 \cdot 6} (17 + 0,28325 \cdot 6) = 0,0018997 \text{ м};$$

коли  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = 0$ :

$$\mu^* = \frac{1}{1 - \frac{160^2}{76,03^2}} = -0,29166;$$

$$y_{\max} = \frac{4^2 \cdot 2^2}{3 \cdot 3,5 \cdot 10^4 \cdot 6} (17 + 0,29166 \cdot 6) = 0,001905 \text{ м}.$$

Для третьої балки, коли  $\alpha \neq 0$ ,  $\gamma = \frac{2\alpha}{\omega} = \frac{2 \cdot 0,2 \cdot \omega}{\omega} = 0,4$ :

$$\mu = \frac{I}{\sqrt{\left(1 - \frac{160^2}{102,06^2}\right)^2 + 0,4^2 \frac{160^2}{102,06^2}}} = 0,6302;$$

$$y_{\max} = \frac{G \cdot a^3 \cdot b^2}{3 \cdot E \cdot I \cdot \ell^3} (3\ell + b) + \mu \frac{F \cdot a^3 \cdot b^2}{12 \cdot EI \cdot \ell^3} (3\ell + b) =$$

$$= \frac{a^3 \cdot b^2}{12 \cdot E \cdot I \cdot \ell^3} (3\ell + b) \cdot (G + \mu \cdot F) =$$

$$= \frac{4^3 \cdot 2^2}{12 \cdot 3,5 \cdot 10^4 \cdot 6^3} (3 \cdot 6 + 2) \cdot (17 + 0,6302 \cdot 6) = 0,001173 \text{ м};$$

коли  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = 0$ :

$$\mu^* = \frac{1}{1 - \frac{160^2}{102,06^2}} = -0,6859;$$

$$y_{\max} = \frac{4^3 \cdot 2^2}{12 \cdot 3,5 \cdot 10^4 \cdot 6^3} (3 \cdot 6 + 2) (17 + 0,6859 \cdot 6) = 0,001192 \text{ м}.$$

Для четвертої балки, коли  $\alpha \neq 0$ ,  $\gamma = \frac{2\alpha}{\omega} = \frac{2 \cdot 0,2 \cdot \omega}{\omega} = 0,4$ :



$$\mu = \frac{I}{\sqrt{I - \frac{160^2}{161,37^2} + 0,4^2 \frac{160^2}{161,37^2}}} = 2,519;$$

$$y_{\max} = \frac{G \cdot a^3 \cdot b^3}{3 \cdot EI \cdot \ell^3} + \mu \frac{F \cdot a^3 \cdot b^3}{3 \cdot EI \cdot \ell^3} = \frac{a^3 \cdot b^3}{3 \cdot EI \cdot \ell^3} \cdot (G + \mu \cdot F) =$$

$$= \frac{4^3 \cdot 2^3}{3 \cdot 3,5 \cdot 10^4 \cdot 6^3} \cdot (17 + 2,519 \cdot 6) = 0,000725 \text{ м};$$

КОЛИ  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = 0$ :

$$\mu^* = \frac{1}{1 - \frac{160^2}{161,37^2}} = 59,112;$$

$$y_{\max} = \frac{4^3 \cdot 2^3}{3 \cdot 3,5 \cdot 10^4 \cdot 6^3} (17 + 59,112 \cdot 6) = 0,00839 \text{ м}.$$

Знайдемо число обертів  $n$ , при якому для балок настає резонанс.

Для першої балки  $\omega = 16,91 \text{ с}^{-1}$ . Дорівнюємо  $\theta = \omega = 16,91 \text{ с}^{-1}$ , тоді

$$n = \frac{30 \cdot \theta}{\pi} = \frac{30 \cdot 16,91}{3,14} \approx 162 \text{ об/хв}.$$

Для інших балок обчислення аналогічні.

3. Досліджуємо зміни частоти вільних коливань  $n$  залежно від змінних  $\ell$ ,  $a$ ,  $EI$ .

Якщо довжина балки змінюється, положення двигуна та жорсткість перерізу залишаються незмінними.

Для першої балки:

$$\ell^* = 0,2 \cdot \ell = 0,2 \cdot 6 = 1,2 \text{ м};$$

$$y_{\text{ст}} = \frac{G \cdot \ell^3}{3 \cdot EI} = \frac{17 \cdot 1,2^3}{3 \cdot 3,5 \cdot 10^4} = 0,00028 \text{ м};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{10}{0,00028}} = 189 \text{ с}^{-1};$$

$$\ell^* = 0,4 \ell = 0,4 \cdot 6 = 2,4 \text{ м};$$

$$y_{\text{ст}} = \frac{17 \cdot 2,4^3}{3 \cdot 3,5 \cdot 10^4} = 0,00224 \text{ м}; \quad \omega = \sqrt{\frac{10}{0,00224}} \approx 67 \text{ с}^{-1};$$

$$\ell^* = 0,6 \ell = 0,6 \cdot 6 = 3,6 \text{ м};$$

$$y_{\text{ст}} = \frac{17 \cdot 3,6^3}{3 \cdot 3,5 \cdot 10^4} = 0,00755 \text{ м}; \quad \omega = \sqrt{\frac{10}{0,00755}} \approx 36 \text{ с}^{-1};$$

$$\ell^* = 0,8 \cdot \ell = 0,8 \cdot 6 = 4,8 \text{ м};$$

$$y_{\text{ст}} = \frac{17 \cdot 4,8^3}{3 \cdot 3,5 \cdot 10^4} = 0,0179 \text{ м}; \quad \omega = \sqrt{\frac{10}{0,0179}} \approx 24 \text{ с}^{-1};$$

коли  $\ell^* = \ell$ , значення  $\omega$  визначено раніше (див. пункт 1),

$$\omega = 16,91 \cong 17 \text{ c}^{-1}.$$

Для другої схеми спочатку визначимо відношення  $k = \frac{a}{\ell}$ , а потім за формулами,  $a^* = k \cdot \ell$ ;  $b^* = \ell - a^*$  - нові значення  $a^*, b^*$ :

$$k = \frac{a}{\ell} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ (див. табл. Д.1.3); } a = k \cdot \ell.$$

$$\ell^* = 0,2 \cdot \ell = 0,2 \cdot 6 = 1,2 \text{ м;}$$

$$a^* = k \cdot \ell^* = \frac{2}{3} \cdot 1,2 = 0,8 \text{ м; } b^* = \ell^* - a^* = 1,2 - 0,8 = 0,4 \text{ м;}$$

$$y_{\text{ст}} = \frac{G \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot EI \cdot \ell} = \frac{17 \cdot 0,8^2 \cdot 0,4^2}{3 \cdot 3,5 \cdot 10^4 \cdot 1,2} = 0,0000138 \text{ м;}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{10}{0,0000138}} \cong 851 \text{ c}^{-1}; \quad \ell^* = 0,4\ell = 0,4 \cdot 6 = 2,4 \text{ м;}$$

$$a^* = k \cdot \ell^* = \frac{2}{3} \cdot 2,4 = 1,6 \text{ м; } b^* = \ell^* - a^* = 2,4 - 1,6 = 0,8 \text{ м;}$$

$$y_{\text{ст}} = \frac{17 \cdot 1,6^2 \cdot 0,8^2}{3 \cdot 3,5 \cdot 10^4 \cdot 2,4} = 0,0001105 \text{ м; } \omega = \sqrt{\frac{10}{0,0001105}} \cong 301 \text{ c}^{-1}.$$

Потім слід визначити  $\omega$ , коли  $\ell^* = 0,6\ell; 0,8\ell$ , таким же чином.

Для третьої та четвертої балки результати відрізняються від наведених тільки формулою для визначення  $y_{\text{ст}}$ . Результати зручно занести в табл. Д.1.3.

Таблиця Д.1.3

Значення частот вільних коливань при різних довжинах балок

Номер схеми	Частота коливань $\omega, \text{ c}^{-1}$				
	$0,2\ell$	$0,4\ell$	$0,6\ell$	$0,8\ell$	$\ell$
1	189	67	36	24	17
2	851	301	163	106	76
3	1140	404	219	142	102
4	1796	638	347	226	161

Дослідження впливу положення двигуна на зміну частоти коливань проводять на балках 2-4. При цьому довжина балки  $\ell$  та жорсткість перерізу  $EI$  постійні (див. табл. Д.1.4).

Для другої балки:

$$a^* = 0,2\ell = 0,2 \cdot 6 = 1,2 \text{ м; } b^* = \ell - a^* = 6 - 1,2 = 4,8 \text{ м;}$$

$$y_{cr} = \frac{G \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot EI \cdot \ell} = \frac{17 \cdot 1,2^2 \cdot 4,8^2}{3 \cdot 3,5 \cdot 10^4 \cdot 6} = 0,000895 \text{ м};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{10}{0,000895}} \cong 106 \text{ с}^{-1};$$

$$a^* = 0,4\ell = 0,4 \cdot 6 = 2,4 \text{ м}; \quad b^* = \ell - a^* = 6 - 2,4 = 3,6 \text{ м};$$

$$y_{cr} = \frac{17 \cdot 2,4^2 \cdot 3,6^2}{3 \cdot 3,5 \cdot 10^4 \cdot 6} = 0,002014 \text{ м}; \quad \omega = \sqrt{\frac{10}{0,002014}} \cong 70 \text{ с}^{-1}.$$

Подібним чином визначають частоту  $\omega$ , коли  $\ell^* = 0,6\ell; 0,8\ell$ , і для балок 3 та 4.

Результати розрахунків наведено в табл. Д.1.4.

Таблиця Д.1.4

Значення частот вільних коливань  $\omega$  за різними положеннями двигуна

Номер схеми	Частота коливань $\omega$ , $\text{с}^{-1}$			
	$a/\ell = 0,2$	$a/\ell = 0,4$	$a/\ell = 0,6$	$a/\ell = 0,8$
2	106	70	70	106
3	242	118	99	132
4	264	144	144	264

Вплив жорсткості поперечного перерізу  $EI$  на частоту коливань  $\omega$  досліджують на усіх балках. Положення двигуна та довжина балки не змінюються.

Для першої балки:

$$EI^* = 0,2EI = 0,2 \cdot 3,5 \cdot 10^4 = 0,7 \cdot 10^4;$$

$$y_{cr} = \frac{G \cdot \ell^3}{3 \cdot EI} = \frac{17 \cdot 6^3}{3 \cdot 0,7 \cdot 10^4 \cdot 6} = 0,17485 \text{ м}; \quad \omega = \sqrt{\frac{10}{0,17485}} \cong 7,6 \text{ с}^{-1};$$

$$EI^* = 0,4EI = 0,4 \cdot 3,5 \cdot 10^4 = 1,4 \cdot 10^4;$$

$$y_{cr} = \frac{17 \cdot 6^3}{3 \cdot 1,4 \cdot 10^4} = 0,08743 \text{ м}; \quad \omega \cong 10,7 \text{ с}^{-1}.$$

Інші обчислення виконуються аналогічно, дані для розрахунку наведено в табл. Д.1.5.

Таблиця Д.1.5

Значення частот вільних коливань за різними величинами жорсткості перерізу

Номер схеми	Частота коливань $\omega, c^{-1}$				
	$0,2 \cdot EI$	$0,4 \cdot EI$	$0,6 \cdot EI$	$0,8 \cdot EI$	$EI$
1	7,6	10,7	13,1	15,1	17
2	34	48	59	68	76
3	46	64	79	91	102
4	72	102	125	144	161

4. Розподілимо зосереджене навантаження (вагу двигуна) по всій довжині балки, уявляючи балку системою з нескінченним числом ступенів свободи:

$$m = \frac{G}{q\ell} = \frac{17}{10 \cdot 6} = 0,2833 \frac{\text{кН} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^2}.$$

Для обчислення першої частоти вільних коливань (основний тон) за табл. Д.1.1 знайдемо значення першого кореня  $\lambda_1$  рівняння частот вільних коливань для відповідної схеми балки. Так, наприклад для першої балки  $\lambda_1 = 1,8751$ . За формулою (1.47) перша частота

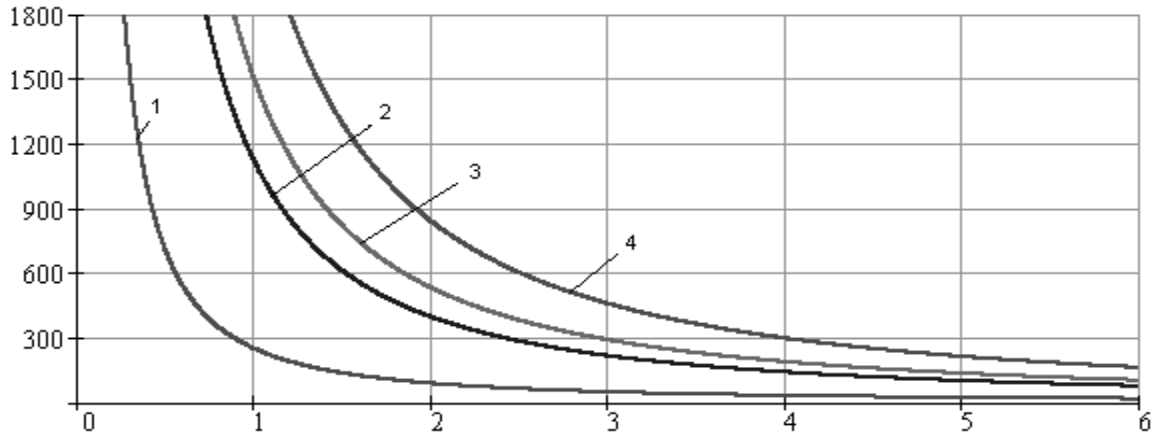
$$\omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{1,8751^2}{6^2} \sqrt{\frac{3,5 \cdot 10^4}{0,2833}} = 34,3 \text{ с}^{-1}.$$

Для інших балок обчислення аналогічні.

На рис. Д.1.1 показано графіки зміни частоти вільних коливань залежно від довжини балки  $\ell$ , положення двигуна  $a/\ell$ , жорсткості перерізу  $EI$ .

a)

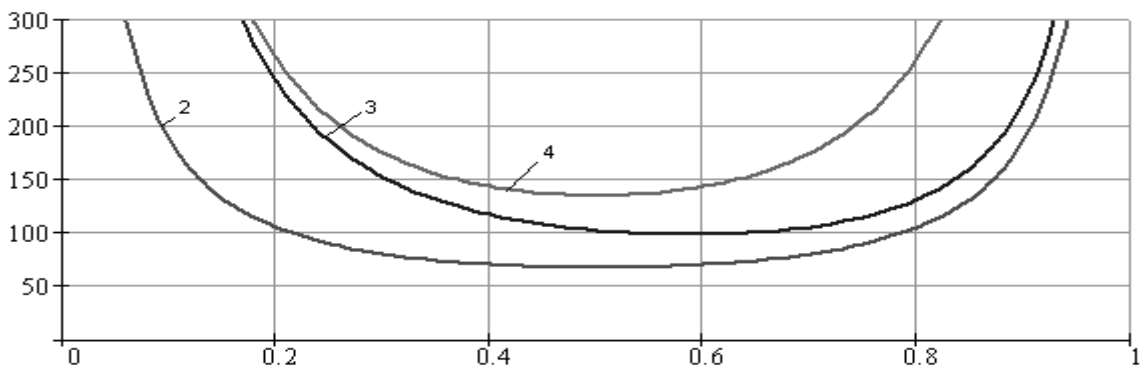
Частота коливань  $\omega$ ,  $\text{с}^{-1}$



Довжина балки l, м

б)

Частота коливань  $\omega$ ,  $\text{с}^{-1}$



Відношення a/l

в)

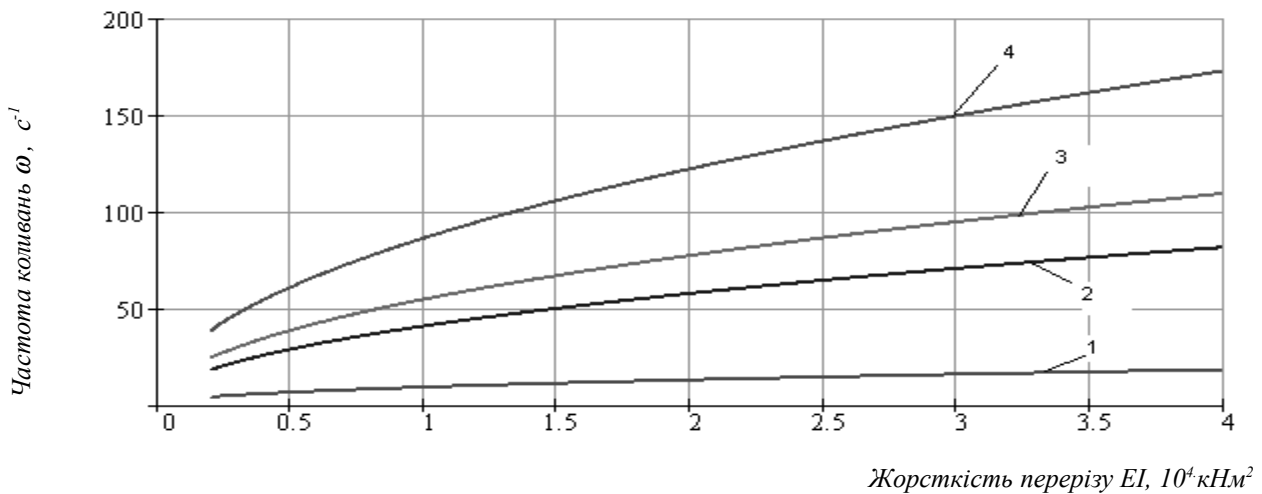


Рис. Д.1.1. Зміни частоти  $\omega$  залежно від довжини балки  $\ell$  ( $a$ ), відношення  $\frac{a}{\ell}$  ( $b$ ), жорсткості перерізу  $EI$  ( $c$ )

### Застосування ПЕОМ для дослідження вільних коливань систем з одним ступенем свободи

Для дослідження коливань систем з одним ступенем свободи за алгоритмом, який було наведено раніше, розроблено програму Д1. Програма розроблена за допомогою системи MathCAD.

