ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра „Вища математика”

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

та завдання до виконання контрольних робіт з дисципліни

„*ВИЩА МАТЕМАТИКА*”

Харків 2009

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри «Вища математика» 28 січня 2008 р.,

протокол № 8.

Методичні вказівки містять необхідну кількість означень, формул і рекомендацій, за допомогою яких студент може опанувати тему "Інтегральне числення" і виконати контрольну роботу з цієї теми, а також достатню кількість варіантів завдань для контрольної роботи.

Методичні вказівки призначено для організації самостійної роботи студентів економічних спеціальностей заочної форми навчання, але, при певних зауваженнях викладача, їх можна застосовувати студентам інших спеціальностей заочної та денної форм навчання.

Укладачі:

доценти Ю.О. Акімова,
А. О. Дрогаченко,
О.А. Осмаєв

Рецензент

доц. М.Є. Резуненко

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Методичні вказівки та завдання
до виконання контрольних робіт
з дисципліни
„ВИЩА МАТЕМАТИКА”

Відповідальний за випуск Акімова Ю.О.

Редактор Решетилова В.В.

Підписано до друку 03.03.08 р.
Формат паперу 60х84 1/16 . Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 3,75. Обл.-вид.арк. 4,0.
Замовлення № Тираж 300 Ціна

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК 2874 від 12.06.2007 р.
Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, пл. Фейєрбаха, 7

Методичні вказівки і завдання розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри «Вища математика» 28.01.2008 р., протокол № 8.

Методичні вказівки містять необхідну кількість означень, формул і рекомендацій, за допомогою яких студент може опанувати тему "Інтегральне числення" і виконати контрольну роботу з цієї теми, а також достатню кількість варіантів завдань для контрольної роботи.

Методичні вказівки призначено для організації самостійної роботи студентів економічних спеціальностей заочної форми навчання, але, при певних зауваженнях викладача, їх можна застосовувати студентам інших спеціальностей заочної та денної форм навчання.

Укладачі:

доценти Ю.О. Акімова,
А. О. Дрогаченко,
О.А. Осмаєв

Рецензент

доц. М.Є. Резуненко

ВСТУП

Дані методичні вказівки присвячені дуже важливому розділу курсу вищої математики, який називається "Інтегральне числення". Цей розділ містить три теми:

1) невизначений інтеграл (завдання 1);
2) визначений інтеграл та його застосування (завдання 2–7);
3) невласний інтеграл (завдання 8).

Методичні вказівки складаються з трьох частин: перша частина містить у собі необхідну кількість означень, понять і формул за цими темами; друга – зразок виконання типових завдань контрольної роботи; третя – достатню кількість варіантів завдань для цієї контрольної роботи.

Зауважимо, що біля кожного параграфа у дужках помічені номери задач, для яких використовуються означення і формули саме цього параграфа.

Зауважимо також, що деякі задачі, за визначенням викладача, виконувати не треба.

Ці методичні вказівки допоможуть студентам заочної форми навчання опанувати матеріал розділу.

ЧАСТИНА 1

ТЕМА 1 НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ (ЗАВДАННЯ 1)

§ 1 Основні поняття: первісна, невизначений інтеграл

Означення 1. Якщо $f(x)$ функція неперервна на сегменті, $[a, b]$, тоді функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$, якщо на сегменті $[a, b]$ виконується тотожність

$$F'(x) \equiv f(x) \qquad \forall x \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$$

Приклад: $f(x) = x^3$ $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ (Дійсно, $F'(x) = \left(\frac{1}{4}x^4\right)' = 4x^3$).

Справедливе твердження:

якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, а C - довільна стала, тоді сума $F(x) + C$ виявляється сукупністю усіх первісних для функції $f(x)$; (тобто $f(x)$ має нескінченну множину первісних, які відрізняються одна від одної на сталу величину).

Означення 2. Сукупність усіх первісних для функції $f(x)$ називається **невизначеним інтегралом** і позначається так:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $\int$ − знак інтеграла;

$f(x)$ – підінтегральна функція;

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз; процес обчислення невизначеного інтеграла називається невизначеним інтегруванням;

"x" – змінна невизначеного інтегрування.

§ 2 Властивості невизначеного інтеграла

1) $\left\{\int f(x)dx\right\}' = f(x)$;

2) $\int du = u(x) + c$;

3) $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$;

4) $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$.

Формула заміни змінної для невизначеного інтеграла:

5) $\int f(z)\,dz = \| \; z=\varphi(x) \; \| = \int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx$.

6) Якщо $u=f(x), v=g(x)$, тоді має місце рівність

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$

яку називають **формулою інтегрування частинами.**

Зауваження. На практиці формула інтегрування частинами використовується у випадку, коли підінтегральна функція є добутком двох функцій. Цю формулу рекомендовано використовувати у таких випадках:

1) підінтегральна функція є добутком степеневої функції та показникової або тригонометричної функції, причому через "u" позначають степеневу функцію;

2) один із множників підінтегральної функції виявляється оберненою тригонометричною або логарифмічною функцією. В цьому випадку саме цей множник позначається через "u".

§ 3 Таблиця основних інтегралів

В основі будь-якого методу невизначеного інтегрування міститься таблиця інтегралів, яка є наслідком таблиці похідних:

1) $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \;\; (\alpha \neq -1)$;

2) $\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + C$;

3) $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{ln\,a} + C$;

4) $\int e^{x}dx = e^{x} + C$;

5) $\int sin\,x dx = -cos\,x + C$;

10) $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$;

11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsin\,x + C$;

12) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = arcsin\,x\frac{x}{a} + C$;

13) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$;

14) $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;

6) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

7) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$;

8) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$;

9) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C$;

15) $\int \frac{1}{\sin x} dx = ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$;

16) $\int \frac{1}{\cos x} dx = ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right| + C$;

17) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$;

18) $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = ln|\varphi(x)| + C$.

Формулу 18 можна прочитати так: якщо у чисельнику підінтегральної функції міститься похідна знаменника, тоді інтеграл дорівнює натуральному логарифму знаменника.

§ 4 Методи інтегрування (завдання 1(а, б))

Різні методи інтегрування основані на властивостях невизначеного інтеграла, а саме:

- розкладання підінтегральної функції на суму простіших доданків з метою заміни інтеграла від суми сумою інтегралів (властивість 3);
- заміна змінної у невизначеному інтегралі (властивість 5);
- інтегрування частинами (властивість 6).

§ 5 Раціональна функція та її інтегрування (завдання 1(в))

Означення 1. Раціональною функцією (або раціональним дробом) називають відношення двох многочленів і позначають її так:

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}.$$

Означення 2. Раціональний дріб (функція) називається правильним, якщо $m < n$, і неправильним, якщо $m \geq n$.

Означення 3. Неправильний раціональний дріб можна розкладати на суму "цілої" частини та правильного раціонального дробу. "Ціла" частина (знову многочлен) утворюється, якщо чисельник раціонального дробу поділити на його знаменник.

"Ціла" частина буде часткою, а відношення залишку до знаменника буде правильним раціональним дробом.

Для інтегрування раціонального дробу застосовується перший метод інтегрування, тобто розкладання підінтегральної функції $R(x)$ у суму найпростіших доданків, і здійснюється за нижченаведеним правилом.

5.1 Правило інтегрування раціональної функції $\int R(x)dx$

1 Якщо *R(x)* - неправильний раціональний дріб $(m \geq n)$ по-перше, треба виділити "цілу" частину і записати *R(x)* у вигляді суми

$$R(x) = Q_1(x) + \frac{Q_2(x)}{P(x)},$$

де $Q_1(x)$ - многочлен, який є часткою від ділення *Q(x)* на *P(x)*, $\frac{Q_2(x)}{P(x)}$ правильний раціональний дріб.

2 Розкласти многочлен *P(x)* (знаменник) на множники першого і другого степеня (множники другого степеня мають від'ємні дискримінанти $D_i = p_i^2 - q_i < 0$)

$$P(x) = a_0(x-\alpha)^{k_\alpha}(x-\beta)^{k_\beta}\ldots(x^2 + 2p_1x + q_1)^{l_1}\ldots(x^2 + 2p_sx + q_s)^{l_s}.$$

3 Розкласти правильний раціональний дріб $\frac{Q_2(x)}{P(x)}$ на елементарні дроби відповідно множникам знаменника за таким правилом:

а) кожному множнику $(x-\alpha)^{k_\alpha}$ знаменника $P(x)$ відповідає сума рівно "k_α" елементарних доданків у розкладі $\frac{Q_2(x)}{P(x)}$:

$$(x-\alpha)^{k_\alpha} \sim \frac{A_{k_\alpha}}{(x-\alpha)^{k_\alpha}} + \frac{A_{k_{\alpha-1}}}{(x-\alpha)^{k_{\alpha-1}}} + \ldots + \frac{A_1}{(x-\alpha)};$$

б) аналогічно для множників другого степеня:

$$(x^2+2p_ix+q_i)^{l_i}:\frac{B_{l_i}x+C_{l_i}}{(x^2+2p_ix+q_i)^{l_i}}+\frac{B_{l_{i-1}}x+C_{l_{i-1}}}{(x^2+2p_ix+q_i)^{l_{i-1}}}+\ldots+\frac{B_1x+C_1}{x^2+2p_ix+q_i}.$$

Дроби $\frac{A_k}{(x-\alpha)^k},\frac{B_lx+C_l}{(x^2+2px+q)^l}$ називають елементарними дробами першого і другого типів, відповідно.

Висновок. Будь-який раціональний дріб $R(x)$ розкладається в суму степеневих функцій ($Q_1(x)$) та елементарних дробів першого і другого типів

$$R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}=Q_1(x)+\sum_k\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}+\sum_l\frac{B_lx+C_l}{(x^2+2px+q)^l},$$

а інтеграл від раціонального дробу дорівнює сумі інтегралів від кожного доданка.

§ 6 Інтегрування деяких ірраціональних функцій (завдання 1(г))

Розглянемо інтеграл такого типу:

$$\int R\left(x,\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ldots,\sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx. \qquad (1)$$

Підінтегральна функція є раціональною від аргументів "x", $\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ldots,\sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, тобто будується із "$x$", коренів і дійсних сталих за допомогою арифметичних дій; але, якщо розглядати її як функцію однієї змінної "x", тоді для її будування потрібні ще дії добування коренів.

Таким чином, підінтегральна функція виявляється ірраціональною функцією. Для її інтегрування застосовується метод заміни змінних (див. § 4).

