

**С. І. Приходько, К. А. Трубчанінова,
О. П. Батаєв**

**ОСНОВИ ТЕОРІЇ ІНФОРМАЦІЇ
ТА КОДУВАННЯ**

Навчальний посібник

Харків – 2017



**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
УКРАЇНИ**

**УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ЗАЛІЗНИЧНОГО
ТРАНСПОРТУ**

**С. І. Приходько, К. А. Трубчанінова,
О. П. Батаєв**

**ОСНОВИ ТЕОРІЇ ІНФОРМАЦІЇ
ТА КОДУВАННЯ**

Навчальний посібник

Харків – 2017

УДК 621.391
ББК 32.811
П 775

*Рекомендовано вченою радою Українського державного
університету залізничного транспорту як навчальний посібник
(витяг з протоколу № 8 від 29 листопада 2016 р.)*

Рецензенти:

професори В. А. Краснобаєв (ХНУ ім. В. Н. Каразіна),
І. В. Яковенко (НТУ «ХПІ»)

Приходько С. І., Трубочанінова К. А., Батаєв О. П. Основи
П 775 теорії інформації та кодування: Навч. посібник. – Харків:
УкрДУЗТ, 2017. – 109 с., табл. 51.
ISBN 978-617-654-062-5

Цей посібник містить короткі теоретичні відомості з таких розділів навчальної дисципліни: «Основи теорії інформації», «Основи теорії завадостійкості кодування», а також методику розв'язування типових задач за цими розділами та контрольні задачі, які студенти повинні розв'язати як на практичних заняттях, так і самостійно для закріплення теоретичного матеріалу. Причому контрольні задачі мають різний ступінь складності та більшість з них супроводжуються відповідями. Задачі, що наведені в навчальному посібнику, також можуть бути використані при проведенні поточного контролю знань студентів, модульного контролю та на екзамені. Також цей посібник може бути використаний студентами при виконанні контрольних робіт, а також при курсовому та дипломному проектуванні.

Навчальний посібник складено відповідно до типової навчальної програми з дисципліни «Теорія електричного зв'язку» для студентів усіх форм навчання факультету АТЗ спеціальностей «Телекомунікації та радіотехніка», «Залізничний транспорт» та слухачів ННІППК.

УДК 621.391
ББК 32.811

ISBN 978-617-654-062-5

© Український державний університет
залізничного транспорту, 2017.

Навчальний посібник

Приходько Сергій Іванович,
Трубочанінова Карина Артурівна,
Батаєв Олег Петрович

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ІНФОРМАЦІЇ ТА КОДУВАННЯ

Відповідальний за випуск Трубочанінова К. А.

Редактор Еткало О. О.

Підписано до друку 03.11.16 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 2,50. Тираж 100. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейербаха, 7.

Свідectво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1. Інформаційні характеристики джерел повідомлень.....	5
1.1. Короткі теоретичні відомості.....	5
1.2. Приклади розв'язання основних типів задач.....	7
1.3. Задачі для самостійного розв'язання.....	15
Контрольні питання.....	17
2. Дискретні та безперервні канали зв'язку.....	18
2.1. Короткі теоретичні відомості.....	18
2.2. Приклади розв'язання основних типів задач.....	19
2.3. Задачі для самостійного розв'язання.....	24
Контрольні питання.....	25
3. Передавання і приймання сигналів у системах передачі безперервних повідомлень.....	26
3.1. Короткі теоретичні відомості.....	26
3.2. Приклади розв'язання основних типів задач.....	29
3.3. Задачі для самостійного розв'язання.....	38
Контрольні питання.....	44
4. Передавання і приймання сигналів у системах передачі дискретних повідомлень.....	45
4.1. Короткі теоретичні відомості.....	45
4.2. Приклади розв'язання основних типів задач.....	52
4.3. Задачі для самостійного розв'язання.....	75
Контрольні питання.....	82
5. Завадостійкі блочні коди.....	83
5.1. Короткі теоретичні відомості.....	83
5.2. Приклади розв'язання основних типів задач.....	86
5.3. Задачі для самостійного розв'язання.....	94
Контрольні питання.....	96
6. Багатоканальне передавання повідомлень.....	97
6.1. Короткі теоретичні відомості.....	97
6.2. Приклади розв'язання основних типів задач.....	99
6.3. Задачі для самостійного розв'язання.....	103
Контрольні питання.....	105
Бібліографічний список.....	106
Додаток 1.....	107
Додаток 2.....	108
Додаток 3.....	109

ВСТУП

Навчальний посібник призначений для вивчення дисципліни «Теорія електричного зв'язку» відповідно до типової навчальної програми для студентів усіх форм навчання факультету АТЗ спеціальностей «Телекомунікації та радіотехніка», «Залізничний транспорт» та слухачів ННППК.

Цей посібник містить короткі теоретичні відомості з таких розділів навчальної дисципліни: «Основи теорії інформації», «Основи теорії завадостійкості кодування», а також методику розв'язування типових задач за цими розділами та контрольні задачі, які студенти повинні розв'язати як на практичних заняттях, так і самостійно для закріплення теоретичного матеріалу. Причому контрольні задачі мають різний ступінь складності та більшість з них супроводжуються відповідями. Задачі, що наведені в навчальному посібнику, також можуть бути використані при проведенні поточного контролю знань студентів, модульного контролю та на екзамені. Також цей посібник може бути використаний студентами при виконанні контрольних робіт, а також при курсовому та дипломному проектуванні.

У навчальному посібнику наводяться формули, необхідні для виконання розрахунків, таблиці та додатки.

У посібнику розглядаються задачі, які пов'язані з інженерними розрахунками інформаційних характеристик джерел повідомлень та каналів зв'язку, а також з розрахунками якості передачі різної інформації по каналах зв'язку та які виникають перед інженерами-експлуатаційниками існуючих систем передачі на залізничному транспорті.

Оволодіння основними положеннями та методиками розрахунків, які наведені у розділах посібника дає змогу студентам більш якісно їх засвоїти, одержати необхідні знання та навички.

1. ІНФОРМАЦІЙНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЖЕРЕЛ ПОВІДОМЛЕНЬ

1.1. Короткі теоретичні відомості

Під *інформацією* розуміють сукупність відомостей про якусь подію, об'єкт або процес. Інформація надходить від джерела до отримувача у вигляді повідомлень, які при передаванні дискретної інформації формуються із сукупності обмеженої кількості вихідних символів. Сукупність символів, із яких формуються повідомлення, називається *алфавітом*. Якщо алфавіт складається з m символів, а кожний символ позначимо x_i , то кількість інформації в i -му символі визначається як

$$I(x_i) = -\log_2 p(x_i).$$

Якщо символи алфавіту, з яких складаються повідомлення, статистично незалежні, середня кількість інформації в одному символі дорівнює

$$\overline{I(x_i)} = -\sum_{i=1}^m p(x_i) \log_2 p(x_i).$$

Оскільки одиницею вимірювання кількості інформації є біт, то в подальшому позначку «2» при \log опускатимемо.

Важливою характеристикою джерела інформації є невизначеність його стану, яка називається *ентропією джерела* і визначається формулою для статистично незалежних символів:

$$H(X) = \overline{I(x_i)} = -\sum_{i=1}^m p(x_i) \log p(x_i).$$

Максимальну ентропію має джерело рівноймовірних незалежних повідомлень і визначається як

$$H(X) = -\sum_{i=1}^m p(x_i) \log p(x_i) = \log m \text{ при } p(x_i) = \frac{1}{m}.$$

Ентропія джерела безперервних повідомлень x , які описуються стаціонарним ергодичним процесом, визначається за формулою

$$h(x) = - \int_x w(x) \log w(x) dx - \log \Delta x,$$

де $w(x)$ – одновимірна густина ймовірності безперервного повідомлення, а Δx – роздільна здатність джерела.

Важливою характеристикою джерела інформації є його продуктивність, яка визначається формулою

$$R_D = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} I(x_T),$$

де $I(x_T)$ – кількість інформації, що продукується джерелом за проміжок часу T .

Для джерел дискретної інформації продуктивність дорівнює

$$R_D = \frac{H(X)}{\bar{\tau}},$$

де $\bar{\tau}$ – середня тривалість елементарних повідомлень (символів) джерела. При використанні символів однакової тривалості

$$R_D = \frac{H(X)}{\tau}.$$

Для забезпечення максимальної швидкості передавання інформації каналом зв'язку необхідно узгоджувати характеристики джерела з характеристиками каналу. Це вирішується шляхом оптимального статистичного кодування повідомлень джерела двійковими кодами. Математична ознака оптимальності має вигляд:

$$n_i = I(x_i) = -\log p(x_i),$$

де n_i – кількість двійкових символів у кодовій комбінації. Найбільш відомими є схеми оптимального статистичного кодування Шеннона – Фано та Хаффмена.

1.2. Приклади розв'язання основних типів задач

Приклад 1.1. Визначити ентропію повідомлення з шести літер, якщо загальна кількість літер в алфавіті дорівнює 32 і всі повідомлення рівноймовірні.

Розв'язання. Загальна кількість шестилітерних повідомлень $m = 32^6$.

Використовуючи формулу для визначення ентропії рівноймовірних повідомлень, отримаємо

$$H(X) = \log m = \log 32^6 = 6 \log 32 = 30 \text{ біт/повідомл.}$$

Приклад 1.2. Визначити диференціальну ентропію безперервного повідомлення, розподіленого за нормальним законом:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

якщо його середня потужність, виражена в нормованих одиницях, дорівнює $\sigma^2 = 25$.

Розв'язання. Використовуючи вираз для визначення диференціальної ентропії, отримаємо

$$\begin{aligned} h(x) &= -\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \log w(x) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \log \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \right] dx = \\ &= -\log \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \log e dx = \\ &= \log \sqrt{2\pi\sigma^2} + \frac{\log e}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x) dx = \log \sqrt{2\pi\sigma^2} + \frac{\sigma^2 \log e}{2\sigma^2} = \log \sqrt{2\pi e \sigma^2} = \\ &= \log \sqrt{2\pi e 25} = \log 5\sqrt{2\pi e} = 4,37, \text{ біт/повідомл.} \end{aligned}$$

Приклад 1.3. Вимірювана величина x змінюється в межах від x_0 до (x_0+b) і розподілена за законом рівної ймовірності. Знайти диференціальну ентропію величини x , якщо b дорівнює 32 нормованим одиницям.

Розв'язання. Закон рівної ймовірності можна аналітично подати у такому вигляді:

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} \text{ при } x_0 \leq x \leq x_0 + b; \\ 0 \text{ при } x \leq x_0 \text{ та } x > x_0 + b. \end{cases}$$

Ентропія дорівнює

$$\begin{aligned} h(x) &= - \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \log w(x) dx = - \frac{1}{b} \int_{x_0}^{x_0+b} \log \frac{1}{b} dx = \\ &= \log b = \log 32 = 5 \text{ біт/повідомл.} \end{aligned}$$

Приклад 1.4. Джерело інформації генерує повідомлення з символів алфавіту $\{x_i\}_{i=1, \overline{m}}$. Обчислити ентропію джерела і його надмірність за умови взаємної незалежності символів, якщо

$$i = \overline{1,4}; p(x_1) = 0,1; p(x_2) = 0,2; p(x_3) = 0,3; p(x_4) = 0,4.$$

Розв'язання. Ентропія джерела дорівнює

$$\begin{aligned} H(X) &= - \sum_{i=1}^4 p(x_i) \cdot \log p(x_i) = -0,1 \log 0,1 + 0,2 \log 0,2 + \\ &+ 0,3 \log 0,3 + 0,4 \log 0,4 = 1,85 \text{ біт/повідомл.} \end{aligned}$$

Надмірність джерела:

$$\gamma = 1 - \frac{H(X)}{\log m} = 1 - \frac{1,85}{\log 4} = 0,08.$$

Приклад 1.5. Закодувати оптимальним статистичним кодом за схемою Шеннона — Фано ансамбль повідомлень джерела $\{x_i\}$, якщо повідомлення статистично незалежні та задані апіорні ймовірності їх появи на виході джерела $p(x_i)$:

$$p(x_1) = 0,1; p(x_2) = 0,2; p(x_3) = 0,05; p(x_4) = 0,25; p(x_5) = 0,1;$$

$$p(x_6) = 0,01; p(x_7) = 0,15; p(x_8) = 0,1.$$

Розв'язання. Кодування за методом Шеннона — Фано здійснюється у такий спосіб. Усі повідомлення записуються в таблицю в порядку зменшення їх імовірності. Потім уся сукупність повідомлень розбивається на дві приблизно рівні групи. Усім повідомленням верхньої групи приписується перший кодовий символ «1», а повідомленням нижньої групи — символ «0». Потім кожна група аналогічно розбивається на підгрупи за можливістю з однаковими ймовірностями, при цьому верхнім підгрупам в обох групах приписується символ «1» (другий символ кодової комбінації), а нижнім — символ «0». Ця процедура здійснюється доти, доки в кожній підгрупі не залишиться по одному повідомленню. Процес кодування наведений у табл. 1.

Таблиця 1

Процес кодування за методом Шеннона — Фано

Повідомлення	$p(x_i)$	Кодування	Кодова комбінація	Кількість знаків n_i	$I(x_i)$
x_4	0,25	11	11	2	2,0
x_2	0,2	10	10	2	2,33
x_7	0,15	011	011	3	2,745
x_1	0,1	010	010	3	3,33
x_5	0,1	0011	0011	4	3,33
x_8	0,1	0010	0010	4	3,33
x_3	0,05	0001	0001	4	4,33
x_6	0,05	0000	0000	4	4,33

Жодна коротка кодова комбінація не має бути початком більш довгої. Середня довжина кодової комбінації обчислюється за формулою

$$\langle n \rangle = \sum_{i=1}^8 n_i p(x_i) = 2,85 \text{ дв.симв.}$$

При оптимальному двійковому кодуванні ентропія дорівнює

$$H(X) = -\sum_{i=1}^8 p(x_i) \log p(x_i) = 2,57 \text{ біт/повідомл.}$$

У процесі розв'язання задачі завжди має виконуватись така умова:

$$H(X) \leq \langle n \rangle.$$

Приклад 1.6. Оглядова радіолокаційна станція має такі технічні характеристики: зона огляду за дальністю $R_{\min} = 1,6 \text{ км}$; $R_{\max} = 400 \text{ км}$; за азимутом $\varphi_{аз} = 0 \dots 360^\circ$, за висотою $H_{\min} = 600 \text{ м}$, $H_{\max} = 30 \text{ км}$; період огляду $T_{огл} = 10 \text{ с}$; максимальна швидкість літаків $V_{\max} = 800 \text{ м/с}$. Радіорелейна станція (РЛС) має такі роздільні здатності: за дальністю $\delta R = 800 \text{ м}$, за висотою $\delta H = 600 \text{ м}$, за азимутом $\delta \varphi_{аз} = 2^\circ$. Різні місцезположення літаків при виявленні першої засічки рівноймовірні. За період огляду літак може змінити висоту не більше ніж на 1 км.

Визначити: кількість інформації, що міститься в повідомленні про місцезположення літака при першій і другій засічках; кількість розрядів для передавання каналом зв'язку даних про місцезнаходження літака; надмірність, яка міститься в повідомленні про другу засічку.

Розв'язання. При виявленні першої засічки літак рівноймовірно може перебувати у межах будь-якого із n_{R1} дискретних значень дальності, n_{H1} дискретних значень висоти та $n_{\varphi 1}$ дискретних значень азимуту.

$$n_{R1} = \frac{R_{\max} - R_{\min}}{\delta R} = \frac{400 - 1,6}{0,8} = 498;$$

$$n_{\varphi 1} = \frac{\varphi_{аз}}{\delta \varphi_{аз}} = \frac{360^\circ}{2^\circ} = 180^\circ; n_{H1} = \frac{H_{\max} - H_{\min}}{\delta H} = \frac{30 - 0,6}{0,6} = 49.$$

Кількість інформації, що міститься в повідомленні про першу засічку, становить

$$I_1 = I_{R1} + I_{\varphi1} + I_{H1} = \log 498 + \log 180 + \log 49 = \\ = 8,96 + 7,49 + 5,63 = 22,08 \text{ біт.}$$

Оскільки кожна координата місцеположення літака передається цілим числом розрядів, то для передавання дальності, азимуту і висоти необхідно виділити

$$N_1 = N_{R1} + N_{\varphi1} + N_{H1} = 9 + 8 + 6 = 23 \text{ дв.симв.}$$

Після одержання другої засічки літак рівноймовірно може бути виявлений у межах будь-якого із n_{R2} дискретних значень дальності, $n_{\varphi2} = n_{\varphi1}$ дискретних значень азимуту і n_{H2} дискретних значень висоти:

$$n_{R2} = \frac{T_{озл} \cdot V_{\max}}{\delta R} = \frac{10 \cdot 0,8}{0,8} = 10; n_{\varphi2} = 180^\circ; n_{H2} = \frac{1000}{600} = 1,65.$$

Отже, кількість інформації, що міститься в повідомленні про другу засічку, дорівнює

$$I_2 = I_{R2} + I_{\varphi2} + I_{H2} = \log 10 + \log 180 + \log 1,65 = \\ = 3,32 + 7,49 + 0,72 = 11,53 \text{ біт.}$$

Для передавання цієї інформації потрібно

$$N_2 = N_{R2} + N_{\varphi2} + N_{H2} = 4 + 8 + 1 = 13 \text{ дв.симв.}$$

Однак інформація передаватиметься з використанням кодової комбінації, що складається з 23 розрядів (як при передаванні даних про першу засічку). Отже, надмірність при передаванні повідомлення про другу засічку складає

$$x_2 = \frac{N_1 - N_2}{N_1} = \frac{23 - 13}{23} = 0,43.$$

Приклад 1.7. Визначити максимальну кількість інформації, що міститься у квантованому телевізійному сигналі при 625 рядках розкладання за умови, що сигнал, відповідний одному рядку зображення, є послідовністю статистично незалежних, випадкових за амплітудою імпульсів (при відношенні сторін кадру 4/3), кожен з яких з рівною ймовірністю набуває одне з 16 значень. Знайти надмірність телевізійного сигналу, якщо фактично кадр зображення з 16 градаціями рівнів містить $9,37 \cdot 10^5$ біт інформації.

Розв'язання. Максимальна ентропія одного елемента сигналу при 16 градаціях $H_{\max}(X) = \log 16 = 4$ біт/повідомл. Кількість елементів зображення в одному кадрі дорівнює

$$N = 625 \cdot 625 \cdot \frac{4}{3} = 520833.$$

Кількість інформації в одному кадрі при незалежних елементах

$$I_k = N \cdot H_{\max} = 520833 \cdot 4 = 2,083 \cdot 10^6 \text{ біт.}$$

Ентропія реального телевізійного зображення в перерахунку на один символ з урахуванням статистичних зв'язків при 16 градаціях яскравості дорівнює

$$H(X) \approx \frac{I_{\text{реал}}}{N} = \frac{9,37 \cdot 10^5}{520833} \approx 1,8 \text{ біт/повідомл.}$$

Надмірність реального телевізійного сигналу

$$\gamma = 1 - \frac{H(X)}{H_{\max}(X)} \approx 0,55.$$

Приклад 1.8. Сигнал формується у вигляді двійкового коду з імовірностями появи символів 1 і 0, які дорівнюють відповідно $p(x_1) = 0,6$ і $p(x_0) = 0,4$. Появи символів взаємопов'язані умовними ймовірностями:

$p(x_0/x_0) = 0,1$ – імовірність того, що після 0 йтиме 0;

$p(x_1/x_0) = 0,9$ – імовірність того, що після 0 йтиме 1;

$p(x_1/x_1) = 0,1$ – імовірність того, що після 1 йтиме 1;

$p(x_0/x_1) = 0,9$ – імовірність того, що після 1 йтиме 0.

Знайти ентропію сигналів.

Розв'язання. Знаходимо шукану ентропію згідно з формулою

$$H(X) = -\sum_{i=0}^1 p(x_i) \sum_{j=0}^1 p(x_j/x_i) \log p(x_j/x_i) =$$

$$= -(0,1 \log 0,1 + 0,9 \log 0,9) \cdot (0,6 + 0,4) = 0,467 \text{ біт/повідомл.}$$

Приклад 1.9. Джерело формує дискретні повідомлення x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , імовірності появи яких дорівнюють $p(x_1) = \frac{1}{2}$, $p(x_2) = \frac{1}{4}$, $p(x_3) = \frac{1}{8}$, $p(x_4) = \frac{1}{8}$.

Знайти ентропію повідомлень для випадків, коли між повідомленнями немає статистичних зв'язків та коли послідовність їх появи в довгому тексті має статистичну залежність, яка описується двовимірними ймовірностями $p(x_i, x_j)$ та умовними ймовірностями $p(x_i/x_j)$, конкретні значення яких наведені в табл. 2.

Розв'язання. Ентропія статистично незалежних повідомлень обчислюється за формулою

$$H(X) = -\sum_{i=1}^4 p(x_i) \log p(x_i) =$$

$$= -\left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} \right) = 1,75 \text{ біт/повідомл.}$$

Таблиця 2

Значення двовимірних та умовних імовірностей

$x_i x_j$	$p(x_i, x_j)$	$p(x_i, x_j)$	$x_i x_j$	$p(x_i, x_j)$	$p(x_i, x_j)$
$x_1 x_1$	13/32	13/16	$x_3 x_1$	0	0
$x_1 x_2$	3/32	3/16	$x_3 x_2$	0	0
$x_1 x_3$	0	0	$x_3 x_3$	0	0
$x_1 x_4$	0	0	$x_3 x_4$	1/8	1
$x_2 x_1$	1/32	1/8	$x_4 x_1$	1/16	1/2
$x_2 x_2$	1/8	1/2	$x_4 x_2$	1/32	1/4
$x_2 x_3$	3/32	3/8	$x_4 x_3$	1/32	1/4
$x_2 x_4$	0	0	$x_4 x_4$	0	0

Ентропія попарно статистично пов'язаних повідомлень обчислюється за формулою

$$H(X) = -\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 p(x_i, x_j) \log p(x_i / x_j) =$$

$$= -(13/32 \cdot \log 13/16 + 3/32 \cdot \log 3/16 + 1/32 \cdot \log 1/8 + 1/8 \cdot \log 1/2 +$$

$$+ 3/32 \cdot \log 3/8 + 1/8 \cdot \log 1 + 1/16 \cdot \log 1/2 + 1/32 \cdot \log 1/4 +$$

$$+ 1/32 \cdot \log 1/4) = 0,886 \text{ біт/повідомл.}$$

Порівняння отриманих результатів свідчить, що наявність статистичних зв'язків майже вдвічі зменшує ентропію повідомлень.