За допомогою програми Д1 було проведено на ПЕОМ розрахунки: частоти та періоду вільних коливань балок; динамічних коефіцієнтів та амплітуд вимушених коливань балок від вібраційного навантаження з урахуванням і без урахування сил опору; числа обертів, при якому для балки настає резонанс; досліджень зміни частоти вільних коливань залежно від довжини балки, положення двигуна, жорсткості перерізу; першої частоти вільних коливань для балок з розподіленою по довжині балки масою.

Для запуску програми потрібно вибрати ярлик програми та натиснути ліву кнопку мишки. Після цього на запит з екрана ввести номер варіанта завдання (тест або номер рядка таблиці вихідних даних). Для того щоб отримати результати розрахунку, необхідно вручну правильно з точністю до 5 % знайти шукані величини для контрольних точок. Одержані значення вводяться на запит з екрана. Якщо вони правильні, то на екрані з'являється результат розрахунку у вигляді таблиці або таблиці та графіка.

Якщо обчислені студентом значення неправильні, результати розрахунків у таблицях будуть нульовими, а графіки відсутніми.

Контрольними точками є:

- при виконанні пункту 2 контроль динамічних коефіцієнтів і максимальних переміщень для схеми 1 табл. Д.1.2 з урахуванням і без урахування сил опору ( $\mu_k$ ,  $u_{\max k}$  і  $\mu_k$ ,  $u_{\max k}$ );
- при виконанні пункту 3 контроль частот вільних коливань для всіх схем залежно від довжини балки при  $l^*=0,2l$  ( $\omega_{Lk_1}$ ,  $\omega_{Lk_2}$ ,  $\omega_{Lk_3}$ ,  $\omega_{Lk_4}$ );
- при виконанні пункту 3 контроль частот вільних коливань для схем 2, 3, 4 табл. Д.1.2 залежно від положення двигуна  $a/l=0,2$  ( $\omega_{ak_2}$ ,  $\omega_{ak_3}$ ,  $\omega_{ak_4}$ );
- при виконанні пункту 3 контроль частот вільних коливань для всіх схем залежно від жорсткості перерізу балки  $EI^*=0,2EI$  ( $\omega_{EJk_1}$ ,  $\omega_{EJk_2}$ ,  $\omega_{EJk_3}$ ,  $\omega_{EJk_4}$ ).

У програмі позначено:

- $\mu_k$ ,  $u_{\max k}$  – контрольні значення динамічного коефіцієнта та максимального переміщення (амплітуди коливань) з урахуванням сил опору;
- $\mu_k$ ,  $u_{\max k}$  – контрольні значення динамічного коефіцієнта та максимального переміщення (амплітуди коливань) без урахуванням сил опору;
- $\omega_{Lk_1}$ ,  $\omega_{Lk_2}$ ,  $\omega_{Lk_3}$ ,  $\omega_{Lk_4}$  – контрольні значення частот вільних коливань залежно від довжини балки при  $l^*=0,2l$  для схем 1, 2, 3, 4 табл. Д.1.2;
- $\omega_{ak_2}$ ,  $\omega_{ak_3}$ ,  $\omega_{ak_4}$  – контрольні значення частот вільних коливань залежно від положення двигуна  $a/l=0,2$  для схем 2, 3, 4 табл. Д.1.2;
- $\omega_{EJk_1}$ ,  $\omega_{EJk_2}$ ,  $\omega_{EJk_3}$ ,  $\omega_{EJk_4}$  – контрольні значення частот вільних коливань залежно від жорсткості перерізу балки  $EI^*=0,2EI$  для схем 1, 2, 3, 4 табл. Д.1.2.

Для тестового варіанта значення в контрольних точках вводити не треба.

Результати розрахунку на ПЕОМ можна роздрукувати на принтері.

При цьому показано на рис. Д.1.2 приклад введення варіанта та схеми балок; на рис. Д.1.3 приклад введення значень шуканих величин контрольних точок і результати повного розрахунку за програмою, таблиці змінювання частоти вільних коливань залежно від довжини балок, положення двигуна, жорсткості перерізу. Графіки змінювання частоти вільних коливань залежно від довжини балок, положення двигуна, жорсткості перерізу, а також частоти вільних коливань балок з розподіленою масою наведено на рис. Д.1.4.

Результати розрахунків, проведених вручну та на ПЕОМ, співпадають.



Завдання. Дослідження коливань систем з одним ступенем свободи.

Введіть: `wag := тест`

Дано:  $l = 6 \text{ м}$   $a = 4 \text{ м}$   $EI = 3.5 \times 10^4 \text{ кНм}^2$   $G = 17 \text{ кН}$   $F = 6 \text{ кН}$   
 $\theta = 160 \text{ с}^{-1}$   $\alpha = 0.2 \cdot \omega \text{ с}^{-1}$   $g = 10 \text{ м/с}^2$

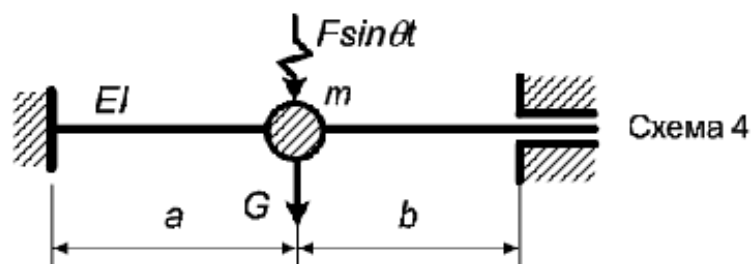
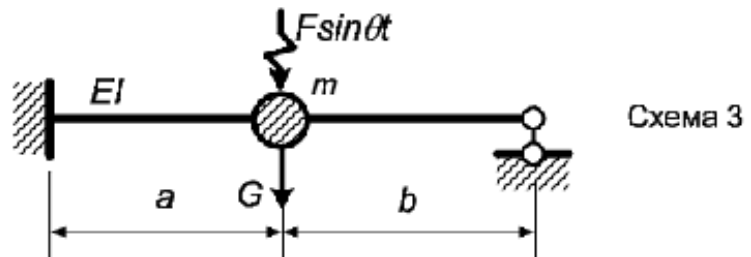
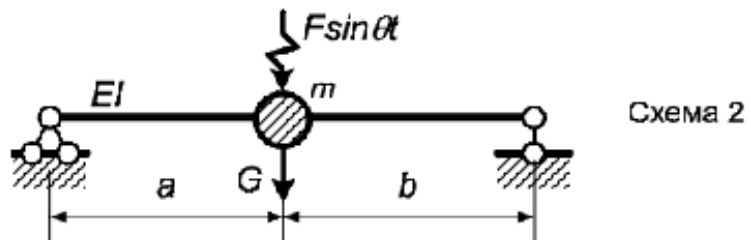
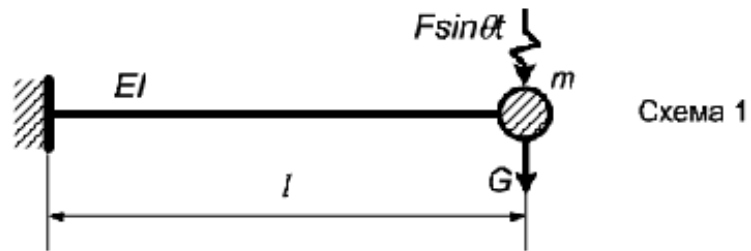


Рис. Д.1.2

Введіть значення для контролю:  $\mu_k := 0.011$   $\mu_k := 0.011$   $y_{\max k} := 0.035$   $y_{\max\_k} := 0.035$

1. Визначимо  $y_{stG}$ ,  $\omega$  і  $T$

$y_{stG} =$

	1
1	0.03497
2	0.00173
3	0.00096
4	0.00038

$\omega =$

	1
1	16.91
2	76.095
3	102.092
4	161.422

$T =$

	1
1	0.372
2	0.083
3	0.062
4	0.039

2. Визначимо  $\mu$ ,  $\mu_*$  і  $y_{\max}$ ,  $y_{\max\_}$

$\mu =$

	1
1	0.01129
2	0.28385
3	0.63077
4	2.51975

$y_{\max} =$

	1
1	0.03511
2	0.0019
3	0.00117
4	0.00073

$\mu_* =$

	1
1	0.0113
2	0.29231
3	0.68674
4	57.01931

$y_{\max\_} =$

	1
1	0.03511
2	0.00191
3	0.00119
4	0.00811

3. Визначимо  $n$  при  $\theta = \omega$

$n^T =$

	1	2	3	4
1	161.48	726.65	974.91	1541.46

4. Дослідимо змінювання  $\omega$  від  $L$ ,  $a/L$ ,  $EJ$

Введіть значення для контролю:  $\omega_{Lk1} := 189$   $\omega_{Lk2} := 850$   $\omega_{Lk3} := 1141$   $\omega_{Lk4} := 1804$

	1	2	3	4	5
$\omega_L =$	189.06	66.84	36.38	23.63	16.91
	850.77	300.79	163.73	106.35	76.09
	1141.42	403.55	219.67	142.68	102.09
	1804.75	638.08	347.32	225.59	161.42

Введіть значення для контролю:  $\omega_{ak1} := 105$   $\omega_{ak2} := 242$   $\omega_{ak3} := 264$

	1	2	3	4
$\omega_a =$	105.69	70.46	70.46	105.69
	242.46	117.43	98.66	132.11
	264.22	143.82	143.82	264.22

Введіть значення для контролю:  $\omega_{EJk1} := 7.56$   $\omega_{EJk2} := 34.0$   $\omega_{EJk3} := 45.7$   $\omega_{EJk4} := 72.2$

	1	2	3	4	5
$\omega_{EJ} =$	7.56	10.69	13.1	15.12	16.91
	34.03	48.13	58.94	68.06	76.09
	45.66	64.57	79.08	91.31	102.09
	72.19	102.09	125.04	144.38	161.42

Рис. Д.1.3

## Таблиця функцій Кривола

$$A_{sx} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}sx + \operatorname{cos}sx), \quad B_{sx} = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}sx + \operatorname{sin}sx),$$

$$C_{sx} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}sx - \operatorname{cos}sx), \quad D_{sx} = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}sx - \operatorname{sin}sx)$$

(до динамічного розрахунку балок)

Таблиця Д.2.1

$s/x$	$A_{sx}$	$B_{sx}$	$C_{sx}$	$D_{sx}$
1	2	3	4	5
0	1,0	0	0	0
0,01	1,0	0,01	0,00005	0
0,02	1,0	0,02	0,00020	0
0,03	1,0	0,03	0,00045	0
0,04	1,0	0,04	0,00080	0,00001
0,05	1,0	0,05	0,00125	0,00002
0,06	1,0	0,06	0,00180	0,00004
0,07	1,0	0,07	0,00245	0,00006
0,08	1,0	0,08	0,00320	0,00009
0,09	1,0	0,09	0,00405	0,00012
0,1	1,0	0,10	0,00500	0,00017
0,2	1,00007	0,20000	0,02000	0,00133
0,3	1,00034	0,30002	0,04500	0,00450
0,4	1,00106	0,40008	0,07999	0,01062
0,5	1,00261	0,50026	0,12502	0,02084
0,6	1,00539	0,60064	0,18006	0,03606
0,7	1,01001	0,70190	0,24516	0,05718
0,8	1,01702	0,80273	0,32036	0,08537
0,9	1,02735	0,90492	0,40574	0,12159
1,0	1,04169	1,00833	0,50139	0,16686
1,1	1,06106	1,11343	0,60746	0,22222
1,2	1,08651	1,22075	0,72415	0,28871
1,3	1,11920	1,33097	0,85170	0,36691
1,4	1,16043	1,44487	0,99046	0,45942
1,5	1,21157	1,56338	0,14083	0,56589
$1/2\pi$	1,25409	1,650015	1,25409	0,65015
1,6	1,27413	1,68757	1,30333	0,63800
1,7	1,39974	1,81864	1,47832	0,82698

## Продовження табл. Д.2.1

1	2	3	4	5
1,8	1,44013	1,95801	1,66823	0,98416
1,9	1,54722	2,10723	1,87551	1,16093
2,0	1,67302	2,26808	2,08917	1,35878
2,1	1,82973	2,44253	2,32458	1,57937
2,2	1,98970	2,63280	2,57820	1,82430
2,3	2,18547	2,84133	2,85175	2,09562
2,4	2,40978	3,07085	3,14717	2,39537
2,5	2,66557	3,32433	3,46671	2,72586
2,6	2,95606	3,60511	3,81295	3,08961
2,7	3,08470	3,91682	4,18872	3,48944
2,8	3,65520	4,26346	4,59747	3,92846
2,9	4,07181	4,64940	5,04277	4,41016
3,0	4,53883	5,07949	5,52882	4,93837
3,1	5,06118	5,55901	6,06032	5,51743
$\pi$	5,29597	5,77437	6,29597	5,77437
3,2	5,66418	6,09375	6,64247	6,15212
3,3	6,29364	6,69006	7,28112	6,84781
3,4	7,01592	7,35491	7,98277	7,61045
3,5	7,81818	8,09592	8,75464	8,44670
3,6	8,70801	8,92147	9,60477	9,36399
3,7	9,69345	9,84072	10,54205	10,37056
3,8	10,78540	10,86377	11,57637	11,47563
3,9	11,99271	12,00167	12,71864	12,68943
4,0	13,32739	13,26656	13,98093	14,02336
4,1	14,80180	14,67179	15,37662	15,49007
4,2	16,43020	16,23204	16,92046	17,10362
4,3	18,27794	11,96347	18,62874	18,87964
4,4	20,21212	19,88365	20,51945	20,83545
4,5	22,40166	22,01274	22,61246	22,99027
4,6	24,81751	24,37172	24,92966	25,36541
4,7	27,48287	26,98456	27,49526	27,98448
$3/2\pi$	27,83169	27,32720	27,83169	28,32720
4,8	30,42341	29,87746	30,33591	30,87362
4,9	33,66756	33,07936	33,48105	34,06181

5,0	37,24680	36,62214	36,96314	37,58106
-----	----------	----------	----------	----------