Для цього, по-перше, знаходимо "загальне найменше кратне" (З.Н.К) показників коренів

З.Н.К. $(n_1,n_2,\ldots,n_k)=N$;

по-друге, здійснюємо таку заміну:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=Z^N \tag{2}$$

За допомогою цієї підстановки (2) інтеграл від ірраціональної функції перетворюється в інтеграл від раціональної функції нового аргументу "z":

$$\int R\left(x,\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ldots,\sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R_1(z)dz.$$

Зауваження. У частинному випадку $c=0$, $d=1$ інтеграл (1) має вигляд

$$\int R\left(x,\sqrt[n_1]{ax+b},\ \ldots,\sqrt[n_k]{ax+b},\ \right)dx$$

і за допомогою заміни:

$$\text{З.Н.К.}(n_1,n_2,\ldots,n_k)=N \qquad ax+b=z^N$$

перетворюється в інтеграл від раціональної функції аргументу "z"

$$\int R_1(z)dz.$$

Якщо ж $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=1$, тоді інтеграл (1) має вигляд

$$\int R(x,\sqrt[n_1]{x},\sqrt[n_2]{x},\ldots,\sqrt[n_k]{x})dx$$

і для його інтегрування потрібна заміна

$$\text{З.Н.К.}(n_1,n_2,\ldots,n_k)=N \qquad x=z^N.$$

§ 7 Інтегрування тригонометричних функцій (завдання 1(д))

7.1 Універсальна тригонометрична підстановка

Розглянемо інтеграл

$$I = \int R(\sin x, \cos x)dx,$$

де підінтегральна функція раціонально залежить від аргументів "$\sin x$" і "$\cos x$". Інтеграли такого типу зводяться до інтеграла від раціональної функції нового аргументу за допомогою універсальної тригонометричної підстановки

$$tg\frac{x}{2} = z.$$

Підінтегральна функція виявляється раціональною функцією від аргументу "z", а саме, мають місце формули:

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}; \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}; \qquad dx = \frac{2}{1+z^2}dz.$$

Після заміни інтеграл I перетворюється в інтеграл від раціональної функції аргументу "z":

$$I = \int R\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2}{1+z^2}dz = \int R(z)\,dz.$$

7.2 Частинні випадки інтегралів від тригонометричних функцій

Випадки коли можна уникнути застосування універсальної тригонометричної підстановки:

1) $I = \int \sin^m x \cos^n x\,dx$ (m, n цілі додатні числа):

а) m або n непарне число (наприклад $n = 2k+1$)

$$I = \int \sin^m x \cos^{2k+1} x\,dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x\,dx =$$

$$= \int \sin^m x\,(\cos^2 x)^k \cos x\,dx = \begin{vmatrix} z = \sin x, \ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \\ dz = \cos x dx \end{vmatrix} = \int z^m (1-z^2)^k\,dz;$$

б) $m=2l, n=2k$ парні числа

$$I=\int \sin^m x\cos^n x\,dx=\int(\sin^2 x)^l(\cos^2 x)^k dx=\left|\begin{matrix}\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\\ \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2^{l+k}}\int(1-\cos 2x)^l(1+\cos 2x)^k dx$$

2) $m\ge 2,$ ціле:

$$\int tg^m x\,dx=\int tg^{m-2}x tg^2 x\,dx=\left|\,tg^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1\,\right|=\int tg^{m-2}x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$$

$$=\int tg^{m-2}x\frac{1}{\cos^2 x}\,dx-\int tg^{m-2}x\,dx=\underline{\frac{tg^{m-1}x}{m-1}-\int tg^{m-2}x\,dx.}$$

Для $\int ctg^m x dx$ так само.

3) інтеграли $\int sin\,px\,cos\,qx\,dx$, $\int cos\,px\,cos\,qx\,dx$, $\int sin\,px\,sin\,qx\,dx$ перетворюються в інтеграли від суми майже табличних інтегралів за допомогою відомих тригонометричних формул

$$sin\,px\,cos\,qx=\frac{1}{2}\left[sin(p+q)x+sin(p-q)x\right],$$

$$cos\,px\,cos\,qx=\frac{1}{2}\left[cos(p+q)x+cos(p-q)x\right],$$

$$sin\,px\,sin\,qx=\frac{1}{2}\left[cos(p-q)x-cos(p+q)x\right].$$

ТЕМА 2 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ (ЗАВДАННЯ 2–7)

§ 1 Інтегральна сума; визначений інтеграл; геометричний зміст інтегральної суми і визначеного інтеграла

Означення 1. Інтегральною сумою для функції $f(x)$ на сегменті $[a,b]$ називається сума $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, яка будується так:

а) сегмент $[a,b]$ довільними точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

поділяється на "n" малих сегментів $[x_0, x_1], ..., [x_{n-1}, x_n]$, довжини яких позначаються $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$;

б) у кожному малому сегменті обираємо довільну точку

$$c_1, c_2, ..., c_n, \qquad c_i \in [x_{i-1}, x_i];$$

в) в кожній точці "c_i" обчислюємо значення функції $f(c_i)$

$$f(c_1), f(c_2), ..., f(c_n);$$

г) множимо кожне значення функції $f(c_i)$ на довжину відповідного малого сегмента Δx_i

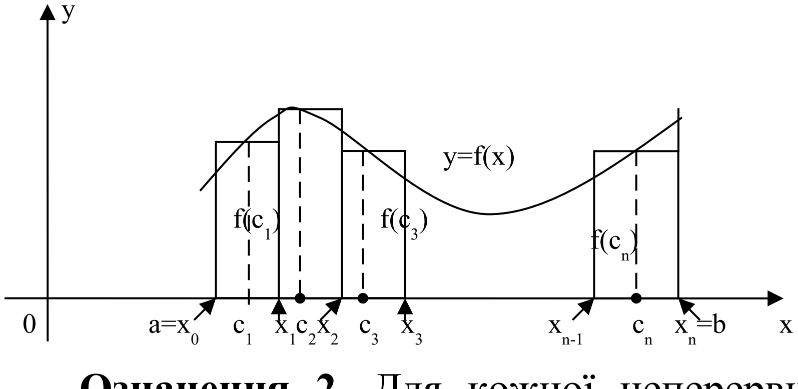
$$f(c_1)\,\Delta x_1, f(c_2)\,\Delta x_2, ..., f(c_n)\,\Delta x_n;$$

д) обчислені добутки складаємо

$$f(c_1)\,\Delta x_1 + f(c_2)\,\Delta x_2 + ... + f(c_n)\,\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i.$$

Зауваження. З геометричної точки зору інтегральна сума дорівнює площі ступінчастої фігури, яка складається із малих прямокутників із площами

$$f(c_i)\Delta x_i \quad (i = 1, 2, .., n)$$



$$S_{ст.ф} = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

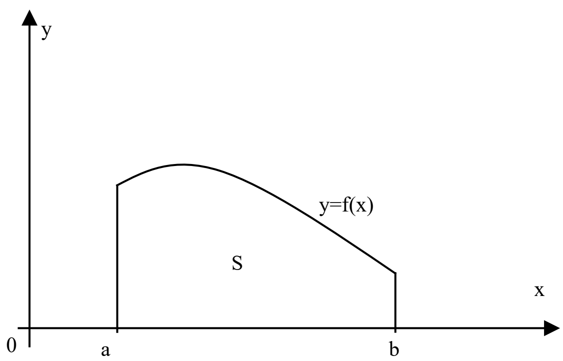
Означення 2. Для кожної неперервної на сегменті $[a, b]$

функції $f(x)$ **існує** границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$ при умові, що число малих сегментів $[x_{i-1}, x_i]$ прямує до нескінченності $(n \to \infty)$, а довжина кожного з них прямує до нуля $(\Delta x_i \to 0)$. Ця границя називається **визначеним інтегралом** від функції $f(x)$ на сегменті $[a,b]$ і позначається так:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx .$$

З геометричної точки зору визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ виявляється **числом**, яке дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої сегментом $[a,b]$, двома прямими, паралельними осі OY, які виходять із кінців сегмента $[a,b]$, і графіком функції

$$S_{кр.тр.} = \int_a^b f(x)dx$$

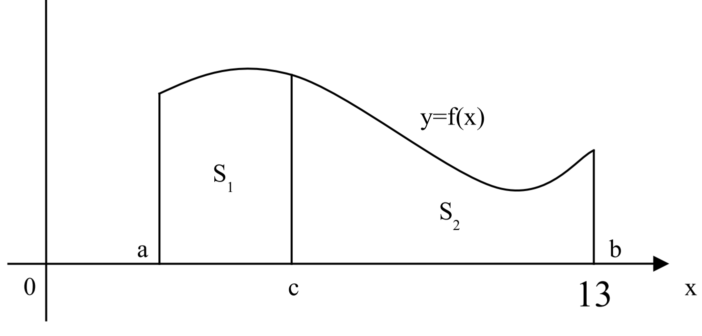


§ 2 Властивості визначеного інтеграла

1) якщо $a \neq b$, тоді $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Якщо $b = a$, $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2) $c \in [a,b]$: $S = \int_a^b f(x)dx$; $S_1 = \int_a^c f(x)dx$; $S_2 = \int_c^b f(x)dx$;



$$S = S_1 + S_2 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx =$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Ця рівність справедлива і

при $c \notin [a,b]$;

3) $\int\limits_a^b (f+g)dx = \int\limits_a^b fdx + \int\limits_a^b gdx$;

4) $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$;

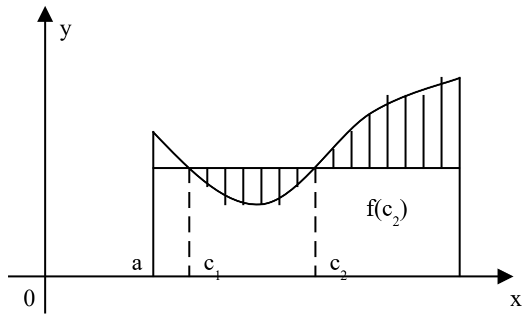
5) якщо $a<b$ і $f(x) \ge 0 (\forall x \in [a,b])$, тоді $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$;

6) якщо $a<b$ і $f(x) \le g(x)\ (\forall x \in [a,b])$, тоді $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$;

7) **Теорема про середнє.** Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $[a,b]$, тоді на $[a,b]$ знайдеться принаймні одна точка "c" така, що справедлива рівність:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

тобто існує прямокутник, рівновеликий криволінійній трапеції.



§ 3 Формула Ньютона – Лейбніца

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на сегменті $[a,b]$ і якщо $F(x)$ - одна з її первісних, тоді

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Зауваження 1. Вираз $F(b) - F(a)$ позначається так:

$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b \rightarrow$ (F від x з підстановкою від a до b)

і називається **подвійною підстановкою.**

Замість $F(x)$ під знаком подвійної підстановки можна написати суму "$F(x)+C$", де "C" - довільна стала. Дійсно,

$$F(x)\Big|_a^b + C = [F(b)+c]-[F(a)+c] = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b,$$

але $F(x)+C=\int f(x)dx$,тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx\Big|_a^b.$$

Таким чином, **правило обчислення визначеного інтеграла** формулюється так: для того, щоб обчислити визначений інтеграл, потрібно, по-перше, обчислити відповідний невизначений інтеграл, а, по-друге, здійснити в результаті обчислення подвійну підстановку.