Приклад 1.10. Джерелом інформації є вимірювальний датчик випадкового процесу x , рівномірно розподіленого в межах від 0 до 256 нормованих одиниць. Визначити кількість інформації, яку отримують у результаті одного заміру значення цього випадкового процесу, якщо похибка вимірювання розподілена за нормальним законом і середнє квадратичне значення похибки $\sigma = 4$.

Розв'язання. Диференціальна ентропія випадкової величини x має такий вигляд:

$$h(x) = -\int_0^{256} w(x) \log w(x) dx = -\int_0^{256} \frac{1}{256} \log \frac{1}{256} dx = 8 \text{ біт/повідомл.}$$

Диференціальна ентропія похибки вимірювання:

$$h(\sigma) = \log \sqrt{2\pi e} \sigma = \log \sqrt{2\pi e} 4 = \log 4 \sqrt{2\pi e} = 4,04 \text{ біт/повідомл.}$$

Кількість інформації, яку отримують у результаті одного вимірювання, визначається різницею між ентропією самої величини і ентропією похибки і має такий вигляд:

$$I(x) = h(x) - h(\delta) = 8 - 4,04 = 3,96 \text{ біт.}$$

1.3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 1.1. Визначити ентропію повідомлень із k літер, якщо кількість літер в алфавіті дорівнює m і всі повідомлення рівноймовірні (табл. 3).

Таблиця 3

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	4	5	6	7	8	8	7	6	5	4
m	16	32	64	128	256	256	128	64	32	16

Задача 1.2. Джерело інформації видає символи з ансамблю $X = \{x_i\} (i = \overline{1,4})$ з імовірностями $p(x_i)$ (табл. 4). Знайти кількість інформації, що міститься в кожному із символів джерела при їх незалежному виборі (джерело без пам'яті). Обчислити ентропію і надмірність заданого джерела.

Таблиця 4

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(x_1)$	0,2	0,15	0,05	0,1	0,55	0,45	0,4	0,5	0,5	0,45
$p(x_2)$	0,3	0,35	0,1	0,2	0,3	0,3	0,25	0,2	0,4	0,25
$p(x_3)$	0,4	0,45	0,15	0,25	0,1	0,15	0,2	0,1	0,05	0,2
$p(x_4)$	0,1	0,05	0,7	0,45	0,05	0,1	0,15	0,2	0,05	0,1

Задача 1.3. Закодувати оптимальним двійковим кодом за схемою Шеннона – Фано ансамбль повідомлень $X = \{x_i\} (i = \overline{1,8})$, які задані апріорними ймовірностями $p(x_i)$ (табл. 5). Знайти ентропію ансамблю і середнє число знаків у кодових комбінаціях. Оцінити виграш оптимального коду в порівнянні з рівномірним.

Таблиця 5

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(x_1)$	0,25	0,2	0,15	0,3	0,4	0,2	0,12	0,04	0,05	0,17
$p(x_2)$	0,2	0,15	0,1	0,2	0,15	0,1	0,16	0,16	0,10	0,13
$p(x_3)$	0,15	0,1	0,05	0,1	0,1	0,2	0,22	0,03	0,15	0,08
$p(x_4)$	0,1	0,05	0,25	0,05	0,15	0,1	0,08	0,17	0,20	0,02
$p(x_5)$	0,05	0,1	0,15	0,1	0,05	0,15	0,1	0,06	0,20	0,1
$p(x_6)$	0,10	0,3	0,2	0,1	0,05	0,15	0,2	0,14	0,15	0,2
$p(x_7)$	0,10	0,05	0,05	0,1	0,05	0,05	0,06	0,15	0,10	0,15
$p(x_8)$	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,25	0,05	0,15
$\tau_u, \text{мс}$	0,8	1,5	0,03	2,4	1,8	2,5	0,01	0,05	2,4	0,8

Задача 1.4. Визначити диференціальну ентропію неперервного повідомлення, розподіленого за нормальним законом, якщо його середня потужність, яка виражена в нормованих одиницях, дорівнює σ^2 (табл. 6).

Таблиця 6

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
σ^2	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Задача 1.5. Вимірювана величина x змінюється в межах від x_0 до $(x_0 + b)$ і розподілена за законом рівної ймовірності (табл. 7). Знайти диференціальну ентропію величини x .

Таблиця 7

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Задача 1.6. Джерелом інформації є вимірювальний датчик випадкового процесу x , рівномірно розподіленого в межах від 0 до m нормованих одиниць. Визначити кількість інформації, яку отримують у результаті одного заміру значення цього випадкового процесу, якщо похибка вимірювання розподілена за нормальним законом і середнє квадратичне значення похибки σ .

Таблиця 8

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	128	256	512	1024	2048	2048	1024	512	256	128
σ	2	3	4	5	6	7	6	5	4	3

Контрольні питання

1. Дайте визначення середньої кількості інформації в одному символі. Яка одиниця використовується для визначення середньої кількості інформації в одному символі?

2. Що розуміється під ентропією джерела дискретних повідомлень і які властивості ентропії?

3. Яким чином визначається і як обчислюється диференціальна ентропія (ентропія джерела безперервних повідомлень)?

4. Дайте визначення продуктивності джерела повідомлень.

5. Наведіть математичну ознаку оптимальності джерела повідомлень.

2. ДИСКРЕТНІ ТА БЕЗПЕРЕРВНІ КАНАЛИ ЗВ'ЯЗКУ

2.1. Короткі теоретичні відомості

Під час проектування систем передавання інформації важливо визначити їх основні інформаційні характеристики: швидкість передавання інформації і пропускну здатність.

У реальних каналах зв'язку завжди наявні завади різноманітного походження, які зменшують швидкість передавання інформації і пропускну здатність каналів, що визначається як максимально можлива швидкість передавання.

Швидкість передавання у двійкових каналах зв'язку визначається за формулою

$$R = \frac{1}{\tau} [H(X) - H(X/\hat{X})],$$

де τ – тривалість одного двійкового символу; $H(X)$ – ентропія джерела; $H(X/\hat{X})$ – ентропія втрат інформації в каналі, обумовлена помилками, пов'язаними з наявністю завад.

Пропускна здатність каналу зв'язку визначається за формулою

$$C = \max R = \max \frac{1}{\tau} [H(X) - H(X/\hat{X})].$$

Максимізація C досягається максимізацією $H(X)$.

Пропускна здатність двійкового симетричного каналу обчислюється за формулою

$$C = \frac{1}{\tau} \left[1 - p_e \log \frac{1}{p_e} - (1 - p_e) \log \frac{1}{1 - p_e} \right].$$

Пропускна здатність безперервного каналу зв'язку обчислюється за формулою Шеннона [5]

$$C = \Delta F \log \left(\alpha \frac{P_c}{P_u} + 1 \right),$$

де ΔF – ширина смуги пропускання каналу; P_c – середня потужність сигналу; P_u – середня потужність шуму; α – коефіцієнт форми сигналу; $\alpha = 1$ для сигналу у вигляді нормального білого шуму; $\alpha = 0,3$ для синусоїдального сигналу.

Важливою характеристикою систем передачі інформації є ефективність використання пропускну здатності, яка визначається формулою

$$\beta_c = \frac{R}{C},$$

де R – реальна швидкість передачі інформації.

2.2. Приклади розв'язання основних типів задач

Приклад 2.1. Повідомлення дискретного джерела кодуються рівномірним двійковим кодом і передаються симетричним каналом зв'язку з завадами. Визначити пропускну здатність каналу зв'язку за умови, що тривалість двійкових сигналів $\tau = 1$ мкс, середня ймовірність помилки на один двійковий символ $p_e = 10^{-3}$.

Розв'язання. Пропускна здатність двійкового симетричного каналу обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\tau} \left[1 - p_e \log \frac{1}{p_e} - (1 - p_e) \log \frac{1}{1 - p_e} \right] = \\ &= \frac{1}{10^{-6}} \left[1 - 10^{-3} \log \frac{1}{10^{-3}} - (1 - 10^{-3}) \log \frac{1}{10^{-3}} \right] \approx 9,9 \cdot 10^5 \text{ біт/с.} \end{aligned}$$

Приклад 2.2. Повідомлення дискретного джерела кодуються m -значним кодом і передаються симетричним каналом зв'язку за умови, що тривалість одного сигналу

$\tau = 2$ мкс, середня ймовірність помилки на один сигнал $p_e = 10^{-3}$, $m = 8$.

Розв'язання. Пропускна здатність багатопозиційного симетричного каналу обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\tau} \left[\log m - p_e \log \frac{m-1}{p_e} - (1-p_e) \log \frac{1}{1-p_e} \right] = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}} \left[\log 8 - 10^{-3} \log \frac{8-1}{10^{-3}} - (1-10^{-3}) \log \frac{1}{1-10^{-3}} \right] = \\ &= 1,4936 \cdot 10^6 \text{ біт/с.} \end{aligned}$$

Приклад 2.3. Обчислити пропускну здатність неперервного каналу радіозв'язку, якщо середня потужність сигналу на вході радіоприймача $P_c = 1$ мкВт, а завадою є тепловий шум приймального пристрою зі смугою $\Delta F = 10$ кГц. Приймач працює при температурі 20°C .

Розв'язання. Пропускна здатність неперервного каналу зв'язку обчислюється згідно з формулою Шеннона

$$C = \Delta F \log \left(\frac{P_c}{P_{uu}} + 1 \right).$$

Потужність теплового шуму може бути визначена згідно з формулою $P_{uu} = 4kTF$, де T – абсолютна температура приймального пристрою; k – стала Больцмана, яка дорівнює $1,38 \cdot 10^{-23}$ Вт/°К·Гц. У цьому випадку $\Delta F = 10$ кГц, $T = 273 + t^\circ \text{C} = 293^\circ \text{K}$.

Тобто

$$C = 10^4 \log \left(1 + \frac{10^{-6}}{4 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 293 \cdot 10^4} \right) \approx 3,26 \cdot 10^5 \text{ біт/с.}$$

Приклад 2.4. Радіосистема зв'язку декаметрового діапазону має такі основні параметри: максимальна швидкість передавання на стартозупинному літеродрукуючому апараті складає 100 слів за

хвилину, використовується амплітудна маніпуляція; для ефективної протидії завмиранням відношення сигнал/шум має бути не менше 20 дБ. Визначити швидкість передавання інформації, пропускну здатність системи радіозв'язку та коефіцієнт ефективного використання пропускну здатності.

Розв'язання. Ураховуватимемо, що середня довжина слова складає шість літер. Кожна літера при використанні рівномірного двійкового коду відображується п'ятьма робочими послідовностями ($n = \log 32 = 5$). Крім того, необхідно передавати стартову і стопову послідовності, причому стартова за тривалістю на 50 % перевищує робочу послідовність. Тому тривалість літери в стартозупинних апаратах дорівнює 7,5 елементарних послідовностей.

Технічна швидкість передавання $R_T = \frac{100 \cdot 6 \cdot 7,5}{60} = 75$ Бод. Якщо

не враховувати статистичні зв'язки між літерами (надмірність мови), можна вважати, що кожна літера несе 5 біт інформації. Тоді швидкість передавання корисної інформації $R = \frac{100 \cdot 6 \cdot 5}{60} = 50$ біт/с. Технічній швидкості 75 Бод відповідає

частота повторення послідовностей $F = \frac{75}{2} = 37,5$ Гц. Вважаючи, що для

правильного відтворення прямокутних імпульсів необхідно утримувати третю гармоніку, смуга пропускання каналу зв'язку в цих умовах має складати $\Delta F = 3 \cdot 37,5 = 112,5$ Гц. Нехтуючи для спрощення значеннями нестабільностей частот високочастотних генераторів передавальної і приймальної частин, обчислимо пропускну здатність згідно з формулою Шеннона

$$C = \Delta F \log \left(\frac{P_c}{P_{ui}} + 1 \right) = 112,5 \log(100 + 1) \approx 750 \text{ біт/с.}$$

Ефективність використання пропускну здатності дорівнює

$$\eta_c = \frac{R}{C} = \frac{50}{750} = 0,066.$$

Приклад 2.5. Радіотелефонна система зв'язку декаметрового діапазону працює в режимі односмугової модуляції при відношенні сигнал/шум 20 дБ у смузі пропускання 4 кГц при середній швидкості передавання тексту 100 слів за хвилину. Визначити швидкість передавання інформації, пропускну здатність та ефективність використання пропускну здатності.

Розв'язання. Для аналізу інформативності телефонних розмов необхідні деякі спрощення. Вважатимемо, що передана під час телефонної розмови кількість інформації визначається кількістю літер прочитаного тексту, якби його передавали телеграфним каналом. Далі вважатимемо (як у задачі 2.4), що кожна літера відповідає 5 бітам інформації. Швидкість передавання інформації

$$R = \frac{100 \cdot 6 \cdot 5}{60} = 50 \text{ біт/с.}$$

Пропускна здатність радіотелефонного каналу дорівнює

$$C = \Delta F \log \left(\frac{P_c}{P_w} + 1 \right) = 4 \cdot 10^3 \log(100 + 1) \approx 2,6 \cdot 10^4 \text{ біт/с.}$$

Отже, ефективність системи

$$\eta_c = \frac{R}{C} = \frac{50}{2,6 \cdot 10^4} = 1,9 \cdot 10^{-3}.$$

Приклад 2.6. Фототелеграфна (факсимільна) система зв'язку працює в декаметровому діапазоні в смузі пропускання 4 кГц при відношенні сигнал/шум 20 дБ. Розмір чорно-білого оригіналу з двома градаціями яскравості 210×300 мм. Розмір світлової плями по вертикалі і горизонталі – 0,1×0,22 мм. Швидкість читання «рядків» – 225 рядків за хвилину. Обчислити швидкість передавання інформації, пропускну здатність і ефективність використання каналу зв'язку.

Розв'язання. При зазначеному розмірі світлової плями чорно-білий нерухомий оригінал розбивається на таку кількість елементів: 900 по горизонталі ($210:0,22 \approx 900$) і 3000 по вертикалі ($300:0,1 = 3000$). Кожен елемент зображення, якщо нехтувати статистичними зв'язками між сусідніми елементами, несе 1 біт інформації. Отже, швидкість передавання інформації

$$R = \frac{900 \cdot 225 \cdot 1}{60} = 3380 \text{ біт/с.}$$

Пропускна здатність каналу, обчислена за формулою Шеннона, складає

$$C = \Delta F \log \left(\frac{P_c}{P_u} + 1 \right) = 4 \cdot 10^3 \log(100 + 1) \approx 2,6 \cdot 10^4 \text{ біт/с.}$$

Коефіцієнт використання каналу зв'язку в цих умовах дорівнює

$$\eta_c = \frac{R}{C} = \frac{3380}{2,6 \cdot 10^4} = 0,13.$$

Приклад 2.7. Радіосистема декаметрового діапазону призначена для обміну даними між ПЕОМ за допомогою радіомодемів із швидкістю передавання $R = 1200$ біт/с. Ширина смуги пропускання радіосистеми з захисними інтервалами $\Delta F = 4$ кГц, відношення сигнал/шум, яке необхідне для забезпечення завадостійкості, дорівнює 20 дБ. Визначити пропускну здатність системи та коефіцієнт її використання.

Розв'язання. Пропускна здатність системи та коефіцієнт її використання дорівнюють відповідно:

$$C = \Delta F \log \left(\frac{P_c}{P_u} + 1 \right) = 4 \cdot 10^3 \log(100 + 1) \approx 2,6 \cdot 10^4 \text{ біт/с;}$$

$$\eta_c = \frac{R}{C} = \frac{1200}{2,6 \cdot 10^4} = 0,046.$$

2.3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 2.1. Повідомлення дискретного джерела кодуються рівномірним двійковим кодом і передаються симетричним каналом зв'язку із завадами. Визначити пропускну здатність каналу зв'язку за умови, що тривалість двійкових символів τ , середня ймовірність помилки p_e (табл. 9).

Таблиця 9

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
τ , мкс	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_e	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-7}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}

Задача 2.2. Обчислити пропускну здатність безперервного радіоканалу, якщо задана середня потужність сигналу P_c на виході каналу, а завадою є внутрішній тепловий шум радіоприймального пристрою з ефективною смугою пропускання ΔF . Приймач працює при температурі $T, ^\circ C$ (табл. 10). Коефіцієнти форми сигналу $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0,3$.

Таблиця 10

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P_c , мкВт	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	1
ΔF , кГц	12	13	14	15	16	20	10	25	30	15
$T, ^\circ C$	20	25	30	35	20	25	30	35	20	30

Задача 2.3. Визначити необхідне відношення сигнал/шум на вході приймача, яке необхідне для забезпечення заданої пропускну здатності каналу зв'язку C при заданій ширині смуги пропускання ΔF (табл. 11).

Таблиця 11

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C , кбіт/с	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
ΔF , кГц	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Задача 2.4. Обчислити збільшення пропускної здатності каналу зв'язку, якщо замість синусоїдального сигналу використовувати сигнал типу нормального білого шуму. Задані смуга пропускання каналу ΔF і відношення середніх потужностей сигналу і шуму P_c/P_u (табл. 12).

Таблиця 12

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ΔF , кГц	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P_c/P_u , дБ	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

Контрольні питання

1. Перелічіть моделі дискретного каналу зв'язку.
2. Перелічіть моделі безперервного каналу зв'язку.
3. Дайте визначення пропускної здатності дискретного каналу. Теорема Шеннона для каналу із завадами.
4. Дайте визначення пропускної здатності безперервного каналу. Теорема Шеннона для каналу із завадами.
5. Як і навіщо визначається ефективність використання пропускної здатності?

3. ПЕРЕДАВАННЯ І ПРИЙМАННЯ СИГНАЛІВ У СИСТЕМАХ ПЕРЕДАЧІ БЕЗПЕРЕРВНИХ ПОВІДОМЛЕНЬ

3.1. Короткі теоретичні відомості

При передаванні безперервних повідомлень різниця між переданим повідомленням $x(t)$ і прийнятим $\hat{x}(t)$ визначається величиною випадкової похибки

$$\varepsilon_{x(t)} = \hat{x}(t) - x(t).$$

Завданням приймального пристрою є вилучення переданого повідомлення $x(t)$ із вхідного коливання $y(t)$. Однак через завади та спотворення ця процедура не може бути виконана точно і відновити повідомлення на виході приймача можливо тільки наближено. Таке наближене повідомлення називають *оцінкою* і позначають $\hat{x}(t)$.

Безперервні повідомлення можуть передаватися методами аналогової або цифрової модуляції.

Критерієм близькості $\hat{x}(t)$ і $x(t)$ в теорії і техніці зв'язку прийнята відносна середня квадратична похибка (СКП) δ^2 .

При передаванні методами аналогової модуляції середньоквадратична похибка визначається спектром повідомлення, параметрами модуляції і процесами в демодуляторі приймача і становить

$$\delta^2 = \overline{[\hat{x}(t) - x(t)]^2} / \overline{x^2(t)} = k_n^2 \cdot \overline{[\hat{x}(t) - x(t)]^2},$$

де k_n – пік-фактор повідомлення.

Середній квадрат похибки при оптимальному прийманні безперервних сигналів на фоні нормального білого шуму визначається за формулою

$$\delta^2 = k_n^2 \cdot \overline{\varepsilon^2(t)} = k_n^2 \cdot \int_0^{F_B} N_{0\text{вих}}(f) df,$$

$$\text{де } N_{0\text{вих}} = N_0 / \left[\frac{ds(x,t)}{dx(t)} \right]^2.$$

Для вибраного (або заданого) виду модульованих сигналів завадостійкість оптимального приймання буде найвищою порівняно з будь-яким можливим реальним способом приймання цих же сигналів. Тому таку завадостійкість часто називають **потенційною**.

Потенційна завадостійкість приймання сигналів з амплітудною (АМ), частотною (ЧМ) та фазовою модуляцією (ФМ), яка характеризується значенням відносної середньої квадратичної похибки, обчислюється за формулами [5]:

$$\delta_{AM}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{P_{ш}}{P_c} \right)_{\text{вх}} \cdot \frac{k_n^2}{m_{AM}^2};$$

$$\delta_{ЧМ}^2 = \frac{F_B}{\Delta f_c} \cdot \left(\frac{P_{ш}}{P_c} \right)_{\text{вх}} \cdot \frac{k_n^2}{3m_{ЧМ}^2};$$

$$\delta_{ФМ}^2 = \frac{F_B}{\Delta f_c} \cdot \left(\frac{P_{ш}}{P_c} \right)_{\text{вх}} \cdot \frac{k_n^2}{m_{ФМ}^2},$$

де $k_n^2 = \frac{x_{\text{max}}^2(t)}{x^2(t)}$ – пік-фактор повідомлення; $P_{ш}$ — потужність шуму на вході приймача; P_c — потужність сигналу на вході приймача; F_B — верхня частота спектра повідомлення; Δf_c — ширина смуги пропускання приймача; m_{AM} — індекс амплітудної модуляції $m_{ЧМ} = \Delta f_m / F_B$ — індекс частотної модуляції; Δf_m —

девіація частоти при ЧМ; $m_{\Phi M}$ — індекс фазової модуляції, при цьому $\frac{F_B}{\Delta f_c} \approx 1$.

При амплітудній модуляції ширина спектра сигналу дорівнює $\Delta f_{AM} = 2F_B$; при фазовій модуляції ширина спектра ФМ-сигналу — $\Delta f_{\Phi M} \approx 2F_B(1 + m_{\Phi M})$; при частотній модуляції ширина спектра ЧМ-сигналу — $f_{\text{ЧМ}} = 2\Delta f_m(1 + 1/m_{\text{ЧМ}}) = 2m_{\text{ЧМ}} \cdot F_B \cdot (1 + 1/m_{\text{ЧМ}})$.