Продовження табл. Д.2.1

1	2	3	4	5
5,1	41,19599	40,54105	40,81801	41,46686
5,2	45,55370	44,87495	45,08518	45,75840
5,3	50,36263	49,66682	49,80826	50,49909
5,4	55,67008	54,96409	55,03539	55,73685
5,5	61,52834	60,81919	60,81967	61,52473
5,6	67,9953	67,29004	66,21974	67,92131
5,7	75,13504	74,44067	74,30033	73,99136
5,8	83,01840	82,34183	82,13288	82,80663
5,9	91,72379	91,07172	90,79631	91,44562
6,0	101,33790	100,71687	100,37773	100,99629
6,1	111,95664	111,37280	110,97337	111,55491
6,2	123,68604	123,19521	122,68950	123,22830
2 $\pi$	134,37338	133,87245	133,37338	133,87245
6,3	136,64336	136,15092	135,64350	136,13411
6,4	150,96826	150,46912	149,97508	150,35257
6,5	166,77508	166,39259	165,79749	166,17747
6,6	184,24925	183,92922	183,29902	183,61768
6,7	203,55895	208,30357	202,64457	202,89872
6,8	224,89590	224,70860	224,02740	224,21449
6,9	248,47679	248,35764	247,66106	247,77920
7,0	274,53547	274,48655	273,78157	273,82956
7,1	303,33425	303,28381	302,64970	302,62707
7,2	335,16205	335,25434	334,55370	334,46067
7,3	370,33819	370,50003	369,81211	369,64954
7,4	409,21553	409,44531	408,77698	408,54660
7,5	452,18406	452,92446	451,73742	451,54146
7,6	499,67473	500,03281	499,42347	499,06489
7,7	552,16384	552,58097	552,01042	551,58780
7,8	610,17757	610,64966	610,12361	609,65112
5/2 $\pi$	643,99272	644,49252	643,99272	643,49252
7,9	674,29767	674,81986	674,34367	673,82102
8,0	745,16683	745,73409	745,31233	744,74473
8,1	823,49532	823,95189	823,73886	823,28200

8,2	910,06807	910,70787	910,40722	909,76714
-----	-----------	-----------	-----------	-----------

Продовження табл. Д.2.1

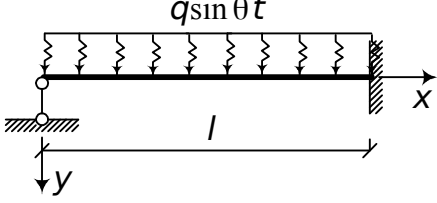
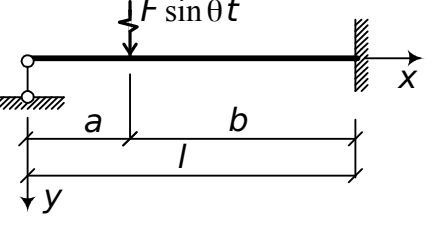
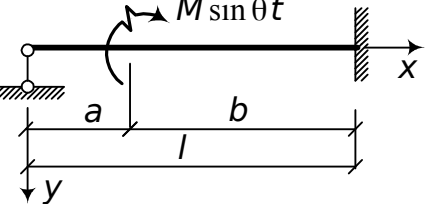
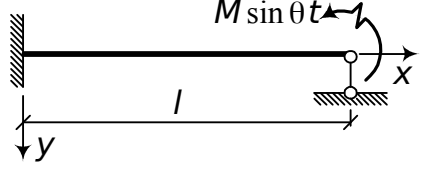
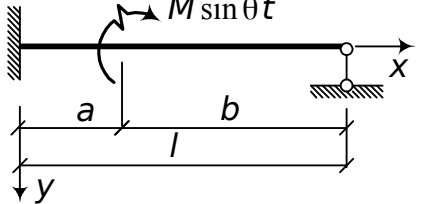
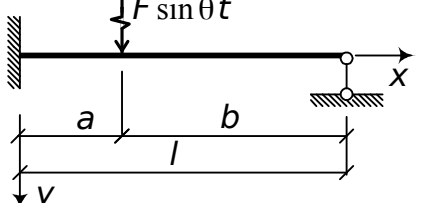
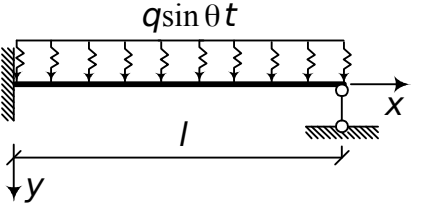
1	2	3	4	5
8,3	1005,75247	1006,41912	1006,18385	1005,51695
8,4	1111,50710	1112,19393	1112,02639	1111,33933
8,5	1228,39125	1229,09140	1228,99326	1228,29291
8,6	1357,57558	1358,28205	1358,25430	1357,54765
8,7	1500,35377	1501,05950	1501,10242	1500,39658
8,8	1658,15549	1658,85342	1658,96658	1658,26850
8,9	1832,56070	1833,42607	1833,42614	1832,74284
9,0	2025,31545	2025,97701	2026,22658	2025,56489
9,1	2238,34934	2238,98270	2239,29706	2238,66360
9,2	2437,79487	2474,39373	2474,76971	2474,17079
9,3	2734,00871	2734,56701	2735,00094	2734,44255
9,4	3021,59536	3022,10755	3022,59505	3022,08297
3π	3097,41192	3097,91193	3098,41197	3097,91193
9,5	3339,43414	3339,89411	3340,43031	3359,96926
9,6	3690,70306	3691,11321	3691,68775	3691,27754
9,7	4078,92063	4079,26590	4079,88299	4079,53766
9,8	4508,47103	4508,25298	4508,90146	4508,61946
9,9	4982,14802	4982,35202	4983,03721	4982,32136
10,0	5506,19696	5506,34442	5507,03599	5506,88844

Таблиця стандартних рішень

Таблиця Д.3.1

№	Схема навантаження	Значення параметрів
1	2	3
1		$Q_0 = -Ms \frac{A_{sl}B_{sl} - C_{sl}D_{sl}}{B_{sl}^2 - D_{sl}^2}$ $y_{\theta} = \frac{M}{sEJ} \frac{B_{sl}C_{sl} - A_{sl}D_{sl}}{B_{sl}^2 - D_{sl}^2}$
2		$Q_0 = Ms \frac{B_{sl}}{B_{sl}^2 - D_{sl}^2}$ $y_{\theta} = \frac{M}{sEJ} \frac{D_{sl}}{B_{sl}^2 - D_{sl}^2}$
3		$Q_0 = \frac{q}{s} \frac{B_{sl}C_{sl} - (A_{sl} - 1)D_{sl}}{B_{sl}^2 - D_{sl}^2}$ $y_{\theta} = \frac{q}{s^3EJ} \frac{C_{sl}D_{sl} - (A_{sl} - 1)B_{sl}}{B_{sl}^2 - D_{sl}^2}$
4		$Q_0 = F \frac{B_{sb}B_{sl} - D_{sb}D_{sl}}{B_{sl}^2 - D_{sl}^2}$ $y_{\theta} = \frac{F}{s^2EJ} \frac{B_{sb}D_{sl} - D_{sb}B_{sl}}{B_{sl}^2 - D_{sl}^2}$
5		$Q_0 = Ms \frac{C_{sb}D_{sl} - A_{sb}B_{sl}}{B_{sl}^2 - D_{sl}^2}$ $y_{\theta} = \frac{C_{sb}B_{sl} - A_{sb}D_{sl}}{B_{sl}^2 - D_{sl}^2}$
6		$Q_0 = Ms \frac{B_{sl}^2 - A_{sl}C_{sl}}{A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$ $y_{\theta} = \frac{M}{sEJ} \frac{B_{sl}D_{sl} - C_{sl}^2}{A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$

Продовження табл. Д.3.1

1	2	3
7		$Q_0 = \frac{q A_{sl}(A_{sl} - 1) - B_{sl}D_{sl}}{s A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$ $y_0 = \frac{q C_{sl}(A_{sl} - 1) - D_{sl}^2}{s^3 EJ A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$
8		$Q_0 = F \frac{D_{sb}A_{sl} - C_{sb}B_{sl}}{A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$ $y_0 = \frac{F D_{sb}C_{sl} - C_{sb}D_{sl}}{s^2 EJ A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$
9		$Q_0 = Ms \frac{B_{sb}B_{sl} - C_{sb}A_{sl}}{A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$ $y_0 = \frac{M B_{sb}D_{sl} - C_{sb}C_{sl}}{s EJ A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$
10		$Q_0 = -Ms \frac{C_{sl}}{A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$ $M_0 = M \frac{D_{sl}}{A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$
11		$Q_0 = Ms \frac{C_{sb}A_{sl} - A_{sb}C_{sl}}{B_{sl}C_{sl} - A_{sl}D_{sl}}$ $M_0 = -M \frac{C_{sb}B_{sl} - A_{sb}D_{sl}}{B_{sl}C_{sl} - A_{sl}D_{sl}}$
12		$Q_0 = F \frac{B_{sb}C_{sl} - D_{sb}A_{sl}}{B_{sl}C_{sl} - A_{sl}D_{sl}}$ $M_0 = \frac{F D_{sb}B_{sl} - B_{sb}D_{sl}}{s B_{sl}C_{sl} - A_{sl}D_{sl}}$
13		$Q_0 = \frac{q C_{sl}^2 - A_{sl}(A_{sl} - 1)}{s B_{sl}C_{sl} - A_{sl}D_{sl}}$ $M_0 = \frac{q B_{sl}(A_{sl} - 1) - D_{sl}C_{sl}}{s^2 B_{sl}C_{sl} - A_{sl}D_{sl}}$

Продовження табл. Д.3.1

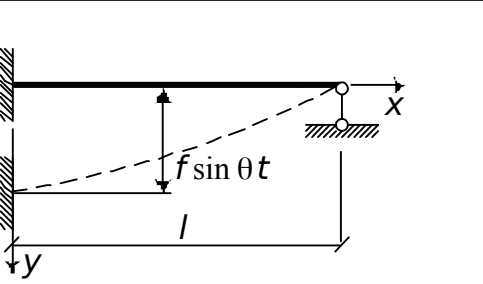
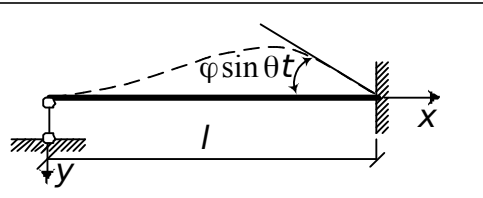
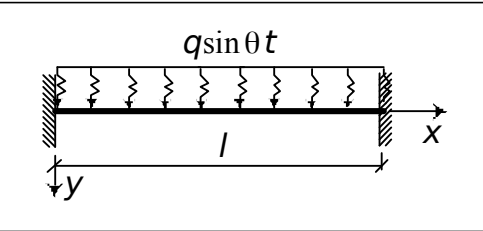
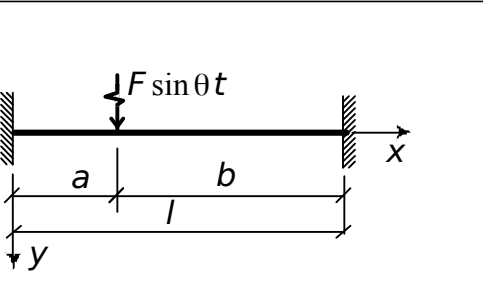
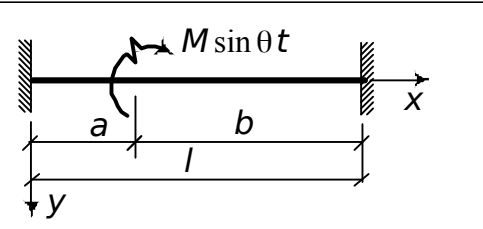
1	2	3
---	---	---



14		$Q_0 = \varphi s^2 EJ \frac{B_{sl}^2 - A_{sl}C_{sl}}{D_{sl}B_{sl} - C_{sl}^2}$ $M_0 = \varphi s EJ \frac{A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}{D_{sl}B_{sl} - C_{sl}^2}$
15		$Q_0 = \varphi s^2 EJ \frac{C_{sl}}{D_{sl}B_{sl} - C_{sl}^2}$ $M_0 = -\varphi s EJ \frac{D_{sl}}{D_{sl}B_{sl} - C_{sl}^2}$
16		$Q_0 = -f s^3 EJ \frac{B_{sl}}{D_{sl}B_{sl} - C_{sl}^2}$ $M_0 = f s^2 EJ \frac{C_{sl}}{D_{sl}B_{sl} - C_{sl}^2}$
17		$Q_0 = f s^3 EJ \frac{A_{sl}B_{sl} - C_{sl}D_{sl}}{D_{sl}B_{sl} - C_{sl}^2}$ $M_0 = f s^2 EJ \frac{D_{sl}^2 - A_{sl}C_{sl}}{D_{sl}B_{sl} - C_{sl}^2}$
18		$Q_0 = \varphi s^2 EJ \frac{A_{sl}B_{sl} - C_{sl}D_{sl}}{A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$ $M_0 = \varphi s EJ \frac{D_{sl}^2 - B_{sl}^2}{A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$
19		$Q_0 = f s^3 EJ \frac{A_{sl}}{A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$ $M_0 = f s^2 EJ \frac{B_{sl}}{A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$
20		$Q_0 = f s^3 EJ \frac{A_{sl}^2 - D_{sl}B_{sl}}{A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$ $y_0^{\bar{}} = f s \frac{A_{sl}C_{sl} - D_{sl}^2}{A_{sl}D_{sl} - B_{sl}C_{sl}}$

Продовження табл. Д.3.1

1	2	3
---	---	---

21		$Q_0 = f s^3 E J \frac{A_{sl}^2 - C_{sl}^2}{A_{sl} D_{sl} - B_{sl} C_{sl}}$ $M_0 = f s^2 E J \frac{C_{sl} D_{sl} - A_{sl} B_{sl}}{A_{sl} D_{sl} - B_{sl} C_{sl}}$
22		$Q_0 = \varphi s^3 E J \frac{B_{sl}}{A_{sl} D_{sl} - B_{sl} C_{sl}}$ $y_0 = \varphi \frac{D_{sl}}{A_{sl} D_{sl} - B_{sl} C_{sl}}$
23		$Q_0 = \frac{q (A_{sl} - 1) B_{sl} + C_{sl} D_{sl}}{s B_{sl} D_{sl} - C_{sl}^2}$ $M_0 = \frac{q D_{sl}^2 - C_{sl} (A_{sl} - 1)}{s^2 B_{sl} D_{sl} - C_{sl}^2}$
24		$Q_0 = F \frac{D_{sb} B_{sl} - C_{sb} C_{sl}}{B_{sl} D_{sl} - C_{sl}^2}$ $M_0 = \frac{F C_{sb} D_{sl} - D_{sb} C_{sl}}{s B_{sl} D_{sl} - C_{sl}^2}$
25		$Q_0 = M s \frac{B_{sb} C_{sl} - C_{sb} B_{sl}}{B_{sl} D_{sl} - C_{sl}^2}$ $M_0 = M \frac{C_{sb} C_{sl} - B_{sb} D_{sl}}{B_{sl} D_{sl} - C_{sl}^2}$

Додаток 4

### Приклад розрахунку нерозрізної балки методом сил

Розрахункова схема заданої балки показана на рис. Д.4.1, а;

основна система – на рис. Д.4.1, б;  $s = 0,5 \text{ м}^{-1}$ ,  $EJ = \text{const}$ .

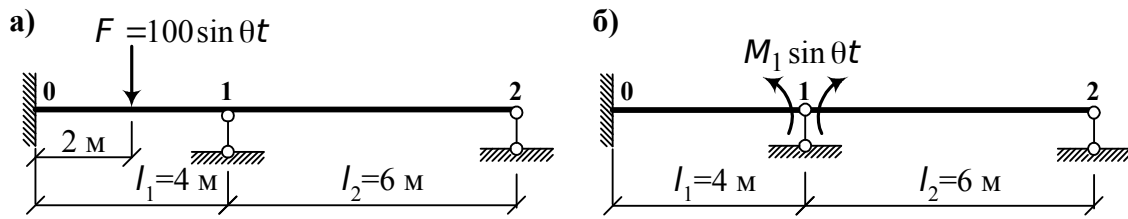


Рис. Д.4.1 Розрахункова схема заданої балки (а) і основна система (б)

Канонічне рівняння методу сил має вигляд

$$M_1 \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0$$

За допомогою таблиці стандартних розв'язків дод. 3 записуємо формули для визначення  $\delta_{11}$  (схема 1 і схема б) і  $\Delta_{1F}$  (схема 12):

$$\delta_{11} = \frac{1}{sEJ} \frac{B_{sl_2} C_{sl_2} - A_{sl_2} D_{sl_2}}{B_{sl_2}^2 - D_{sl_2}^2} + \frac{1}{sEJ} \frac{B_{sl_1} D_{sl_1} - C_{sl_1}^2}{A_{sl_1} D_{sl_1} - B_{sl_1} C_{sl_1}};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{F}{s^2 E J} \frac{C_{sl_1} D_{sa} - D_{sl_1} C_{sa}}{A_{sl_1} D_{sl_1} - B_{sl_1} C_{sl_1}}.$$

Визначаємо функції впливу за дод. 2:

$$sl_1 = 0,5 \cdot 4 = 2:$$

$$A_{sl_1} = 1,67302; \quad B_{sl_1} = 2,26808; \quad C_{sl_1} = 2,08917; \quad D_{sl_1} = 1,35878;$$

$$sa = 0,5 \cdot 2 = 1:$$

$$A_{sa} = 1,04169; \quad B_{sa} = 1,00833; \quad C_{sa} = 0,50139; \quad D_{sa} = 0,16686;$$

$$sl_2 = 0,5 \cdot 6 = 3:$$

$$A_{sl_2} = 4,53883; \quad B_{sl_2} = 5,07949; \quad C_{sl_2} = 5,52882; \quad D_{sl_2} = 4,93837.$$

За наведеними вище формулами знаходимо амплітудне значення взаємного кута повороту перерізів лівого і правого прогонів на опорі 1 від  $M_1 = 1$  і зовнішнього навантаження:

$$\delta_{11} = \frac{4,53053}{sEJ}, \quad \Delta_{1F} = \frac{26,9899}{sEJ}.$$

З канонічного рівняння визначаємо  $M_1$ , кН · м:

$$M_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -5,957392 \approx -5,957.$$

Побудуємо епюру моментів. Розрахункові схеми прогонів показано на рис. Д.4.2, а, б.