Зауваження 2 (завдання № 2 (2а, 2б)):

а) формула заміни змінної у визначеному інтегралі має вигляд

$$\int_a^b f(z)dz = \left| \begin{array}{l} z=\varphi(x) \\ \quad\Downarrow \\ x\in[A,B] \\ z\in[a,b] \end{array} \right| = \int_A^B f\,[\varphi(x)]\,\varphi'(x)dx$$

тобто при заміні змінної визначеного інтегрування треба міняти і проміжок інтегрування;

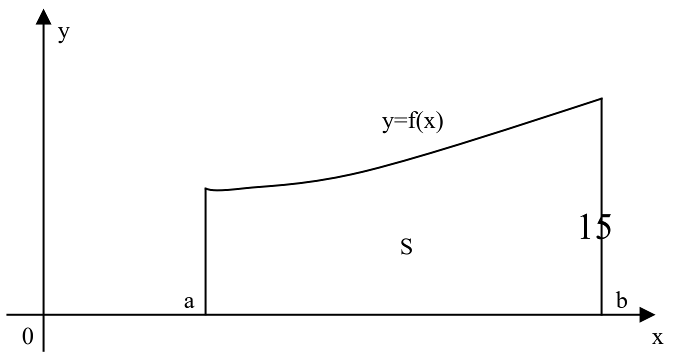
б) формула визначеного інтегрування частинами має вигляд

$$\int_a^b u dv = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

§ 4 Геометричні та економічні застосування визначеного інтеграла

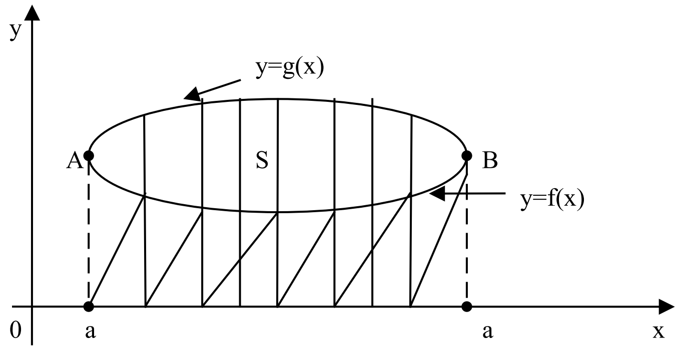
4.1 Геометричні застосування (завдання 3):

4.4.1 Площа криволінійної трапеції (S)



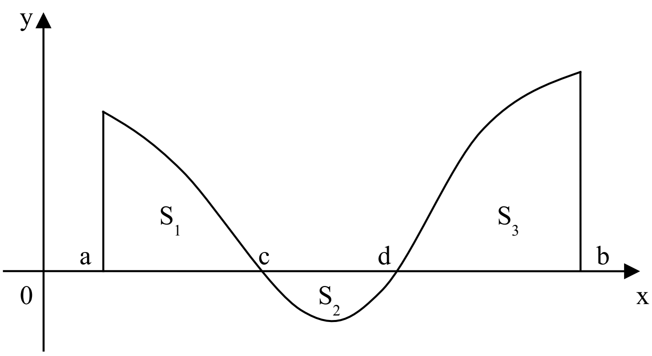
$$S = \int_a^b f(x)dx;$$

4.1.2 Площа плоскої фігури



$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx;$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3,$$



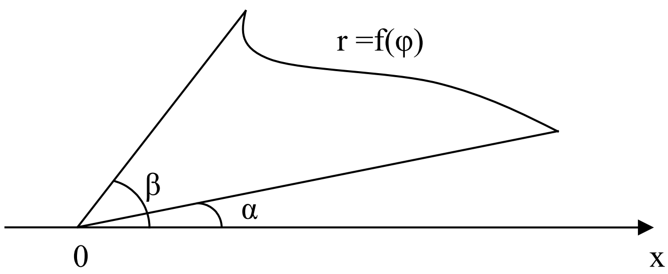
$$S_1 = \int_a^c f(x)dx,$$

$$S_2 = -\int_c^d f(x)dx,$$

$$S_3 = \int_d^b f(x)dx,$$

$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx;$$

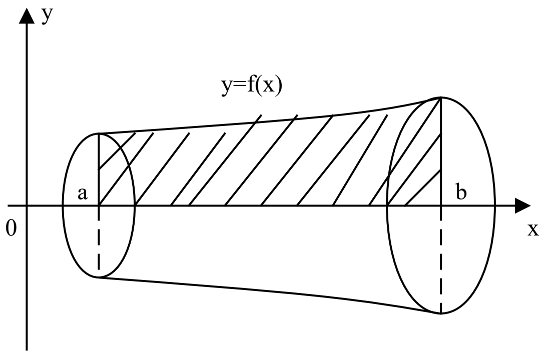
4.1.3 Площа криволінійного сектора в полярних координатах



$$S_{kp.cek} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi;$$

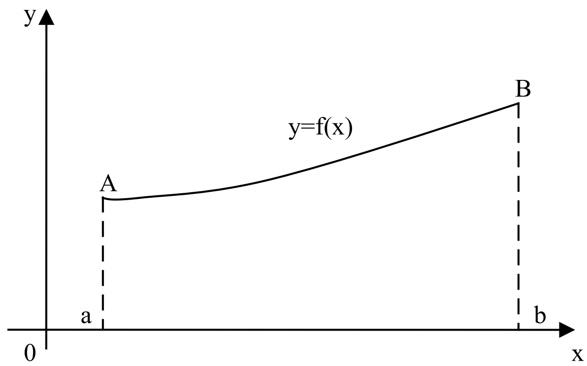
4.1.4 Об'єм тіла обертання (V)

Тіло обертання утворюється при обертанні навколо осі ОХ (або ОУ) криволінійної трапеції, обмеженої сегментом $[a,b]$, двома прямими $x=a,\ x=b$ і графіком функції $f(x)$



$$V=\int\limits^{b}\pi f^{2}(x)dx$$

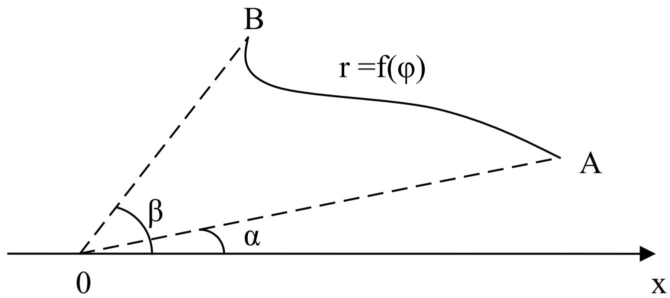
4.1.5 Довжина дуги кривої (l_{AB})



$$y=f(x),\quad x\in[a,b],$$
$$l_{AB}=\int\limits_{a}^{b}\sqrt{1+[f'(x)]^{2}}\,dx,$$

$$\begin{cases}x=g_1(t)\\ y=g_2(t)\end{cases},\quad t\in[t_0,t_1],$$
$$l_{AB}=\int\limits_{t_0}^{t_1}\sqrt{[g_1'(t)]^{2}+[g_2'(t)]^{2}}\,dt,$$

$$r=f(\varphi),\quad \varphi\in[\alpha,\beta],$$
$$l_{AB}=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{f^{2}(\varphi)+[f'(\varphi)]^{2}}\,d\varphi.$$



4.2 Економічні застосування

4.2.1 Визначення об'єму виробленої продукції за умови відомої продуктивності праці (завдання 4)

Означення. Нехай $F(t)$ визначає об'єм виготовленої продукції за час „t” з моменту початку роботи деякого підприємства. Розглянемо фіксоване значення часу „t_0” і приріст часу „Δt”. Відношення

$$\frac{F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)}{\Delta t}$$

визначає об'єм виготовленої продукції за одиницю часу і називається середньою **продуктивністю праці** в момент часу „t_0” і позначається так:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)}{\Delta t} = f(t_0) \qquad (1)$$

(із формули (1) бачимо, що зв'язок між об'ємом виготовленої продукції $F(t)$ і продуктивністю праці $f(t)$ має вигляд

$$F'(t) = f(t).$$

Навпаки, зв'язок між продуктивністю праці $f(t)$ і об'ємом виготовленої продукції $F(t)$ за проміжок часу $[t_0\ , t_1]$ має вигляд

$$F(t_0\ , t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\, dt. \qquad (2)$$

4.2.2 Витрати, доход і прибуток (завдання 5)

Нехай $V(x)$ буде функцією загальних витрат на виробництво x одиниць продукції, $V'(x)$ - функція маргінальних витрат. Тоді визначений інтеграл

$$\int_a^b V'(x)\, dx = V(x)\Big|_a^b = V(b) - V(a) \qquad (3)$$

дорівнює зміні загальних витрат при зростанні кількості виробленої продукції від а до b одиниць.

Звідси випливає важливий наслідок: зміна виробничих витрат при зростанні виробленої продукції від a до b одиниць дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції маргінальних витрат $y = V'(x)$, відрізком $[a,b]$ та прямими $x = a,\ x = b$.

Аналогічно, якщо $D'(x)$ та $P'(x)$ - функції маргінального доходу та прибутку відповідно, то зміни доходу та прибутку при зростанні реалізації виробленої продукції від a до b одиниць обчислюються за формулами

$$\int_a^b D'(x)\,dx = D(x)\Big|_a^b = D(b) - D(a),$$

$$\int_a^b P'(x)\,dx = P(x)\Big|_a^b = P(b) - P(a).$$

4.2.3 Знаходження капіталу (основних фондів) за відомими чистими інвестиціями (завдання 6)

Чисті інвестиції (капіталовкладення) - це загальні інвестиції, які виробляються протягом певного проміжку часу, за винятком інвестицій на відшкодування основних фондів (капіталу), які виходять з ладу. Таким чином, за одиницю часу капітал збільшується на суму чистих інвестицій.

Якщо капітал розглядати як функцію часу $K(t)$, а чисті інвестиції відповідно як $f(t)$, то сказане вище можна записати у вигляді

$$f(t) = \frac{d}{dt}K(t).$$

Часто виникає потреба знайти приріст капіталу за період з моменту часу t_1 до t_2, тобто величину

$$\Delta K = K(t_2) - K(t_1).$$

Ураховуючи, що $K(t)$ є первісною для функції $f(t)$, маємо

$$\Delta K = K(t_2) - K(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt. \qquad (4)$$

4.2.4 Визначення середнього часу, витраченого на виготовлення одного виробу, в період освоєння виробництва (завдання 7)

Нехай відома функція $t = t(x)$, яка описує зміни витрат часу t на виготовлення виробу в залежності від ступеня освоєння виробництва, де x - порядковий номер виробу в партії. Тоді середній час t_{cp}, витрачений на виготовлення одного виробу в період освоєння від x_1 до x_2 виробів, обчислюється за теоремою про середнє:

$$t_{cp} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x)\, dx . \qquad (5)$$

Що стосується функції зміни витрат часу на виготовлення виробів $t = t(x)$, то часто вона має вигляд $t = a\, x^{-b}$, де a - витрати часу на перший виріб, b - показник виробничого процесу.

ТЕМА 3 НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ (ЗАВДАННЯ 8)

3.1 Невласні інтеграли першого роду та їх властивості (завдання 8(а))

Означення 1

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (1)$$

називається інтегралом від функції $f(x)$ від „a” до „$+\infty$”.

Якщо ця границя є скінченою величиною, тоді інтеграл (1) називається **збіжним** і його величина дорівнює цій границі, якщо ж границя не існує, тоді інтеграл (1) називається розбіжним.

Означення 2. Аналогічно визначаються інтеграли

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (3)$$

Інтеграли (1), (2), (3) називаються **невласними інтегралами першого роду** (вони мають нескінченний проміжок інтегрування).