При передаванні безперервних повідомлень цифровими методами середня квадратична похибка відтворення повідомлення визначається формулою

$$\delta_{\text{відтворення}}^2 = \delta_{\Sigma}^2 = \delta_D^2 + \delta_{\text{кв}}^2 + \delta_{\text{ш}}^2,$$

де δ_D^2 — середня квадратична похибка дискретизації безперервного повідомлення; $\delta_{\text{кв}}^2$ — середня квадратична похибка квантування; $\delta_{\text{ш}}^2$ — середня квадратична похибка, викликана шумами в каналі зв'язку.

Звичайно параметри системи вибирають так, щоб сумарна задана похибка передавання визначалась в основному похибками цифрового перетворення. У цьому випадку прагнуть забезпечити такі умови роботи системи, при яких виконується умова

$$\delta_{\text{ш}}^2 \leq 0,1(\delta_D^2 + \delta_{\text{кв}}^2) \text{ або } \delta_{\Sigma}^2 \leq 1,1(\delta_D^2 + \delta_{\text{кв}}^2).$$

Відносна середня квадратична шумова похибка відтворення пов'язана з імовірністю помилкового приймання символів цифрових комбінацій формулою

$$\delta_{\text{ш}}^2 = k \cdot p_e,$$

де k — коефіцієнт, величина якого залежить від характеристик, повідомлень і завад ($k = 1...4$), звичайно приймають $k = 4$.

Звідси при заданій сумарній величині відносної середньої квадратичної похибки передавання аналогових повідомлень здійснюється цифровими методами:

$$p_e \leq 0,09\delta_\Sigma^2 / k \approx 2,5 \cdot 10^{-2} \delta_\Sigma^2.$$

Залежно від виду розв'язуваних задач, типу каналу зв'язку й інших факторів величина сумарної похибки δ_Σ може вибиратися в діапазоні $10^{-1} \dots 10^{-3}$. У цьому випадку допустима ймовірність похибки на один символ при передаванні неперервних повідомлень цифровими методами перебуває в інтервалі $2,5(10^{-4} \dots 10^{-8})$.

Знаючи допустиму величину p_e при вибраних способах цифрової модуляції й обробки сигналів, можна визначити необхідне відношення сигнал/шум на вході приймального пристрою систем.

3.2. Приклади розв'язання основних типів задач

Приклад 3.1. Обчислити відносну середню квадратичну похибку при оптимальному прийманні безперервних сигналів з амплітудною модуляцією, якщо потужність сигналу на вході $P_c = 10^{-13}$ Вт, глибина модуляції $m_{AM} = 1,0$, пік-фактор повідомлення $k_n = 3$, верхня частота спектра повідомлення $F_B = 3,4$ кГц, приймач працює при температурі $t = 30$ °С.

Розв'язання. Спектральна густина нормального білого шуму обчислюється за формулою

$$N_0 = k \cdot T,$$

де $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Вт/°К×Гц — стала Больцмана; T — температура, °К.

Тоді потужність шуму, приведена до входу приймача, обчислюється за формулою

$$P_u = N_0 \cdot \Delta f_k,$$

де Δf_k – ширина смуги пропускання каналу (приймача).

При амплітудній модуляції й оптимальному прийманні

$$\Delta f_k = \Delta f_c = 2F_B = 2 \cdot 3,4 = 6,8 \text{ кГц};$$

$$P_u = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 303 \cdot 6,8 \cdot 10^3 = 2,84 \cdot 10^{-18} \text{ Вт.}$$

Остаточно квадрат середньої квадратичної похибки обчислюється за формулою

$$\delta_{AM}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{P_u}{P_c} \right)_{\text{вх}} \cdot \frac{k_n^2}{m_{AM}^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2,84 \cdot 10^{-18}}{10^{-14}} \cdot \frac{1^2}{3^2} = 1,58 \cdot 10^{-3};$$

$$\delta_{AM} = 3,97 \cdot 10^{-2} \approx 4\% .$$

Приклад 3.2. Обчислити необхідну потужність P_c АМ-сигналу на вході оптимального приймача для забезпечення середньої квадратичної похибки відтворення не більше 2 %, якщо максимальна частота спектра повідомлення $F_B = 6$ кГц, глибина модуляції $m_{AM} = 0,8$, пік-фактор повідомлення $k_n = 5$, спектральна густина завади $N_0 = 5 \cdot 10^{-21}$ Вт/Гц.

Розв'язання. Із формули

$$\delta_{AM}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{P_u}{P_c} \right)_{\text{вх}} \cdot \frac{k_n^2}{m_{AM}^2}$$

отримаємо необхідне значення P_c :

$$P_c = \frac{P_u \cdot k_n^2}{2\delta_{AM}^2 \cdot m_{AM}^2} = \frac{N_0 \cdot \Delta f_c \cdot k_n^2}{2\delta_{AM}^2 \cdot m_{AM}^2} = \frac{N_0 \cdot 2F_B \cdot k_n^2}{2\delta_{AM}^2 \cdot m_{AM}^2} =$$

$$= \frac{5 \cdot 10^{-21} \cdot 2 \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 0,8^2} = 2,93 \cdot 10^{-11} \text{ Вт.}$$

Приклад 3.3. Обчислити відносну середню квадратичну похибку відтворення повідомлення при оптимальному прийманні безперервних сигналів з частотною модуляцією, якщо потужність сигналу на вході $P_c=10^{-14}$ Вт, верхня частота спектра повідомлення $F_B = 12$ кГц, індекс частотної модуляції $m_{ЧМ} = 5$, пік-фактор повідомлення $k_n = 5$, приймач працює при температурі $t = 30$ °С.

Розв'язання. Спектральна густина нормального білого шуму обчислюється за формулою

$$N_0 = k \cdot T,$$

де $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Вт/°К×Гц — стала Больцмана; T — температура, °К.

Тоді потужність шуму, приведена до входу приймача, обчислюється за формулою

$$P_u = N_0 \cdot \Delta f_k,$$

де Δf_k – ширина смуги пропускання каналу (приймача).

При частотній модуляції й оптимальному прийманні

$$\Delta f_k = \Delta f_c = 2m_{ЧМ} \cdot F_B \cdot \left(1 + 1/m_{ЧМ}\right) = 1,44 \cdot 10^5 \text{ Гц;}$$

$$P_u = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 303 \cdot 1,44 \cdot 10^5 = 6,02 \cdot 10^{-16} \text{ Вт.}$$

Квадрат середньої квадратичної похибки відтворення має такий вигляд:

$$\delta_{\text{ЧМ}}^2 = \frac{F_B}{\Delta f_c} \cdot \left(\frac{P_{\text{ш}}}{P_c} \right)_{\text{вх}} \cdot \frac{k_n^2}{3m_{\text{ЧМ}}^2} = \frac{5^2}{3 \cdot 5^2} \cdot \frac{12 \cdot 10^3}{1,44 \cdot 10^5} \cdot \frac{6,02 \cdot 10^{-16}}{10^{-14}} = 16,7 \cdot 10^{-4};$$

$$\delta_{\text{ЧМ}} = 4,08 \cdot 10^{-2} \approx 4\%.$$

Приклад 3.4. Обчислити необхідне відношення сигнал/шум на вході оптимального приймача частотно-модульованих сигналів для забезпечення середньої квадратичної похибки відтворення повідомлень не більше 1 %, якщо максимальна частота спектра повідомлення $F_B = 10$ кГц, індекс частотної модуляції $m_{\text{ЧМ}} = 4$, пік-фактор повідомлення $k_n = 4$.

Розв'язання. Із формули

$$\delta_{\text{ЧМ}}^2 = \frac{F_B}{\Delta f_c} \cdot \left(\frac{P_{\text{ш}}}{P_c} \right)_{\text{вх}} \cdot \frac{k_n^2}{3m_{\text{ЧМ}}^2}$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} &= \frac{1}{\delta_{\text{ЧМ}}^2} \cdot \frac{F_B}{\Delta f_c} \cdot \frac{k_n^2}{3m_{\text{ЧМ}}^2} = \frac{1}{\delta_{\text{ЧМ}}^2} \cdot \frac{k_n^2}{3m_{\text{ЧМ}}^2} \cdot \frac{F_B}{2m_{\text{ЧМ}} \cdot F_B \cdot (1 + 1/m_{\text{ЧМ}})} = \\ &= \frac{1}{\delta_{\text{ЧМ}}^2} \cdot \frac{k_n^2}{6m_{\text{ЧМ}}^3 (1 + 1/m_{\text{ЧМ}})} = \frac{1}{10^{-4}} \cdot \frac{4^2}{6 \cdot 4^3 \cdot (1 + 0,25)} = 333. \end{aligned}$$

Приклад 3.5. Обчислити відносну середню квадратичну похибку відтворення повідомлення при оптимальному прийманні безперервних сигналів з фазовою модуляцією, якщо потужність сигналу на вході $P_c = 10^{-14}$ Вт, верхня частота спектра повідомлення $F_B = 10$ кГц, індекс фазової модуляції $m_{\text{ФМ}} = 4$, пік-фактор повідомлення $k_n = 4$, приймач працює при температурі $t = 30$ °С.

Розв'язання. Квадрат середньої квадратичної похибки відтворення

$$\delta_{\text{ФМ}}^2 = \frac{F_B}{\Delta f_c} \cdot \left(\frac{P_{\text{ш}}}{P_c} \right)_{\text{вх}} \cdot \frac{k_n^2}{m_{\text{ФМ}}^2}.$$

При фазовій модуляції ширина спектра сигналу дорівнює

$$\Delta f_{\Phi M} \approx 2F_B (1 + m_{\Phi M}).$$

Потужність нормального білого шуму складає

$$P_{ш} = N_0 \cdot \Delta f_k,$$

де Δf_k – ширина смуги пропускання каналу (приймача), яка при оптимальному прийманні приблизно дорівнює ширині спектра сигналу Δf_c , тобто

$$P_{ш} = k \cdot T \cdot \Delta f_c = k \cdot T \cdot 2F_B (1 + m_{\Phi M}).$$

Остаточно

$$\begin{aligned} \delta_{\Phi M}^2 &= \frac{F_B}{2F_B (1 + m_{\Phi M})} \cdot \frac{k \cdot T \cdot 2F_B (1 + m_{\Phi M})}{P_c} \cdot \frac{k_n^2}{m_{\Phi M}^2} = \\ &= \frac{k_n^2}{m_{\Phi M}^2} \cdot \frac{k \cdot T \cdot F_B}{P_c} = \frac{4^2}{4^2} \cdot \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 303}{10^{-14}} = 41,8 \cdot 10^{-4}. \\ \delta_{\Phi M} &= 6,46 \cdot 10^{-2} \approx 6,5\%. \end{aligned}$$

Приклад 3.6. Обчислити необхідну потужність P_c фазомодульованого сигналу на вході оптимального приймача для забезпечення середньої квадратичної похибки відтворення не більше 2,5 %, якщо максимальна частота спектра повідомлення $F_B = 8$ кГц, індекс фазової модуляції $m_{\Phi M} = 3$, пік-фактор повідомлення $k_n = 5$, спектральна густина завади $N_0 = 5 \cdot 10^{-21}$ Вт/Гц.

Розв'язання. Із формули

$$\delta_{\Phi M}^2 = \frac{F_B}{\Delta f_c} \cdot \left(\frac{P_{ш}}{P_c} \right)_{вх} \cdot \frac{k_n^2}{m_{\Phi M}^2}$$

отримаємо

$$\begin{aligned}
 P_c &= \frac{1}{\delta_{\Phi M}^2} \cdot \frac{F_B}{\Delta f_c} \cdot \frac{k_n^2}{m_{\Phi M}^2} \cdot P_{uu} = \\
 &= \frac{1}{\delta_{\Phi M}^2} \cdot \frac{F_B}{2F_B(1+m_{\Phi M})} \cdot \frac{k_n^2}{m_{\Phi M}^2} \cdot N_0 \cdot 2F_B(1+m_{\Phi M}) = \frac{1}{\delta_{\Phi M}^2} \cdot \frac{k_n^2}{m_{\Phi M}^2} \cdot N_0 \cdot F_B = \\
 &= \frac{1}{2,5^2 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{5^2}{3^2} \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-21} = 1,78 \cdot 10^{-13} \text{ Вт.}
 \end{aligned}$$

Приклад 3.7. Визначити необхідну потужність сигналу P_c на вході приймача, якщо каналом зв'язку здійснюється цифрове передавання безперервних повідомлень із використанням амплітудної модуляції і некогерентного приймання. Верхня частота спектра передаваних мовних повідомлень $F_B = 3,4$ кГц, число рівнів квантування $M = 256$, задана відносна середня квадратична похибка відтворення повідомлень $\delta = 5\%$, шумова температура приймача $T = 300$ °К.

Розв'язання. Виходячи з формули, яка пов'язує середню квадратичну похибку відтворення повідомлень з допустимою ймовірністю помилкового приймання одного символу цифрового повідомлення, визначимо її:

$$p_e \approx 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot \delta^2 = 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 5^2 \cdot 10^{-4} = 6,25 \cdot 10^{-5}.$$

Необхідну потужність сигналу на вході некогерентного приймача АМ-сигналів знайдемо із формули, яка пов'язує допустиму ймовірність помилки з необхідним відношенням сигнал/шум:

$$\begin{aligned}
 p_e &= 0,5 \cdot \exp\left(-\frac{q^2}{4}\right); \quad q^2 = 4 \cdot \ln\left(\frac{1}{2 \cdot p_e}\right); \quad \frac{P_c}{P_{uu}} = 4 \cdot \ln\left(\frac{1}{2 \cdot p_e}\right); \\
 P_c &= 4 \cdot \ln\left(\frac{1}{2 \cdot p_e}\right) \cdot P_{uu} = 4 \cdot \ln\left(\frac{1}{2 \cdot p_e}\right) \cdot k \cdot T \cdot \Delta f_k.
 \end{aligned}$$

При амплітудній модуляції

$$\Delta f_k = 1,2 \cdot B,$$

де B – швидкість модуляції, що визначається формулою:

$$B = F_{\text{дискр}} \cdot n,$$

де n – кількість розрядів у кодовій комбінації цифрового сигналу:

$$n = \log_2 M, \quad F_{\text{дискр}} = 2,5 \cdot F_B.$$

Таким чином, остаточна розрахункова формула:

$$\begin{aligned} P_c &= 4 \cdot \ln\left(\frac{1}{2 \cdot p_e}\right) \cdot k \cdot T \cdot 1,2 \cdot 2,5 \cdot F_B \cdot \log_2 M = \\ &= 4 \cdot \ln\left(\frac{1}{2 \cdot 6,25 \cdot 10^{-5}}\right) \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 303 \cdot 3 \cdot 3,4 \cdot 10^3 \cdot \log_2 256 = 1,23 \cdot 10^{-14} \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Приклад 3.8. Визначити необхідну потужність сигналу на вході приймача, якщо каналом зв'язку здійснюється цифрове передавання безперервних повідомлень з використанням частотної модуляції і некогерентного приймання. Верхня частота спектра передаваних повідомлень $F_B = 5$ кГц, число рівнів квантування $M = 128$, задана відносна середня квадратична похибка відтворення повідомлень $\delta = 6\%$, спектральна густина шуму $N_0 = 5 \cdot 10^{-21}$ Вт/Гц.

Розв'язання. Необхідне відношення сигнал/шум на вході приймача визначається з формули

$$p_e = 0,5 \cdot \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right); \quad q^2 = 2 \cdot \ln\left(\frac{1}{2 \cdot p_e}\right).$$

Потужність сигналу на вході приймача становить

$$P_c = 2 \cdot \ln\left(\frac{1}{2 \cdot p_e}\right) \cdot P_u,$$

де

$$\begin{aligned} P_u &= N_0 \cdot \Delta f_k = N_0 \cdot 2,2 \cdot B = N_0 \cdot 2,2 \cdot 2,5 \cdot F_B \cdot \log_2 M = \\ &= 5 \cdot 10^{-21} \cdot 2,2 \cdot 2,5 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 7 = 9,62 \cdot 10^{-16} \text{ Вт.} \end{aligned}$$

Допустима ймовірність помилки на один символ цифрового сигналу дорівнює

$$p_e = 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot \delta^2 = 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 6^2 \cdot 10^{-4} = 9 \cdot 10^{-5}.$$

Остаточно

$$P_c = 2 \cdot \ln\left(\frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-5}}\right) \cdot 9,62 \cdot 10^{-16} = 1,65 \cdot 10^{-14} \text{ Вт.}$$

Приклад 3.9. Визначити необхідну потужність сигналу на вході приймача, якщо каналом зв'язку здійснюється цифрове передавання неперервних повідомлень з використанням відносної фазової модуляції і приймання методом порівняння фаз. Верхня частота спектра передаваних повідомлень $F_B = 6$ кГц, число рівнів квантування $M = 256$, задана відносна середня квадратична похибка відтворення повідомлень $\delta = 7\%$, спектральна густина шуму $N_0 = 6 \cdot 10^{-21}$ Вт/Гц.

Розв'язання. Аналогічно до обчислень у прикладах 3.7 і 3.8 потужність сигналу на вході приймача така:

$$P_c = \ln\left(\frac{1}{2p_e}\right) \cdot N_0 \cdot 1,2 \cdot 2,5 \cdot F_B \cdot \log M ;$$

$$p_e = 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot \delta^2 = 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 7^2 \cdot 10^{-4} = 1,22 \cdot 10^{-4}.$$

$$P_c = \ln\left(\frac{1}{2 \cdot 1,22 \cdot 10^{-4}}\right) \cdot 6 \cdot 10^{-21} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot \log 256 = 7,17 \cdot 10^{-15} \text{ Вт.}$$

Приклад 3.10. Системою радіозв'язку необхідно передавати мовний сигнал з верхньою частотою спектра $F_B = 3,4$ кГц і відносною середньою квадратичною похибкою відтворення 3 %. Пік-фактор мовного сигналу $k_n = 3$. Визначити і зіставити необхідну потужність сигналу P_c на вході приймача, у якому завадою є нормальний білий шум, зі спектральною густиною потужності $N_0 = 5 \cdot 10^{-21}$ Вт/Гц з використанням таких методів передавання:

1) амплітудна модуляція з коефіцієнтом глибини модуляції $m_{AM} = 1$;

2) вузькосмугова частотна модуляція з індексом модуляції $m_{ЧМ} = 1$;

3) вузькосмугова фазова модуляція з індексом модуляції $m_{ФМ} = 1$;

4) цифрова модуляція ІКМ-АМ з числом рівнів квантування мовного сигналу $M = 256$ і вузькосмуговим некогерентним прийманням;

5) цифрова модуляція ІКМ-ЧМ з числом рівнів квантування мовного сигналу $M = 256$ і вузькосмуговим некогерентним прийманням;

6) цифрова модуляція ІКМ-ВФМ з числом рівнів квантування $M = 256$ і вузькосмуговим прийманням методом порівняння фаз.

Розв'язання. Обчислення в цій задачі виконуються з використанням формул, отриманих під час розв'язання прикладів 3.1–3.9.

1) амплітудна модуляція:

$$P_c = \frac{N_0 \cdot F_B \cdot k_n^2}{\delta^2 \cdot m_{AM}^2} = \frac{5 \cdot 10^{-21} \cdot 3,4 \cdot 10^3 \cdot 3^2}{3,2 \cdot 10^{-4} \cdot 1^2} = 1,7 \cdot 10^{-13} \text{ Вт};$$

2) частотна модуляція:

$$P_c = \frac{k_n^2 \cdot N_0 \cdot F_B}{\delta^2 \cdot 3m_{ЧМ}^2} = \frac{3^2 \cdot 5 \cdot 10^{-21} \cdot 3,4 \cdot 10^3}{3^2 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 1^2} = 0,57 \cdot 10^{-13} \text{ Вт};$$

3) фазова модуляція:

$$P_c = \frac{k_n^2 \cdot N_0 \cdot F_B}{\delta^2 \cdot m_{\Phi M}^2} = \frac{3^2 \cdot 5 \cdot 10^{-21} \cdot 3,4 \cdot 10^3}{3^2 \cdot 10^{-4} \cdot 1^2} = 1,7 \cdot 10^{-13} \text{ Вт};$$

4) цифрова модуляція ІКМ-АМ:

$$P_c = 4 \ln \left(\frac{1}{2p_e} \right) \cdot p_{uu},$$

де

$$p_e = 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot \delta^2 = 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 3^2 \cdot 10^{-4} = 2,25 \cdot 10^{-5};$$

$$P_{uu} = N_0 \cdot \Delta f_k = N_0 \cdot 1,2B = N_0 \cdot 1,2 \cdot 2,5 \cdot F_B \cdot \log M = 3N_0 \cdot F_B \cdot \log M = \\ = 3 \cdot 5 \cdot 10^{-21} \cdot 3,4 \cdot 10^3 \cdot \log 256 = 4,08 \cdot 10^{-16} \text{ Вт};$$

$$P_c = 4 \cdot 10 \cdot 4,08 \cdot 10^{-16} = 1,63 \cdot 10^{-14} \text{ Вт};$$

5) цифрова модуляція ІКМ-ЧМ:

$$P_c = 2 \ln \left(\frac{1}{5 \cdot 10^{-2} \cdot \delta^2} \right) \cdot 5,5 \cdot N_0 \cdot F_B \cdot \log M = \\ = 2 \cdot 10 \cdot 5,5 \cdot 5 \cdot 10^{-21} \cdot 3,4 \cdot 10^3 \cdot \log 256 = 1,5 \cdot 10^{-14} \text{ Вт};$$

6) цифрова модуляція ІКМ-ВФМ:

$$P_c = 2 \ln \left(\frac{1}{5 \cdot 10^{-2} \cdot \delta^2} \right) \cdot 3 \cdot N_0 \cdot F_B \cdot \log M = \\ = 10 \cdot 3,5 \cdot 10^{-21} \cdot 3,4 \cdot 10^3 \cdot \log 256 = 0,4 \cdot 10^{-14} \text{ Вт}.$$

3.3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 3.1. Обчислити відносну середню квадратичну похибку δ відтворення повідомлень при оптимальному прийманні безперервних сигналів з амплітудною модуляцією,

якщо задані потужність сигналу на вході приймача P_c , спектральна густина шуму N_0 , верхня частота спектра повідомлення F_B , пік-фактор повідомлення k_n і глибина модуляції m_{AM} (табл. 13).