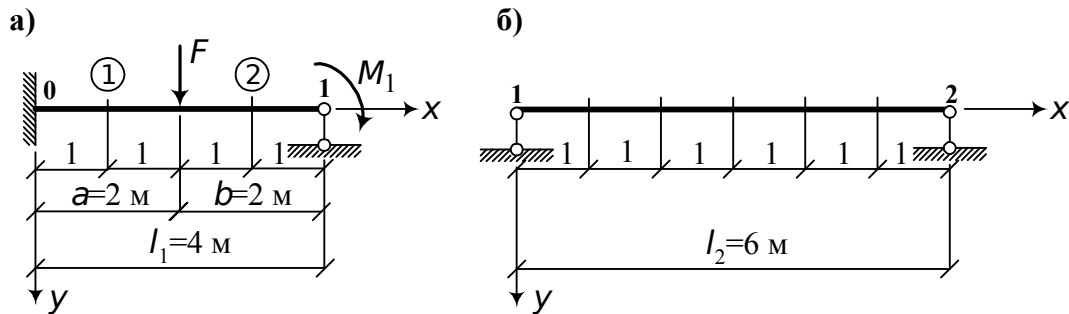


Рис. Д.4.2. Розрахункові схеми прогонів

Відповідно до рівняння (2.34) для першого прогону маємо

$$M_x = M_0 A_{sx} + \frac{Q}{s} B_{sx} + \frac{F}{s} B_{s(x-2)} - M_1$$

Початкові параметри визначаємо за формулами дод. 3 (схеми 10 і 12):

$$M_0 = \frac{F B_{s1} D_{sb} - B_{sb} D_{s1}}{s B_{s1} C_{s1} - A_{s1} D_{s1}} - M_1 \frac{D_{s1}}{A_{s1} D_{s1} - B_{s1} C_{s1}};$$

$$Q_0 = F \frac{B_{sb} C_{s1} - A_{s1} D_{sb}}{B_{s1} C_{s1} - A_{s1} D_{s1}} + s M_1 \frac{C_{s1}}{A_{s1} D_{s1} - B_{s1} C_{s1}}.$$

Функції впливу  $B_{sb} = B_{sa} = 1,00833$ ,  $D_{sb} = D_{sa} = 0,16686$ , тому що в нашому випадку  $sa = sb$ .

Після обчислень одержуємо  $M_0$ , кН·м,  $Q_0$ , кН:

$$M_0 = -77,170537 \approx -77,17; Q_0 = 71,6062 \approx 71,6.$$

Перевіримо правильність обчислення початкових параметрів  $M_0$  і  $Q_0$ . Використовуємо умову: при  $x = l_1$   $M_l = -M_1$ . За рівнянням для  $M_x$  (2.34) знайдемо  $M_1$ , кН·м:

$$M_1 = -77,17 \cdot 1,67277 + \frac{71,6}{0,5} \cdot 2,26808 - \frac{100}{0,5} \cdot 1,00833 = -5,957.$$

Цей результат відповідає значенню обчисленого раніше моменту  $M_1$ .

Визначимо тепер величини згинальних моментів у різних перерізах прогону  $l_1$ .

При  $x = 1$  м:  $sx = 0,5 \cdot 1 = 0,5$ ;

$A_{sx} = 1,00261$ ;  $B_{sx} = 0,50026$ ;  $C_{sx} = 0,12502$ ;  $D_{sx} = 0,02084$ ;

$M_x = -5,727$  кН · м.

При  $x = 2$  м:  $sx = 0,5 \cdot 2 = 1,0$ ;

$A_{sx} = 1,04169$ ;  $B_{sx} = 1,00833$ ;  $C_{sx} = 0,50139$ ;  $D_{sx} = 0,16686$ ;

$M_x = 64,019$  кН · м.

При  $x = 3$  м:  $sx = 0,5 \cdot 3 = 1,5$ ;

$A_{sx} = 1,21157$ ;  $B_{sx} = 1,56338$ ;  $C_{sx} = 0,14083$ ;  $D_{sx} = 0,56589$ ;

$s(x - 2) = 0,5(3 - 2) = 0,5$ ;  $B_{s(x-2)} = 0,50026$ ;

$M_x = 30,347$  кН · м.

Розглянемо другий прогін нерозрізної балки (рис. Д.4.2, б). Згинальний момент у будь-якому перерізі прольоту на підставі загального рівняння (2.34) дорівнює

$$M_x = -sEJ y_0^{\square} D_{sx} + M_0 A_{sx} + \frac{Q_0}{s} B_{sx}.$$

Визначимо початкові параметри  $y_0^{\square}$  і  $Q_0$ , що входять до цього рівняння. За дод. 3 (схема 1) маємо

$$Q_0 = sM_1 \frac{A_{sl_2} B_{sl_2} - C_{sl_2} D_{sl_2}}{B_{sl_2}^2 - D_{sl_2}^2};$$

$$y_0^{\square} = \frac{M_1}{sEJ} \frac{B_{sl_2} C_{sl_2} - A_{sl_2} D_{sl_2}}{B_{sl_2}^2 - D_{sl_2}^2}.$$

Значення функцій впливу  $A_{sl_2}$ ,  $B_{sl_2}$ ,  $C_{sl_2}$ ,  $D_{sl_2}$  визначено нами раніше за допомогою функцій Крилова (див. дод. 2).

Після обчислення за наведеними формулами одержуємо

$$Q_0 = -8,951402 \cong -8,951 \text{ кН};$$

$$y_0^{\square} = -\frac{23,860043}{sEJ} \cong -\frac{23,86}{sEJ}.$$

Перевіримо правильність обчислення початкових параметрів. Для цього за рівнянням для  $M_x$  (2.34) визначимо згинальний момент на опорі 2 ( $x = l_2$ ), де він повинен дорівнювати нулю. Переконаємося в цьому:

$$M_{l_2} = 23,86 D_{sl_2} - 5,945 A_{sl_2} - \frac{8,951}{0,5} B_{sl_2}.$$

Функції  $D_{sl_2}$ ,  $A_{sl_2}$  і  $B_{sl_2}$  знайдені раніше і дорівнюють

$$D_{sl_2} = 4,93837; A_{sl_2} = 4,55883; B_{sl_2} = 5,07949.$$

Підставивши значення цих функцій у рівняння для визначення  $M_{l_2}$ , одержимо  $M_{l_2} = 0$ . Отже, початкові параметри  $U_0$  і  $Q_0$  визначені правильно.

Визначимо тепер величини згинальних моментів у різних перерізах другого прольоту.

$$\text{При } x = 1 \text{ м: } s_x = 0,5 \cdot 1 = 0,5; M_x = -14,431 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{При } x = 2 \text{ м: } s_x = 0,5 \cdot 2 = 1,0; M_x = -20,271 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{При } x = 3 \text{ м: } s_x = 0,5 \cdot 3 = 1,5; M_x = -21,688 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{При } x = 4 \text{ м: } s_x = 0,5 \cdot 4 = 2,0; M_x = -18,111 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{При } x = 5 \text{ м: } s_x = 0,5 \cdot 5 = 2,5; A_{sx} = 2,66557; B_{sx} = 3,32433;$$

$$C_{sx} = 3,46671; D_{sx} = 2,72586; M_x = -10,274 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

За результатами обчислень побудуємо епюру згинальних моментів (рис. Д.1.4, а).

Для порівняння на рис. Д.4.3, б показана епюра від статичної дії навантаження.

Знайдемо динамічні коефіцієнти:

$$\text{опора } \mathbf{0}: \mu = \frac{77,17}{66,67} = 1,16;$$

$$\text{середина першого прогону: } \mu = \frac{64,019}{58,333} = 1,16;$$

$$\text{опора } \mathbf{1}: \mu = \frac{5,957}{16,667} = 0,357;$$

$$\text{середина другого прогону: } \mu = \frac{21,667}{8,333} = 2,60.$$

З отриманих значень видно, що динамічні коефіцієнти різні і залежать як від положення навантаження на балці, так і від положення перерізу. Усе це вказує на те, що статичний розрахунок з наступним його виправленням шляхом множення на єдиний динамічний коефіцієнт не відповідає розрахунку на динамічні впливи.

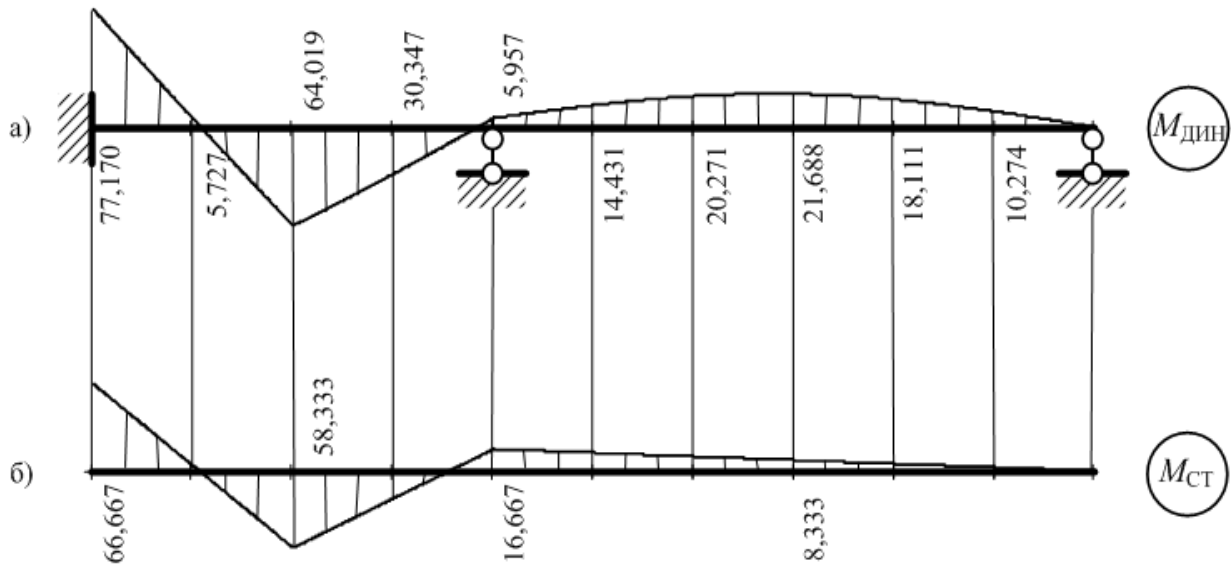


Рис. Д.4.3. Епюри моментів від вібраційного (а) і статичного (б) навантажень

Складемо тепер рівняння для визначення частот вільних коливань. За формулою (2.31) приймаємо в канонічному рівнянні вільний член  $\Delta_{1F} = 0$ . Тоді одержимо часткове рівняння

$$(B_{sl_2} C_{sl_2} - A_{sl_2} D_{sl_2})(A_{sl_1} D_{sl_1} - B_{sl_1} C_{sl_1}) + (B_{sl_2} - D_{sl_2})(B_{sl_1} D_{sl_1} - C_{sl_1}) = 0.$$

У це рівняння входить невідоме  $s_k$ , зв'язане з частотою вільних коливань рівністю (2.12):

$$s_k^4 = \frac{m \omega_k^2}{EJ}.$$

Корені рівняння частот варто визначати на ПЕОМ за допомогою програми Д2, у якій використовується спеціальна функція MathCAD. Найменшому кореню відповідає перша основна частота вільних коливань балки. При  $k = 1$

$$\omega_1 = s_1^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

$$\text{Для заданої балки } \omega_1 = (0,593244)^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Відношення частоти вимушених коливань  $\theta$  до основної частоти власних коливань дорівнює

$$\frac{\theta}{\omega_1} = \frac{0,5}{0,5922673} = 0,84.$$

## Застосування ПЕОМ для розрахунку нерозрізної балки методами сил і переміщень

Для розрахунку нерозрізної балки методами сил та переміщень призначена програма «Д2». Програма розроблена за допомогою системи MathCAD.

Для запуску програми потрібно вибрати ярлик програми та натиснути ліву кнопку мишки. Після цього на запит з екрана ввести номер варіанта завдання (тест або номер рядка таблиця вихідних даних). Для того щоб отримати результати розрахунку, необхідно «вручну» правильно з точністю до 5 % знайти шукані величини для контрольних точок. Одержані значення вводяться на запит з екрана. Якщо вони правильні, то на екрані з'являється результат розрахунку у вигляді таблиці та графіка (епюри).

Якщо обчислені студентом значення неправильні, результати розрахунків в таблицях будуть нульовими, а графіки відсутніми.

Контрольними точками є:

- при виконанні розрахунку методом сил контроль коефіцієнтів канонічного рівняння і моменту на 1-й опорі ( $\delta_{11k}$ ,  $\Delta_{1Fk}$ , і  $M_{k1}$ );
- при виконанні розрахунку методом переміщень контроль коефіцієнтів канонічного рівняння і кута повороту на 1-й опорі ( $r_{11k}$ ,  $R_{1Fk}$ , і  $Z_{k1}$ ).

У програмі позначено:

- $\delta_{11k}$ ,  $\Delta_{1Fk}$ , і  $M_{k1}$  – контрольні значення коефіцієнтів канонічного рівняння і моменту на 1-й опорі;
- $r_{11k}$ ,  $R_{1Fk}$ , і  $Z_{k1}$  – контрольні значення коефіцієнтів канонічного рівняння і кута повороту на 1-й опорі.

Для тестового варіанта значення в контрольних точках вводити не треба. Результати розрахунку на ПЕОМ можна роздрукувати на принтері.

При цьому показано на рис. Д.4.4 приклад введення варіанта та схеми балок; приклад введення значень шуканих величин в контрольній точці і результати повного розрахунку за програмою, значення коефіцієнтів канонічного рівняння методу сил і



згинального моменту на 1-й опорі, таблиці (значення для епюр згинальних моментів від динамічного і статичного навантажень), значення динамічних коефіцієнтів у перерізах нерозрізної балки, значення відношення частот вимушених і вільних коливань. Епюри згинальних моментів від динамічного і статичного навантажень наведено на рис. Д.4.5. Також на рис. Д.4.5 показано приклад введення значень шуканих величин у контрольній точці і результати за програмою розрахунку, значення коефіцієнтів канонічного рівняння методу переміщень і кута повороту на 1-й опорі, таблиця (значення для епюри згинальних моментів від динамічного навантаження).