Властивості невласних інтегралів першого роду такі:

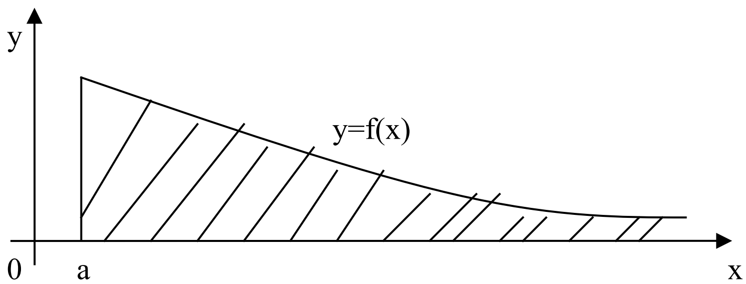
а) якщо $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ збігається, тоді збігається і $\int_{a}^{+\infty} k\, f(x)dx$ (k – константа) і

$$\int_{a}^{+\infty} k\, f(x)dx = k\int_{a}^{+\infty} f(x)dx;$$

б) якщо $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ і $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ збігаються, тоді збігається і $\int_{a}^{+\infty} (f(x) \pm g(x))dx$ і

$$\int_{a}^{+\infty} (f(x) \pm g(x))dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx \pm \int_{a}^{+\infty} g(x)dx;$$

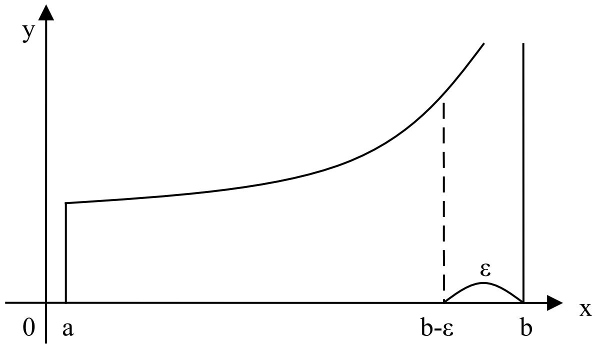
в) з геометричної точки зору збіжність невласного інтеграла першого роду означає існування площі нескінченної криволінійної трапеції



$$S = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx \;.$$

3.2 Невласні інтеграли другого роду (інтеграли від необмеженої функції) (завдання 8(б))

Означення I. Якщо функція $f(x)$ має в точці „b” (правий кінець сегмента $[a, b]$) нескінченний розрив другого роду, тоді

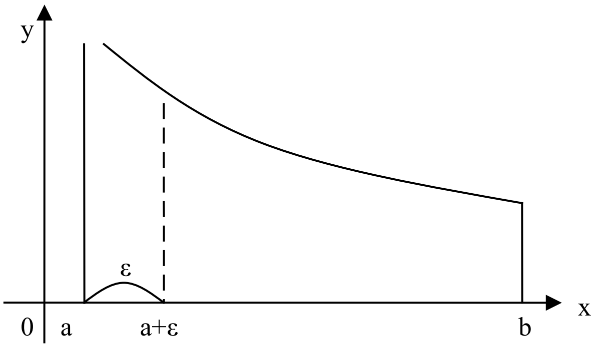


$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \tag{4}$$

називають **невласним інтегралом другого роду**.

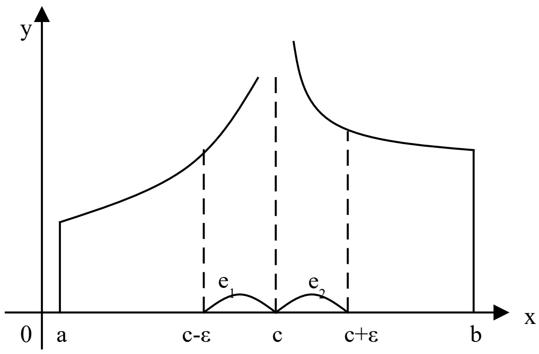
Якщо ця границя скінченна, інтеграл (4) називається **збіжним**, якщо не існує – **розбіжним**.

Означення 2. Аналогічно визначаються невласні інтеграли



$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \tag{5}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx. \tag{6}$$



В останньому випадку для збіжності інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ потрібно, щоб існували скінченні границі обох інтегралів у правій частині рівності (6).

ЧАСТИНА 2

Частина 2 містить у собі методичні рекомендації і зразок виконання і оформлення контрольної роботи.

Треба переписати умови всіх задач даного варіанта, а потім навести розв'язання кожної задачі у такій послідовності:

1) переписати номер і умову даної задачі;
2) в першій частині методичних вказівок відшукати необхідні для розв'язання формули і означення;
3) застосувати необхідні формули і розв'язати задачу.

Далі наведений зразок контрольної роботи, її виконання і оформлення.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Завдання 1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$; 2) $\int \arcsin x\, dx$; 3) $\int \frac{1}{x^3+27}\, dx$;

4) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\, dx$; 5) $\int \frac{1}{1+\sin x}\, dx$.

Завдання 2. Обчислити такі визначені інтеграли:

1) $\int_0^1 \frac{e^x}{4+e^x}\, dx$; 2) $\int_0^{\pi/2} x \sin x\, dx$.

Завдання 3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = x^2,\ y = x + 2.$$

Завдання 4. Обчислити об'єм виготовленої продукції

$F(t_1, t_2)$ за проміжок часу $[t_1, t_2]$, якщо продуктивність праці дорівнює $f(t) = 5t^2 - 3t + 1$, $t_1 = 1$ година, $t_2 = 5$ годин.

Завдання 5. Функція маргінальних витрат фірми має вигляд $V'(x) = 23{,}5 - 0{,}01x$. Знайти зростання загальних витрат, коли виробництво зростає з $a = 1000$ до $b = 1500$ одиниць.

Завдання 6. Чисті інвестиції задані функцією $f(t) = 7000\sqrt{t}$. Визначити:

а) приріст капіталу ΔK за $n = 3$ роки;

б) через скільки років T приріст капіталу ΔK буде складати 50000.

Завдання 7. Знайти середнє значення витрат $K(x) = 3x^2 + 4x + 1$, виражених у грошових одиницях, якщо обсяг продукції x змінюється від $a = 0$ до $b = 3$ одиниць. Вказати обсяг продукції, при якому витрати набувають середнього значення.

Завдання 8. Визначити, чи будуть збіжними або розбіжними такі невласні інтеграли:

1) $\displaystyle\int_{-2}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 5}\,dx$; 2) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x\ln\sqrt[3]{x}}\,dx$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ

Завдання 1:

а) обчислити невизначений інтеграл $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

Розв'язання. Для обчислення інтеграла застосуємо формулу заміни змінної для невизначеного інтеграла (тема 1, § 2, формула 5), а саме:

$$\int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left| \begin{array}{l} z = \sqrt{x} \\ dz = \left(\sqrt{x}\right)' dx = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \end{array} \right| = \int e^z 2dz = 2\int e^z dz = 2e^z + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

Таким чином, $\int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$;

б) обчислити невизначений інтеграл $\int arcsin\, x\, dx$.

Розв'язання. Для обчислення інтеграла застосовуємо формулу інтегрування частинами (тема 1, § 2, формула 6), позначаючи через «u» саме обернену тригонометричну функцію:

$$\int arcsin\, x\, dx = \left| \begin{matrix} u = arcsin\, x, & du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx, & v = \int dx = x \end{matrix} \right| = x\, arcsin\, x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

До нового інтеграла $\int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ застосовуємо формулу заміни змінної:

$$\int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{matrix} z = 1 - x^2 \\ dz = \left(1 - x^2\right)' dx = -2x dx \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{z}} \left(-\frac{1}{2} dz\right) = -\frac{1}{2} \int z^{-1/2} dz =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{z^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = -z^{1/2} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Повертаючись до попереднього інтеграла, отримуємо в результаті:

$$\int arcsin\, x\, dx = x\, arcsin\, x + \sqrt{1-x^2} + C;$$

в) обчислити невизначений інтеграл $\int \frac{1}{x^3 + 27} dx$.

Розв'язання. В цьому прикладі підінтегральна функція $\frac{1}{x^3 + 27}$ виявляється правильним раціональним дробом і для її інтегрування треба застосувати відповідне правило (тема 1, § 5), починаючи в даному випадку з пункту 2 цього правила, а саме, розкладаємо знаменник дробу на множники першого і другого степеня:

$$x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9).$$

Дискримінант D другого $x^2 - 3x + 9$ множника $D = 3^2 - 4 \cdot 9 = 9 - 36 = -27 < 0$ і тому цей множник на множники перших степенів не розкладається.

Далі, за правилом (пункт 3(а, б)), розкладаємо підінтегральну функцію на два доданки з невизначеними поки що коефіцієнтами

$$\frac{1}{x^3+3^3}=\frac{A}{x+3}+\frac{Bx+C}{x^2-3x+9}. \tag{1}$$

Для визначення коефіцієнтів *A, B, C* праву частину суми (1) зводимо до спільного знаменника і групуємо члени чисельника:

$$\underline{\underline{\frac{1}{x^3+27}}}=\frac{A\left(x^2-3x+9\right)+(Bx+C)(x+3)}{(x+3)\left(x^2-3x+9\right)}=\frac{Ax^2-3Ax+9A+Bx^2+Cx+3Bx+3C}{(x+3)\left(x^2-3x+9\right)}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{(A+B)x^2+(-3A+3B+C)x+(9A+3C)}{(x+3)\left(x^2-3x+9\right)}}}.$$

Підкреслені дроби рівні між собою і мають рівні знаменники, тобто будуть рівними і їх чисельники. Але в чисельниках цих дробів містяться многочлени, про які відомо, що два многочлени дорівнюють один другому лише тоді, коли рівними будуть коефіцієнти при однакових степенях змінної *x*. Таким чином, ми отримуємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів *A, B, C*:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -3A+3B+C=0 \\ 9A+3C=1 \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи такий: $A=\frac{1}{27},\ B=-\frac{1}{27},\ C=\frac{2}{9}$.

Таким чином, підінтегральна функція дорівнює

$$\frac{1}{x^3+27}=\frac{\frac{1}{27}}{x+3}+\frac{-\frac{1}{27}x+\frac{2}{9}}{x^2-3x+9}$$

і $\displaystyle\int\frac{1}{x^3+27}dx=\int\left(\frac{\frac{1}{27}}{x+3}+\frac{-\frac{1}{27}x+\frac{2}{9}}{x^2-3x+9}\right)dx=\frac{1}{27}\int\frac{1}{x+3}dx-\frac{1}{27}\int\frac{x-6}{x^2-3x+9}dx$.

Кожний з доданків обчислюємо окремо.

1) $\displaystyle\int\frac{1}{x+3}dx=ln|x+3|+C$ тому, що в підінтегральній функції в чисельнику міститься похідна знаменника (див. формулу 18 таблиці інтегралів);

2) <u>Зверніть увагу на процес інтегрування таких інтегралів!!!</u>

$$\int \frac{x-6}{x^2-3x+9}dx.$$

Розглянемо підінтегральну функцію $\frac{x-6}{x^2-3x+9}$ $(D=-27<0)$ і, по-перше, перетворимо чисельник так, щоб в ньому утворилася похідна знаменника ($2x+3$). Для цього помножимо чисельник на 2 (одночасно поділимо дріб на 2 для збереження рівноваги)

$$\frac{x-6}{x^2-3x+9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-12}{x^2-3x+9};$$

по-друге, віднімемо і додамо у чисельнику 3

$$\frac{x-6}{x^2-3x+9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-3)-9}{x^2-3x+9};$$

по-третє, поділяючи кожний доданок чисельника на знаменник, перетворимо підінтегральну функцію у алгебраїчну суму двох доданків

$$\frac{x-6}{x^2-3x+9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-3}{x^2-3x+9}-\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x^2-3x+9}$$

і замінимо інтеграл від суми сумою інтегралів

$$\int \frac{x-6}{x^2-3x+9}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x-3}{x^2-3x+9}dx-\frac{9}{2}\int \frac{1}{x^2-3x+9}dx.$$

Перший з цих інтегралів (за формулою 18 таблиці інтегралів) дорівнює логарифму знаменника

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x-3}{x^2-3x+9}dx=\frac{1}{2}ln\left|x^2-3x+9\right|+C,$$

а в другому потрібно в знаменнику виділити повний квадрат

$$-\frac{9}{2}\int\frac{1}{x^2-3x+9}dx=-\frac{9}{2}\int\frac{1}{\left(x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}+9}dx=-\frac{9}{2}\int\frac{1}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} z=x-\frac{3}{2} \\ dz=dx \\ a^2=\frac{27}{4}\end{matrix}\right|=-\frac{9}{2}\int\frac{1}{z^2+a^2}dz=-\frac{9}{2}\left(\frac{1}{a}arctg\frac{z}{a}\right)+C=-\frac{9}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{27}{4}}}arctg\frac{x-\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{27}{4}}}\right)+C=$$

$$=-\frac{9}{2}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x-3}{3\sqrt{3}}\right)+C=-\sqrt{3}arctg\frac{2x-3}{3\sqrt{3}}+C\ .$$

Таким чином,

$$\int\frac{1}{x^3+27}dx=\frac{1}{27}ln|x+3|-\frac{1}{27}\left(ln\left|x^2-3x+9\right|-\sqrt{3}arctg\frac{2x-3}{3\sqrt{3}}\right)+C\ .$$

г) обчислити невизначений інтеграл $\int\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}dx$.