Таблиця 13

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_c \cdot 10^{-13}$, Вт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N_0 \cdot 10^{-21}$, Вт/Гц	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
F_B , кГц	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
k_n	2	2,5	3	3,5	4	5	4,5	4	3,5	3
m_{AM}	1,0	0,95	0,9	0,85	0,8	0,75	0,8	0,9	0,95	1,0

Задача 3.2. Обчислити відносну середню квадратичну похибку δ відтворення повідомлень при оптимальному прийманні безперервних сигналів з частотною модуляцією, якщо задані потужність сигналу на вході приймача P_c , спектральна густина шуму N_0 , верхня частота спектра повідомлення F_B , пік-фактор повідомлення k_n і глибина модуляції $m_{ЧМ}$ (табл. 14).

Таблиця 14

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_c \cdot 10^{-13}$, Вт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N_0 \cdot 10^{-21}$, Вт/Гц	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
F_B , кГц	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
k_n	2	2,5	3	3,5	4	5	4,5	4	3,5	3
$m_{ЧМ}$	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	4,5

Задача 3.3. Обчислити відносну середню квадратичну похибку δ відтворення повідомлень при оптимальному

прийманні безперервних сигналів з фазовою модуляцією, якщо задані потужність сигналу на вході приймача P_c , спектральна густина шуму N_0 , верхня частота спектра повідомлення F_B , пік-фактор повідомлення k_n і глибина модуляції $m_{\Phi M}$ (табл. 15).

Таблиця 15

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_c \cdot 10^{-13}$, Вт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N_0 \cdot 10^{-21}$, Вт/Гц	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
F_B , кГц	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
k_n	2	2,5	3	3,5	4	5	4,5	4	3,5	3
$m_{\Phi M}$	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	4,5

Задача 3.4. Обчислити відносну середню квадратичну похибку δ відтворення повідомлень при первинному аналого-цифровому перетворенні з числом рівнів квантування M , якщо задані потужність сигналу на вході приймача P_c , спектральна густина шуму N_0 , верхня частота спектра повідомлення F_B (табл. 16). Модуляція сигналу амплітудна. Приймання вузькосмугове некогерентне.

Таблиця 16

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_c \cdot 10^{-13}$, Вт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N_0 \cdot 10^{-21}$, Вт/Гц	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
F_B , кГц	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
M	128	256	128	256	128	256	128	256	128	256

Задача 3.5. Обчислити відносну середню квадратичну похибку δ відтворення повідомлень при первинному аналого-цифровому перетворенні з числом рівнів квантування M , якщо

задані потужність сигналу на вході приймача P_c , спектральна густина шуму N_0 , верхня частота спектра повідомлення F_B (табл. 16). Модуляція сигналу частотна. Приймання вузькосмугове некогерентне.

Задача 3.6. Обчислити відносну середню квадратичну похибку δ відтворення повідомлень при первинному аналого-цифровому перетворенні з числом рівнів квантування M , якщо задані потужність сигналу на вході приймача P_c , спектральна густина шуму N_0 , верхня частота спектра повідомлення F_B (табл. 16). Модуляція сигналу фазова. Приймання вузькосмугове методом порівняння фаз.

Задача 3.7. Визначити необхідну потужність сигналу P_c на вході оптимального приймача амплітудно-модульованих сигналів, якщо задані верхня частота передаваного повідомлення F_B , пік-фактор повідомлення k_n , глибина модуляції m_{AM} , середня квадратична похибка відтворення δ . Спектральна густина нормального білого шуму в тракці приймача N_0 (табл. 17).

Таблиця 17

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\delta, \%$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N_0 \cdot 10^{-21}, \text{Вт/Гц}$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$F_B, \text{кГц}$	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
k_n	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	4,5	4	3,5
m_{AM}	1,0	0,95	0,9	0,85	0,8	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95

Задача 3.8. Визначити необхідну потужність сигналу P_c на вході оптимального приймача частотно-модульованих сигналів, якщо задані верхня частота передаваного повідомлення F_B , пік-фактор повідомлення k_n , глибина модуляції $m_{ЧМ}$, середня квадратична похибка відтворення δ . Спектральна густина нормального білого шуму в тракці приймача N_0 (табл. 18).

Таблиця 18

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
δ , %	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N_0 \cdot 10^{-21}$, Вт/Гц	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
F_B , кГц	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
k_n	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	4,5	4	3,5
$m_{\text{ЧМ}}$	1,0	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	4,5

Задача 3.9. Визначити необхідну потужність сигналу P_c на вході оптимального приймача фазо-модульованих сигналів, якщо задані верхня частота передаваного повідомлення F_B , пік-фактор повідомлення k_n , глибина модуляції $m_{\text{ЧМ}}$, середня квадратична похибка відтворення δ . Спектральна густина нормального білого шуму в тракці приймача N_0 (табл. 19).

Таблиця 19

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
δ , %	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N_0 \cdot 10^{-21}$, Вт/Гц	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
F_B , кГц	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
k_n	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	4,5	4	3,5
$m_{\text{ФМ}}$	1,0	1,5	2	2,5	3	3	2,5	2	1,5	1,0

Задача 3.10. Визначити необхідну потужність сигналу P_c на вході оптимального приймача цифрового сигналу з амплітудною модуляцією, якщо задані верхня частота передаваного повідомлення F_B , число рівнів квантування M , середня квадратична похибка відтворення δ . Спектральна густина нормального білого шуму в тракці приймача N_0 (табл. 20).

Таблиця 20

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\delta, \%$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N_0 \cdot 10^{-21}, \text{Вт/Гц}$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$F_B, \text{кГц}$	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
M	128	256	128	256	128	256	128	256	128	256

Задача 3.11. Визначити необхідне відношення сигнал/шум на вході оптимального приймача АМ-сигналів, якщо задані значення відносної середньої квадратичної похибки відтворення безперервних повідомлень δ , пік-фактор повідомлення k_n і коефіцієнт глибини модуляції m_{AM} (табл. 21).

Таблиця 21

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
δ	0,1	0,05	0,01	0,1	0,05	0,01	0,1	0,05	0,01	0,1
k_n	$\sqrt{2}$	2	2,5	3	3,5	$\sqrt{2}$	2	2,5	3	3,5
m_{AM}	1	0,9	0,8	1	0,9	0,8	1	0,9	0,8	1

Задача 3.12. Визначити необхідне відношення сигнал/шум на вході оптимального приймача ЧМ-сигналів, якщо задані значення відносної середньої квадратичної похибки відтворення безперервних повідомлень δ , пік-фактор повідомлення k_n та індекс частотної модуляції $m_{ЧМ}$ (табл. 22).

Таблиця 22

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
δ	0,1	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01
k_n	3,5	3	2,5	2	$\sqrt{2}$	3,5	3	2,5	2	$\sqrt{2}$
$m_{ЧМ}$	6	5	4	3	2	6	5	4	3	2

Задача 3.13. Визначити необхідне відношення сигнал/шум на вході оптимального приймача ФМ-сигналів, якщо задані значення відносної середньої квадратичної похибки відтворення безперервних повідомлень δ , пік-фактор повідомлення k_n та індекс фазової модуляції $m_{\text{ФМ}}$ (табл. 23).

Таблиця 23

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
δ	0,1	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
k_n	3,5	3	2,5	2	$\sqrt{2}$	3,5	3	2,5	2	$\sqrt{2}$
$m_{\text{ФМ}}$	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6

Контрольні питання

1. Що є критерієм близькості переданого та прийнятого безперервних повідомлень?
2. Приймання безперервних повідомлень. Критерії якості і правила приймання безперервних повідомлень.
3. Знаходження оптимальної оцінки окремих параметрів безперервного повідомлення. Критерій максимуму апостеріорної щільності ймовірностей, критерій мінімальної середньоквадратичної похибки, критерій середнього ризику.
4. Структурні схеми демодуляторів при прийманні безперервних повідомлень.
5. Завадостійкість систем зв'язку за оптимального прийманні безперервних повідомлень.

4. ПЕРЕДАВАННЯ І ПРИЙМАННЯ СИГНАЛІВ У СИСТЕМАХ ПЕРЕДАЧІ ДИСКРЕТНИХ ПОВІДОМЛЕНЬ

4.1. Короткі теоретичні відомості

Передавання повідомлень супроводжується дією завад і спотворень, обумовлених неідеальністю характеристик системи зв'язку. Тому прийняте повідомлення може відрізнитися від переданого. Ступінь відповідності прийнятого повідомлення переданому називається **вірогідністю (точністю) або достовірністю передавання**.

При передаванні дискретних повідомлень цю відповідність кількісно можна оцінити відношенням кількості помилково прийнятих елементів повідомлення $n_{ном}$ до загальної кількості переданих елементів $n_{заг}$:

$$k_{ном} = n_{ном} / n_{заг}.$$

Це відношення називається **частістю помилок (коефіцієнтом помилок)**. При обмеженому часі передавання (кінцевому числі $n_{заг}$) величина $k_{ном}$ випадкова. Якщо загальний час передавання інформації (тривалість сеансу зв'язку) значно перевищує тривалість передавання окремого елемента, а умови передавання залишаються незмінними, то статистичні характеристики випадкової величини $k_{ном}$ дуже стійкі, тобто їх зміни від сеансу до сеансу незначні. Тому в першому наближенні величину $k_{ном}$ можна вважати близькою до ймовірності помилки приймання елемента повідомлення p_e . Оцінка вірогідності передавання дискретних повідомлень імовірністю p_e широко використовується завдяки своїй простоті та зручності. Однак необхідно пам'ятати, що цей показник є ідеалізованим та умови його застосування не завжди строго виконуються.

Для оцінки завадостійкості систем дискретного зв'язку застосовують різноманітні критерії. Найпоширенішим є критерій, згідно з яким завадостійкість оцінюється необхідним відношенням середніх потужностей сигналу і завади на вході

приймача системи $q_{\text{ex}}^2 = (P_c / P_z)_{\text{ex}}$, яке забезпечує задану ймовірність помилки приймання p_e . Чим менша необхідна величина q_{ex}^2 , тим вища завадостійкість системи.

Кількісна оцінка завадостійкості системи зв'язку і порівняння різноманітних систем за цим показником здійснюється за допомогою залежності

$$p_e = f(q_{\text{ex}}^2),$$

яка функціонально пов'язує ймовірність помилки приймання інформації з величиною відношення потужностей сигналу і завади на вході приймача q_{ex}^2 .

Конкретний вигляд цих співвідношень визначається видом сигналу, видом завад, способом модуляції, способом приймання та іншими факторами.

Найпростіший вигляд формули мають за умови приймання сигналу на фоні нормального білого шуму.

Для передачі дискретних повідомлень широко застосовуються такі види модуляції, як амплітудна (АМ), частотна (ЧМ) і фазова (ФМ).

Правильний вибір виду модуляції суттєво впливає на якість передачі даних і на ефективність використання смуги пропускання каналу зв'язку. Найбільш ефективно використання смуги пропускання каналу зв'язку і якісну передачу даних забезпечує фазова модуляція. На практиці використовується відносна фазова модуляція (ВФМ).

З метою збільшення швидкості передачі даних в обмеженій смузі пропускання каналу застосовуються різноманітні багатократні способи модуляції: двократна (ДВФМ) і трикратна відносна фазова модуляція (ТВФМ), багаторівнева АМ, комбінована АМ-ФМ (КАМ) (без зміни тривалості посилок у каналі зв'язку, а таким чином, без розширення смуги пропускання каналу зв'язку).

Порівняння спектрів сигналів за умов використання різних видів модуляції свідчить, що спектри АМ- і ФМ-сигналів займають одну й ту ж ефективну смугу частот, а ширина спектра ЧМ-сигналу залежить від індексу модуляції і взагалі дещо ширша

від спектрів АМ і ФМ. При існуючих способах приймання і реєстрації сигналів ефективна ширина спектра сигналу, при якій забезпечується якісне приймання, визначається співвідношеннями:

$$\Delta f_{cAM} = \Delta f_{cФМ} = \Delta f_{cBФМ} = (1,1\dots1,2)B;$$

$$\Delta f_{cЧМ} = (2,2\dots2,4)B; \quad \Delta f_{cДВФМ} = (0,5\dots0,6)B.$$

При виборі виду модуляції необхідно забезпечити виконання умов:

$$\Delta f_c \leq \Delta f_k \text{ та } p_e \leq p_{e\text{доп}},$$

де Δf_c та Δf_k – ефективна ширина спектра сигналу і смуга пропускання каналу відповідно; p_e і $p_{e\text{доп}}$ – імовірність помилки при обраному способі модуляції та допустиме (потрібне) значення ймовірності помилки відповідно, які визначають вірогідність передавання.

Вираз для ймовірності помилки в каналі з постійними параметрами і потенційною завадостійкістю має вигляд

$$p_e = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{E_1 + E_0 - 2\rho\sqrt{E_1E_0}}{2N_0}} \right) \right],$$

де $\Phi(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^\alpha e^{-t^2/2} dt$ – функція Крампа; E_1 та E_0 – енергія відповідно посилок $S_1(t)$ та $S_0(t)$; ρ – коефіцієнт кореляції між сигналами $S_1(t)$ та $S_0(t)$. Табульовані значення функції Крампа

$\Phi(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^\alpha e^{-t^2/2} dt$ наведено у дод. 1.

У випадках частотної та фазової модуляцій $E_1 = E_0$, у випадку амплітудної – енергія однієї з посилок дорівнює нулю. Таким чином, за умов використання амплітудної, частотної та фазової модуляцій вирази для ймовірності помилок мають вигляд:

$$p_{eAM} = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}} \right) \right];$$

$$p_{eЧМ} = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{E}{N_0}} \right) \right];$$

$$p_{eФМ} = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} \right) \right].$$

Для реалізації потенційної завадостійкості необхідно забезпечити:

1) ідеальне (з точки зору забезпечення максимального відношення вихідних потужностей сигналу і завад) узгодження характеристик каналу зв'язку з параметрами сигналу;

2) когерентне приймання.

Якщо ідеального узгодження характеристик каналу зв'язку з параметрами сигналу немає, але приймання когерентне, то вирази для ймовірності помилки при використанні амплітудної, частотної і фазової модуляцій у каналі з постійними параметрами відповідно дорівнюють:

$$p_{e\text{ког}AM} = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\frac{q}{\sqrt{2}} \right) \right];$$

$$p_{e\text{ког}ЧМ} = 0,5 \left[1 - \Phi(q) \right];$$

$$p_{e\text{ког}ФМ} = 0,5 \left[1 - \Phi(\sqrt{2q}) \right],$$

де q – відношення ефективних напруг сигналу і завади. Як показано в [3], максимальне значення

$$q_{opt}^2 = h^2 = 0,5 \frac{E}{N_0}.$$

Це пояснюється тим, що дискретні сигнали прямують безперервно один за одним, тому завадостійкість знижується

внаслідок дії остаточних коливань від попередніх елементів, обумовлених перехідними процесами в приймальному тракті.

Через труднощі реалізації когерентного приймання при використанні амплітудної і частотної модуляції на практиці найбільшого поширення набуло некогерентне приймання.

Імовірність помилки в цьому випадку дорівнює:

а) при амплітудній модуляції

$$p_{eAM} = 0,5 \exp(-q^2/4);$$

б) при частотній модуляції

$$p_{eЧМ} = 0,5 \exp(-q^2/2).$$

Через труднощі формування на приймальній стороні опорної напруги фазова модуляція, як правило, не застосовується. Широко застосовується відносна фазова модуляція (ВФМ). Імовірність помилки при застосуванні ВФМ дорівнює:

а) ВФМ-1 (приймання методом порівняння фаз)

$$p_{eВФМ-1} = 0,5 \exp(-q^2);$$

б) ВФМ-2 (приймання методом порівняння полярностей)

$$p_{eВФМ-2} = 0,5 \left[1 - \Phi(\sqrt{2q}) \right].$$

Для підвищення пропускну здатності на практиці застосовують багатократні методи модуляції, з яких найпоширенішими є двократна частотна модуляція (ДЧМ) і двократна відносна фазова модуляція (ДВФМ).

Імовірність помилки в каналі з постійними параметрами при використанні ДЧМ дорівнює:

а) приймання когерентне

$$p_{e\text{ког ДЧМ}} = 1 - \Phi(q^2);$$

б) приймання некогерентне

$$P_{e \text{ неког ДЧМ}} = \exp(-q^2/2) + \frac{1}{6} \exp(-3q^2/4) - \frac{2}{3} \exp(-2q^2/3).$$

Ймовірність помилки в каналі з постійними параметрами при використанні ДВФМ і прийманні методом порівняння полярностей дорівнює

$$P_{e \text{ ДВФМ}} = 0,5[1 - \Phi(q)].$$

У каналі з релеївськими завмираннями ймовірність помилки для зазначених вище видів модуляції дорівнює:

а) когерентна АМ

$$P_{e \text{ ког АМ}} = 0,5 \left[1 - \left(\sqrt{\frac{q^2}{4 + q^2}} \right) \right];$$

некогерентна АМ

$$P_{e \text{ неког АМ}} = 0,5 \left[1 - \exp(-2q^2) + \exp\left(-\sqrt{\frac{4q^2}{1 + q^2}}\right) \right];$$

б) когерентна ЧМ

$$P_{e \text{ ког ЧМ}} = 0,5 \left[1 - \left(\sqrt{\frac{q^2}{2 + q^2}} \right) \right];$$

некогерентна ЧМ

$$P_{e \text{ неког ЧМ}} = \frac{1}{2 + q^2};$$

в) ФМ

$$P_{e\Phi M} = 0,5 \left[1 - \left(\sqrt{\frac{q^2}{1+q^2}} \right) \right];$$

г) ВФМ-1 – приймання методом порівняння фаз

$$P_{e\text{ВФМ-1}} = \frac{1}{2(1+q^2)};$$

ВФМ-2 – приймання методом порівняння полярностей

$$P_{e\text{ВФМ-2}} = \frac{1}{2+3q^2}.$$

Для підвищення швидкості передавання інформації вузькосмуговими каналами застосовуються багатопозиційні сигнали.

Системи, у яких використовується код з основою m , називаються *багатопозиційними*. Робота приймача в таких системах полягає у розрізненні m сигналів, відповідних m позиціям коду. Схему приймача можна уявити собі складеною з m каналів (віток), кожна з яких розрахована на приймання певного сигналу. При $m > 2$ формули для обчислення ймовірностей помилок здебільшого не можуть бути отримані аналітичними методами, ймовірності помилок можуть бути визначені тільки числовими методами. При відносно великих значеннях відношення сигналу до завади ($q > 1$) наявні асимптотичні вирази для обчислення ймовірності помилки, які можна отримати шляхом множення формул для двійкових сигналів на $(m-1)$.

Таким чином, загальні формули, що визначають імовірність помилки в багатопозиційних системах зв'язку, можна записати у такий спосіб:

- при когерентному прийманні

$$P_{e\text{ког}} \approx \frac{m-1}{2} [1 - \Phi(\alpha)],$$

- при некогерентному прийманні

$$AM_n \quad p_e \approx \frac{m-1}{2} \exp\left(-\frac{q_{\text{вх}}^2}{4}\right);$$

$$ЧМ_n \quad p_e \approx \frac{m-1}{2} \exp\left(-\frac{q_{\text{вх}}^2}{2}\right);$$

$$ВФМ_n \quad p_e \approx \frac{m-1}{2} \exp(-q_{\text{вх}}^2).$$

4.2. Приклади розв'язання основних типів задач

Приклад 4.1. Визначити необхідне відношення сигнал/шум q^2 на вході демодулятора цифрової радіосистеми передавання інформації за заданою ймовірністю помилки на один символ $p_e = 2 \cdot 10^{-4}$, якщо реалізується оптимальне когерентне приймання нефлюктувальних сигналів з амплітудною (AM_n), частотною ($ЧМ_n$) та фазовою ($ФМ_n$) маніпуляціями.

Розв'язання. Необхідне відношення сигнал/шум визначають із загальної формули

$$p_e = 0,5[1 - \Phi(\alpha)], \quad \alpha^2 = k_c q^2, \quad \Phi(\alpha) = \\ = 1 - 2p_e = 1 - 2 \cdot 10^{-4} = 0,9998, \quad \alpha = 3,70;$$

де $\Phi(\alpha)$ – табульована функція Крампа; $k_c=2$ при $ФМ_n$, $k_c=1$ при $ЧМ_n$, $k_c=0,5$ при AM_n .

$$AM_n \quad \sqrt{\frac{q^2}{2}} = 3,70; \quad q^2 = \alpha^2 / k_c = 3,7^2 / 0,5 = 27,25 = 14,4 \text{ дБ};$$

$$ЧМ_n \quad \sqrt{q^2} = 3,70; \quad q^2 = \alpha^2 / k_c = 3,7^2 / 1 = 13,70 = 11,4 \text{ дБ};$$

$$ФМ_n \quad \sqrt{2q^2} = 3,70; \quad q^2 = \alpha^2 / k_c = 3,7^2 / 2 = 6,86 = 8,4 \text{ дБ}.$$

Приклад 4.2. Визначити необхідне відношення сигнал/шум q^2 на вході оптимального некогерентного демодулятора нефлуктувальних сигналів з амплітудною і частотною маніпуляціями, якщо задана ймовірність помилки на один символ $p_e = 10^{-4}$.

Розв'язання. Необхідне відношення сигнал/шум визначають із загальної формули:

$$p_e = 1/2 \exp(-k_c q^2), \quad k_c = 1/4 \text{ при } AM_n, \quad k_c = 1/2 \text{ при } ЧМ_n;$$

$$q^2 = (1/k_c) \ln[1/(2p_e)];$$

$$AM_n \quad q^2 = 4 \ln(5 \cdot 10^3) = 34,06 = 15,34 \text{ дБ};$$

$$ЧМ_n \quad q^2 = 2 \ln(5 \cdot 10^3) = 17,03 = 12,34 \text{ дБ}.$$

Приклад 4.3. Визначити необхідне відношення сигнал/шум q^2 на вході демодулятора автокореляційного приймача нефлуктувальних сигналів з відносною фазовою маніпуляцією, якщо задана ймовірність помилки на один символ $p_e = 10^{-4}$.