Завдання. Розрахунок нерозрізної балки на вібраційні впливи за методами сил і переміщень. Введіть:  $cx := \text{тест}$   $war := \text{тест}$

Дано:  $l_1 = 4$  м,  $l_2 = 6$  м,  $aI1 = 0.5$ ,  $F = 100$  кН,  $s = 0.5$  м<sup>1</sup>

Введіть значення для контролю:  $\delta I1k := 4.53$   $\Delta IFk := 26.99$   $Mk_1 := -5.957$

1. Визначимо кути повороту на опорі 1 від одиничного навантаження  $M_1=1$  та  $\delta_{11}$

$$\theta_{0\_I1} = 0.5204 \quad \theta_{0\_I2} = 4.0101 \quad \delta I1 = 4.5305$$

2. Визначимо кути повороту на опорі 1 від заданого навантаження та  $\Delta_{1F}$

$$\Delta \theta_{0\_I1} = 26.9899 \quad \Delta \theta_{0\_I2} = 0 \quad \Delta IF = 26.9899$$

3. Визначимо із канонічного рівняння  $M_1 ( \delta_{11} \cdot M_1 + \Delta_{1F} = 0 )$

$$M_1 := -\frac{\Delta IF}{\delta I1} \quad M_1 = -5.957392$$

4. Побудуємо епюру моментів від заданого навантаження

Прогін $l_1 = 4$ м $x := 0, 1 \dots l_1$	$M1(x) =$	Прогін $l_2 = 6$ м $x := 0, 1 \dots l_2$	$M2(x) =$
$\theta_{0\_I} = 0$	-77.17	$\theta_{0\_2} = -47.7796$	-5.9574
$M0\_I = -77.17$	-5.7275	$M0\_2 = -5.9574$	-14.4312
$Q0\_I = 71.6062$	64.0189	$Q0\_2 = -8.9514$	-20.2714
	30.3473		-21.6878
	-5.9574		-18.1108
			-10.2744
			0

5. Побудуємо епюру моментів від статичного навантаження методом фокусів

$$Mst(0) = -66.6667 \quad Mst(l_1) = -16.6667$$

$$Mst(aI) = 58.3333 \quad Mst(l_1 + l_2) = 0$$

6. Визначимо динамічні коефіцієнти для перерізів нерозрізної балки

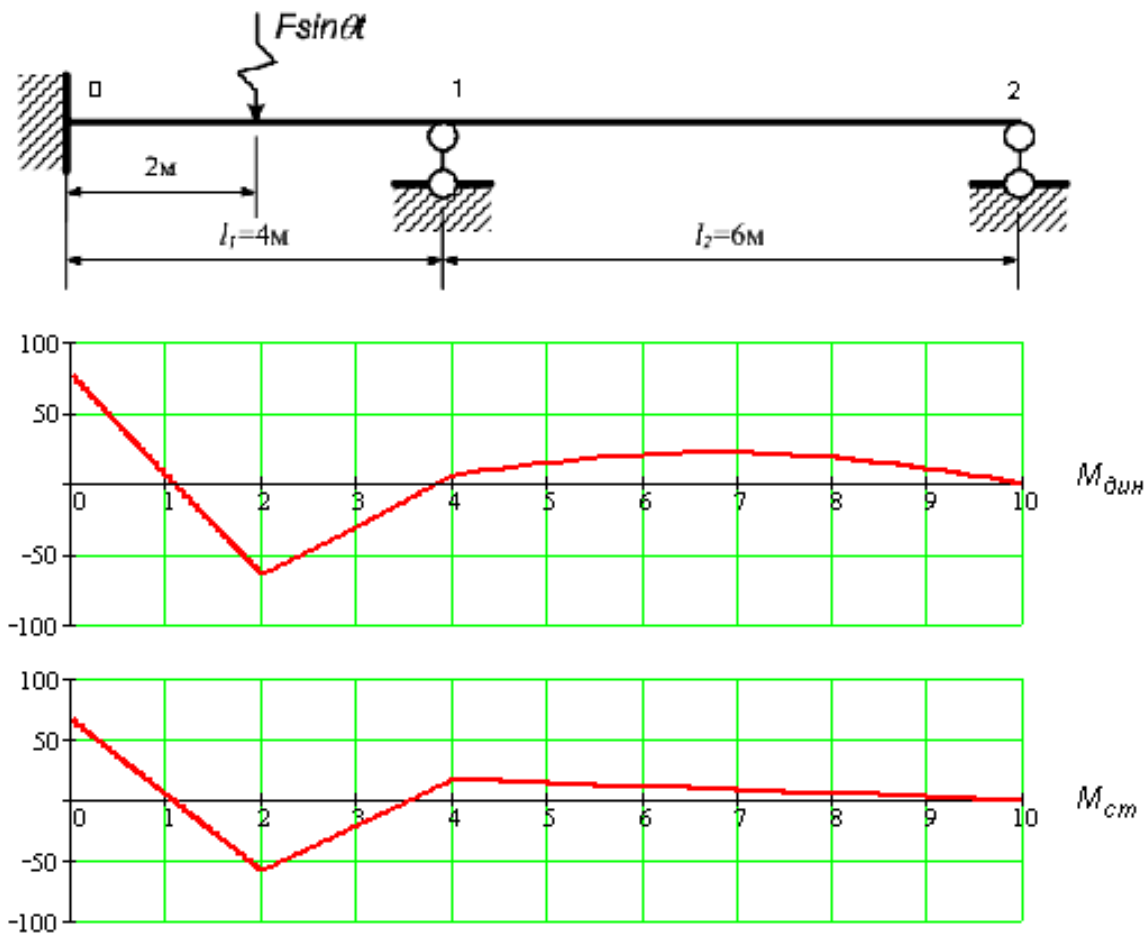
$$\mu_1 = 1.1576 \quad \mu_3 = 0.3574$$

$$\mu_2 = 1.0975 \quad \mu_4 = 2.6025$$

7. Визначимо частоту вільних коливань нерозрізної балки (відношення  $\theta/\omega_1$ )

$$sI = 0.593244 \quad \theta/\omega_1 = \frac{s}{sI} = 0.8428$$

Рис. Д.4.4



Розрахунок нерозрізної балки за методом переміщень.

Введіть значення для контролю:  $r_{11k} := 1.0855$   $R_{1Fk} := 51.86$   $Z_{k1} := -47.78$

1. Визначимо моменти на опорі 1 від одиничного кута повороту  $\phi_1=1$  та  $r_{11}$

$$M_{0\_11} = 0.9608$$

$$M_{0\_12} = 0.1247$$

$$r_{11} = 1.085515$$

2. Визначимо моменти на опорі 1 від заданого навантаження та  $R_{1F}$

$$M_f_{11} = 51.8655$$

$$M_f_{12} = 0$$

$$R_{1F} = 51.8655$$

3. Визначимо із канонічного рівняння  $Z_1 ( r_{11} \cdot Z_1 + R_{1F} = 0 )$

$$Z_1 := -\frac{R_{1F}}{r_{11}}$$

$$Z_1 = -47.7796$$

4. Побудуємо епюру моментів від заданого навантаження  $x := 0, 1..l_1$   $M_I(x) =$

**Прогін**  $l_1 = 4$  ж

$$\theta_{0\_1} = 0$$

$$M_{0\_1} = -77.17$$

$$Q_{0\_1} = 71.6062$$

-77.17
-5.7275
64.0189
30.3473
-5.9574

$$M_I(l_1) = -5.9574$$

Рис. Д.4.5

## Приклад розрахунку нерозрізної балки, завантаженої на одному прогоні

Розрахункова схема балки показана на рис. Д.5.1, а, основна система – на рис. Д.5.1, б. Жорсткість балки постійна,  $EJ = \text{const}$ . Характеристичне число  $s = 0,5 \text{ м}^{-1}$ .

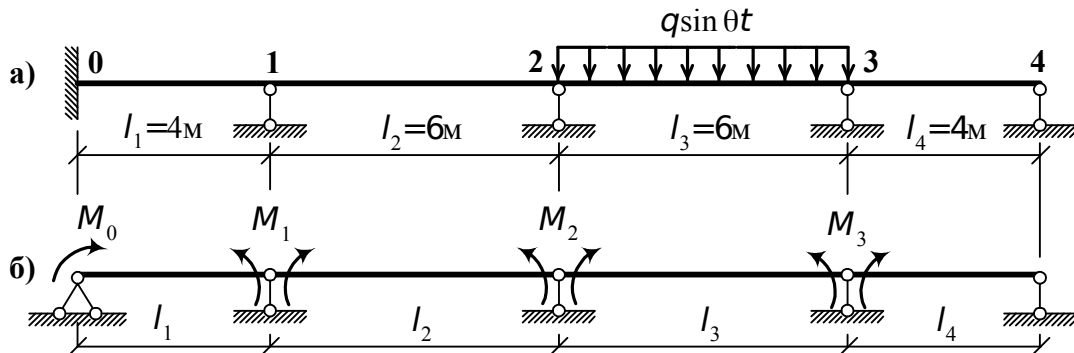


Рис. Д.5.1 Розрахункова схема заданої балки (а) та її основна система (б)

За виразами (2.85), (2.86), (2.87) визначимо амплітудні значення кутів повороту перерізів балки на опорах в основній системі. Попередньо знайдемо функції впливу (за дод. 2) для кожного прогону залежно від  $sl_n$ .

Для першого і четвертого прогонів:  $sl_1 = sl_4 = 0,5 \cdot 4 = 2,0$ ;

$$A_{sl_1} = 1,6730; B_{sl_1} = 2,2681; C_{sl_1} = 2,0892; D_{sl_1} = 1,3588.$$

Для другого і третього прогонів:  $sl_2 = sl_3 = 0,5 \cdot 6 = 3,0$ ;

$$A_{sl_2} = 4,5388; B_{sl_2} = 5,0795; C_{sl_2} = 5,5288; D_{sl_2} = 4,9384.$$

Тепер знайдемо

$$\delta_{00} = \frac{1}{sEJ} \frac{B_{sl_1} C_{sl_1} - A_{sl_1} D_{sl_1}}{B_{sl_1}^2 - D_{sl_1}^2} = \frac{0,747}{sEJ};$$

$$\delta_{10} = \delta_{01} = \frac{1}{sEJ} \frac{D_{sl_1}}{B_{sl_1}^2 - D_{sl_1}^2} = \frac{0,412}{sEJ};$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{sEJ} \frac{B_{sl_2} C_{sl_2} - A_{sl_2} D_{sl_2}}{B_{sl_2}^2 - D_{sl_2}^2} + \frac{1}{sEJ} \frac{B_{sl_1} C_{sl_1} - A_{sl_1} D_{sl_1}}{B_{sl_1}^2 - D_{sl_1}^2} = \frac{4,761}{sEJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{sEJ} \frac{D_{sl_2}}{B_{sl_2}^2 - D_{sl_2}^2} = \frac{3,497}{sEJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{sEJ} \frac{B_{sl_3} C_{sl_3} - A_{sl_3} D_{sl_3}}{B_{sl_3}^2 - D_{sl_3}^2} + \frac{1}{sEJ} \frac{B_{sl_2} C_{sl_2} - A_{sl_2} D_{sl_2}}{B_{sl_2}^2 - D_{sl_2}^2} = \frac{8,028}{sEJ} ;$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{1}{sEJ} \frac{D_{sl_3}}{B_{sl_3}^2 - D_{sl_3}^2} = \frac{3,497}{sEJ} ;$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{sEJ} \frac{B_{sl_4} C_{sl_4} - A_{sl_4} D_{sl_4}}{B_{sl_4}^2 - D_{sl_4}^2} + \frac{1}{sEJ} \frac{B_{sl_3} C_{sl_3} - A_{sl_3} D_{sl_3}}{B_{sl_3}^2 - D_{sl_3}^2} = \frac{4,761}{sEJ} ;$$

$$\delta_{34} = \frac{1}{sEJ} \frac{D_{sl_4}}{B_{sl_4}^2 - D_{sl_4}^2} = \frac{0,412}{sEJ} .$$

Знайдемо моментні відношення. Лівий кінець балки затиснений, отже, ліве моментне відношення першого прогону за виразом (2.93)

$$K_1 = - \frac{0,747}{0,412} = - 1,813 .$$

Інші моментні відношення визначимо за виразом (2.90):

$$K_2 = - \frac{1}{\delta_{12}} \left[ \delta_{11} + \frac{\delta_{10}}{K_1} \right] = - 1,296 ;$$

$$K_3 = - \frac{1}{\delta_{23}} \left[ \delta_{22} + \frac{\delta_{21}}{K_2} \right] = - 1,524 ;$$

$$K_4 = - \frac{1}{\delta_{34}} \left[ \delta_{33} + \frac{\delta_{23}}{K_3} \right] = - 5,987 .$$

Правий кінець балки шарнірно обпертий, отже, праве моментне відношення останнього прогону

$$K_4 = \infty .$$

Інші праві фокусні відношення визначаємо за формулою (2.91):

$$K_3^{\text{п}} = - \frac{\delta_{33}}{\delta_{32}} = - 1,361 ;$$

$$K_2^{\text{п}} = - \frac{1}{\delta_{21}} \left[ \delta_{22} + \frac{\delta_{23}}{K_3^{\text{п}}} \right] = - 1,561 ;$$

$$K_1^{\text{п}} = - \frac{1}{\delta_{10}} \left[ \delta_{11} + \frac{\delta_{12}}{K_2^{\text{п}}} \right] = - 6,119 .$$

Визначимо опорні моменти завантаженого прогону. Попередньо обчислимо кути повороту завантаженого прогону на опорах **2** і **3** за дод. 3, схема 3:

$$\Delta_{2F} = \Delta_{3F} = \frac{q}{s^3 EJ} \frac{C_{sl_3} D_{sl_3} - (A_{sl_3} - 1) B_{sl_3}}{B_{sl_3}^2 - D_{sl_3}^2} = \frac{6,605q}{s^3 EJ}.$$

За залежностями (2.96), (2.97) обчислимо

$$M_2 = \frac{\Delta_{2F} K_3 + \Delta_{3F}}{\delta_{23} (K_3 K_3 - 1)} = -2,539q;$$

$$M_3 = \frac{\Delta_{3F} K_3 + \Delta_{2F}}{\delta_{23} (K_3 K_3 - 1)} = -3,686q.$$

Моменти на інших опорах знайдемо за формулою (2.100), (2.101):

$$M_1 = \frac{M_2}{K_2} = 1,959q, \quad M_0 = \frac{M_1}{K_1} = -1,081q, \quad M_4 = \frac{M_3}{K_3} = 0.$$

Для побудови епюри моментів від вібраційного навантаження розглянемо кожен прогін окремо (рис. Д.5.2).

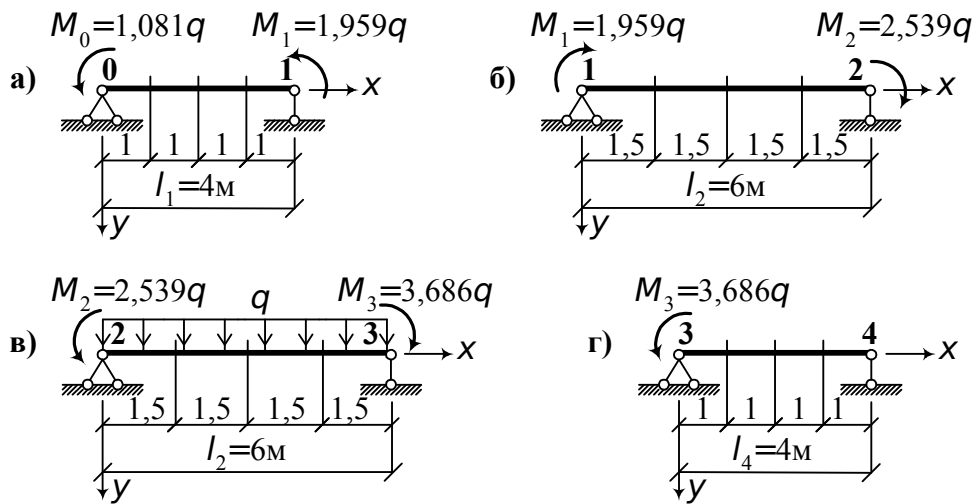


Рис. Д.5.2. Розрахункові схеми прогонів

Тепер для кожного прогону знаходимо початкові параметри  $U_0$  і  $Q_0$  (дод. 2), складаємо рівняння (2.28) – (2.31), визначаємо необхідні функції впливу і робимо обчислення (див. дод. 4).

Так, наприклад, епюра згинальних моментів показана на рис. Д.5.3.

Наведений у п. 2.4.3 метод розрахунку нерозрізних балок особливо зручний для побудови ліній впливу. Для цього

одиничний вантаж слід по черзі поставити в кожен прогін нерозрізної балки, визначити опорні моменти за формулами (2.96), (2.97) і через моментні відношення - інші опорні моменти. Для побудови ліній впливу  $M_x$ ,  $Q_x$  і  $R_n$  треба залучити формули розрахунку нерозрізних балок. За допомогою програми ДЗ розраховано ординати і побудовано лінії впливу опорних моментів  $M_x$ ,  $Q_x$  і  $R_n$ .

$$M_x = M_x^0 + M_n \frac{x}{l_n} + M_{n-1} \frac{l_n - x}{l_n} ;$$

$$Q_x = Q_x^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} ;$$

$$R_n = R_n^0 + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}} ,$$

де  $M_x^0$ ,  $Q_x^0$  і  $R_n^0$  - згинальний момент, поперечна сила й опорна реакція на  $n$ -й опорі в основній системі нерозрізної балки. У табл. Д.5.1 наведено ординати ліній впливу, а на рис. Д.5.4 – лінії впливу.