Розв'язання. В цьому інтегралі підінтегральна функція $\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$ виявляється ірраціональною і тому для інтегрування можна застосувати формули § 6 теми 1, а саме, використати зауваження: для перетворення цього інтеграла в інтеграл від раціональної функції зробимо таку заміну:

$x+1=z^N,$ де N – *З.Н.К. (2) = 2.*

Таким чином,

$$\int\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}dx=\left|\begin{matrix} x+1=z^2 \\ z=\sqrt{x+1} \\ dx=2zdz\end{matrix}\right|=\int\frac{1}{1+z}2zdz=2\int\frac{z}{z+1}dz\ .$$

Новий інтеграл $2\int\frac{z}{z+1}dz$ виявляється інтегралом від неправильного раціонального дробу і, з цього дробу, по-перше, треба виділити цілу частину. Це можна зробити так:

$$2\int\frac{z}{z+1}dz=2\int\frac{(z+1)-1}{z+1}dz=2\int\left(1-\frac{1}{z+1}\right)dz=2\int 1dz-2\int\frac{1}{z+1}dz=$$

$$=2z-2ln|z+1|+C=2\sqrt{x+1}-2ln\left|\sqrt{x+1}+1\right|+C\ .$$

Остаточно, $\int\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}dx=\sqrt{x+1}-2ln\left|\sqrt{x+1}+1\right|+C$.

д) обчислити невизначений інтеграл $\int \frac{1}{1+\sin x}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є тригонометричною, а саме, раціональною від $\sin x$. Такі інтеграли інтегруються за допомогою універсальної тригонометричної підстановки $z = tg\frac{x}{2}$:

$$\int \frac{1}{1+\sin x}dx = \left| \begin{matrix} z = tg\frac{x}{2} & \Rightarrow & \sin x = \frac{2z}{1+z^2} \\ & & dx = \frac{2}{1+z^2}dz \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{1+\frac{2z}{1+z^2}} \cdot \frac{2}{1+z^2}dz =$$

$$= \int \frac{1}{1+z^2+2z}2dz = 2\int \frac{1}{(1+z)^2}dz \left| \begin{matrix} t = z+1 \\ dt = dz \end{matrix} \right| = 2\int t^{-2}dt = 2\frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C =$$

$$= -2t^{-1} + C = -\frac{2}{t} + C = -\frac{2}{z+1} + C = -\frac{2}{tg\frac{x}{2}+1} + C.$$

Таким чином, $\int \frac{1}{1+\sin x}dx = -\frac{2}{tg\frac{x}{2}+1} + C$.

Завдання 2. Обчислити такі визначені інтеграли:

1) $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{4+e^x}dx$; 2) $\int\limits_0^{\pi/2} x\sin x\, dx$.

Розв'язання:

а) застосуємо до інтеграла спочатку формулу заміни змінної під знаком визначеного інтеграла (тема 2, § 3, зауваження 2а)

$$\int\limits_0^1 \frac{e^x}{4+e^x}dx = \left| \begin{matrix} z = e^x \\ dz = (e^x)'dx = e^x dx \\ x \in [0, 1] \Rightarrow z \in [e^0, e^1] \end{matrix} \right| = \int\limits_1^e \frac{1}{2^2+z^2}dz = \ldots,$$

далі застосовуємо формулу Ньютона-Лейбніца (тема 2, § 3, зауваження 1)

$$= \int\limits_1^e \frac{1}{2^2+z^2}dz = \frac{1}{2}arctg\frac{z}{2}\Big|_1^e = \frac{1}{2}\left(arctg\frac{e}{2} - arctg\frac{1}{2}\right).$$

Таким чином, $\int_0^1 \frac{e^x}{4+e^x}\,dx = \frac{1}{2}\left(arctg\,\frac{e}{2} - arctg\,\frac{1}{2}\right)$.

б) застосуємо до інтеграла спочатку формулу визначеного інтегрування частинами (тема 2, § 3, зауваження 2б)

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du,$$

тому, що підінтегральна функція є добутком степеневої функції і тригонометричної (див. тему 2, § 3, зауваження 2)

$$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = \sin x dx, & v = \int \sin x dx = -\cos x \end{matrix} \right| = -x\cos x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos x)\,dx =$$

$$= x(-\cos x)\Big|_0^{\pi/2} + \sin x\Big|_0^{\pi/2} = -\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - 0\cdot\cos 0\right) + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

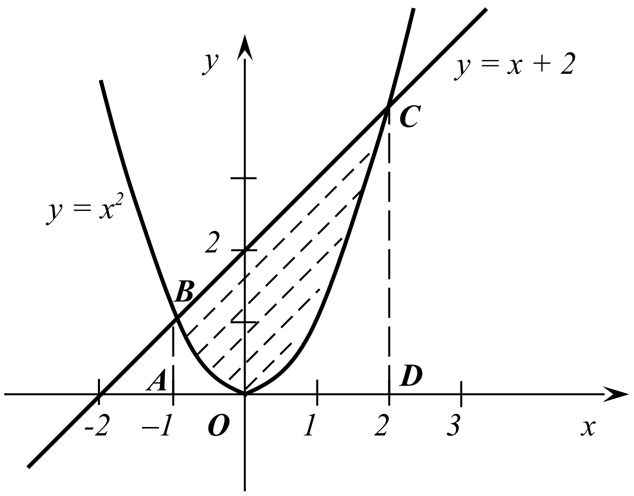
Таким чином, $\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = 1$.

Завдання 3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = x^2,\ y = x + 2.$$

Розв'язання. По-перше, в системі координат XOY побудуємо дані криві.

Між параболою та прямою утворюється фігура, яку можна розглядати як різницю двох криволінійних трапецій *ABCD* і *ABOCD*.



По-друге, знайдемо абсциси точок перетину кривих, що обмежують фігуру, для цього необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow\ x^2 = x + 2\ \Rightarrow\ x^2 - x - 2 = 0\ \Rightarrow\ x_1 = -1,\ x_2 = 2.$$

Далі, використовуючи геометричний зміст визначеного інтеграла (тема 2, п. 4.1.2), обчислюємо шукану площу:

$$S = S_{ABCD} - S_{ABOCD} = \int_{-1}^{2}(x+2)dx - \int_{-1}^{2}x^2dx = \int_{-1}^{2}\left(x+2-x^2\right)dx = \left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{2^2}{2}+2\cdot 2-\frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2}+2\cdot(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right) = 6-\frac{8}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{3} = 6-3+\frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5\,.$$

Таким чином, *S = 4,5 кв. од.*

Завдання 4. Обчислити обсяг виготовленої продукції $F\ (t_1,\ t_2)$ за проміжок часу $[t_1,\ t_2]$, якщо продуктивність праці дорівнює $f(t) = 5t^2 - 3t + 1$, $t_1 = 1$ година, $t_2 = 5$ годин.

Розв'язання. Для обчислення застосовуємо формулу 2 (тема 2, п. 4.2.1)

$$F(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt\,,$$

а саме

$$F(1,5) = \int_{1}^{5}\left(5t^2-3t+1\right)dt = \left(5\frac{t^3}{3}-3\frac{t^2}{2}+t\right)\Bigg|_{1}^{5} = \left(5\frac{5^3}{3}-3\frac{5^2}{2}+5\right)-\left(5\frac{1^3}{3}-3\frac{1^2}{2}+1\right) =$$

$$= \frac{625}{3}-\frac{75}{2}+5-\frac{5}{3}+\frac{3}{2}-1 = \frac{524}{3} = 174\frac{2}{3}\,.$$

Таким чином, $F(1,5) = 174\frac{2}{3}$ одиниць продукції.

Завдання 5. Функція маргінальних витрат фірми має вигляд $V'(x) = 23{,}5 - 0{,}01x$. Знайти зростання загальних витрат, коли виробництво зростає з 1000 до 1500 одиниць.

Розв'язання. Для розрахунків скористаємося формулою (3) (тема 2, п. 4.2.2І):

$$\int_{a}^{b} V'(x)\,dx = V(x)\Big|_{a}^{b} = V(b) - V(a)\,.$$

За формулою зростання загальних витрат отримуємо

$$\int_{1000}^{1500} V'(x)\,dx = \int_{1000}^{1500} (23{,}5 - 0{,}01x)\,dx = \left. \left(23{,}5x - 0{,}01\frac{x^2}{2} \right) \right|_{1000}^{1500} =$$

$$= 23{,}5 \cdot 1500 - 0{,}01 \cdot \frac{(1500)^2}{2} - \left(23{,}5 \cdot 1000 - 0{,}01 \cdot \frac{(1000)^2}{2} \right) =$$

$$= 35250 - 11250 - 23500 + 5000 = 5500.$$

Отже, загальні витрати зростуть на 5500 гривень.

Завдання 6. Чисті інвестиції задані функцією $f(t) = 7000\sqrt{t}$. Визначити:

а) приріст капіталу ΔK за $n = 3$ роки;

б) через скільки років T приріст капіталу ΔK буде складати 50000.

Розв'язання. Скористаємося формулою 4 (тема 2, п. 4.2.3):

а) для обчислення ΔK на проміжку часу від $t_1 = 0$, до $t_2 = n = 3$:

$$\Delta K = K(3) - K(0) = \int_0^3 7000\sqrt{t}dt = 7000 \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^3 = 7000 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}} \approx 24248{,}71;$$

б) обчислення приросту капіталу через T років визначається за формулою

$$\Delta K = \int_0^T f(t)dt.$$

Підставимо ΔK =50000 і $f(t) = 7000\sqrt{t}$: $50000 = \int_0^T 7000\sqrt{t}\ dt$.

Обчислимо інтеграл

$$\int_0^T 7000 t^{\frac{1}{2}} dt = 7000 \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^T = 7000 \cdot \frac{2}{3} T^{\frac{3}{2}};$$

$$50000 = 7000 \cdot \frac{2}{3} T^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad T^{\frac{3}{2}} = \frac{50 \cdot 3}{14} = 10{,}71 \quad \Rightarrow T = 10{,}71^{\frac{2}{3}} = 4{,}86 \text{ (р.)}.$$

Таким чином, приріст капіталу за три роки $\Delta K \approx 24248{,}71$, а через $T = 4{,}86$ років приріст капіталу складатиме 50000.

Завдання 7. Знайти середнє значення витрат $K(x) = 3x^2 + 4x + 1$, виражених у грошових одиницях, якщо обсяг продукції x змінюється від 0 до 3 одиниць. Вказати обсяг продукції, при якому витрати набувають середнього значення.

Розв'язання. Скористаємося формулою (5) (тема 2, п. 4.2.4): Згідно з теоремою про середнє значення,

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

В нашому випадку

$$f(\xi) = \frac{1}{3}\int_0^3 \left(3x^2 + 4x + 1\right)dt = \frac{1}{3}\left(3\frac{x^3}{3} + \frac{4}{2}x^2 + x\right)\Bigg|_0^3 =$$
$$= \frac{1}{3}\left(x^3 + 2x^2 + x\right)\Bigg|_0^3 = \frac{1}{3}(27 + 18 + 3) = 16 \ \ (грош.од.),$$

тобто середнє значення витрат дорівнює 16.

Визначимо, при якому обсязі продукції витрати набувають цього значення, тобто розв'яжемо рівняння

$$3x^2 + 4x + 1 = 16 \qquad \text{або } 3x^2 + 4x - 15 = 0.$$

Ураховуючи, що обсяг продукції не може бути від'ємним, з останнього рівняння маємо $x = \frac{-2 + \sqrt{4 + 45}}{3} = \frac{-2 + 7}{3} = \frac{5}{3}$ (одиниць продукції).