Розв'язання. Необхідне відношення сигнал/шум знайдемо з формули

$$p_e = \frac{1}{2} \exp(-q^2); \quad q^2 = \ln \frac{1}{2p_e} = \ln(5 \cdot 10^3) = 8,51 = 9,3 \text{ дБ}.$$

Приклад 4.4. Цифрова радіосистема призначена для передавання повідомлень дискретного джерела з ємністю алфавіту M . У системі використовуються рівномірне двійкове кодування, частотна маніпуляція і некогерентний метод приймання сигналів. Амплітудних флуктуацій сигналу немає. Задана ймовірність помилкового приймання повідомлень $p_{ном}$. Зіставити необхідні відношення сигнал/шум при передаванні повідомлень натуральним двійковим та завадостійким блочним кодом, який виправляє окремі помилки. $M = 100$, $p_{ном} = 10^{-6}$.

Розв'язання. При кодуванні натуральним двійковим кодом комбінація складається тільки з інформаційних символів і її

довжина $n = k = \log_2 M = 7$. Допустиму ймовірність помилкового приймання одного символу p_e визначаємо з формули

$$p_{ном} = 1 - (1 - p_e)^n \approx np_e, \quad p_e = p_{ном} / n = 10^{-6} / 7 = 1,47 \cdot 10^{-7}.$$

Необхідне відношення сигнал/шум знаходимо з формули

$$p_e = \frac{1}{2} \exp(-q^2 / 2), \quad q_1^2 = 2 \ln \left(\frac{1}{2p_e} \right) = 30,07 = 14,8 \text{ дБ.}$$

При кодуванні завадостійким кодом кількість контрольних символів r , яка визначається з формули $2^r - 1 \geq k + r$, дорівнює 4. Довжина кодової комбінації $n = 7 + 4 = 11$. Допустиму ймовірність помилки на один символ визначаємо з формули

$$p_e = \sqrt{\frac{p_{ном}}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{10^{-6}}{11 \cdot 10}} = 9,5 \cdot 10^{-5}.$$

Необхідне відношення сигнал/шум дорівнює

$$q_2^2 = 2 \ln \left(\frac{1}{2 \cdot 9,5 \cdot 10^{-5}} \right) = 17,13 = 12,3 \text{ дБ.}$$

Отже, вигравш у відношенні сигнал/шум і потужності радіопередавача складає

$$q_1^2 - q_2^2 = 14,8 - 12,3 = 2,5 \text{ дБ.}$$

Приклад 4.5. Визначити необхідний коефіцієнт збільшення потужності радіопередавача при передаванні сигналів каналом з повільними релеївськими завмираннями порівняно з каналом з постійними параметрами, якщо використовується некогерентне приймання частотно-модульованих сигналів при середньому значенні ймовірності помилки на один символ $p_e = 10^{-4}$.

Розв'язання. Відповідно до розв'язку прикладу 4.2 при некогерентному прийманні нефлуктувальних ЧМ-сигналів, якщо $p_e = 10^{-4}$ відношення сигнал/шум $q^2 = 17,03 = 13,3$ дБ.

Для каналу з релєївськими завмираннями знайдемо відношення сигнал/шум $\overline{q^2}$ з формули

$$\overline{p_e} = \frac{1}{2 + \overline{q^2}}, \quad \overline{q^2} = \frac{1 - 2\overline{p_e}}{\overline{p_e}} \approx \frac{1}{\overline{p_e}} = \frac{1}{10^{-4}} = 10^4 = 40 \text{ дБ.}$$

Таким чином, потужність передавача необхідно збільшити у $\overline{q^2} / q^2 = 10000 / 17,03 = 587$ разів, або на 27,7 дБ.

Приклад 4.6. У цифровій радіосистемі передавання інформації каналом з релєївськими завмираннями застосовується некогерентне приймання частотно-маніпульованих сигналів. Визначити енергетичний вигравш при рознесеному прийманні й автовиборі вітки з найбільш потужним сигналом порівняно з одиничним прийманням, якщо задана середня ймовірність похибки на один символ $\overline{p_e} = 10^{-4}$ і кількість віток рознесення $n = 2$.

Розв'язання. Середня ймовірність помилки при n -кратному рознесенні визначається формулою

$$\overline{p_{en}} = n! / \left(2 \prod_{i=1}^n \left(i + \overline{q^2} / 2 \right) \right).$$

$$n = 1, \quad \overline{p_{e1}} = \frac{1}{2 + \overline{q^2}}, \quad \overline{q^2} \approx \frac{1}{\overline{p_{e1}}} = 10^4 = 40 \text{ дБ};$$

$$n = 2, \quad \overline{p_{e2}} = \frac{2!}{2 \left(1 + \overline{q^2} / 2 \right) \left(2 + \overline{q^2} / 2 \right)} = \frac{1}{2 + 3 \left(\overline{q^2} / 2 \right) + \left(\overline{q^2} / 2 \right)^2};$$

$$\left(\overline{q^2} / 2 \right)^2 + 3 \left(\overline{q^2} / 2 \right) + 2 = \frac{1}{\overline{p_{e2}}} = 10^4;$$

$$\left(\overline{q^2} / 2 \right)^2 + 3 \left(\overline{q^2} / 2 \right) - 10000 = 0, \quad \overline{q^2} / 2 \approx 100, \quad \overline{q^2} = 200 = 23 \text{ дБ.}$$

Отже, при використанні двократного рознесення можна зменшити потужність радіопередавача в 50 разів, або на 17 дБ.

Приклад 4.7. Обчислити потрібне значення відношення сигнал/завада на вході ідеального когерентного приймача 20 ортогональних сигналів, якщо необхідно забезпечити ймовірність p_e помилкового розрізнення сигналів не гірше 10^{-4} .

Розв'язання. При ідеальному когерентному прийманні m -ортогональних сигналів ймовірність помилки розрізнення виражається формулою

$$p_e \approx \frac{m-1}{2} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{E}{N_0}} \right) \right].$$

$$\text{Звідси } \Phi \left(\sqrt{\frac{E}{N_0}} \right) = 1 - \frac{2p_e}{m-1} = 1 - \frac{2 \cdot 10^{-4}}{19} = 0,99999.$$

Потрібне відношення сигнал/завада дорівнює

$$\frac{E}{N_0} = 4,4^2 = 19,36.$$

Приклад 4.8. Обчислити необхідне значення відношення сигнал/завада на вході вузькосмугового некогерентного приймача 20 ортогональних сигналів, яке забезпечує ймовірність p_e помилкового розрізнення сигналів не гірше 10^{-4} .

Розв'язання. При вузькосмуговому некогерентному прийманні m -ортогональних сигналів ймовірність помилки розрізнення p_e визначається як

$$p_e \approx \frac{m-1}{2} \exp \left(-\frac{E}{4N_0} \right).$$

Звідси необхідне відношення сигнал/завада на вході має значення

$$\frac{E}{N_0} = 4 \ln \frac{m-1}{2p_e} = 4 \ln \frac{19}{2 \cdot 10^{-4}} = 45,84.$$

Приклад 4.9. При передаванні інформації каналом зв'язку з амплітудною, частотною та фазовою маніпуляціями необхідно забезпечити однакову ймовірність помилкового приймання символу. Приймання ідеальне. Імовірності появи символів 0 і 1 однакові. Визначити, яким має бути відношення середніх потужностей сигналів для цих трьох випадків.

Розв'язання. Під ідеальним прийманням розуміють випадок ідеального узгодження характеристик каналу зв'язку з параметрами сигналу та когерентного приймання. Відповідні формули мають вигляд:

$$p_{eAM} = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}} \right) \right];$$

$$p_{eЧМ} = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{E}{N_0}} \right) \right];$$

$$p_{eФМ} = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} \right) \right].$$

При цьому

$$q^2 = E / N_0,$$

де E – енергія сигналу на вході, $E = P_c \cdot T_c$.

Тобто

$$p_{eAM} = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{q^2 / 2} \right) \right],$$

$$p_{eЧМ} = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{q^2} \right) \right],$$

$$p_{eФМ} = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{2q^2} \right) \right].$$

Тому для забезпечення рівних імовірностей помилкового приймання необхідно виконати умову

$$\frac{q_{AM}^2}{2} = q_{ЧМ}^2 = 2q_{ФМ}^2.$$

При амплітудній модуляції сигналом передається тільки один із символів (0 або 1), тому середня потужність дорівнює $P_{сер} = P_c/2$.

Таким чином, відношення середніх потужностей повинно мати такий вигляд:

$$P_{сер AM} = P_{сер ЧМ} = P_{сер ФМ}.$$

Приклад 4.10. Обчислити необхідне значення середньої потужності сигналу P_c на вході каналу для забезпечення допустимої ймовірності помилки $p_e \leq 3 \cdot 10^{-5}$ для випадків використання амплітудної, частотної та фазової маніпуляцій при ідеальному прийманні. Спектральна густина завад $N_0 = 0,1$ мВт/Гц. Тривалість сигналу $T_c = 10^{-3}$ с.

Розв'язання. Під ідеальним прийманням розуміють випадок когерентного приймання при ідеальному узгодженні каналу зв'язку з параметрами сигналу.

При цьому

$$p_{e AM} = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{q^2 / 2} \right) \right],$$

$$p_{e ЧМ} = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{q^2} \right) \right],$$

$$p_{e ФМ} = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{2q^2} \right) \right].$$

У загальному вигляді

$$p_e = 0,5 \left[1 - \Phi(\alpha) \right].$$

Обчислюємо необхідне значення аргументу α :

$$\Phi(\alpha) = 1 - 2p_e = 1 - 0,0003 = 0,99997, \quad \alpha = 4,00.$$

При АМ $q^2 / 2 = 16$, при ЧМ $q^2 = 16$, при ФМ $2q^2 = 16$.

Оскільки $q^2 = E / N_0$, то

$$E_{AM} = 32N_0 = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ Вт} \cdot \text{с},$$

$$E_{ЧМ} = 16N_0 = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Вт} \cdot \text{с},$$

$$E_{ФМ} = 8N_0 = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ Вт} \cdot \text{с}.$$

Потужність сигналу P_c на вході обчислюється за формулою

$$E = P_c \cdot T_c, \quad P_c = E / T_c.$$

Таким чином,

$$P_{cAM} = \frac{3,2 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} = 3,2 \text{ Вт};$$

$$P_{cЧМ} = \frac{1,6 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} = 1,6 \text{ Вт};$$

$$P_{cФМ} = \frac{0,8 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} = 0,8 \text{ Вт}.$$

За умов амплітудної модуляції при однаковій імовірності появи символів середня потужність удвічі менша від потужності одного сигналу, а при частотній і фазовій модуляціях дорівнює їй.

Отже, остаточно:

$$P_{серAM} = 1,6 \text{ Вт}, \quad P_{серЧМ} = 1,6 \text{ Вт}, \quad P_{серФМ} = 0,8 \text{ Вт}.$$

Приклад 4.11. У скільки разів необхідно збільшити середню потужність передавача, щоб при ідеальному прийманні ЧМ-сигналів імовірність помилки знизилась від 10^{-3} до 10^{-5} ?

Розв'язання. При ідеальному прийманні (когерентне приймання при ідеальному узгодженні характеристик каналу зв'язку з параметрами сигналу) імовірність помилки дорівнює

$$p_e = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{q^2} \right) \right].$$

Звідси

$$\Phi \left(\sqrt{q^2} \right) = 1 - 2p_e, \quad \Phi \left(\sqrt{q_1^2} \right) = 1 - 2 \cdot 10^{-3} = 0,998;$$

$$\Phi \left(\sqrt{q_2^2} \right) = 1 - 2 \cdot 10^{-5} = 0,99998;$$

$$\sqrt{q_1^2} = 3,10; \quad \sqrt{q_2^2} = 3,90.$$

Оскільки потужність передавача P_c прямо пропорційна відношенню сигнал/шум на вході приймача, для зменшення ймовірності помилки до 10^{-5} потужність передавача необхідно збільшити у

$$\frac{P_{c2}}{P_{c1}} = \frac{q_2^2}{q_1^2} = \frac{3,9^2}{3,1^2} = 1,58 \text{ рази.}$$

Приклад 4.12. У скільки разів необхідно збільшити середню потужність передавача, щоб при ідеальному прийманні ФМ-сигналів імовірність помилки зменшилася з 10^{-2} до 10^{-5} ?

Розв'язання. При ідеальному прийманні (когерентне приймання при ідеальному узгодженні характеристик каналу зв'язку з параметрами сигналу) імовірність помилки визначається формулою

$$p_e = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{2q^2} \right) \right].$$

Звідси

$$\Phi \left(\sqrt{q^2} \right) = 1 - 2p_e;$$

$$\Phi(\sqrt{q_1^2}) = 1 - 2 \cdot 10^{-2} = 0,98; \quad \Phi(\sqrt{q_2^2}) = 1 - 2 \cdot 10^{-5} = 0,99998;$$

$$\sqrt{q_1^2} = 2,35; \quad \sqrt{q_2^2} = 3,90.$$

Оскільки потужність передавача P_c прямо пропорційна відношенню сигнал/шум на вході приймача, для зменшення ймовірності помилки до 10^{-5} потужність передавача необхідно збільшити у

$$\frac{P_{c2}}{P_{c1}} = \frac{2q_2^2}{2q_1^2} = 2,75 \text{ рази.}$$

Приклад 4.13. У каналі зв'язку з пропускною здатністю $C = 1000$ біт/с передається інформація при середній потужності сигналу $P_c = 4$ Вт і спектральній густині завад $N_0 = 10^{-3}$ Вт/Гц. Використовується частотна модуляція й ідеальне приймання. Визначити можливу швидкість модуляції B у цьому каналі.

Розв'язання. При ідеальному прийманні (когерентне приймання й ідеальне узгодження характеристик каналу з параметрами сигналу) пропускна здатність обчислюється за формулою

$$C = \Delta f_c \log \left(\alpha \frac{P_c}{P_{ui}} + 1 \right).$$

За умов частотної маніпуляції $\Delta f_c = 2,2 \dots 2,4$ В, при ідеальному прийманні $\frac{P_c}{P_{ui}} = \frac{E}{N_0} = \frac{P_c \cdot T_c}{N_0} = \frac{P_c}{B \cdot N_0}$, при синусоїдальних сигналах $\alpha = 0,3$.

Тоді

$$C = 2,4B \log \left(\frac{0,3 \cdot P_c}{B \cdot N_0} + 1 \right);$$

$$2,4B \log \left(\frac{0,3 \cdot 4}{B \cdot 10^{-3}} + 1 \right) = 1000;$$

$$2,4B \log\left(\frac{1,2 \cdot 10^3}{B} + 1\right) = 1000;$$

$$\log\left(\frac{1,2 \cdot 10^3}{B} + 1\right) = \frac{416}{B}.$$

Це трансцендентне рівняння, розв'язок якого може бути отримано різними способами.

Відповідь: $B = 120$ Бод.

Приклад 4.14. Лінією зв'язку зі швидкістю модуляції $B = 100$ Бод передаються двійкові ФМ-сигнали. При ідеальному прийманні ймовірність спотворення символу $p_e = 10^{-4}$. Середня потужність сигналу на вході приймача $P_c = 1$ мВт. Визначити, яка при цьому густина завади, що діє в каналі зв'язку.

Розв'язання. При ідеальному прийманні (когерентне приймання при ідеальному узгодженні характеристик каналу з параметрами сигналу) ймовірність помилки при фазовій модуляції визначається формулою

$$p_e = 0,5 \left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right) \right],$$

де $E = P_c \cdot T_c = P_c / B$.

Звідси

$$\Phi\left(\sqrt{\frac{2P_c}{B \cdot N_0}}\right) = 1 - 2p_e = 1 - 2 \cdot 10^{-4} = 0,9998;$$

$$\sqrt{\frac{2P_c}{B \cdot N_0}} = 3,7; \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3}}{1000 \cdot N_0}} = 3,7; N_0 = 1,46 \cdot 10^{-7} \text{ Вт/Гц}.$$

Приклад 4.15. Лінією зв'язку передається інформація. Швидкість модуляції $B = 100$ Бод. Середня потужність сигналу на вході приймального пристрою дорівнює $0,1$ Вт. Питома

потужність завади $N_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ Вт/Гц. Визначити ймовірність помилки при ідеальному прийманні й амплітудній модуляції.

Розв'язання. При ідеальному прийманні (когерентне приймання та ідеальне узгодження характеристик каналу з параметрами сигналу) ймовірність помилки при амплітудній модуляції обчислюється за формулою

$$P_{eAM} = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{q^2}{2}} \right) \right],$$

де $q^2 = \frac{E}{N_0} = \frac{P_c \cdot T_c}{N_0} = \frac{2P_{сер}}{N_0 \cdot B} = \frac{2 \cdot 0,1}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 100} = 10$, таким чином,

$$P_{eAM} = 0,5 \left[1 - \Phi(2,23) \right] = 0,5(1 - 0,974) = 1,3 \cdot 10^{-2}.$$

Приклад 4.16. Визначити, у скільки разів збільшується вірогідність приймання двійкових амплітудно- і частотно-модульованих сигналів при переході від вузькосмугового некогерентного приймання до вузькосмугового когерентного приймання, якщо відношення енергії сигналу до питомої густини потужності завад на вході приймача дорівнює 20.

Розв'язання. Підвищення вірогідності приймання оцінюється величиною відносного зменшення ймовірності помилки:

$$P_{eнеког} / P_{еког}.$$

При вузькосмуговому некогерентному прийманні амплітудно-модульованих і частотно-модульованих сигналів ймовірність помилки обчислюється відповідно за формулами:

$$P_{eнекогAM} = 0,5 \exp(-q^2 / 4) = 0,5 \exp(-2,5) = 4,1 \cdot 10^{-2};$$

$$P_{eнекогЧМ} = 0,5 \exp(-q^2 / 2) = 0,5 \exp(-5) = 3,4 \cdot 10^{-3}.$$

При вузькосмуговому когерентному прийманні ймовірність помилки обчислюється за формулами:

$$P_{\text{еког AM}} = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{q^2}{2}} \right) \right] = 0,5 \left[1 - \Phi(\sqrt{5}) \right] = 1,3 \cdot 10^{-2};$$

$$P_{\text{еког ЧМ}} = 0,5 \left[1 - \Phi(\sqrt{q^2}) \right] = 0,5 \left[1 - \Phi(\sqrt{10}) \right] = 1 \cdot 10^{-3}.$$

Вірогідність приймання підвищується при амплітудній модуляції у $\frac{P_{\text{еког AM}}}{P_{\text{еког ЧМ}}} = 3,15$ разу, при частотній модуляції – у

$$\frac{P_{\text{еког ЧМ}}}{P_{\text{еког ЧМ}}} = 3,4 \text{ разу.}$$

Приклад 4.17. Визначити, у скільки разів підвищується вірогідність приймання двійкових амплітудно- і частотно-модульованих сигналів при переході від вузькосмугового некогерентного приймання до ідеального, якщо відношення енергії сигналу до питомої густини потужності завад на вході приймача дорівнює 20.

Розв'язання. Підвищення вірогідності приймання оцінюється величиною відносного зменшення ймовірності помилки $P_{\text{еког}} / P_e$.

При вузькосмуговому некогерентному прийманні амплітудно- модульованих і частотно-модульованих сигналів імовірність помилки обчислюється відповідно за формулами:

$$P_{\text{еког AM}} = 0,5 \exp(-q^2 / 4) = 0,5 \exp(-2,5) = 4,1 \cdot 10^{-2};$$

$$P_{\text{еког ЧМ}} = 0,5 \exp(-q^2 / 2) = 0,5 \exp(-5) = 3,4 \cdot 10^{-3}.$$

При ідеальному прийманні ймовірність помилки обчислюється за формулами:

$$P_{e AM} = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}} \right) \right] = 0,5 \left[1 - \Phi(\sqrt{10}) \right] = 1 \cdot 10^{-3};$$

$$P_{e \text{ ЧМ}} = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{E}{N_0}} \right) \right] = 0,5 \left[1 - \Phi(\sqrt{20}) \right] = 5 \cdot 10^{-6}.$$

Вірогідність приймання підвищується при амплітудній модуляції у $\frac{P_{\text{енеккоз АМ}}}{P_{e \text{ АМ}}} = 51$ раз, при частотній модуляції – у

$$\frac{P_{\text{енеккоз ЧМ}}}{P_{e \text{ ЧМ}}} = 1360 \text{ разів.}$$

Приклад 4.18. Визначити співвідношення потужностей сигналу на виході лінійної частини приймача для забезпечення ймовірності помилкового приймання $p_e = 10^{-4}$ при прийманні методом порівняння фаз (ВФМ-1) і методом порівняння полярностей (ВФМ-2).

Розв'язання. При прийманні методом порівняння фаз імовірність помилкового приймання символу визначається формулою

$$p_e = 0,5 \exp(-q^2).$$

$$\text{Звідси } q_{\text{ВФМ-1}}^2 = \ln \left(\frac{1}{2p_e} \right) = \ln(5 \cdot 10^3) = 8,51.$$

При прийманні методом порівняння полярностей імовірність помилкового приймання символу визначається формулою

$$p_e = 0,5 \left[1 - \Phi(\sqrt{2q^2}) \right].$$

Звідси

$$\begin{aligned} \Phi(\sqrt{2q^2}) &= \sqrt{1 - 2p_e} = \sqrt{1 - 2 \cdot 10^{-4}} = 0,9999; \\ \sqrt{2q^2} &= 3,90; \quad q_{\text{ВФМ-2}}^2 = 7,6. \end{aligned}$$

Співвідношення потужностей на виході лінійної частини приймача дорівнює

$$\frac{P_{c \text{ ВФМ-1}}}{P_{c \text{ ВФМ-2}}} = \frac{q_{\text{ВФМ-1}}^2}{q_{\text{ВФМ-2}}^2} = \frac{8,51}{7,6} = 1,12.$$

Приклад 4.19. Визначити ймовірність помилкового приймання сигналу з фазовою модуляцією при ідеальному когерентному прийманні, якщо амплітуда сигналу A на виході узгодженого фільтра дорівнює 10 мВ, а спектральна густина шуму $N_0 = 10^{-11}$ Вт/Гц. Потужність сигналу й енергія нормовані на 1 Ом. Швидкість модуляції $B = 1$ Мбіт/с.