Наведені на рис. Д.5.4 лінії впливу побудовані у припущенні, що маса вантажу мала порівнянно з масою балки.

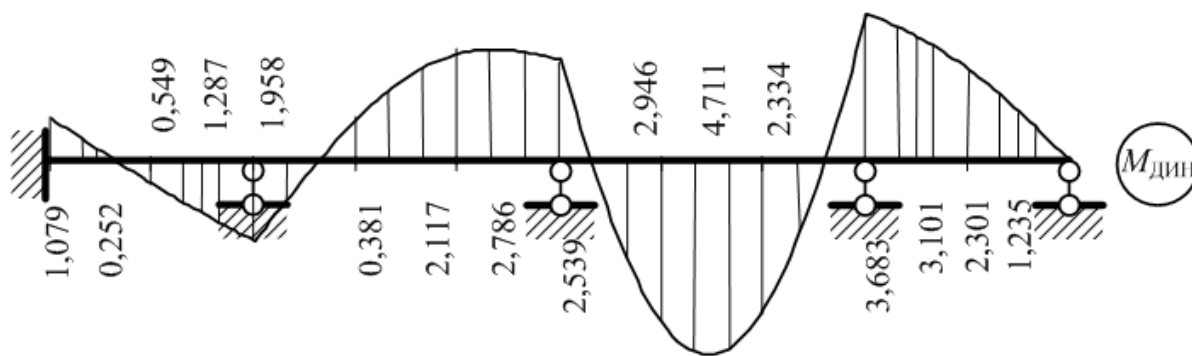


Рис. Д.5.3. Епюра згинальних моментів

Таблиця Д.5.1

Ординати ліній впливу опорних моментів

№						Середина другого прогону	
		$M_0$	$M_1$	$M_2$	$M_3$		$R_2$

прогону	вантаж, мАбсциса					$M_x$	$Q_x$	
I	$x=1$	-0,657	-0,045	0,029	-0,021	-0,059	0,014	-0,032
	$x=2$	-0,740	-0,117	0,075	-0,055	-0,154	0,035	-0,084
	$x=3$	-0,444	-0,130	0,083	-0,061	-0,170	0,039	-0,092
II	$x=1$	0,359	-0,652	-0,195	0,143	0,416	-0,097	0,225
	$x=2$	0,526	-0,019	-0,417	0,307	0,965	-0,238	0,504
	$x=3$	0,593	-1,075	0,567	0,417	1,524	-0,406	0,753
							0,594	
	$x=4$	0,469	-0,850	-0,569	0,418	1,029	0,400	0,915
$x=5$	0,244	-0,443	-0,382	0,281	0,494	0,192	0,982	
III	$x=1$	-0,182	0,329	-0,427	-0,389	-0,355	-0,139	1,032
	$x=2$	-0,275	0,499	-0,647	-0,752	-0,583	-0,211	1,003
	$x=3$	-0,280	0,508	-0,659	-0,956	-0,548	-0,215	0,856
	$x=4$	-0,212	0,385	-0,499	-0,911	-0,415	-0,163	0,595
	$x=5$	-0,104	0,188	-0,243	-0,585	-0,203	-0,079	0,278
IV	$x=1$	0,058	-0,105	0,135	-0,207	0,113	0,044	-0,152
	$x=2$	0,068	-0,123	0,160	-0,244	0,132	0,052	-0,179
	$x=3$	0,044	-0,079	0,102	-0,156	0,085	0,033	-0,115



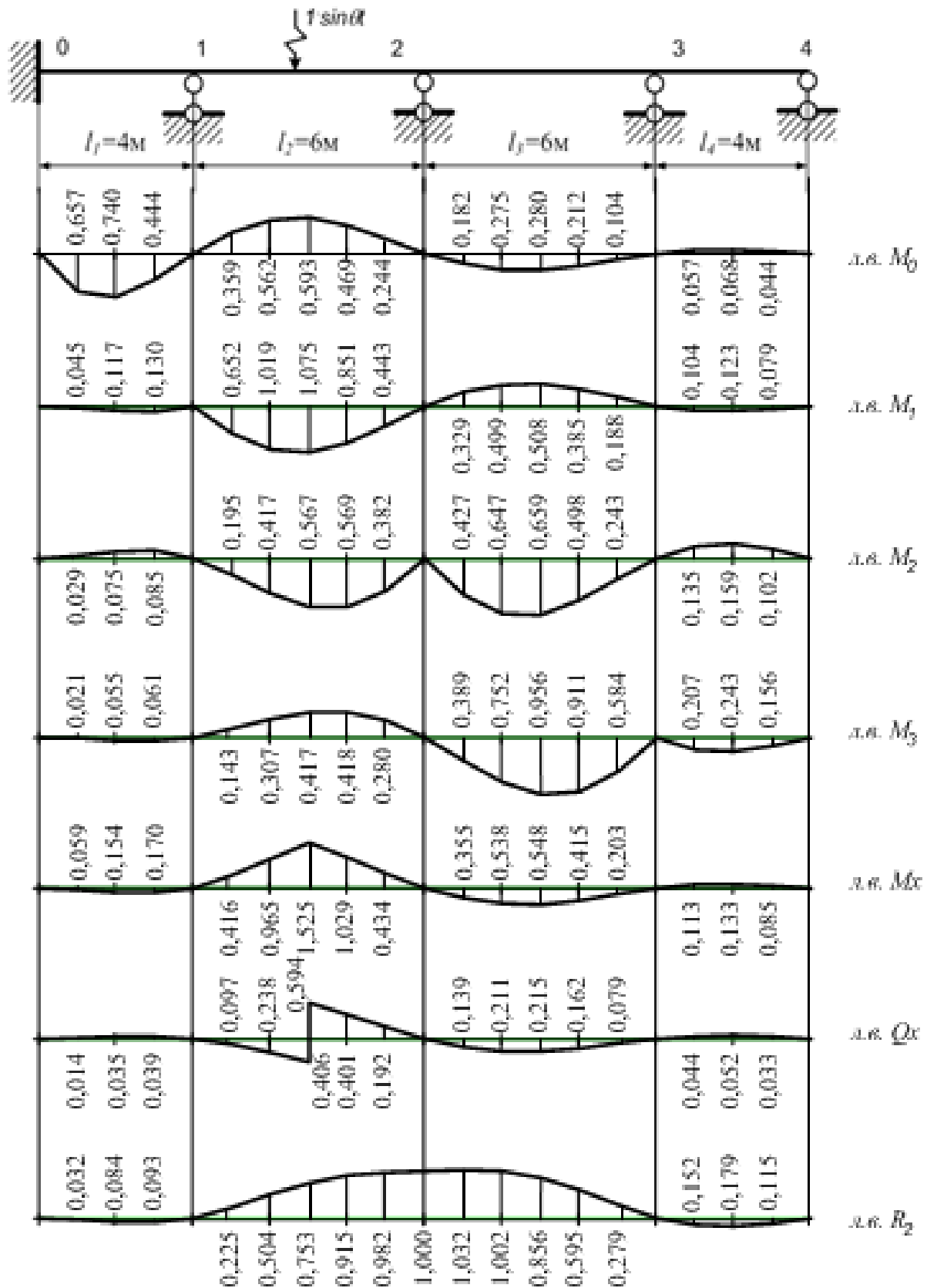


Рис. Д.5.4. Лінії впливу опорних моментів і  $M_x, Q_x, R_2$

## Застосування ПЕОМ для розрахунку нерозрізної балки, завантаженої на одному прогоні

Для розрахунку нерозрізної балки, завантаженої на одному прогоні, призначена програма «ДЗ». Програма розроблена за допомогою системи MathCAD.

Для запуску програми потрібно вибрати ярлик програми та натиснути ліву кнопку мишки. Після цього на запит з екрана ввести номер варіанта завдання (тест або номер рядка таблиця вихідних даних). Для того, щоб отримати результати розрахунку, необхідно вручну правильно з точністю до 5 % знайти шукані величини для контрольних точок. Одержані значення вводяться на запит з екрана. Якщо вони правильні, то на екрані з'являється результат розрахунку у вигляді таблиці або таблиці та графіка (епюри).

Якщо обчислені студентом значення неправильні, результати розрахунків у таблицях будуть нульовими, а графіки відсутніми.

Контрольними точками є:

- контроль кутів повороту на опорах 1-го прогону ( $\delta k_{00}$ ,  $\delta k_{10}$  і  $\delta k_{11}$ );
- контроль кутів повороту і опорного моменту на лівій опорі завантаженого прольоту ( $\Delta k_{nF-1}$ ,  $\Delta k_{nF}$  і  $Mk_{nF-1}$ );
- контроль ординати лінії впливу опорного моменту на 3-й опорі, коли вантаж розташований в середині 1-го прогону ( $M_{3k_2}$ ).

У програмі позначено:

- $\delta k_{0,0}$ ,  $\delta k_{1,0}$  і  $\delta k_{1,1}$  – контрольні значення кутів повороту на опорах 1-го прогону;
- $\Delta k_{nF-1}$ ,  $\Delta k_{nF}$  і  $Mk_{nF-1}$  – контрольні значення кутів повороту й опорного моменту на лівій опорі завантаженого прогону;
- $M_{3k_2}$  – контрольне значення ординати лінії впливу опорного моменту на 3-ій опорі, коли вантаж розташований у середині 1-го прогону.

Для тестового варіанта значення в контрольних точках вводити не треба. Результати розрахунку на ПЕОМ можна роздрукувати на принтері.

При цьому показано: на рис. Д.5.5 приклад введення варіанта та схеми балок; приклад введення значень шуканих величин у контрольних точках і результати розрахунку, значення кутів повороту на опорах в основній системі та моментних відношень, кутів повороту та опорних моментів завантаженого прогону, таблиці (значення для епюри згинальних моментів від динамічного навантаження). Епюру згинальних моментів від динамічного навантаження наведено на рис. Д.5.6. Також на рис.

Д.5.6 показано: приклад введення значення шуканої величини в контрольній точці і результати розрахунку, таблиці значень ліній впливу. Епюри ліній впливу наведено на рис. Д.5.7.

Завдання. Розрахунок нерозрізної балки на вібраційні впливи за методам динамічних фокусів. Введіть:  $cx := mest$   $war := mest$

Дано:  $l_1 = 4$  м,  $l_2 = 6$  м,  $l_3 = 6$  м,  $l_4 = 6$  м,  $s = 0.5$  м<sup>1</sup>

1. Визначимо кути повороту на опорах в основній системі

Введіть значення для контролю:  $\delta k_{0,0} := 0.7475$   $\delta k_{1,0} := 0.412$   $\delta k_{1,1} := 4.7576$

$$\delta = \begin{pmatrix} 0.7475 & 0.412 & 0 & 0 & 0 \\ 0.412 & 4.7576 & 3.4932 & 0 & 0 \\ 0 & 3.4932 & 8.0202 & 3.4932 & 0 \\ 0 & 0 & 3.4932 & 4.7576 & 0.412 \\ 0 & 0 & 0 & 0.412 & 0.7475 \end{pmatrix}$$

2. Визначимо моментні відношення (ліві -  $k$  і праві -  $k_+$ )

$$k^T = (0 \quad -1.8142 \quad -1.297 \quad -1.5249 \quad -5.9874)$$

$$k_+^T = (0 \quad -6.1184 \quad -1.5617 \quad -1.362 \quad 1 \times 10^{307})$$

3. Визначимо кути повороту на опорах завантаженого прогону та опорні моменти

Введіть значення для контролю:  $\Delta k_{nF-1} := 6.598$   $\Delta k_{nF} := 6.598$   $Mk_{nF-1} := -2.54$

$nF = 3$   $sIF = 3$

$Mk_{nF-1}$

$\Delta nF-1 = 6.5981$   $\Delta nF = 6.5981$

$M_{nF-1} = -2.5395$   $M_{nF} = -3.6829$

$$M^T = (-1.0793 \quad 1.9581 \quad -2.5395 \quad -3.6829 \quad 0)$$

4. Побудуємо епюри моментів від завданого навантаження

**Прогін**  $l_1 = 4$  м

$x := 0, 1 \dots l_1$

$MO\_1 = -1.0793$

$\theta O\_1 = 0$

$QO\_1 = 0.8297$

$M_-(x,1) =$

-1.0793
-0.2519
0.549
1.2867
1.9581

$x =$

0
1
2
3
4

**Прогін**  $l_2 = 6$  м

$x := 0, 1.5 \dots l_2$

$MO\_2 = 1.9581$

$\theta O\_2 = -2.0379$

$QO\_2 = -1.6201$

$M_-(x,2) =$

1.9581
-0.381
-2.1168
-2.7862
-2.5395

$x =$

0
1.5
3
4.5
6

**Прогін**  $l_1 = 4$  м

$x := 0, 1.5 \dots l_3$

$MO\_3 = -2.5395$

$\theta O\_3 = 6.6878$

$QO\_3 = 4.5745$

$M_-(x,3) =$

-2.5395
2.9467
4.771
2.3342
-3.6829

$x =$

0
1.5
3
4.5
6

**Прогін**  $l_2 = 6$  м

$x := 0, 1 \dots l_4$

$MO\_4 = -3.6829$

$\theta O\_4 = -5.5058$

$QO\_4 = 0.5337$

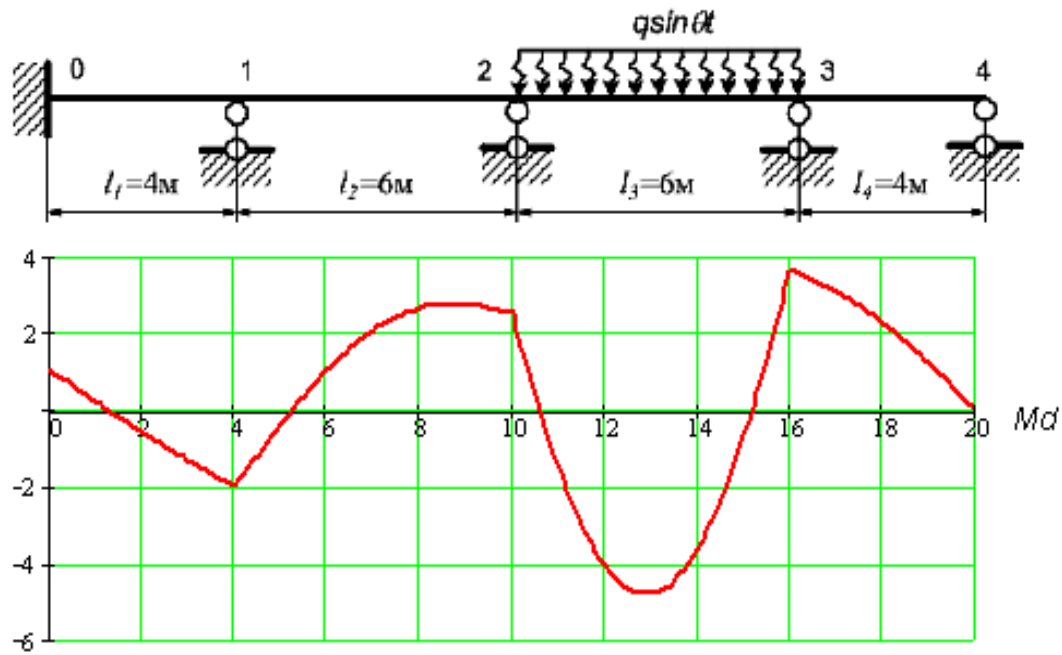
$M_-(x,4) =$

-3.6829
-3.1011
-2.3007
-1.2355
0

$x =$

0
1
2
3
4

Рис. Д.5.5



5. Побудуємо лінії впливу опорних моментів,  $M_x$ ,  $Q_x$  и  $R_2$  (для середини прогону 2 і опори 2).