Таким чином, обсяг продукції, при якому витрати набувають середнє значення 16 грошових одиниць, дорівнює $\frac{5}{3}$.

Завдання 8. Визначити, чи будуть збіжними або розбіжними такі невласні інтеграли:

1) $\int\limits_{-2}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+5}dx$; 2) $\int\limits_{1}^{2} \frac{1}{x\ln\sqrt[3]{x}}dx$.

Розв’язання.

а) цей інтеграл є невласним інтегралом першого роду і, за означенням (тема 3, п. 3.1, означення 1), дорівнює

$$\int\limits_{-2}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+5}dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{-2}^{b} \frac{1}{x^2+4x+5}dx,$$

але $\int\limits_{-2}^{b} \frac{1}{x^2+4x+5}dx$ є визначеним інтегралом, для обчислення якого можна застосувати формулу Ньютона–Лейбніца, тобто обчислюємо послідовно:

1) розглянемо невизначений інтеграл, в знаменнику якого виділимо повний квадрат:

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{1}{x^2+4x+4+1}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}dx = arctg(x+2);$$

2) здійснимо підстановку:

$$\int\limits_{-2}^{b} \frac{1}{x^2+4x+5}dx = arctg(x+2)\Big|_{-2}^{b} = arctg(b+2) - arctg(-2+2) =$$
$$= arctg(b+2) - arctg0 = arctg(b+2);$$

3) обчислюємо границю:

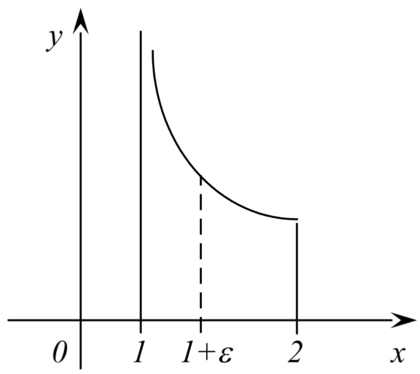
$$\int\limits_{-2}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+5}dx = \lim_{b\to+\infty} arctg(b+2) = arctg\left(\lim_{b\to+\infty}(b+2)\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, невласний інтеграл виявляється **збіжним** і його величина дорівнює

$$\int\limits_{-2}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+5}dx = \frac{\pi}{2}.$$

б) інтеграл $\int\limits_1^2 \frac{1}{x\ln\sqrt[3]{x}}dx$ є невласним інтегралом другого роду, тобто інтегралом від необмеженої функції. Дійсно, при $x = 1$ (нижня межа проміжку інтегрування) знаменник підінтегральної функції дорівнює нулю $\left(\ln\sqrt[3]{1} = 0\right)$ і тому в цій точці підінтегральна функція має нескінченний розрив.

За означенням (тема 3, п. 3.2, означення 1),



$$\int\limits_1^2 \frac{1}{x\ln\sqrt[3]{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int^2 \frac{1}{x\ln\sqrt[3]{x}}dx.$$

Обчислюємо послідовно:

1) невизначений інтеграл, який можна спростити, якщо використати властивості логарифмів $\left(\ln\sqrt[3]{x} = \ln\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\ln x\right)$:

$$\int \frac{1}{x\ln\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{1}{x\frac{1}{3}\ln x}dx = 3\int \frac{1}{x\ln x}dx = 3\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = 3\ln|\ln x|;$$

2) здійснюємо підстановку:

$$\int\limits_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{x\ln\sqrt[3]{x}}dx = 3\ln|\ln x|\Big|_{1+\varepsilon}^2 = 3\left[\ln(\ln 2) - \ln|\ln(1+\varepsilon)|\right];$$

3) обчислюємо границю:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{x\ln\sqrt[3]{x}}dx = 3\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln(\ln 2) - \ln|\ln(1+\varepsilon)|\right] = 3\ln(\ln 2) - 3\lim_{\varepsilon\to 0}\ln|\ln(1+\varepsilon)| =$$
$$= 3\ln(\ln 2) - 3\ln\left|\ln\lim_{\varepsilon\to 0}(1+\varepsilon)\right| = 3\ln(\ln 2) - 3\ln|\ln 1| = 3\ln(\ln 2) + \infty = +\infty,$$

тобто невласний інтеграл $\int\limits_1^2 \frac{1}{x\ln\sqrt[3]{x}}dx$ виявляється **розбіжним** і тому ніякого числового змісту не має.

ЧАСТИНА 3

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ

Завдання 1. Обчислити такі невизначені інтеграли:

Варіант 1	***Варіант 2***
1) $\int \frac{x^2}{\left(x^3+1\right)^7}dx$; 2) $\int xe^{2x}dx$; 3) $\int \frac{x^2+2}{x^3-2x^2+5x}dx$; 4) $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}dx$; 5) $\int \frac{dx}{4+5\cos x}$.	1) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx$; 2) $\int x^2 \ln x\, dx$; 3) $\int \frac{1}{x^3+x^2+3x+3}dx$; 4) $\int \frac{x^2+\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt{1+x}}dx$; 5) $\int \frac{1+\cos x}{1-\sin x}dx$.

Варіант 3	***Варіант 4***
1) $\int \frac{5\cdot 10^x}{1+10^{2x}}dx$; 2) $\int x\,\mathrm{arctg}x\, dx$; 3) $\int \frac{x+3}{x^3+x^2+x+1}dx$; 4) $\int \frac{1}{1-\sqrt{x+1}}dx$; 5) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.	1) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$; 2) $\int xe^{-3x}dx$; 3) $\int \frac{5x+7}{x^3+2x^2+x+2}dx$; 4) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$; 5) $\int \frac{1}{5+4\sin x}dx$.

Варіант 5	*Варіант 6*
1) $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$; 2) $\int x\ln x\,dx$; 3) $\int \frac{x^2+9}{x^4-5x^2+4}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[4]{x}-1}dx$; 5) $\int \frac{3+\sin x}{2-\cos x}dx$.	1) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$; 2) $\int xe^{2x}dx$; 3) $\int \frac{x^2+1}{x^4-10x^2+9}dx$; 4) $\int \frac{x^2+\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+2}}dx$; 5) $\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}dx$.

Варіант 7	*Варіант 8*
1) $\int \frac{x^2}{\left(x^3-1\right)^5}dx$; 2) $\int x\cos 4x\,dx$; 3) $\int \frac{x^2+5}{x^4+4x^3}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}-1}dx$; 5) $\int \frac{1}{3+2\sin x}dx$.	1) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$; 2) $\int x\sin 3x\,dx$; 3) $\int \frac{x^3-4}{x^4-26x^2+25}dx$; 4) $\int \frac{5+\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}dx$; 5) $\int tg^4 2x\,dx$.

Варіант 9	*Варіант 10*

1) $\int \frac{(arctgx)^3}{1+x^2}dx$; 2) $\int xe^{3x}\,dx$; 3) $\int \frac{5x+8}{x^5-x^3}dx$; 4) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$; 5) $\int ctg^5 x dx$.	1) $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 2) $\int \left(x^2+1\right)\ln x dx$; 3) $\int \frac{x-3}{(x+1)\left(x^2+1\right)}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{x+3}-1}dx$; 5) $\int \frac{5+\cos x}{1-\sin x}dx$.

Варіант 11	***Варіант 12***
1) $\int e^{x^3+1}\,dx$; 2) $\int x\ln(x+2)\,dx$; 3) $\int \frac{x^2}{x^4-16}dx$; 4) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+4}}dx$; 5) $\int \sin^3 x dx$.	1) $\int \left(e^x+3\right)^{16}\cdot e^x dx$; 2) $\int xe^{-4x}dx$; 3) $\int \frac{6x+5}{x^4-x^2}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+1}dx$; 5) $\int tg^5 4x\,dx$.

Варіант 13	***Варіант 14***

1) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx$; 2) $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$; 3) $\int \frac{4x+9}{x^3-4x^2+3x}\,dx$; 4) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$; 5) $\int \frac{7+\sin x}{2-\cos x}\,dx$.	1) $\int (\cos x+3)^7 \sin x\,dx$; 2) $\int x\cdot 10^x\,dx$; 3) $\int \frac{x+1}{x^4-81}\,dx$; 4) $\int \frac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[3]{x+2}-1}\,dx$; 5) $\int \cos^5 x\,dx$.

Варіант 15	***Варіант 16***
1) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^4 x}\,dx$; 2) $\int x\cdot 5^x\,dx$; 3) $\int \frac{1}{x^3+x}\,dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$; 5) $\int \cos^4 x\,dx$.	1) $\int \frac{(\arcsin x)^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 2) $\int x\,tg^2 x\,dx$; 3) $\int \frac{x^2-1}{4x^3-36x}\,dx$; 4) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x}-2}\,dx$; 5) $\int ctg^3 5x\,dx$.

Варіант 17	***Варіант 18***

1) $\int e^{\cos 5x} \cdot \sin 5x\, dx$; 2) $\int x \sin 2x\, dx$; 3) $\int \frac{3x+7}{\left(x^2+1\right)(x-3)} dx$; 4) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{3+\sqrt{x}} dx$; 5) $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x} dx$.	1) $\int 5^{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$; 2) $\int x arctg\, 2x dx$; 3) $\int \frac{1}{x^3+x^2} dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx$; 5) $\int \sin^3 3x\, dx$.

Варіант 19	***Варіант 20***
1) $\int \frac{x^3}{\left(x^4+5\right)^8} dx$; 2) $\int x \cdot 3^{-x} dx$; 3) $\int \frac{1}{x^2-5x+4} dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} dx$; 5) $\int \frac{1+\cos x}{1-\cos x} dx$.	1) $\int \frac{1}{x\sqrt{4-\ln^2 x}} dx$; 2) $\int x \cos 5x dx$; 3) $\int \frac{3x^2+8}{x^3-7x^2+12x} dx$; 4) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}+1} dx$; 5) $\int \sin 3x \cos 7x\, dx$.

Варіант 21	***Варіант 22***

1) $\int e^{-x^4} \cdot x^3\, dx$; 2) $\int x\, ln(1+x)\, dx$; 3) $\int \frac{2x+7}{(x+1)\left(x^2+1\right)} dx$; 4) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} dx$; 5) $\int tg^8 x\, dx$.	1) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}} dx$; 2) $\int x \cdot e^{-x} dx$; 3) $\int \frac{1}{x^3+x^2+x+1} dx$; 4) $\int \frac{1}{\sqrt{x}-x} dx$; 5) $\int \cos 4x \sin 3x\, dx$.

Варіант 23	***Варіант 24***
1) $\int \sin\left(e^x+1\right) e^x\, dx$; 2) $\int arctg\sqrt{x}\, dx$; 3) $\int \frac{x+3}{x^2-7x+10} dx$; 4) $\int \frac{\sqrt[3]{x+5}+1}{\sqrt[3]{x+5}-1} dx$; 5) $\int \frac{1}{3+5\cos x} dx$.	1) $\int \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2} dx$; 2) $\int x \cos 3x\, dx$; 3) $\int \frac{5x-8}{(x-3)\left(x^2+4\right)} dx$; 4) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} dx$; 5) $\int ctg^3 4x\, dx$.

Варіант 25	***Варіант 26***

1) $\int \frac{x^2}{9+x^6}\,dx$; 2) $\int x\ln(2x+3)\,dx$; 3) $\int \frac{x}{x^2-10x+21}\,dx$; 4) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx$; 5) $\int \cos 3x \cos 11x\,dx$.	1) $\int \frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}\,dx$; 2) $\int arctgx\,dx$; 3) $\int \frac{3x+1}{x^3+3x^2+x+3}\,dx$; 4) $\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+3\right)^2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$; 5) $\int ctg^5 6x\,dx$.