Розв'язання. Імовірність помилки при прийманні сигналу ФМ на ідеальний узгоджений фільтр обчислюється за формулою

$$p_e = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{2E/N_0} \right) \right],$$

де $E = \frac{A^2}{2} \cdot T$, $T = \frac{1}{B}$. Таким чином,

$$p_e = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{2 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6} / 2 \cdot 10^{-11}} \right) \right] = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{10} \right) \right] = 8 \cdot 10^{-4}.$$

Приклад 4.20. Лінією зв'язку передаються двійкові сигнали з імовірністю помилки $p_e = 5 \cdot 10^{-3}$. Застосовується відносна фазова модуляція і приймання методом порівняння полярностей (ВФМ-2). Визначити необхідне відношення сигнал/шум на виході лінійної частини приймача.

Розв'язання. При прийманні сигналів ВФМ методом порівняння полярностей імовірність помилки обчислюється за формулою

$$p_e = 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{2q^2} \right) \right].$$

Звідси

$$\Phi(\sqrt{2q^2}) = \sqrt{1-2p_e} = \sqrt{1-0,01} = 0,99498;$$

$$\sqrt{2q^2} = 2,80; q^2 = 3,92.$$

Приклад 4.21. Для передачі даних каналом зв'язку використовується відносна фазова маніпуляція. У приймачі реалізується вузькосмугове приймання і метод порівняння полярностей (ВФМ-2). Повідомлення передаються 20-розрядними кодovими комбінаціями. Визначити необхідне відношення сигнал/шум на вході приймача, яке забезпечує ймовірність помилкового приймання кожної кодової комбінації не більше $2 \cdot 10^{-3}$. Помилки в розрядах кодової комбінації вважати взаємозалежними.

Розв'язання. При прийманні сигналів ВФМ методом порівняння полярностей ймовірність помилкового приймання одного символу кодової комбінації визначається формулою

$$p_e = 0,5 \left[1 - \Phi(\sqrt{2q^2}) \right].$$

Ймовірність помилкового приймання кодової комбінації при взаємозалежних помилках у розрядах визначається формулою

$$p_{ном} = 1 - (1 - p_e)^n,$$

де n – число розрядів кодової комбінації.

Для нормальної роботи системи зв'язку повинно виконуватися співвідношення $p_e \ll 1$.

Тоді

$$p_{ном} \approx 1 - 1 + np_e = np_e; p_e = \frac{p_{ном}}{n} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{20} = 10^{-4}.$$

$$\Phi(\sqrt{2q^2}) = \sqrt{1-2p_e} = \sqrt{1-2 \cdot 10^{-4}} = 0,9999;$$

$$\sqrt{2q^2} = 3,9; q^2 = 7,6; \frac{E}{N_0} = 15,5.$$

Приклад 4.22. Системи передачі двійкової інформації, які використовують ВФМ і ДВФМ, при рівних середніх потужностях сигналу і спектральній густині потужності флукуаційних завад забезпечують однакову ймовірність помилкового приймання символу. Приймання вузькосмугове за методом порівняння фаз. Визначити співвідношення швидкостей передавання інформаційних символів для цих систем.

Розв'язання. При прийманні сигналів за методом порівняння фаз імовірності помилок при ВФМ-1 і ДВФМ-1 дорівнюють:

$$P_{e \text{ ВФМ-1}} = 0,5 \exp(-q_1^2);$$

$$P_{e \text{ ДВФМ-1}} = 0,5 \exp(-q_2^2 / 2);$$

$$q_1^2 = \frac{P_c}{P_{ш1}} = \frac{P_c}{N_0 \Delta f_{c1}} = \frac{P_c}{N_0 \cdot 1,2B_1};$$

$$q_2^2 = \frac{P_c}{P_{ш2}} = \frac{P_c}{N_0 \Delta f_{c2}} = \frac{P_c}{N_0 \cdot 0,6B_2}.$$

Для забезпечення однакових імовірностей помилкового приймання $P_{e \text{ ВФМ-1}} = P_{e \text{ ДВФМ-1}}$ необхідно виконати умову $q_1^2 = q_2^2 / 2$:

$$\frac{P_c}{N_0 \cdot 1,2B_1} = \frac{P_c}{2N_0 \cdot 0,6B_2}.$$

Тобто швидкості передавання символів у цих двох системах однакові $B_1 = B_2$, але перевага в тому, що в системі ДВФМ смуга удвічі вужча.

Приклад 4.23. Визначити, яке співвідношення сигнал/шум у каналі у випадку використання некогерентного приймання ЧМ, якщо передавання символів 0 та 1 рівноймовірне, швидкість модуляції B дорівнює 1000 Бод, а пропускна здатність каналу $C = 850$ біт/с.

Розв'язання. Пропускна здатність двійкового симетричного каналу визначається формулою

$$C = B[1 + p_e \log p_e + (1 - p_e) \log(1 - p_e)].$$

Відношення сигнал/шум q^2 для випадку некогерентного приймання ЧМ можна визначити з формули

$$p_e = 0,5 \exp(-q^2 / 2), \quad q^2 = 2 \ln \left(\frac{1}{2p_e} \right).$$

Спочатку потрібно визначити p_e з формули для пропускної здатності:

$$\begin{aligned} p_e \log p_e + (1 - p_e) \log(1 - p_e) &= (C/B) - 1; \\ -p_e \log p_e - (1 - p_e) \log(1 - p_e) &= 0,15. \end{aligned}$$

Ліва частина рівняння за формою збігається з формулою ентропії двійкових повідомлень $H(X)$, тому значення p_e може бути взят з дод. 2:

$$p_e = 0,03.$$

Остаточно

$$q^2 = 2 \ln \left(\frac{1}{2 \cdot 0,03} \right) = 5,63.$$

Приклад 4.24. Визначити, яке співвідношення сигнал/шум у каналі у випадку використання ВФМ на приймання методом порівняння фаз, якщо передавання сигналів 0 та 1 рівноймовірне, швидкість модуляції B дорівнює 1100 Бод, а пропускна здатність каналу $C = 950$ біт/с.

Розв'язання. Використовуючи методику розв'язання, наведену у прикладі 4.23, маємо

$$-p_e \log p_e - (1 - p_e) \log(1 - p_e) = 1 - 950 / 1100 = 0,1364.$$

З дод. 2 $p_e = 0,02$.

При прийманні ВФМ методом порівняння фаз

$$p_e = 0,5 \exp(-q^2).$$

Звідси

$$q^2 = \ln\left(\frac{1}{2p_e}\right) = \ln\left(\frac{1}{2 \cdot 0,02}\right) = 3,22.$$

Приклад 4.25. Визначити, яке співвідношення сигнал/шум у каналі у випадку ДВФМ і приймання методом порівняння полярностей, якщо символи 1 і 0 рівноймовірні. Пропускна здатність каналу дорівнює $C = 1100$ біт/с, швидкість модуляції $B = 1200$ Бод.

Розв'язання. Пропускна здатність двійкового симетричного каналу зв'язку визначається формулою

$$C = B[1 + p_e \log p_e + (1 - p_e) \log(1 - p_e)];$$
$$-p_e \log p_e - (1 - p_e) \log(1 - p_e) = 1 - 1100 / 1200 = 0,0834.$$

З дод. 2 $p_e = 0,01$.

При прийманні ДВФМ методом порівняння полярностей

$$p_e = 0,5 \left[1 - \Phi(\sqrt{q^2}) \right].$$
$$\Phi(\sqrt{q^2}) = \sqrt{1 - 2p_e} = 0,9899;$$
$$\sqrt{q^2} = 2,55; q^2 = 6,5.$$

Приклад 4.26. Визначити необхідне відношення сигнал/шум за напругою для забезпечення ймовірності помилки $p_e = 10^{-4}$ у випадку використання ВФМ і прийманні методом порівняння фаз (ВФМ-1) і методом порівняння полярностей (ВФМ-2) у вузькосмуговому каналі зв'язку.

Розв'язання. При прийманні методом порівняння фаз:

$$p_e = 0,5 \exp(-q^2), \quad q^2 = \ln\left(\frac{1}{2p_e}\right), \quad q = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2 \cdot 10^{-4}}\right)} = 2,92.$$

При прийманні методом порівняння полярностей:

$$p_e = 0,5 \left[1 - \Phi\left(\sqrt{2q^2}\right) \right]; \quad \Phi\left(\sqrt{2q^2}\right) = \sqrt{1 - 2p_e};$$

$$\Phi\left(\sqrt{2q^2}\right) = \sqrt{1 - 2 \cdot 10^{-4}}; \quad \sqrt{2q^2} = 3,90; \quad q = 2,76.$$

Приклад 4.27. Визначити пропускну здатність двійкового симетричного каналу зв'язку, яким передаються двійкові ВФМ-сигнали і використовується вузькосмугове приймання методом порівняння полярностей, якщо швидкість модуляції 1800 Бод, а відношення сигнал/шум q за напругою на виході лінійної частини приймача дорівнює 2.

Розв'язання. Пропускна здатність двійкового симетричного каналу визначається формулою

$$C = B \left[1 + p_e \log p_e + (1 - p_e) \log(1 - p_e) \right].$$

Імовірність помилкового приймання в такій системі визначається як:

$$p_e = 0,5 \left[1 - \Phi\left(\sqrt{2q^2}\right) \right] = 0,5 \left[1 - \Phi(2,82) \right] = 0,5 \left[1 - 0,9949 \right] = 2,55 \cdot 10^{-3}.$$

Тоді

$$C = 1800 \left[1 - 0,00255 \cdot \log 0,00255 + (1 - 0,00255) \log(1 - 0,00255) \right] =$$

$$= 1800(1 - 0,0257) = 1754 \text{ біт/с.}$$

Приклад 4.28. Для підвищення вірогідності приймання інформації кожна послідовність передається каналом тричі. Визначити, у скільки разів підвищується в цьому випадку вірогідність приймання сигналів ВФМ методом порівняння фаз порівняно з

некогерентною ЧМ при відношенні сигнал/шум у каналі зв'язку за потужністю $q^2 = 10$. Помилки вважаються незалежними.

Розв'язання. При некогерентному прийманні сигналів ЧМ імовірність помилки визначається формулою

$$p_e = 0,5 \exp(-q^2 / 2) = 0,00674;$$

при прийманні сигналів ВФМ методом порівняння фаз:

$$p_e = 0,5 \exp(-q^2) = 0,000045.$$

При кількаретовому повторенні посилок рішення приймається за методом більшості. Отже, при трикратному повторенні рішення виноситься на користь того символу, який повторився щонайменше двічі. Таким чином, імовірність помилки в цьому випадку дорівнює p_e^2 .

Тоді

$$\frac{p_{e\text{ЧМ}}^2}{p_{e\text{ВФМ}}^2} = \frac{(6,74 \cdot 10^{-3})^2}{(4,5 \cdot 10^{-5})^2} = 2,25 \cdot 10^{-4}.$$

Приклад 4.29. Обчислити ймовірність помилки в каналі з релеївськими завмираннями при використанні ФМ і вузькосмуговому прийманні, якщо відношення сигнал/шум на вході демодулятора $q^2 = 100$.

Розв'язання. Імовірність помилки обчислюється за формулою

$$p_{e\text{ФМ}} = 0,5 \left(1 - \sqrt{\frac{q^2}{1+q^2}} \right) = 0,5 \left(1 - \sqrt{\frac{100}{1+100}} \right) = 0,0025.$$

Приклад 4.30. Обчислити ймовірність помилки в каналі з релеївськими завмираннями при використанні ВФМ і вузькосмуговому прийманні методами порівняння фаз і

порівняння полярностей, якщо відношення сигнал/шум на вході демодулятора $q^2 = 100$.

Розв'язання. Імовірність помилки при прийманні методом порівняння фаз визначається таким чином:

$$P_{e \text{ ВФМ-1}} = \frac{1}{2(1+q^2)} = \frac{1}{2(1+100)} = 0,0049;$$

при прийманні методом порівняння полярностей:

$$P_{e \text{ ВФМ-2}} = \frac{1}{2+3q^2} = \frac{1}{2+3 \cdot 100} = 0,0033.$$

Приклад 4.31. Обчислити ймовірність помилки в каналі з релієвськими завмираннями при використанні АМ і некогерентному вузькосмуговому прийманні, якщо відношення сигнал/шум на вході демодулятора $q^2 = 100$.

Розв'язання. Імовірність помилки обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} P_{e \text{ неког АМ}} &= 0,5 \left[1 - \exp\left(\frac{-q^2}{4}\right) - \exp\left(\frac{-q^2}{4(1+q^2)}\right) \right] = \\ &= 0,5 \left[1 - \exp\left(\frac{-100}{4(1+100)}\right) \right] = 0,1101. \end{aligned}$$

Приклад 4.32. Обчислити ймовірність помилки в каналі з релієвськими завмираннями при використанні АМ і когерентному вузькосмуговому прийманні, якщо відношення сигнал/шум на вході демодулятора $q^2 = 100$.

Розв'язання. Імовірність помилки обчислюється за формулою

$$P_{e \text{ ког АМ}} = 0,5 \left(1 - \sqrt{\frac{q^2}{4+q^2}} \right) = 0,5 \left(1 - \sqrt{\frac{100}{104}} \right) = 0,00975.$$

Приклад 4.33. Обчислити ймовірність помилки в каналі з релєївськими завмираннями при використанні ЧМ і когерентному вузькосмуговому прийманні, якщо відношення сигнал/шум на вході демодулятора $q^2 = 100$.

Розв'язання. Ймовірність помилки обчислюється за формулою

$$P_{\text{еког ЧМ}} = 0,5 \left(1 - \sqrt{\frac{q^2}{2 + q^2}} \right) = 0,5 \left(1 - \sqrt{\frac{100}{102}} \right) = 0,00495.$$

Приклад 4.34. Обчислити ймовірність помилки в каналі з релєївськими завмираннями при використанні ЧМ і некогерентному вузькосмуговому прийманні, якщо відношення сигнал/шум на вході демодулятора $q^2 = 100$.

Розв'язання. Ймовірність помилки обчислюється за формулою

$$P_{\text{еког ЧМ}} = \frac{1}{2 + q^2} = \frac{1}{2 + 100} = 0,0098.$$

4.3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 4.1. Обчислити ймовірність помилок при оптимальному когерентному прийманні 30 ортогональних сигналів, якщо потужність сигналів на вході когерентного демодулятора P_c , спектральна густина завади N_0 , швидкість передавання B , Бод (табл. 24).

Таблиця 24

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P_c , Вт	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
N_0 , Вт/Гц	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}
B , Бод	100	200	300	400	500	100	200	300	400	500

Задача 4.2. Провести порівняльну оцінку завадостійкості методу некогерентного вузькосмугового приймання сигналів ЧМ

з прийманням ВФМ та ДФВМ з обробкою методом порівняння полярностей, якщо відношення сигнал/шум на виході лінійної системи приймача за напругою дорівнює q (табл. 25).

Таблиця 25

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8

Задача 4.3. Обчислити ймовірність помилок при оптимальному некогерентному прийманні 20 ортогональних сигналів з частотною маніпуляцією, якщо потужність сигналів на вході некогерентного демодулятора P_c , спектральна густина завади N_0 , швидкість передавання B , Бод (табл. 26).

Таблиця 26

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P_c , Вт	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
N_0 , Вт/Гц	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}
B , Бод	100	200	300	400	500	100	200	300	400	500

Задача 4.4. Обчислити ймовірність помилок при оптимальному некогерентному прийманні 20 ортогональних сигналів з випадковою початковою фазою і флюктуючою амплітудою, якщо середня потужність сигналів на вході некогерентного демодулятора P_c , спектральна густина завади N_0 , швидкість передавання B , Бод (табл. 26).

Задача 4.5. Визначити, яке співвідношення q^2 сигнал/шум у каналі у випадку використання некогерентного вузькосмугового приймання АМ, якщо передавання символів 0 та 1 рівноймовірне, швидкість модуляції дорівнює B , Бод, а пропускна здатність каналу C , біт/с (табл. 27).

Таблиця 27

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B , Бод	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900
C , біт/с	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800

Задача 4.6. Визначити, яке співвідношення сигнал/шум у каналі у випадку використання ВФМ та приймання методом порівняння полярностей, якщо передавання символів 0 та 1 рівноймовірне, швидкість модуляції B , Бод, а пропускна здатність каналу C , біт/с (табл. 27).

Задача 4.7. Визначити, яке співвідношення сигнал/шум у каналі у випадку використання ДВФМ і приймання методом порівняння полярностей, якщо передавання символів 0 та 1 рівноймовірне, швидкість модуляції B , Бод, а пропускна здатність каналу C , біт/с (табл. 27).

Задача 4.8. Для підвищення вірогідності приймання інформації використовується мажоритарний принцип прийняття рішення при трикратному повторенні кожної послідовності. Визначити, у скільки разів підвищується у цьому випадку вірогідність приймання сигналів при використанні ЧМ з вузькосмуговим некогерентним прийманням порівняно з некогерентною АМ при відношенні сигнал/шум у каналі зв'язку за потужністю q^2 (табл. 28). Помилки вважаються незалежними.

Таблиця 28

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q^2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Задача 4.9. Визначити, у скільки разів підвищується вірогідність приймання двійкових амплітудно- і частотно-модульованих сигналів при переході від вузькосмугового

некогерентного приймання до ідеального, якщо відношення енергії сигналу до питомої густини потужності завад на вході приймача E / N_0 (табл. 29).

Таблиця 29

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E / N_0	10	15	20	25	30	34	40	45	50	55

Задача 4.10. Визначити співвідношення потужностей сигналу на виході лінійної частини приймача для забезпечення ймовірності помилкового приймання p_e при прийманні методом порівняння фаз (ВФМ-1) і методом порівняння полярностей (ВФМ-2) (табл. 30).

Таблиця 30

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_e	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-5}

Задача 4.11. Лінією зв'язку передається інформація. Швидкість модуляції B , Бод. Середня потужність сигналу на вході приймального пристрою дорівнює P_c , Вт. Питома потужність завади N_0 , Вт/Гц (табл. 31). Визначити ймовірність помилки при ідеальному прийманні амплітудної модуляції.

Таблиця 31

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B , Бод	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
P_c , Вт	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
N_0 , Вт/Гц	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}

Задача 4.12. Визначити, у скільки разів підвищується вірогідність приймання двійкових амплітудно- і частотно-модульованих сигналів при переході від вузькосмугового некогерентного приймання до вузькосмугового когерентного приймання, якщо відношення енергії сигналу до питомої густини потужності завад на вході приймача дорівнює E / N_0 (табл. 29).

Задача 4.13. Лінією зв'язку передаються двійкові сигнали з імовірністю помилки p_e (табл. 32). Застосовується відносна фазова модуляція приймання методом порівняння полярностей (ВФМ-2). Визначити необхідне відношення сигнал/шум на виході лінійної частини приймача.

Таблиця 32

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_e	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-7}$

Задача 4.14. Знайти ймовірність помилкового приймання сигналу з фазовою модуляцією при ідеальному когерентному прийманні, якщо амплітуда сигналу на виході узгодженого фільтра дорівнює A , а спектральна густина шуму N_0 . Потужність сигналу й енергія нормовані на 1 Ом. Швидкість модуляції B (табл. 33).

Таблиця 33

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A , мВ	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
N_0 , Вт/Гц	10^{-11}	10^{-12}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}
B , Мбіт/с	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0

Задача 4.15. Для передачі даних каналом зв'язку використовується відносна фазова модуляція. У приймачі реалізується вузькосмугове приймання і метод порівняння полярностей (ВФМ-2). Повідомлення передаються n -розрядними кодовими комбінаціями. Визначити необхідне відношення

сигнал/шум на вході приймача, яке забезпечує ймовірність помилкового приймання кожної кодової комбінації не більше $p_{ном}$ (табл. 34). Помилки в розрядах кодової, комбінації вважати незалежними.

Таблиця 34

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$p_{ном}$	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}	$5 \cdot 10^{-5}$	10^{-5}	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-5}	$5 \cdot 10^{-5}$	10^{-5}

Задача 4.16. Визначити число розрядів у кодовій комбінації n , якщо при відношенні сигнал/шум на вході E/N_0 , при використанні відносної фазової маніпуляції і вузькосмуговому прийманні методом порівняння фаз імовірність помилкового приймання кодової комбінації при взаємозалежних помилках дорівнює $p_{ном}$ (табл. 35).

Таблиця 35

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E/N_0	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$p_{ном}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}

Задача 4.17. У скільки разів необхідно збільшити середню потужність передавача, щоб при ідеальному прийманні ЧМ-сигналів імовірність помилки знизилась від p_{e1} до p_{e2} (табл. 36)?

Таблиця 36

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_{e1}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-3}
p_{e2}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}

Задача 4.18. У скільки разів необхідно збільшити середню потужність передавача, щоб при ідеальному прийманні ФМ-сигналів імовірність помилки зменшилась від p_{e1} до p_{e2} (табл. 36)?

Задача 4.19. Обчислити необхідне значення середньої потужності сигналу P_c на вході каналу для забезпечення допустимої ймовірності помилки p_e для випадків використання амплітудної, частотної та фазової маніпуляцій при ідеальному прийманні, якщо задані спектральна густина нормального «білого» шуму N_0 та тривалість сигналу T_c (табл. 37).

Таблиця 37

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_e	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$
N_0 , мВт/Гц	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
T_c , мкс	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000

Задача 4.20. Лінією зв'язку зі швидкістю модуляції B передаються двійкові ФМ-сигнали. При ідеальному прийманні ймовірність спотворення символу p_e . Середня потужність сигналу на вході приймача P_c (табл. 38). Визначити, чому дорівнює густина завади N_0 , що діє в каналі зв'язку.