Введіть значення для контролю:  $M_{3k_2} := -0.0553$

$x_1$	$M_0$	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_x$	$R_2$	$Q_x$	$Q_x$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-0.6575	0	0	0	0	0	1
2	1	-0.7397	1	0.0286	1	-0.032	1	1
3	2	-0.4414	2	0.0753	2	-0.0844	2	2
4	3	0	3	0.0833	3	-0.0933	3	3
5	4	0	4	0	4	0	4	4
6	5	0.3592	5	-0.1959	5	0.2235	5	5
7	6	0.5619	6	-0.4187	6	0.5026	6	6
8	7	0.5926	7	-0.5683	7	0.7509	7	7
9	8	0.469	8	-0.8508	8	0.9133	8	7
10	9	0.2443	9	-0.3829	9	0.9807	9	8
11	10	0	10	0	10	1	10	9
12	11	-0.1817	11	-0.4275	11	1.0306	11	10
13	12	-0.2753	12	-0.6479	12	1.0005	12	11
14	13	-0.2804	13	-0.6597	13	0.8531	13	12
15	14	-0.2124	14	-0.4998	14	0.5933	14	13
16	15	-0.1038	15	-0.2444	15	0.2778	15	14
17	16	0	16	0	16	0	16	15
18	17	0.0576	17	-0.1045	17	-0.1518	17	16
19	18	0.0679	18	-0.1233	18	-0.179	18	17
20	19	0.0433	19	-0.0786	19	-0.1142	19	18
21	20	0	20	0	20	0	20	19
22	21	0	21	0	21	0	21	20

Рис. Д.5.6

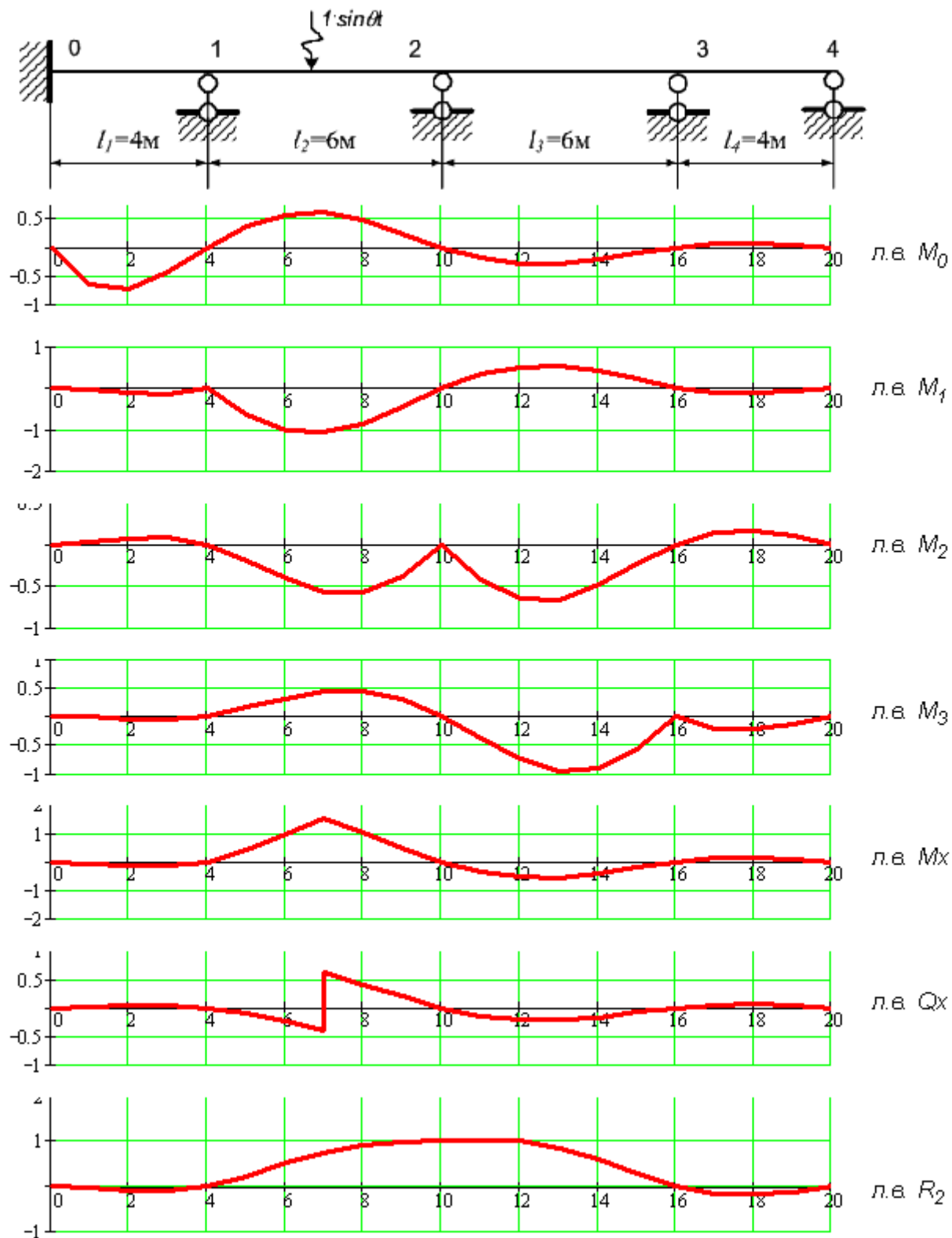


Рис. Д.5.7

### Приклад розрахунку нерозрізної балки методом переміщень

Розрахункову схему заданої балки приймемо такою самою, як і в дод. 4 (див. рис. 2.10).

Основна система цієї балки показана на рис. Д.6.1, а.

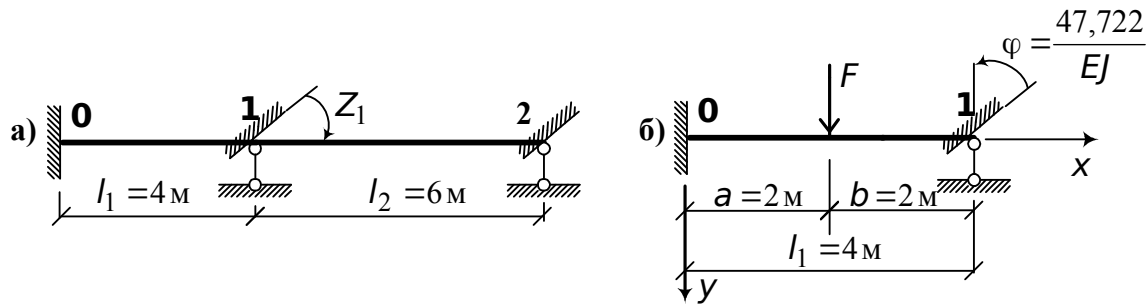


Рис. Д.6.1. Основна система нерозрізної балки (а) і розрахункова схема першого прогону (б)

Канонічне рівняння методу переміщень має такий вигляд:

$$Z_1 r_{11} + R_{1F} = 0.$$

Визначимо коефіцієнт і вільний член цього рівняння.

З дод. 3 (схеми 18 і 14) одержимо

$$r_{11} = sEJ \frac{D_{s2}^2 - B_{s2}^2}{A_{s2}D_{s2} - B_{s2}C_{s2}} + sEJ \frac{A_{s1}D_{s1} - B_{s1}C_{s1}}{B_{s1}D_{s1} - C_{s1}^2} = 2,170sEJ.$$

З того самого дод. 3, але використовуючи схему 24, маємо

$$R_{1F} = \frac{F D_{s1} C_{sa} - D_{sa} C_{s1}}{s B_{s1} D_{s1} - C_{s1}^2} = 51,782.$$

Розв'язуємо канонічне рівняння і знаходимо

$$Z_1 = - \frac{R_{1F}}{r_{11}} = - \frac{47,722}{EJ}.$$

Тепер розглядаємо окремо перший прогін нерозрізної балки в основній системі. Розрахункова схема цього прогону показана на рис. Д.6.1, б.

Знайдемо початкові параметри  $Q_0$ , кН, і  $M_0$ , кН·м, за допомогою дод. 3 (схеми 24 і 15):

$$M_0 = \varphi s E J \frac{D_{sl_1}}{B_{sl_1} D_{sl_1} - C_{sl_1}^2} + \frac{F D_{sl_1} C_{sb} - D_{sb} C_{sl_1}}{s B_{sl_1} D_{sl_1} - C_{sl_1}^2} = -77,1;$$

$$Q_0 = -\varphi s^2 E J \frac{C_{sl_1}}{B_{sl_1} D_{sl_1} - C_{sl_1}^2} + F \frac{B_{sl_1} D_{sb} - C_{sl_1} C_{sb}}{B_{sl_1} D_{sl_1} - C_{sl_1}^2} = 71,6.$$

Знайдені значення згинального моменту і поперечної сили на початку координат відповідають  $Q_0$  і  $M_0$ , знайденим при розрахунку балки методом сил (див. рис. Д.4.3).

Тепер переконаємося в тому, що й опорні моменти  $M_1$  збігаються. Рівняння для згинального моменту в будь-якому перерізі прогону буде таким (див. формулу (2.34)):

$$M_x = M_0 A_{sx} + \frac{Q_0}{s} B_{sx} - \frac{F}{s} B_{s(x-2)} \cdot 2$$

При  $x = l_1$  одержимо  $M_{l_1} = -5,95$  кН·м, що відповідає раніше отриманому результату (див. рис. Д.4.3, а).

## Приклад розрахунку рами на вібраційні впливи

Розрахункова схема заданої рами показана на рис. Д.7.1.

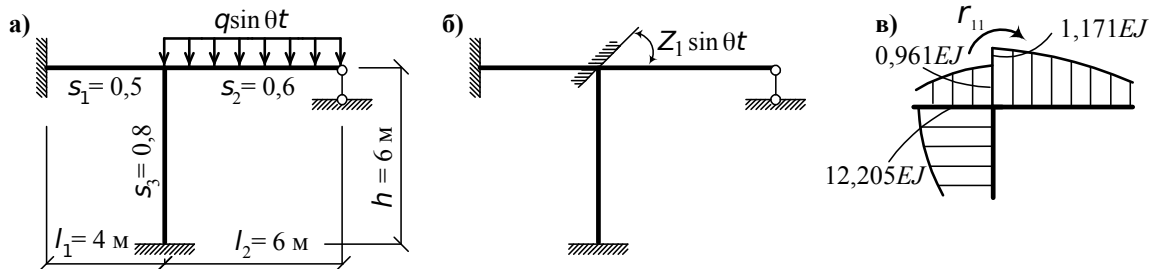


Рис. Д.7.1. Розрахункова схема рами (а), основна система (б), схема реактивних моментів у вузлі (в)

Основна система заданої рами наведена на рис. Д.7.1, б.

Канонічне рівняння методу переміщень має такий вигляд:

$$Z_1 r_{11} + R_{1F} = 0.$$

Для визначення амплітудного значення реактивного моменту  $r_{11}$  скористаємося дод. 3:

$$r_{11} = s_2 E J \frac{D_{s_2 l_2}^2 - B_{s_2 l_2}^2}{A_{s_2 l_2} D_{s_2 l_2} - B_{s_2 l_2} C_{s_2 l_2}} + s_1 E J \frac{A_{s_1 l_1} D_{s_1 l_1} - B_{s_1 l_1} C_{s_1 l_1}}{B_{s_1 l_1} D_{s_1 l_1} - C_{s_1 l_1}^2} + s_3 E J \frac{A_{s_3 h} D_{s_3 h} - B_{s_3 h} C_{s_3 h}}{B_{s_3 h} D_{s_3 h} - C_{s_3 h}^2}.$$

Перший член цього рівняння являє собою амплітудне значення реактивного моменту в защемленні елемента рами з прогоном  $l_2$  при повороті цього защемлення на кут  $Z_1 = 1$  (дод. 3, схема 18). Другий член – амплітудне значення реактивного моменту у введеному защемленні елемента рами з прогоном  $l_1$  (дод. 3, схема 14). Тут елемент рами повернутий на  $180^\circ$  у горизонтальній площині. Третій член – амплітудне значення реактивного моменту у введеному защемленні стійки рами з висотою  $h$  (дод. 3, схема 14).

За дод. 2 знайдемо функції впливу:



$$s_1 l_1 = 0,5 \cdot 4 = 2;$$

$$A_{s_1 l_1} = 1,67277; B_{s_1 l_1} = 2,26808; C_{s_1 l_1} = 2,08917; D_{s_1 l_1} = 1,35878;$$

$$s_2 l_2 = 0,6 \cdot 6 = 3,6;$$

$$A_{s_2 l_2} = 8,70801; B_{s_2 l_2} = 8,92147; C_{s_2 l_2} = 9,60477; D_{s_2 l_2} = 9,36399;$$

$$s_3 h = 0,8 \cdot 6 = 4,8;$$

$$A_{s_3 h} = 30,42341; B_{s_3 h} = 29,87746; C_{s_3 h} = 30,33591; D_{s_3 h} = 30,87362.$$

За допомогою рис. 2.15, в знаходимо

$$r_{11} = 11,995 EJ.$$

Для визначення амплітудного значення реактивного моменту в защемленні від зовнішнього навантаження скористаємося схемою 13 дод. 3:

$$R_{1F} = \frac{q B_{s_2 l_2} (A_{s_2 l_2} - 1) - D_{s_2 l_2} C_{s_2 l_2}}{s_2 B_{s_2 l_2} C_{s_2 l_2} - A_{s_2 l_2} D_{s_2 l_2}} = -14,182 q.$$

Розв'язуємо канонічне рівняння і визначаємо

$$Z_1 = -\frac{R_{1F}}{r_{11}} = \frac{1,182}{EJ} \cdot q.$$

Розглянемо елемент рами з прогоном  $l_1$ . Розрахункова схема цього елемента показана на рис. Д.7.2, а.

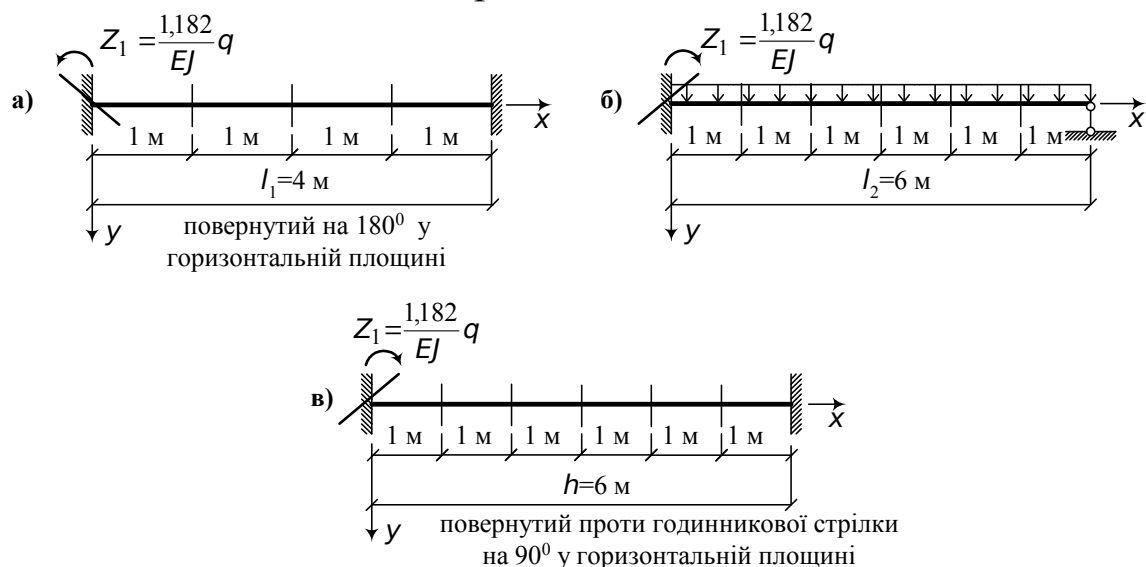


Рис. Д.7.2. Розрахункова схема елементів рами

Запишемо рівняння для визначення згинального моменту в довільному перерізі першого прогону (див. формулу (2.34)):

$$M_x = -sEJ y_0'' D_{sx} + M_0 A_{sx} + \frac{Q_0}{s} B_{sx} .$$

Початкові параметри знайдемо, скориставшись дод. 3 (схема 14):

$$Q_0 = -\varphi s^2 EJ \frac{B_{s_1/l_1}^2 - A_{s_1/l_1} C_{s_1/l_1}}{B_{s_1/l_1} D_{s_1/l_1} - C_{s_1/l_1}^2} = 0,380q ;$$

$$M_0 = -\varphi s EJ \frac{A_{s_1/l_1} D_{s_1/l_1} - B_{s_1/l_1} C_{s_1/l_1}}{B_{s_1/l_1} D_{s_1/l_1} - C_{s_1/l_1}^2} = -1,136q .$$

З дод. 2 виписуємо значення функцій впливу:

$$\begin{aligned} sx = 0,5 \cdot 1 = 0,5 ; & \quad D_{sx} = 0,020835 ; \quad A_{sx} = 1,002605 ; \quad B_{sx} = 0,50265 ; \\ sx = 0,5 \cdot 2 = 1,0 ; & \quad D_{sx} = 0,16685 ; \quad A_{sx} = 1,04169 ; \quad B_{sx} = 1,008335 ; \\ sx = 0,5 \cdot 3 = 1,5 ; & \quad D_{sx} = 0,565895 ; \quad A_{sx} = 1,211575 ; \quad B_{sx} = 1,563385 ; \\ sx = 0,5 \cdot 4 = 2,0 ; & \quad D_{sx} = 1,35878 ; \quad A_{sx} = 1,673025 ; \quad B_{sx} = 2,26808 . \end{aligned}$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у різних перерізах прогону:

$$\begin{aligned} x = 1 \text{ м} \quad M_x = -0,746q ; & \quad x = 3 \text{ м} \quad M_x = 0,146q ; \\ x = 2 \text{ м} \quad M_x = -0,318q ; & \quad x = 4 \text{ м} \quad M_x = 0,626q . \end{aligned}$$

Аналогічно визначаються згинальні моменти в перерізах інших елементів рами (див. рис. Д.7.2, б, в).