Варіант 27	***Варіант 28***
1) $\int \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^3}\,dx$; 2) $\int x\cdot e^{-3x}\,dx$; 3) $\int \frac{4x+3}{x^3-x^2+x-1}\,dx$; 4) $\int \frac{1}{\sqrt{x+5}+1}\,dx$; 5) $\int \frac{3+\sin x}{2-3\cos x}\,dx$.	1) $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 2) $\int xe^{4x}\,dx$; 3) $\int \frac{x}{x^2-10x+24}\,dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+4\right)}\,dx$; 5) $\int \sin 3x \sin 7x\,dx$.

Варіант 29	***Варіант 30***

1) $\int \frac{e^{tgx}}{cos^2 x} dx$; 2) $\int x \cdot 2^{-3x} dx$; 3) $\int \frac{x+5}{x^3-7x^2+10x} dx$; 4) $\int \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}+1} dx$; 5) $\int \frac{2+sin\,x}{3-cos\,x} dx$.	1) $\int \frac{sin\,2x}{1+sin^2 x} dx$; 2) $\int arcsin\,3x\,dx$; 3) $\int \frac{5x-7}{x^3+3x^2+2x} dx$; 4) $\int \frac{4+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx$; 5) $\int ctg^6\,2x\,dx$.

Завдання 2. Обчислити такі визначені інтеграли:

Варіант 1	***Варіант 2***
1) $\int_0^1 \frac{2^x}{9+4^x} dx$; 2) $\int_1^2 xe^x\,dx$.	1) $\int_0^{\pi/2} \frac{sin\,x}{1+cos^2 x} dx$; 2) $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$.
Варіант 3	***Варіант 4***
1) $\int_0^1 \frac{(arctgx)^2}{1+x^2} dx$; 2) $\int_2^3 x\,ln\,x\,dx$.	1) $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$; 2) $\int_0^1 arctgx\,dx$.
Варіант 5	***Варіант 6***
1) $\int_0^1 \frac{x^5}{\left(1+x^6\right)^{15}} dx$; 2) $\int_1^3 xe^{-x}\,dx$.	1) $\int_1^3 \frac{\sqrt{1+ln\,x}}{x} dx$; 2) $\int_0^{\pi/2} x\cos 2xdx$.

Варіант 7	Варіант 8
1) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$; 2) $\int_1^4 x^2 \ln x\,dx$.	1) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 5x}{1+\sin^2 x}dx$; 2) $\int_0^{\pi/4} x\cos 4x\,dx$.
Варіант 9	**Варіант 10**
1) $\int_3^5 \frac{1}{x\ln x}dx$; 2) $\int_0^{\pi/4} x\sin 2x\,dx$.	1) $\int_0^1 \frac{x^2}{9+x^6}dx$; 2) $\int_0^1 xe^{-2x}\,dx$.
Варіант 11	**Варіант 12**
1) $\int_0^2 \left(e^x+1\right)^7 e^x dx$; 2) $\int_0^1 xe^{-3x}\,dx$.	1) $\int_0^1 e^{x^3+5}\cdot x^2 dx$; 2) $\int_1^4 (x+1)\ln x\,dx$.
Варіант 13	**Варіант 14**
1) $\int_0^{\pi/2} (1+\sin x)^5 \cos x dx$; 2) $\int_0^1 arctgx\,dx$.	1) $\int_1^3 \frac{1}{x(1+\ln x)}dx$; 2) $\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$.
Варіант 15	**Варіант 16**
1) $\int_0^1 e^{x^5+4}\cdot x^4\,dx$; 2) $\int_0^{\pi/4} xtg^2 x\,dx$.	1) $\int_0^{\pi/4} \sin^3 x\cos x\,dx$; 2) $\int_0^1 x\cdot 4^x\,dx$.
Варіант 17	**Варіант 18**
1) $\int_1^2 e^{\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; 2) $\int_1^4 x\ln x\,dx$.	1) $\int_0^{\pi/4} \cos^4 x\sin x\,dx$; 2) $\int_0^1 x\cdot 2^{-x}\,dx$.
Варіант 19	**Варіант 20**

1) $\int_0^{1/2} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 2) $\int_0^{\pi/2} x\sin 3x\,dx$.	1) $\int_3^4 \frac{1}{x\ln x}\,dx$; 2) $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$.
Варіант 21	***Варіант 22***
1) $\int_0^1 \sin\left(e^x+1\right)e^x\,dx$; 2) $\int_0^1 \mathrm{arctg}\,3x\,dx$.	1) $\int_3^4 \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$; 2) $\int_0^{\pi/2} x\cos 5x\,dx$.
Варіант 23	***Варіант 24***
1) $\int_0^1 x\cos\left(x^2+4\right)dx$; 2) $\int_0^1 x\cdot 2^x\,dx$.	1) $\int_0^1 \frac{x^3}{\left(1+x^4\right)^3}\,dx$; 2) $\int_0^1 x\cdot 5^{-x}\,dx$.;
Варіант 25	***Варіант 26***
1) $\int_0^1 \frac{e^{3x}}{25+e^{6x}}\,dx$; 2) $\int_{20}^{\pi/4} x\sin 4x\,dx$.	1) $\int_0^1 \frac{x^4}{5x^5+1}\,dx$; 2) $\int_2^3 (x+1)\ln x\,dx$.
Варіант 27	***Варіант 28***
1) $\int_0^{\pi/2} x^2\cdot\sin\left(x^3+1\right)dx$; 2) $\int_0^1 x\cdot 3^{-x}\,dx$.	1) $\int_0^1 x^3\cdot\cos\left(x^4+5\right)dx$; 2) $\int_0^1 x\cdot 7^x\,dx$.
Варіант 29	***Варіант 30***
1) $\int_0^1 \frac{2x-3}{x^2-3x+4}\,dx$; 2) $\int_0^1 x\cdot 9^x\,dx$.	1) $\int_0^2 \sqrt{x^3+4}\cdot x^2\,dx$; 2) $\int_0^{\pi/2} x\cos 3x\,dx$.

Завдання 3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

Варіант 1	Варіант 2
$x = 0, x = 1, y = 0, \ y = e^x.$	$x = 0, x = 1, y = e^x , y = e^{-x}.$
Варіант 3	**Варіант 4**
$x = 0, x = 1, y = 0, \ y = e^x, y = e^{2x}.$	$x = 0, y = 0 , y = 4 - x^2.$
Варіант 5	**Варіант 6**
$x = 0, x = 1, y = 0, \ y = e^x + 1.$	$x = 0, x = 1, y = x , y = 2x.$

Варіант 7	Варіант 8
$x = 0, \ x = \frac{\pi}{3}, y = 0, \ y = sin2x.$	$y = x^2 , y = x.$
Варіант 9	**Варіант 10**
$y = x, y = 0, \ y = 1 - x.$	$x = 0, x = 1, y = 2x , y = 3x.$
Варіант 11	**Варіант 12**
$x = 0, x = 1, y = x^2, \ y = x^3.$	$x = 0, x = 1, y = e^x , y = e^x + 1.$
Варіант 13	**Варіант 14**
$x = 1, x = 2, y = e^x, \ y = e^{2x}.$	$y = x , \ y = \frac{1}{2}x^2 .$
Варіант 15	**Варіант 16**
$y = x^2, \ y = x^3.$	$y = x, y = 2 - x, y = 0.$
Варіант 17	**Варіант 18**
$y = x , \ y = \frac{1}{3}x^2 .$	$y = x^2, y = 4 - x^2.$
Варіант 19	**Варіант 20**
$x = 0, x = \pi, y = \sin x, \ y = 2sinx.$	$x = 1, x = 4, y = 0 , \ y = \frac{4}{x}.$
Варіант 21	**Варіант 22**

$y = x$, $y = \frac{1}{4}x^3$.	$y = x$, $y = x^4$.
Варіант 23	***Варіант 24***
$x = 1, x = 2, y = x, y = 3x.$	$x = \frac{\pi}{4}, x = \pi, y = 0 , y = \sin x.$
Варіант 25	***Варіант 26***
$x = 1, x = 3, y = 0 , y = \frac{1}{x}.$	$x = 0, y = 0 , y = 1 - x^2.$

Варіант 27	***Варіант 28***
$x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = \cos x , y = 2\cos x.$	$x = 1, x = 3, y = e^x , y = e^{-x}.$
Варіант 29	***Варіант 30***
$x = 1, x = 2, y = x, y = 2x.$	$x = 0, x = 1, y = 2 - x^2.$

Завдання 4. Обчислити обсяг виготовленої продукції $F(t_1, t_2)$ за проміжок часу $[t_1, t_2]$, якщо продуктивність праці $f(t)$ дорівнює

Варіант 1	***Варіант 2***
$f(t) = 3t^2 - t + 4;$ $t_1 = 1, t_2 = 5$	$f(t) = 5\sin t + 3t;$ $t_1 = 0, t_2 = \frac{\pi}{2}$
Варіант 3	***Варіант 4***
$f(t) = 4t^3 + 3;$ $t_1 = 0, t_2 = 4.$	$f(t) = 3t^3 - 4t + 3;$ $t_1 = 1, t_2 = 6.$
Варіант 5	***Варіант 6***
$f(t) = 3t^2 - 4t + 5;$ $t_1 = 1, t_2 = 5.$	$f(t) = 4t^2 - 5t + 2;$ $t_1 = 1, t_2 = 6.$
Варіант 7	***Варіант 8***

$f(t) = 2t^2 + 3t - 4;$ $t_1 = 2,\ t_2 = 4.$	$f(t) = 2t^2 + 5t - 1;$ $t_1 = 2,\ t_2 = 5.$
Варіант 9	***Варіант 10***
$f(t) = 5t^2 - 3t + 1;$ $t_1 = 1,\ t_2 = 4.$	$f(t) = 5t^2 + t - 3;$ $t_1 = 1,\ t_2 = 5.$
Варіант 11	***Варіант 12***
$f(t) = 4t^2 + 3t + 2;$ $t_1 = 0,\ t_2 = 3.$	$f(t) = 4t^2 - 3t + 1;$ $t_1 = 0,\ t_2 = 4.$
Варіант 13	***Варіант 14***
$f(t) = t^2 + 2t + 1;$ $t_1 = 1,\ t_2 = 4.$	$f(t) = t^2 - 4t + 5;$ $t_1 = 1,\ t_2 = 5.$
Варіант 15	***Варіант 16***
$f(t) = 3t^2 + t + 3;$ $t_1 = 1,\ t_2 = 5.$	$f(t) = 2t^2 + 3t + 1;$ $t_1 = 2,\ t_2 = 4.$
Варіант 17	***Варіант 18***
$f(t) = 5t^2 + 5;$ $t_1 = 0,\ t_2 = 3.$	$f(t) = 5t^2 + t + 1;$ $t_1 = 0,\ t_2 = 4.$
Варіант 19	***Варіант 20***
$f(t) = 6t^2 + 3t + 2;$ $t_1 = 0,\ t_2 = 2.$	$f(t) = 6t^2 + t + 3;$ $t_1 = 1,\ t_2 = 4.$
Варіант 21	***Варіант 22***
$f(t) = t^2 + 3t + 2;$ $t_1 = 1,\ t_2 = 5.$	$f(t) = t^2 + 4t + 3;$ $t_1 = 1,\ t_2 = 5.$
Варіант 23	***Варіант 24***
$f(t) = t^3 + 3t^2 + 2;$ $t_1 = 1,\ t_2 = 3.$	$f(t) = 2t^3 + t + 1;$ $t_1 = 0,\ t_2 = 4.$
Варіант 25	***Варіант 26***
$f(t) = 3t^3 + 5t + 2;$ $t_1 = 0,\ t_2 = 3$	$f(t) = 4t^3 + t + 2;$ $t_1 = 0,\ t_2 = 3$
Варіант 27	***Варіант 28***
$f(t) = 4t^3 + 2t^2 + t;$	$f(t) = 3t^3 + t^2 + 5t;$

$t_1 = 1,\ t_2 = 4.$	$t_1 = 0,\ t_2 = 4.$
Варіант 29	***Варіант 30***
$f(t) = 5t^3 + 3t + 1;$ $t_1 = 0,\ t_2 = 3.$	$f(t) = 5t^3 – t + 4t;$ $t_1 = 1,\ t_2 = 5.$

Завдання 5. Функція маргінальних витрат фірми має вигляд $V'(x)$. Знайти зростання загальних витрат, коли виробництво зростає з a до b одиниць.