Таблиця 38

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B , біт/с	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000
p_e	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}
P_c , мВт	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2

Задача 4.21. Обчислити необхідне відношення сигнал/шум на вході демодулятора приймача в каналі з релеївськими завмираннями при використанні ФМ і вузькосмуговому прийманні, якщо задана ймовірність помилки p_e (табл. 39).

Таблиця 39

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_e	10^{-3}	$2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}

Задача 4.22. Обчислити необхідне підношення сигнал/шум на вході демодулятора приймача в каналі з релеївськими завмираннями при використанні ВФМ і вузькосмуговому прийманні методами порівняння фаз і порівняння полярностей, якщо задана ймовірність помилки p_e (табл. 39).

Задача 4.23. Обчислити необхідне відношення сигнал/шум на вході демодулятора приймача в каналі з релеївськими завмираннями при використанні АМ і вузькосмуговому некогерентному прийманні, якщо задана ймовірність помилки p_e (табл. 39).

Задача 4.24. Обчислити необхідне відношення сигнал/шум на вході демодулятора приймача в каналі з релеївськими завмираннями при використанні АМ і вузькосмуговому когерентному прийманні, якщо задана ймовірність помилки p_e (табл. 39).

Задача 4.25. Обчислити необхідне відношення сигнал/шум на вході демодулятора приймача в каналі з релієвськими завмираннями при використанні ЧМ і вузькосмуговому когерентному прийманні, якщо задана ймовірність помилки p_e (табл. 39).

Задача 4.26. Обчислити необхідне відношення сигнал/шум на вході демодулятора приймача в каналі з релієвськими завмираннями при використанні ЧМ і вузькосмуговому некогерентному прийманні, якщо задана ймовірність помилки p_e (табл. 39).

Контрольні питання

1. Що є критерієм близькості переданого та прийнятого дискретних повідомлень?

2. Дискретний приймач інформації. Дайте визначення завадостійкості системи, демодулятора, правила рішення, вирішальної схеми, ідеального приймача.

3. Критерії якості та правила приймання дискретних повідомлень. Критерій ідеального спостерігача.

4. Критерії якості і правила приймання дискретних повідомлень. Критерій мінімального середнього ризику.

5. Структурна схема оптимального кореляційного демодулятора при точно відомих сигналах.

5. ЗАВАДОСТІЙКІ БЛОЧНІ КОДИ

5.1. Короткі теоретичні відомості

Для забезпечення заданої завадостійкості систем зв'язку застосовують завадостійке кодування, що економічно значно ефективніше, ніж підвищення енергетичного потенціалу систем. Завадостійкі коди поділяються на коди, які виявляють помилки, і коди, які виявляють і виправляють помилки. Кодові комбінації складаються з інформаційних символів a і контрольних (перевірних) символів b . Кількість інформаційних символів у кодовій комбінації блочного коду $k = \log_2 M$, де M — кількість повідомлень алфавіту джерела, а кількість контрольних символів r , яка визначається виходячи з кількості g помилок у кодовій комбінації, що необхідно виявляти (виправляти).

Отже, довжина кодової комбінації завадостійкого блочного коду (кількість розрядів у кодовій комбінації) $n = k + r$. Для завадостійких блочних кодів, які виправляють помилки, кількість контрольних символів у кодовій комбінації визначається з нерівності

$$2^r - 1 \geq \sum_{i=1}^g C_n^i; C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!},$$

де g – максимальна кратність помилок, яка має виправлятися.

Якщо кількість помилок у кодовій комбінації перевищує g , то частина кодових комбінацій не буде виправлена. Імовірність цього визначається формулою

$$P_{ном} = 1 - (1 - p_e)^n - \sum_{i=1}^g C_n^i p_e^i (1 - p_e)^{n-i}.$$

У лінійних систематичних кодах контрольні символи формуються з інформаційних за таким правилом:

$$b_j = \sum_{i=1}^k \oplus \alpha_{ji} \alpha_i,$$

де α_{ji} – коефіцієнти, які мають значення 1 або 0 залежно від виду коду.

При декодуванні з прийнятих інформаційних символів \hat{a} за таким самим правилом, що й у кодері, формується допоміжна сукупність контрольних символів яка використовується для виявлення помилок шляхом порівняння їх з прийнятими контрольними символами \hat{b}_j :

$$\hat{b}_j \oplus b_j^* = S_j.$$

Сукупність двійкових символів $S_j (j = \overline{1, r})$ складає контрольне число $S = S_1 S_2 \dots S_j \dots S_r$ – синдром.

Якщо контрольне число (синдром) дорівнює нулю $S = 0$, то це означає, що в прийнятій кодовій комбінації помилок немає або вони не виявляються, коли їх кількість перевищує g . Якщо $S \neq 0$, то це означає, що кодова комбінація прийнята помилково, і для її виправлення необхідно ідентифікувати контрольне число з можливим конкретним типом помилки. Для цього в різних кодах існують свої правила.

На цей час найбільш ефективними є завадостійкі циклічні коди, які забезпечують досить просту апаратну реалізацію, оскільки всі операції кодування і декодування, виявлення і виправлення помилок здійснюються в регістрах зсуву шляхом циклічних перестановок символів кодових комбінацій.

Математична теорія циклічних кодів базується на поданні кодових комбінацій у вигляді двійкових поліномів:

$$G(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0x^0,$$

де коефіцієнти a набувають значення «1» або «0» відповідно до символів кодових комбінацій. Над двійковими поліномами виконують операції додавання, віднімання, множення та ділення.

Операція циклічного зсуву – це множення полінома $G(x)$ на x у відповідному степені та приведення результату до стандартної форми. Якщо вихідна кодова комбінація джерела $G(x)$ складається з k розрядів, то процес формування кодової комбінації $F(x)$ циклічного коду, що виправляє одиничні помилки, має вигляд [2]:

$$\begin{aligned} [G(x) \cdot x^r] : P(x) &= Q(x) + R(x); \\ F(x) &= G(x) \cdot x^r \oplus R(x), \end{aligned}$$

де $P(x)$ – породжувальний поліном степеня r ; $R(x)$ – залишок.

Породжувальні поліноми вибирають із таблиці, фрагмент якої наведений у табл. 40.

На приймальному кінці лінії зв'язку в декодері виконуються операції перевірки прийнятих комбінацій $\hat{F}(x)$ за таким правилом:

$$\hat{F}(x) / P(x) = Q^*(x) + R^*(x).$$

Якщо залишок $R^*(x) = 0$, то це означає, що кодова комбінація прийнята правильно або помилка не виявляється, коли число спотворених символів більше $g = 1$.

При $R^*(x) \neq 0$ необхідно виправляти помилку, визначивши номер спотвореної позиції в кодовій комбінації. Найпростіший спосіб розв'язання розглянуто в прикладі 5.7.

Фрагмент таблиці породжувальних поліномів

Код	Поліном	Код	Поліном
11	$x+1$	10001	x^4+1
101	x^2+1	10011	x^4+x+1
111	x^2+x+1	10101	x^4+x^2+1
1001	x^3+1	10111	x^4+x^2+x+1
1011	x^3+x+1	11001	x^4+x^3+1
1101	x^3+x^2+1	11011	x^4+x^3+x+1
1111	x^3+x^2+x+1	11111	$x^4+x^3+x^2+x+1$

5.2. Приклади розв'язання основних типів задач

Приклад 5.1. Для підвищення завадостійкості радіосистеми передавання дискретної інформації застосоване завадостійке блочне кодування кодовими комбінаціями довжиною n , які забезпечують виправлення g незалежних помилок у кожній комбінації при заданій імовірності помилкового приймання одного розряду p_e . Обчислити ймовірність помилкового приймання кодової комбінації при $n=11$, $g=1$, $p_e=10^{-4}$.

Розв'язання. Імовірність помилкового приймання кодової комбінації обчислюється за формулою

$$P_{ном} = 1 - P_{прав} - P_{некор.n} = 1 - (1 - p_e)^n - \sum_{i=1}^g C_n^i p_e^i (1 - p_e)^{n-i},$$

$$\text{де } C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

При $g=1$ імовірність виникнення некоректованих помилок дорівнює

$$P_{некор.n} = 1 - (1 - p_e)^n - n p_e (1 - p_e)^{n-1}.$$

Оскільки $p_e \ll 1$, то

$$p_{ном} \approx 1 - 1 + np_e - np_e + n(n-1) \cdot p_e^2 = n(n-1) \cdot p_e^2 = \\ = 11 \cdot 10 \cdot (10^{-4})^2 = 1,1 \cdot 10^{-6}.$$

Приклад 5.2. Для підвищення завадостійкості радіосистеми передавання дискретної інформації необхідно застосувати завадостійке блочне кодування з виправленням незалежних помилок від 1 до g у кодовій комбінації. Розмір алфавіту джерела повідомлень M . Обчислити кількість інформаційних k і контрольних символів у кодовій комбінації, якщо $M = 16$; $g = 1, 2$.

Розв'язання. Кількість інформаційних символів обчислюється за формулою

$$k = \log M = \log 16 = 4.$$

Кількість контрольних символів визначається з нерівності:

$$2^r - 1 \geq \sum_{i=1}^g C_{k+r}^i ; \\ 2^r - 1 \geq 4 + r + \frac{(4+r)!}{2!(4+r-2)!}; \\ 2^r - 1 \geq 4 + r + \frac{(4+r-1)(4+r)}{2}, r = 6.$$

Приклад 5.3. У радіосистемі передавання дискретної інформації застосоване завадостійке кодування з виправленням однократних помилок. Система працює з джерелом M повідомлень, задане максимальне значення ймовірності помилкового приймання одного повідомлення $p_{ном}$. Визначити допустиме значення ймовірності помилкового приймання одного символу p_e , якщо $M = 64$, $p_{ном} \leq 10^{-6}$.

Розв'язання. Кількість інформаційних символів k у кодовій комбінації $k = \log 64 = 6$. Кількість контрольних символів r визначається з нерівності $2^r - 1 \geq 6 + r$, $r = 4$.

Допустима ймовірність помилкового приймання одного символу визначається з рівняння

$$p_{ном} = 1 - (1 - p_e)^{k+r} - (k+r)p_e(1 - p_e)^{k+r-1}.$$

Оскільки $p_e \ll 1$, аналогічно прикладу 5.1:

$$p_{ном} \approx (k+r)(k+r-1)p_e^2.$$

Звідси

$$p_e = \sqrt{\frac{p_{ном}}{(k+r)(k+r-1)}} = \sqrt{\frac{10^{-6}}{10 \cdot 9}} = 1,05 \cdot 10^{-4}.$$

Приклад 5.4. Радіосистема призначена для передавання дискретних повідомлень алфавіту M . Визначити значення допустимих ймовірностей помилок на один символ при роботі натуральним двійковим кодом і завадостійким блочним кодом, який виправляє однократні помилки, якщо задана ймовірність помилкового приймання кодової комбінації $p_{ном}$. Обчислити еквівалентний виграш у завадостійкості в перерахунку на один символ за таких числових значень: $M = 128$, $p_{ном} = 10^{-7}$.

Розв'язання. Кількість інформаційних символів $k = \log M = \log 128 = 7$. Кількість контрольних символів $r = 4$ (з нерівності $2^r - 1 \geq 7 + r$).

При натуральному двійковому кодуванні

$$p_{ном} = 1 - (1 - p_e)^k \approx kp_e.$$

Звідси

$$p_{e1} = \frac{p_{ном}}{k} = \frac{10^{-7}}{7} = 1,4 \cdot 10^{-8}.$$

Користуючись формулою, що одержана у процесі розв'язання прикладу 5.3, визначаємо

$$P_{e2} = \sqrt{\frac{P_{ном}}{(k+r)(k+r-1)}} = \sqrt{\frac{10^{-7}}{11 \cdot 10}} = 3 \cdot 10^{-5}.$$

Еквівалентний виграш у завадостійкості дорівнює

$$B = \frac{P_{e2}}{P_{e1}} = \frac{3 \cdot 10^{-5}}{1,4 \cdot 10^{-8}} = 2,16 \cdot 10^3.$$

Приклад 5.5. У радіосистемі передачі дискретних повідомлень використовується завадостійке кодування кодом Хеммінга. Закодувати повідомлення з номером N , якщо задана загальна кількість елементарних повідомлень M ; відомо, що $N=3$, $M=100$.

Розв'язання. Визначимо кількість інформаційних і контрольних символів у кодовій комбінації:

$$k = \log M = \log 100 \approx 7,$$

$$2^r - 1 \geq 7 + r, \quad r = 4.$$

Структура комбінації коду Хеммінга є такою:

$$b_1 b_2 a_3 b_4 a_5 a_6 a_7 b_8 a_9 a_{10} a_{11},$$

де a – інформаційні, b – контрольні символи.

Інформаційні символи визначаються переведенням номера повідомлення з десяткового коду у двійковий, тобто

$$a_3 = 0, a_5 = 0, a_6 = 0, a_7 = 0, a_9 = 0, a_{10} = 1, a_{11} = 1.$$

Контрольні символи визначаються зі співвідношень:

$$b_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 \oplus a_9 \oplus a_{11} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1,$$

$$b_2 = a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{10} \oplus a_{11} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0,$$

$$b_4 = a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0,$$

$$b_8 = a_9 \oplus a_{10} \oplus a_{11} = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0.$$

Шукана кодова комбінація є такою: 10000000011.

Приклад 5.6. Дискретна система зв'язку використовує завадостійке кодування повідомлень (кодом Хеммінга). Передана кодова комбінація з умов прикладу 5.5. Система прийняла кодову комбінацію 10001000011. Перевірте, чи правильно прийнята комбінація і за необхідності виправте її.

Розв'язання. Прийнята кодова комбінація має вигляд:

$$\hat{b}_1\hat{b}_2\hat{a}_3\hat{b}_4\hat{a}_5\hat{a}_6\hat{a}_7\hat{b}_8\hat{a}_9\hat{a}_{10}\hat{a}_{11}.$$

Для перевірки прийнятої кодової комбінації необхідно визначити контрольне число $S = s_4s_3s_2s_1$, елементи якого обчислюються зі співвідношень:

$$s_1 = \hat{b}_1 \oplus \hat{a}_3 \oplus \hat{a}_5 \oplus \hat{a}_7 \oplus \hat{a}_9 \oplus \hat{a}_{11} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1,$$

$$s_2 = \hat{b}_2 \oplus \hat{a}_3 \oplus \hat{a}_6 \oplus \hat{a}_7 \oplus \hat{a}_{10} \oplus \hat{a}_{11} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0,$$

$$s_3 = \hat{b}_4 \oplus \hat{a}_5 \oplus \hat{a}_6 \oplus \hat{a}_7 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1,$$

$$s_4 = \hat{b}_8 \oplus \hat{a}_9 \oplus \hat{a}_{10} \oplus \hat{a}_{11} = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0.$$

$$S = 0101.$$

Відмінність контрольного числа від нуля свідчить про наявність помилки в кодовій комбінації. Якщо помилка одна, вона може бути виправлена інвертуванням, оскільки контрольне число, переведене з двійкової системи в десяткову, вказує номер спотвореної позиції, тобто

$$S = 0101 \Rightarrow 5.$$

Приклад 5.7. У радіосистемі передачі дискретних повідомлень застосовується завадостійке кодування циклічним кодом, здатним виправляти одиничні помилки. Загальна кількість елементарних повідомлень, що передаються, дорівнює M . Визначити кодову комбінацію для повідомлення за номером 10, якщо $M = 16$.

Розв'язання. Визначимо кількість інформаційних і контрольних символів у кодовій комбінації:

$$k = \log M = \log 16 = 4, \quad 2^r - 1 \geq 4 + r, \quad r = 3.$$

Кодова комбінація для повідомлення за номером 10 має вигляд 1010 або подана у вигляді двійкового полінома:

$$G(x) = x^3 + x.$$

Для $r = 3$ обираємо з дод. 2 породжувальний поліном

$$P(x) = x^3 + x^2 + 1.$$

Визначаємо комбінацію циклічного коду за формулою

$$F(x) = G(x) \cdot x^r \oplus R(x),$$

де $R(x)$ – залишок від ділення добутку $G(x) \cdot x^r$ на породжувальний поліном $P(x)$.

$$G(x) \cdot x^r = (x^3 + x) \cdot x^3 = x^6 + x^4,$$

$$\begin{array}{r}
 x^6 + x^4 \\
 + \quad \left| \begin{array}{l} x^3 + x^2 + 1 \\ \hline x^3 + x^2 + 1 \end{array} \right. \\
 \hline
 x^6 + x^5 + x^3 \\
 \quad \quad \quad x^5 + x^4 + x^3 \\
 \quad \quad \quad + \\
 \quad \quad \quad \left| \begin{array}{l} x^5 + x^4 + x^2 \\ \hline x^3 + x^2 \end{array} \right. \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \left| \begin{array}{l} x^3 + x^2 + 1 \\ \hline R(x) = 1 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$F(x) = x^6 + x^4 + 1, \text{ або } 1010001.$$

Приклад 5.8. Цифрова система радіозв'язку використовує завадостійке кодування циклічним кодом, що виправляє одиничні помилки. Довжина кодової комбінації за умов $n = 7$. Породжувальний поліном $P(x) = x^3 + x^2 + 1$. Прийнята кодова комбінація 1110001.

Перевірте, чи правильно прийнята комбінація і за необхідності виправте її.

Розв'язання. Запишемо прийнятну кодову комбінацію у вигляді двійкового полінома

$$\hat{F}(x) = x^6 + x^5 + x^4 + 1.$$

Перевіримо комбінацію шляхом ділення її на породжувальний поліном $\hat{F}(x) / P(x)$:

$$\begin{array}{r} x^6 + x^5 + x^4 + 1 \\ + \quad \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^3 + x} \\ \hline x^4 + x^3 + 1 \\ + \quad \frac{x^4 + x^3 + x}{R^*(x) = x + 1} \end{array}$$

Наявність ненульового залишку $R^*(x)$ свідчить про помилку в прийнятій кодовій комбінації. Для виправлення помилки необхідно знайти вектор помилки $E(x) = x^i$, $i = \overline{0, n-1}$ і виконати операцію $\hat{F}(x) \oplus E(x) = F(x)$, де $F(x)$ — передана комбінація. Запропоновані різні варіанти розв'язання цієї задачі. Розглянемо найпростіший. Знайдемо еталонний залишок, який відповідає помилці в першому (старшому) розряді кодової комбінації. Для цього поділимо вектор помилки в першому розряді на породжувальний поліном $E(x) / P(x)$:

$$\begin{array}{r}
x^6 \\
+ \quad \left| \begin{array}{l} x^3 + x^2 + 1 \\ \hline x^3 + x^2 + x \end{array} \right. \\
\hline
x^6 + x^5 + x^3 \\
\quad \quad \quad x^5 + x^3 \\
+ \\
\quad \quad \quad \left| \begin{array}{l} x^5 + x^4 + x^2 \\ \hline x^4 + x^3 + x^2 \end{array} \right. \\
+ \\
\quad \quad \quad \left| \begin{array}{l} x^4 + x^3 + x \\ \hline R_{em}(x) = x^2 + x \end{array} \right.
\end{array}$$

Зафіксуємо значення еталонного залишку.

Залишок, який був одержаний при діленні прийнятої кодової комбінації на породжувальний поліном, не збігається з еталонним залишком:

$$R_i^*(x) \oplus R_{em}(x) = (x+1) \oplus (x^2+x) = x^2+1.$$

Отже, помилка не в першому розряді.

Здійснимо циклічний зсув прийнятої кодової комбінації на один розряд справа наліво і знову поділимо на породжуючий поліном $[\hat{F}(x) \cdot x] / P(x)$.

$$\hat{F}(x) \cdot x = (x^6 + x^5 + x^4 + 1) \cdot x = x^6 + x^5 + x + 1$$

$$\begin{array}{r}
x^6 + x^5 + x + 1 \\
+ \quad \left| \begin{array}{l} x^3 + x^2 + 1 \\ \hline x^3 + 1 \end{array} \right. \\
\hline
x^6 + x^5 + x^3 \\
\quad \quad \quad x^3 + x + 1 \\
+ \\
\quad \quad \quad \left| \begin{array}{l} x^3 + x^2 + 1 \\ \hline R_2^*(x) = x^2 + x \end{array} \right.
\end{array}$$

$$R_2^*(x) \oplus R_{em}(x) = (x^2+x) \oplus (x^2+x) = 0$$

Рівність еталонного та одержаного залишків свідчить про помилку в другому розряді. Якщо рівність не досягнута, описаний процес циклічного зсуву і ділення необхідно продовжувати до досягнення результату $R_i^*(x) \oplus R_{em}(x) = 0$. Номер спотвореного розряду визначається як кількість кроків зсуву плюс одиниця.

5.3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 5.1. Для підвищення завадостійкості системи передачі дискретної інформації застосовано завадостійке блочне кодування з виправленням одиничних помилок у кожній кодовій комбінації. Обчислити ймовірність помилкового приймання кодових комбінацій, якщо задані довжина кодової комбінації n і ймовірність помилкового приймання одного символу p_e (табл. 41).

Таблиця 41

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
p_e	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-6}

Задача 5.2. У системі передачі дискретних повідомлень використовується завадостійке кодування (кодом Хеммінга). Закодувати повідомлення з порядковим номером N , якщо задана загальна кількість елементарних повідомлень M (табл. 42).

Таблиця 42

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
N	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Задача 5.3. У системі передачі дискретних повідомлень використовується завадостійке кодування (кодом Хеммінга). Закодувати повідомлення з порядковим номером N , якщо задана загальна кількість елементарних повідомлень M (табл. 43). Внести помилку в i -й розряд і показати процес виправлення комбінації.

Таблиця 43

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
N	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Задача 5.4. У системі передачі дискретних повідомлень використовується завадостійке кодування циклічним кодом, що виправляє одиничні помилки. Закодувати повідомлення з порядковим номером N , якщо задана загальна кількість елементарних повідомлень M (табл. 44).