За результатами обчислень побудуємо епюру моментів (рис. Д.7.3, а). Неважко переконатися в тім, що вузол 1 знаходиться в рівновазі.

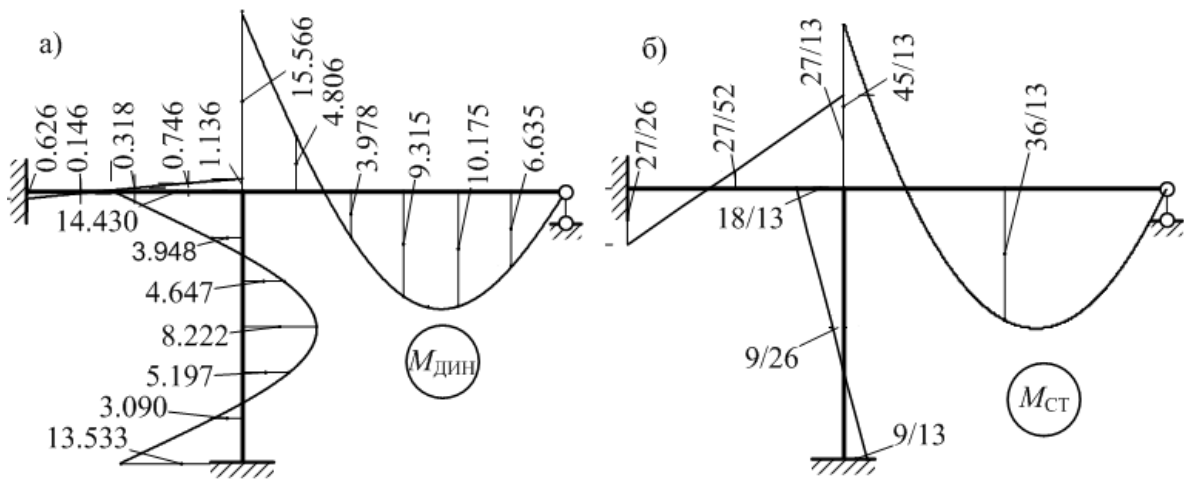


Рис. Д.7.3. Епюра амплітуд від вібраційного навантаження (а) і епюра згинальних моментів від статичного навантаження (б)

### Застосування ПЕОМ для розрахунку статично невизначної рами методом переміщень

Для розрахунку статично невизначної рами методом переміщень призначено програму «Д4». Програму розроблено за допомогою системи MathCAD.

Для запуску програми потрібно вибрати ярлик програми та натиснути ліву кнопку мишки. Після цього на запит з екрана ввести номер варіанта завдання (тест або номер рядка таблиця вихідних даних). Для того щоб отримати результати розрахунку, необхідно вручну правильно з точністю до 5 % знайти шукані величини для контрольних точок. Одержані значення вводяться на запит з екрана. Якщо вони правильні, то на екрані з'являється результат розрахунку у вигляді таблиці та графіка (епюра).

Якщо обчислені студентом значення неправильні, результати розрахунків у таблицях будуть нульовими, а графіки відсутніми.

Контрольною точкою є:

- контроль коефіцієнтів канонічного рівняння і кута повороту вузла ( $r_{11k}$ ,  $R_{1Fk}$ , і  $Zk_1$ ).

У програмі позначено:

- $r_{11k}$ ,  $R_{1Fk}$ , і  $Zk_1$  – контрольні значення коефіцієнтів канонічного рівняння і кута повороту вузла.

Для тестового варіанта значення в контрольних точках вводити не треба. Результати розрахунку на ПЕОМ можна роздрукувати на принтері.

При цьому, показано: на рис. Д.7.4 приклад введення варіанта та схеми рам; приклад вводу значень шуканих величин в контрольній точці і результати повного за програмою розрахунку, значення коефіцієнтів канонічного рівняння методу переміщень і кута повороту вузла, таблиці (значення для епюри згинальних моментів від динамічного навантаження). Епюру згинальних моментів від динамічного навантажень наведено на рис. Д.7.5. Також на рис. Д.7.5 показано: таблиці згинальних моментів від одиничного і завданого статичного навантажень для елементів рами. На рис. Д.7.6 показано таблиці і епюру згинальних моментів від статичного навантаження. Також рис. Д.7.6 показано динамічні коефіцієнти в серединах елементів рами.

Завдання. Розрахунок рами на вібраційні впливи за методом переміщень.

Введіть:  $cx := \text{тест}$   $war := \text{тест}$

Дано:  $l_1 = 4$  м,  $l_2 = 6$  м,  $h = 6$  м,  $s_1 = 0.5$  м,  $s_2 = 0.6$  м,  $s_3 = 0.8$  м,  
 $a_{l1} = 0.5$ ,  $b_{l2} = 0.5$ ,  $c_h = 0.5$ ,  $q = 1$  кН/м

Введіть значення для контролю:  $r_{l1k} := 11.993$   $R_{lFk} := -14.182$   $Z_{k1} := 1.1825$

1. Визначимо моменти в вузлі від одиничного кута повороту  $\phi_1=1$  та  $r_{11}$

$M_{0\_l1} = 0.9608$   $M_{0\_l2} = -1.1707$   $M_{0\_h} = 12.2032$   $r_{l1} = 11.9932627$

2. Визначимо моменти в вузлі від заданого навантаження та  $R_{1F}$

$M_{f\_l1} = 0$   $M_{f\_l2} = -14.182$   $M_{f\_h} = 0$   $R_{1F} = -14.182$

3. Визначимо із канонічного рівняння  $Z_1$  ( $r_{11} \cdot Z_1 + R_{1F} = 0$ )

$$Z_1 := -\frac{R_{1F}}{r_{l1}} \quad Z_1 = 1.1825$$

4. Побудуємо епюру моментів від заданого навантаження

**Пролін**  $l_1 = 4$  м  $x := 0, 1..l_1$   $s_1 \cdot x =$   $M1(s_1, x) =$

$\theta_{0\_l1} = 0$	0	-1.1362
$M_{0\_l1} = 0.6263$	0.5	-0.7466
$Q_{0\_l1} = -0.4814$	1	-0.3186
	1.5	0.1462
	2	0.6263

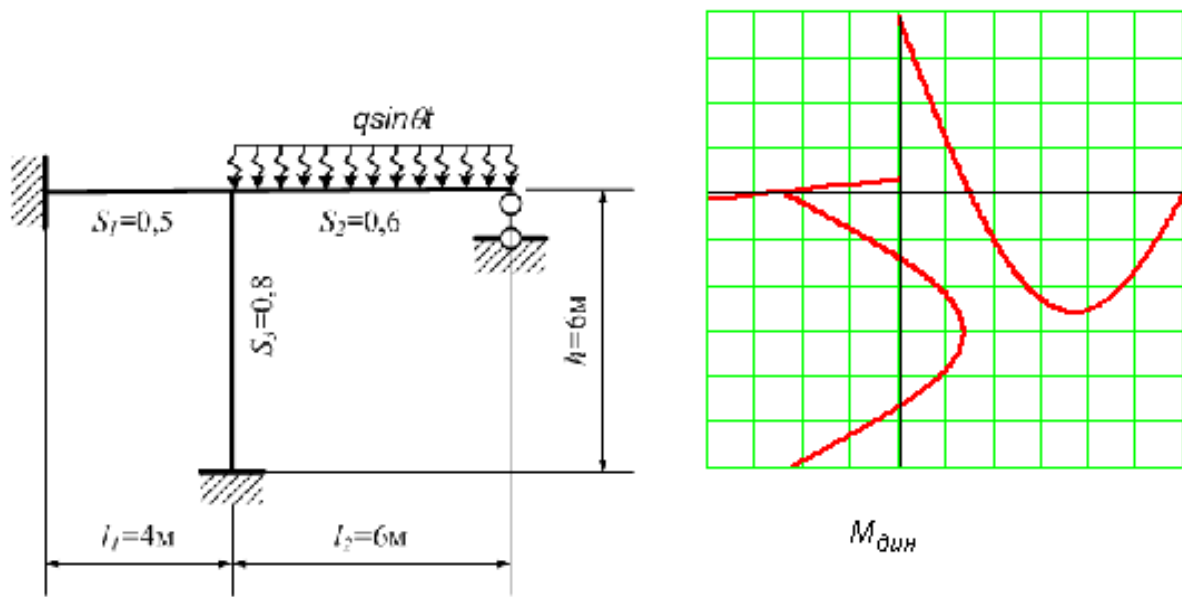
**Прогін**  $l_2 = 6$  м  $x := 0, 1..l_2$   $s_2 \cdot x =$   $M2(s_2, x) =$

$\theta_{0\_l2} = 1.1825$	0	-15.5664
$M_{0\_l2} = -15.5664$	0.6	-4.8064
$Q_{0\_l2} = 11.3575$	1.2	3.9784
	1.8	9.316
	2.4	10.1754
	3	6.6357
	3.6	-0

**Стійка**  $h = 6$  м  $x := 0, 1..h$   $s_3 \cdot x =$   $M3(s_3, x) =$

$\theta_{0\_l3} = 1.1825$	0	14.4302
$M_{0\_l3} = 14.4302$	0.8	3.9488
$Q_{0\_l3} = -10.6107$	1.6	-4.6478
	2.4	-8.2223
	3.2	-5.1972
	4	3.0898
	4.8	13.5328

Рис. Д.7.4



5. Побудуємо епюру моментів від статичного навантаження

<b>Прогін</b> $l_1 = 4$ м		<b>Прогін</b> $l_2 = 6$ м		<b>Стійка</b> $h = 6$ м													
$x := 0, 2 \dots l_1$	$x =$	$M1_{-}(x) =$	$x := 0, 3 \dots l_2$	$x =$	$M2_{-}(x) =$												
<table border="1"><tr><td>0</td></tr><tr><td>2</td></tr><tr><td>4</td></tr></table>	0	2	4		<table border="1"><tr><td>-1</td></tr><tr><td>-0.25</td></tr><tr><td>0.5</td></tr></table>	-1	-0.25	0.5	<table border="1"><tr><td>0</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>6</td></tr></table>	0	3	6		<table border="1"><tr><td>0.5</td></tr><tr><td>0.25</td></tr><tr><td>0</td></tr></table>	0.5	0.25	0
0																	
2																	
4																	
-1																	
-0.25																	
0.5																	
0																	
3																	
6																	
0.5																	
0.25																	
0																	
				$x := 0, 3 \dots h$	$x =$												
				<table border="1"><tr><td>0</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>6</td></tr></table>	0	3	6										
0																	
3																	
6																	
					<table border="1"><tr><td>0.6667</td></tr><tr><td>0.1667</td></tr><tr><td>-0.3333</td></tr></table>	0.6667	0.1667	-0.3333									
0.6667																	
0.1667																	
-0.3333																	

<b>Прогін</b> $l_2 = 6$ м	$x := 0, 3 \dots l_2$	$x =$	$M2F(x) =$	$r1I_{-} = \frac{13}{6}$	$r1F_{-} = -\frac{9}{2}$	$Z1_{-} = \frac{27}{13}$						
	<table border="1"><tr><td>0</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>6</td></tr></table>	0	3	6		<table border="1"><tr><td>-4.5</td></tr><tr><td>2.25</td></tr><tr><td>0</td></tr></table>	-4.5	2.25	0			
0												
3												
6												
-4.5												
2.25												
0												

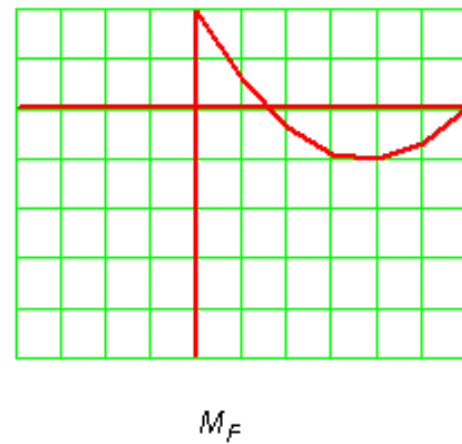
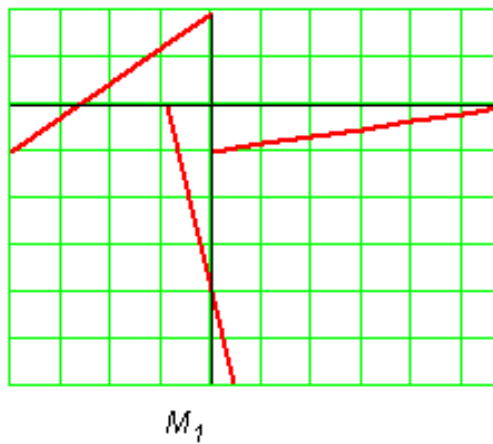
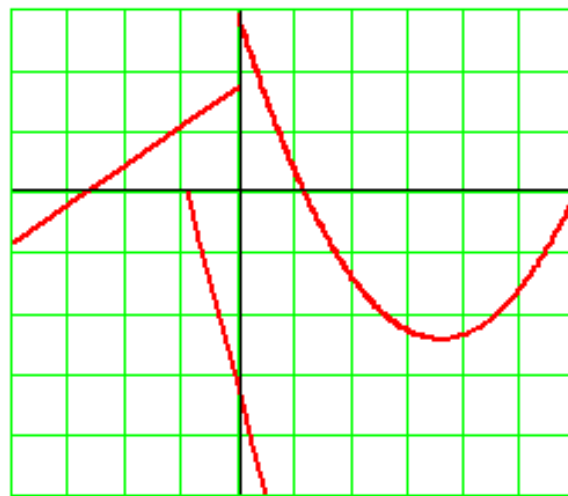


Рис. Д.7.5

<b>Прогін</b> $l_1 = 4$ м		<b>Прогін</b> $l_2 = 6$ м		<b>Стійка</b> $h = 6$ м															
$x := 0, 2 \dots l_1$ x =	$M1s(x) =$	$x := 0, 3 \dots l_2$ x =	$M2s(x) =$	$x := 0, 3 \dots h$ x =															
<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>0</td></tr><tr><td>2</td></tr><tr><td>4</td></tr></table>	0	2	4	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>-2.0769</td></tr><tr><td>-0.5192</td></tr><tr><td>1.0385</td></tr></table>	-2.0769	-0.5192	1.0385	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>0</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>6</td></tr></table>	0	3	6	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>-3.4615</td></tr><tr><td>2.7692</td></tr><tr><td>0</td></tr></table>	-3.4615	2.7692	0	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>0</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>6</td></tr></table>	0	3	6
0																			
2																			
4																			
-2.0769																			
-0.5192																			
1.0385																			
0																			
3																			
6																			
-3.4615																			
2.7692																			
0																			
0																			
3																			
6																			
				$M3s(x) =$															
				<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>1.3846</td></tr><tr><td>0.3462</td></tr><tr><td>-0.6923</td></tr></table>	1.3846	0.3462	-0.6923												
1.3846																			
0.3462																			
-0.6923																			



$M_{cm}$

б. Визначимо динамічні коефіцієнти для перерізів в серединах елементів рами

$\mu_1 = 0.6135$

$\mu_2 = 3.3641$

$\mu_3 = -23.7534$

Рис. Д.7.6