№ п/п	$V'(x)$	a	b	**№ п/п**	$V'(x)$	a	b
1	$17{,}5 – 0{,}02x$	100	200	**2**	$11{,}5 – 0{,}04x$	100	400
3	$21{,}5 – 0{,}01x$	100	1000	**4**	$15{,}2 – 0{,}02x$	10	1000
5	$17{,}2 – 0{,}06x$	10	500	**6**	$23{,}2 – 0{,}04x$	100	500
7	$31{,}3 – 0{,}008x$	1000	2000	**8**	$33{,}2 – 0{,}01x$	500	1000
9	$26{,}1 – 0{,}006x$	1000	2000	**10**	$37{,}5 – 0{,}08x$	200	600
11	$22{,}5 – 0{,}002x$	1000	3000	**12**	$35{,}2 – 0{,}03x$	500	1000
13	$41{,}5 – 0{,}07x$	100	1000	**14**	$42{,}2 – 0{,}05x$	200	500
15	$45{,}5 – 0{,}08x$	20	1000	**16**	$48{,}5 – 0{,}04x$	500	1000
17	$13{,}5 – 0{,}004x$	1000	2000	**18**	$15{,}2 – 0{,}02x$	300	800
19	$16{,}5 – 0{,}02x$	20	1000	**20**	$25{,}5 – 0{,}01x$	100	2000
21	$27{,}2 – 0{,}006x$	200	1000	**22**	$24{,}3 – 0{,}012x$	400	700
23	$32{,}2 – 0{,}07x$	100	200	**24**	$37{,}1 – 0{,}014x$	1000	3000
25	$30{,}5 – 0{,}016x$	200	800	**26**	$50{,}2 – 0{,}018x$	100	500
27	$52{,}5 – 0{,}08x$	300	1000	**28**	$31{,}5 – 0{,}04x$	40	200
29	$29{,}2 – 0{,}06x$	50	500	**30**	$19{,}5 – 0{,}02x$	200	1200

Завдання 6. Чисті інвестиції задані функцією $f(t)$. Визначити:

а) приріст капіталу ΔK за n років;

б) через скільки років T приріст капіталу буде складати ΔK.

№ п/п	$f(t)$	n	ΔK	№ п/п	$f(t)$	n	ΔK
1	$1000\sqrt[3]{t}$	3	6000	**2**	$2000\sqrt[3]{t^2}$	4	7000
3	$3000\sqrt[4]{t}$	5	8000	**4**	$4000\sqrt{t}$	3	9000
5	$5000\sqrt[4]{t}$	4	10000	**6**	$6000\sqrt[3]{t}$	5	9000
7	$7000\sqrt[3]{t^2}$	3	8000	**8**	$8000\sqrt[4]{t}$	4	7000
9	$9000\sqrt{t}$	5	6000	**10**	$10000\sqrt[5]{t}$	3	30000
11	$11000\sqrt[3]{t}$	4	40000	**12**	$1200\sqrt[3]{t^2}$	5	8000
13	$1300\sqrt[4]{t}$	3	7500	**14**	$1400\sqrt[4]{t^3}$	4	7000
15	$1500\sqrt{t}$	5	6000	**16**	$1600\sqrt[3]{t}$	3	5000
17	$1700\sqrt[4]{t}$	4	4000	**18**	$1800\sqrt[3]{t^2}$	5	3000
19	$1900\sqrt{t}$	6	4000	**20**	$2000\sqrt[5]{t}$	3	4500
21	$2100\sqrt[6]{t}$	4	5000	**22**	$2200\sqrt[3]{t}$	5	6000
23	$2300\sqrt[4]{t}$	6	7000	**24**	$2400\sqrt[3]{t^2}$	3	20000
25	$2500\sqrt[5]{t^3}$	4	25000	**26**	$2600\sqrt[3]{t^2}$	5	16000
27	$2700\sqrt[8]{t}$	6	12000	**28**	$2800\sqrt[6]{t}$	3	15000
29	$2900\sqrt[3]{t}$	4	10000	**30**	$3000\sqrt[9]{t}$	5	9500

Завдання 7. Знайти середнє значення витрат $K(x)$, виражених у грошових одиницях, якщо обсяг продукції x змінюється від a до b одиниць. Вказати обсяг продукції, при якому витрати набувають середнього значення.

№ п/п	*K(x)*	*a*	*b*	№ п/п	*K(x)*	*a*	*b*
1	$x^2 + 4x + 1$	0	3	**2**	$2x^2 + x + 1$	0	6
3	$3x^2 + 2x + 2$	1	5	**4**	$6x^2 - 2x + 1$	2	4
5	$4x^2 - 3x + 2$	0	6	**6**	$5x^2 - 6x + 2$	0	3
7	$3x^2 - x + 3$	1	5	**8**	$x^2 - 2x + 4$	3	9
9	$6x^2 - x + 2$	2	4	**10**	$2x^2 + 2x + 5$	1	4
11	$4x^2 - 2x + 1$	2	5	**12**	$5x^2 - 4x + 3$	3	6
13	$x^2 + 3x + 2$	0	6	**14**	$3x^2 + x + 1$	1	3
15	$2x^2 - 2x + 3$	2	5	**16**	$6x^2 - 4x + 3$	1	4
17	$4x^2 + 2x + 3$	6	9	**18**	$5x^2 + 8x + 1$	2	5
19	$x^2 - x + 1$	6	12	**20**	$5x^2 + 2x + 1$	0	3
21	$4x^2 + 4x + 3$	3	6	**22**	$3x^2 - 2x + 4$	2	5
23	$6x^2 + x + 1$	2	4	**24**	$2x^2 + 2x + 1$	0	9
25	$x^2 - 2x + 4$	2	5	**26**	$3x^2 + x + 2$	4	8
27	$5x^2 - 2x + 6$	2	5	**28**	$6x^2 - 2x + 3$	1	4
29	$2x^2 - 2x + 7$	3	6	**30**	$4x^2 - 4x + 1$	0	9

Завдання 8. Визначити, чи будуть збіжними або розбіжними такі невласні інтеграли:

Варіант 1	***Варіант 2***
1) $\int_{-2}^{+\infty} \frac{1}{x^2-4x+9}\,dx$; 2) $\int_{0}^{3} \frac{2x-8}{x^2-8x+15}\,dx$.	1) $\int_{3}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$; 2) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-4)^3}}$.
Варіант 3	***Варіант 4***
1) $\int_{0}^{+\infty} \frac{(arctgx)^2}{1+x^2}\,dx$; 2) $\int_{1}^{4} \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-4)^4}}$.	1) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(3x-1)^2}$; 2) $\int_{0}^{2} \frac{2x-6}{x^2-6x+8}\,dx$.
Варіант 5	***Варіант 6***
1) $\int_{0}^{+\infty} xe^{x^2}\,dx$; 2) $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt[4]{(x+2)^3}}$.	1) $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(4x+5)^4}$; 2) $\int_{-1}^{3} \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$.
Варіант 7	***Варіант 8***
1) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$; 2) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-2)^3}$.	1) $\int_{0}^{+\infty} \frac{(arctgx)^3}{1+x^2}\,dx$; 2) $\int_{0}^{\pi/2} ctgx\,dx$.

Варіант 9	***Варіант 10***
1) $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{x}{x^4+4}\,dx$; 2) $\int_{1}^{2} \frac{3x^2+1}{x^3+x-2}\,dx$.	1) $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; 2) $\int_{1}^{5} \frac{2x-8}{x^2-8x+15}\,dx$.
Варіант 11	***Варіант 12***

1) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(2x-1)^3}$; 2) $\int_{4}^{5} \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-5)^3}}$.	1) $\int_{4}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$; 2) $\int_{1}^{4} (x+1)\ln x\, dx$.
Варіант 13	***Варіант 14***
1) $\int_{2}^{+\infty} \frac{x^4}{x^5+5} dx$; 2) $\int_{3}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x-3}}$.	1) $\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{\left(x^3+8\right)^2} dx$; 2) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.
Варіант 15	***Варіант 16***
1) $\int_{0}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$; 2) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.	1) $\int_{-\infty}^{-3} \frac{x}{\left(x^2+4\right)^3} dx$; 2) $\int_{0}^{\pi/2} tgx\, dx$.
Варіант 17	***Варіант 18***
1) $\int_{2}^{+\infty} \frac{x}{x^4+16} dx$; 2) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-1}$.	1) $\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{x^3} dx$; 2) $\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2-4} dx$.
Варіант 19	***Варіант 20***
1) $\int_{0}^{+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} dx$; 2) $\int_{0}^{1} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$.	1) $\int_{2}^{+\infty} \frac{x}{x^2+25} dx$; 2) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-2)^3}$.
Варіант 21	***Варіант 22***
1) $\int_{-\infty}^{1} \frac{x^2}{\left(8x^3+1\right)^3} dx$;	1) $\int_{-\infty}^{-3} \frac{x}{\left(4x^2+1\right)^3} dx$;

2) $\int_{2}^{4} \frac{dx}{x^{2}-5x+4}$.	2) $\int_{-1}^{0} \frac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$.
Варіант 23	***Варіант 24***
1) $\int_{0}^{+\infty} \frac{arctg\, 2x}{4x^{2}+1} dx$; 2) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x-1} dx$.	1) $\int_{-\infty}^{1} \frac{x}{\left(5x^{2}+3\right)^{2}} dx$; 2) $\int_{-3}^{0} \frac{dx}{(x+3)^{4}}$.
Варіант 25	***Варіант 26***
1) $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(3x+4)^{4}}$; 2) $\int_{2}^{4} \frac{2x-7}{x^{2}-7x+11} dx$.	1) $\int_{-\infty}^{0} \frac{x^{3}}{1+x^{8}} dx$; 2) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^{4} x} dx$.
Варіант 27	***Варіант 28***
1) $\int_{6}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2}-8x+15}$; 2) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^{5}}}$.	1) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{2}}{4x^{6}+1} dx$; 2) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos^{4} x} dx$.
Варіант 29	***Варіант 30***
1) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(2+3x)^{4}}$; 2) $\int_{2}^{3} \frac{2x-7}{x^{2}-7x+12} dx$.	1) $\int_{-\infty}^{-3} \frac{x}{\left(x^{2}+4\right)^{2}} dx$; 2) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos^{2} x} dx$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов – М.: Наука, 1985. – 475 с.

2 Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1967. – 582 с.

3 Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1977. – 352 с.

4 Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1967. – 396 с.

5 Ковалішина І.В. Методичні вказівки і завдання до контрольної роботи з теми „Інтегральне числення”, № 3447. –

Харків: УкрДАЗТ, 1988. – 50 с.

6 Гадецька С.В. Інтегральне числення // Навчально-методичний посібник до вивчення розділу „Інтегральне числення” дисципліни “Вища математика”. – Харків: ХБІ УАБС, 2005. – 72 с.