Таблиця 44

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
N	6	15	14	13	12	11	10	9	8	7

Задача 5.5. У системі передачі дискретних повідомлень використовується завадостійке кодування циклічним кодом, що виправляє одиничні помилки. Закодувати повідомлення з порядковим номером N , якщо задана загальна кількість елементарних повідомлень M (табл. 45). Внести помилку в i -й розряд і показати процес виправлення комбінації.

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	4	3	2	4	3	2	4	3	2	4

Контрольні питання

1. Поясніть відмінність між рівномірним і нерівномірним кодуванням.
2. Що таке надмірність завадостійкого коду?
3. Що таке відносна швидкість завадостійкого коду?
4. Що таке відстань за Хеммінгом і вага кодової комбінації?
5. Що таке мінімальна відстань коду?
6. Як зв'язані мінімальна відстань коду, число виправлених та число виявлених помилок?

6. БАГАТОКАНАЛЬНЕ ПЕРЕДАВАННЯ ПОВІДОМЛЕНЬ

6.1. Короткі теоретичні відомості

Важливою проблемою техніки передавання повідомлень є збільшення пропускної здатності ліній зв'язку шляхом одночасного передавання повідомлень від декількох джерел однією лінією зв'язку. Основною для багатоканального зв'язку є задача розділення багатоканальних сигналів. Практично розділення не буває досконалим, на сигнал одного каналу накладаються тією чи іншою мірою сигнали інших каналів. Це створює специфічні для багатоканального зв'язку перехідні або взаємні завади. Покращенням системи ці завади можуть бути зведені до допустимої величини. Поряд із взаємними наявні і звичайні адитивні завади. При великій кількості каналів характеристики взаємних завад можна вважати близькими до флуктуаційних шумів. Середня потужність перехідних (взаємних) завад у каналі пропорційна середній потужності P_c сигналів і дорівнює μP_c , де μ — коефіцієнт взаємної заважаючої дії між каналами. Загальна потужність завад у каналі дорівнює сумі адитивної $P_{ш}$ і перехідної μP_c завад: $P_{\Sigma} = P_{ш} + \mu P_c$. Цю потужність, звичайно, і слід підставляти у формулу Шеннона при визначенні пропускної здатності каналу [6]:

$$C_k = \Delta f_k \log \left(\frac{P_c}{P_{ш} + \mu P_c} + 1 \right).$$

Пропускна здатність усієї системи:

$$C = \sum_{k=1}^n C_k = \sum_{k=1}^n \Delta f_k \log \left(\frac{P_{ck}}{P_{шк} + \mu P_{ck}} + 1 \right).$$

Із наведених формул видно, що пропускна здатність багатоканальної системи збільшується при зменшенні μ , тобто при покращенні якості розділення каналів.

У випадку малого рівня адитивних завад у порівнянні з перехідними, тобто при $P_u \ll \mu P_c$ маємо

$$C_k = \Delta f_k \log\left(\frac{1}{\mu} + 1\right).$$

У цьому випадку при заданій якості розділення каналів збільшити пропускну здатність каналу за рахунок збільшення потужності сигналів неможливо.

Для того, щоб взаємні завади не призводили до відчутного зниження пропускну здатності системи зв'язку, слід прагнути отримання такого значення коефіцієнта μ , при якому $P_u \gg \mu P_c$, тобто $\mu \ll \frac{P_u}{P_c}$.

Найбільше застосовуються багатоканальні системи з часовим та частотним ущільненням каналів. При часовому ущільненні кожному каналу відводиться свій часовий інтервал. Для забезпечення нормальної передачі інформації здійснюється синхронізація мультиплексорів передавача і приймача. Якість передачі інформації, пропускну здатність системи з часовим ущільненням залежить від виду модуляції, який використовується. На цей час найбільшого поширення набули різні види цифрової модуляції.

При частотному ущільненні кожному каналу відводиться своя частотна область смуги пропускання лінії зв'язку. Для зменшення взаємного накладання спектрів сусідніх каналів між ними залишають захисний проміжок, ширина якого дорівнює 10 – 20 % від смуги, яку займає канал. Якщо задана ширина смуги пропускання лінії зв'язку Δf_n , то кількість каналів n , які можна організувати за заданою лінією, визначається вихідною шириною спектра Δf_c , величиною захисного проміжка між каналами δf , нижньою граничною частотою спектра багатоканального повідомлення f_n і коефіцієнтом зміни ширини спектра сигналу в процесі модуляції Φ_c .

6.2. Приклади розв'язання основних типів задач

Приклад 6.1. Визначити допустиме значення коефіцієнта взаємної дії завад між каналами у 20-канальній системі, якщо допустиме значення зменшення пропускної здатності системи складає 10 %, ширина смуги пропускання одного каналу 5 кГц, потужність каналного сигналу 10 мВт, потужність шуму в одному каналі 1 мВт.

Розв'язання. При повній відсутності взаємної заважаючої дії між каналами пропускна здатність багатоканальної системи обчислюється за формулою

$$C = \sum_{\kappa=1}^n C_{\kappa} = \sum_{\kappa=1}^n \Delta f_{\kappa} \log \left(\frac{P_{\text{ск}}}{P_{\text{шк}}} + 1 \right).$$

За наявності взаємної заважаючої дії

$$C_{\mu} = \sum_{\kappa=1}^n \Delta f_{\kappa} \log \left(\frac{P_{\text{ск}}}{P_{\text{шк}} + \mu P_{\text{ск}}} + 1 \right).$$

Після підставлення значень, наведених в умові, маємо:

$$C = 20 \cdot 5 \log \left(\frac{10}{1} + 1 \right);$$

$$C_{\mu} = 0,9C \log \left(\frac{10}{1+10\mu} + 1 \right) \cdot 0,9 = \frac{\log \left(\frac{10}{1+10\mu} + 1 \right)}{\log 11}.$$

Поділивши C на C_{μ} , отримаємо рівняння

$$0,9 = \frac{\log \left(\frac{10}{1+10\mu} + 1 \right)}{\log 11}.$$

Звідки $\mu=0,001$.

Приклад 6.2. Визначити необхідну смугу пропускання Δf_k 32-канальної ($n=32$) системи зв'язку з часовим ущільненням каналів, якщо в кожному з каналів необхідно передавати з циклом $T_y=0,1$ с повідомлення у вигляді 8-розрядних кодових комбінацій ($m=8$) методом ІКМ-АМ. Захисний інтервал між імпульсами t_3 дорівнює тривалості імпульсу τ .

Розв'язання. Необхідна смуга пропускання Δf_k має бути не меншою від ширини спектра сигналу Δf_c , що передається, тобто $\Delta f_k \geq \Delta f_c$. Ширина спектра ІКМ-АМ-сигналу залежить від тривалості імпульсів, що передаються, і визначається співвідношенням

$$\Delta f_c = \frac{1}{\tau}.$$

У свою чергу тривалість імпульсу (час на передавання одного розряду) обчислюється за формулою

$$\tau = \frac{T_y}{n} \left(m \frac{\tau + t_3}{\tau} \right)^{-1}.$$

Введемо позначення для шпаруватості:

$$a = \frac{\tau + t_3}{\tau}.$$

Тоді формула для визначення тривалості імпульсу набуде вигляду

$$\tau = \frac{T_y}{nma}.$$

У результаті

$$\Delta f_c = \frac{1}{\tau} = \frac{nma}{T_y} = \frac{32 \cdot 8 \cdot 2}{0,1} = 5120 \text{ Гц.}$$

Тобто $\Delta f_k \geq 5120$ Гц.

Приклад 6.3. Визначити, яку максимальну кількість телефонних каналів можна організувати в системі зв'язку з часовим ущільненням при використанні дельта-модуляції, якщо часовий інтервал Δt , який відводиться на один канал, дорівнює 1 мкс, максимальна кількість рівнів квантування $M=32$.

Розв'язання. Частота дискретизації мовного сигналу в телефонному каналі F_D визначається відповідно до теореми відліків за формулою

$$F_D = (2,3 \dots 2,5) F_B,$$

де F_B – відповідно до стандарту дорівнює 3,4 кГц.

Тому $F_D = 2,5 \cdot 3,4 \approx 8$ кГц.

Часовий інтервал, який відповідає цій частоті дискретизації:

$$T_D = \frac{1}{F_D} = \frac{1}{8 \cdot 10^3} = 125 \text{ мкс.}$$

За умов застосування дельта-модуляції в каналах, кількості рівнів квантування $M=32$ і захисними інтервалами між імпульсами, які дорівнюють тривалості імпульсів, кількість каналів обчислюється за формулою

$$n = \frac{T_D}{\log M \cdot 2\Delta t} = \frac{125}{5 \cdot 2 \cdot 1} \approx 12 \text{ каналів.}$$

Приклад 6.4. Визначити необхідну швидкість передавання даних B у системі зв'язку з часовим ущільненням, якщо передаваний безперервний сигнал дискретизується за часом з частотою $F_D = 8$ кГц і квантується за рівнями, причому максимальна кількість рівнів $M = 32$. Кількість каналів у системі дорівнює $n=12$.

Розв'язання. Необхідна швидкість передавання даних обчислюється за формулою

$$B = F_{\text{д}} \cdot n \cdot \log M = 8 \cdot 10^3 \cdot 12 \cdot \log 32 = 48000 \text{ Бод.}$$

Приклад 6.5. Визначити тривалість імпульсів при передаванні сигналів з ІКМ у 24-канальній системі з часовим ущільненням, якщо кількість можливих станів кожного із передаваних сигналів дорівнює 256, максимальна частота спектра каналних сигналів 4 кГц, захисний інтервал між імпульсами дорівнює тривалості імпульсу.

Розв'язання. Частота дискретизації сигналу визначається відповідно до теореми відліків:

$$F_{\text{д}} = (2,3 \dots 2,5) F_{\text{в}} = 2,5 \cdot 4 = 10 \text{ кГц.}$$

Часовий інтервал, у якому розміщуються всі каналні сигнали, дорівнює інтервалу дискретизації:

$$T_{\text{д}} = \frac{1}{F_{\text{д}}} = \frac{1}{10^4} = 100 \text{ мкс.}$$

Тривалість каналних імпульсів обчислюється за формулою

$$\tau = \frac{T_{\text{д}}}{\log M \cdot 2n} = \frac{100}{2 \cdot 24 \cdot \log 256} = 0,26 \text{ мкс.}$$

Приклад 6.6. Смуга пропускання лінії зв'язку $\Delta f_{\text{л}} = 2$ МГц. Визначити можливу кількість стандартних телефонних каналів з односмуговою модуляцією, які можуть бути розміщені в цій смузі при використанні частотного ущільнення. Верхня гранична частота спектра каналного повідомлення дорівнює 4 кГц, захисний інтервал між каналами дорівнює 20 % від ширини спектра кожного із сигналів.

Розв'язання. Кількість каналів обчислюється за формулою

$$n = \frac{\Delta f_l}{F_B + 0,2 \cdot F_B} = \frac{2 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^3 + 0,2 \cdot 4 \cdot 10^3} \approx 417.$$

6.3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 6.1. Визначити допустиме значення коефіцієнта взаємної заважаючої дії між каналами у N -канальній системі, якщо ширина смуги пропускання одного каналу Δf_k , потужність каналного сигналу P_c , потужність шуму в одному каналі P_u , допустиме значення зменшення пропускну здатності системи L , % (табл. 46).

Таблиця 46

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Δf_k , кГц	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5
P_c , Вт	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-11}	10^{-10}	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}
P_u , Вт	10^{-9}	10^{-10}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-13}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-10}	10^{-9}	10^{-9}
L , %	10	20	30	10	20	30	10	20	30	10

Задача 6.2. Визначити необхідну смугу пропускання Δf_k N -канальної системи зв'язку з часовим ущільненням каналів, якщо в кожному з каналів необхідно передавати з циклом T_u повідомлення у вигляді n -розрядних комбінацій методом ІКМ-АМ. Захисний інтервал між імпульсами t_s дорівнює тривалості імпульсу τ (табл. 47).

Таблиця 47

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
T_u , с	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
n	10	11	12	11	10	9	8	6	6	5

Задача 6.3. Визначити, яку максимальну кількість каналів можна організувати в системі зв'язку з часовим ущільненням при використанні ІКМ, якщо часовий інтервал, який відводиться для передавання одного імпульсу, дорівнює τ , захисний інтервал між імпульсами $t_3 = \tau$, максимальна кількість рівнів квантування M , верхня частота спектра каналного сигналу F_B (табл. 48).

Таблиця 48

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
τ , с	10^{-6}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}
F_B , кГц	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Задача 6.4. Визначити необхідну швидкість передавання даних B у системі зв'язку з часовим ущільненням, якщо передаваний безперервний сигнал дискретизується за часом з частотою F_D і квантується за рівнями, причому максимальна кількість рівнів M . Кількість каналів у системі дорівнює n (табл. 49).

Таблиця 49

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	2048	1024	512	256	128	128	256	512	1024	2048
n	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
F_D , кГц	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Задача 6.5. Визначити можливу кількість каналів з односмуговою модуляцією, які можуть бути розміщені у смузі Δf бататоканальної системи при використанні частотного ущільнення. Верхня гранична частота спектра каналного повідомлення F_B , захисний інтервал між каналами δf , %, від ширини спектра кожного із каналних сигналів (табл. 50).

Таблиця 50

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\delta f, \%$	10	15	20	25	10	15	20	25	10	15
$\Delta f, \text{МГц}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_B, \text{кГц}$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Задача 6.6. Визначити тривалість імпульсів при передаванні сигналів з ІКМ у n -канальній системі з часовим ущільненням, якщо кількість можливих станів кожного із передаваних сигналів дорівнює M , максимальна частота спектра каналних сигналів F_B , захисний інтервал між імпульсами дорівнює тривалості імпульсу (табл. 51).

Таблиця 51

Вихідні дані

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	128	256	512	1024	2048	2048	1024	512	256	128
n	55	50	45	40	35	30	25	20	15	10
$F_B, \text{кГц}$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Контрольні питання

1. Дайте визначення багатоканального передавання повідомлень.
2. Дайте визначення коефіцієнта взаємної дії завад між каналами, яке значення повинно бути у коефіцієнта для забезпечення високої пропускної здатності системи зв'язку?
3. Від чого залежить значення коефіцієнта взаємної дії завад між каналами?
4. Дайте визначення пропускної здатності каналу за Шенноном з урахуванням коефіцієнта взаємної дії завад між каналами.
5. Чим визначається кількість каналів n , які можна організувати за заданою лінією?

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Теория электрической связи [Текст]: учеб. для вузов / А. Г. Зюко, Д. Д. Кловский, В. И. Коржик, М. В. Назаров. – М.: Радио и связь, 1999. – 432 с.
2. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы [Текст]: учеб. для вузов / И. С. Гоноровский. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.
3. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы [Текст]: учеб. для вузов по спец. "Радиотехника" / С. И. Баскаков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1988. – 488 с.
4. Поляков, П. Ф. Введение в теорию транспортной связи [Текст]: учеб. пособие. Ч. 1. Основы теории сигналов. / П. Ф. Поляков. – Харьков: ХИИТ, 1988. – 155 с.
5. Батаев, О. П. Теорія електричного зв'язку [Текст]: навч. посібник Ч. 1. Детерміновані сигнали в системах зв'язку / О. П. Батаев, В. І. Поддубняк. – Харків: ХДАЗТ, 1998. – 169 с.
6. Батаев, О. П. Теория электрической связи [Текст]: учеб. пособие Ч. 2. Случайные события, функции распределения и числовые характеристики случайных величин. Основы математической статистики / О. П. Батаев, В. И. Поддубняк. – Харьков: ХарГАЖТ, 1998. – 154 с.
7. Батаев, О. П. Теория электрической связи [Текст]: учеб. пособие Ч. 3. Вероятностные модели сигналов, помех и каналов связи. Оптимальные методы приема сигналов / О. П. Батаев, В. И. Поддубняк. – Харьков: ХарГАЖТ, 1998. – 97 с.
8. Батаев, О. П. Теория электрической связи [Текст]: учеб. пособие Ч. 4. Случайные процессы в каналах связи / О. П. Батаев, В. И. Поддубняк. – Харьков: ХарГАЖТ, 1998. – 178 с.
9. Батаев, О. П. Теория электрической связи [Текст]: учеб. пособие Ч. 5. Основы теории информации и кодирования / О. П. Батаев, В. И. Поддубняк. – Харьков: ХарГАЖТ, 1999. – 334 с.
10. Батаев, О. П. Теорія електричного зв'язку [Текст]: навч. посібник / О. П. Батаев, І. В. Ковтун, Н. А. Корольова. – Харків: УкрДАЗТ, 2010. – 630 с.

Значення інтегралів імовірності

Табульовані значення функції Крампа $\Phi(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{\alpha} e^{-t^2/2} dt$

α	$\Phi(\alpha)$	α	$\Phi(\alpha)$	α	$\Phi(\alpha)$
0,00	0,0000	1,25	0,7887	2,50	0,9876
0,05	0,0399	1,30	0,8064	2,55	0,9892
0,10	0,0797	1,35	0,8230	2,60	0,9907
0,15	0,1192	1,40	0,8385	2,65	0,9920
0,20	0,1585	1,45	0,8529	2,70	0,9931
0,25	0,1974	1,50	0,8664	2,75	0,9940
0,30	0,2358	1,55	0,8789	2,80	0,9949
0,35	0,2737	1,60	0,8904	2,85	0,9956
0,40	0,3108	1,65	0,9011	2,90	0,9963
0,45	0,3473	1,70	0,9109	2,95	0,9968
0,50	0,3829	1,75	0,9199	3,00	0,99730
0,55	0,4177	1,80	0,9281	3,10	0,99806
0,60	0,4515	1,85	0,9357	3,20	0,99863
0,65	0,4843	1,90	0,9426	3,30	0,99903
0,70	0,5161	1,95	0,9488	3,40	0,99933
0,75	0,5467	2,00	0,9545	3,50	0,99953
0,80	0,5763	2,05	0,9596	3,60	0,99968
0,85	0,6047	2,10	0,9643	3,70	0,99978
0,90	0,6319	2,15	0,9684	3,80	0,99986
0,95	0,6579	2,20	0,9722	3,90	0,99990
1,00	0,6827	2,25	0,9756	4,00	0,99994
1,05	0,7063	2,30	0,9786	4,417	$1 \cdot 10^{-5}$
1,10	0,7287	2,35	0,9812	4,892	$1 \cdot 10^{-6}$
1,15	0,7499	2,40	0,9836	5,327	$1 \cdot 10^{-7}$
1,20	0,7699	2,45	0,9857	6,00	$1 \cdot 10^{-8}$

Поліноми, що не приводяться

Степінь твірною полінома r	Вид полінома, що не приводиться $P(x)$	Значність коду $n = l = 2^r - 1$
1	$x+1$	1
2	x^2+x+1	3
3	x^3+x^2+1 x^3+x+1	7
4	x^4+x+1 x^4+x^3+1 $x^4+x^3+x^2+x+1$	15
5	x^5+x^2+1 x^5+x^3+1 $x^5+x^4+x^2+1$ $x^5+x^3+x^2+x+1$ $x^5+x^4+x^2+x+1$ $x^5+x^4+x^3+x+1$ $x^5+x^4+x^3+x^2+1$	31
6	x^6+x+1 x^6+x^3+1 x^6+x^5+1 $x^6+x^4+x^2+x+1$ $x^6+x^4+x^3+x+1$ $x^6+x^5+x^2+x+1$ $x^6+x^5+x^3+x^2+1$ $x^6+x^5+x^4+x+1$ $x^6+x^5+x^4+x^2+1$	63
7	x^7+x+1 x^7+x^6+1	127
8	$x^8+x^4+x^3+x^2+1$ $x^8+x^6+x^5+x^4+1$	255
9	x^9+x^4+1 x^9+x^5+1	511
10	$x^{10}+x^3+1$ $x^{10}+x^7+1$	1023

ДОДАТОК 3

Таблиця значень допоміжної функції $H(p) = -p \log_2 p$

p	$H(p)$	p	$H(p)$	p	$H(p)$	p	$H(p)$
0,00	0,0000	0,26	0,5053	0,51	0,4954	0,76	0,3009
0,01	0,0664	0,27	0,5100	0,52	0,4906	0,77	0,2903
0,02	0,1129	0,28	0,5142	0,53	0,4854	0,78	0,2796
0,03	0,1518	0,29	0,5179	0,54	0,4800	0,79	0,2687
0,04	0,1858	0,30	0,5211	0,55	0,4744	0,80	0,2575
0,05	0,2161	0,31	0,5238	0,56	0,4684	0,81	0,2462
0,06	0,2435	0,32	0,5260	0,57	0,4623	0,82	0,2348
0,07	0,2686	0,33	0,5278	0,58	0,4558	0,83	0,2231
0,08	0,2915	0,34	0,5292	0,59	0,4491	0,84	0,2113
0,09	0,3127	0,35	0,5301	0,60	0,4422	0,85	0,1993
0,10	0,3322	0,36	0,5306	0,61	0,4350	0,86	0,1871
0,11	0,3503	0,37	0,5307	0,62	0,4276	0,87	0,1748
0,12	0,3671	0,38	0,5305	0,63	0,4199	0,88	0,1623
0,13	0,3826	0,39	0,5298	0,64	0,4121	0,89	0,1496
0,14	0,3971	0,40	0,5288	0,65	0,4040	0,90	0,1368
0,15	0,4105	0,41	0,5274	0,66	0,3956	0,91	0,1238
0,16	0,4230	0,42	0,5256	0,67	0,3871	0,92	0,1107
0,17	0,4346	0,43	0,5236	0,68	0,3783	0,93	0,0974
0,18	0,4453	0,44	0,5211	0,69	0,3694	0,94	0,0839
0,19	0,4552	0,45	0,5184	0,70	0,3602	0,95	0,0703
0,20	0,4644	0,46	0,5153	0,71	0,3508	0,96	0,0565
0,21	0,4728	0,47	0,5120	0,72	0,3412	0,97	0,0426
0,22	0,4806	0,48	0,5083	0,73	0,3314	0,98	0,0286
0,23	0,4877	0,49	0,5043	0,74	0,3215	0,99	0,0144
0,24	0,4941	0,50	0,5000	0,75	0,3113	1,00	0,0000

