ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра „Вища математика”

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

та завдання до контрольної роботи з дисципліни

«*ВИЩА МАТЕМАТИКА*»

Харків – 2009

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри «Вища математика» 31 березня 2008 р., протокол №9.

Методичні вказівки містять у собі необхідну кількість означень, формул і рекомендацій, за допомогою яких студент може опанувати тему «Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії» і виконувати контрольну роботу з цієї теми, а також достатню кількість варіантів завдань для контрольної роботи.

Методичні вказівки призначені для організації самостійної роботи студентів економічних спеціальностей, а також для виконання контрольної роботи 1 студентами заочної форми навчання.

Укладачі:

доц. Н.С. Юрчак,
старші викладачі Н.І. Волохова,
Н.Г. Панченко

Рецензент

доц. О.А. Осмаєв

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
та завдання до контрольної роботи з дисципліни
«Вища математика»

Відповідальний за випуск Панченко Н.Г.

Редактор Решетилова В.В.

Підписано до друку 19.05.08 р.
Формат паперу 60х84 1/16 . Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 5,25. Обл.-вид.арк. 5,5.
Замовлення № Тираж 300 Ціна

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК 2874 від 12.06.2007 р.
Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, майдан Фейєрбаха, 7

ЗМІСТ

1 ТЕОРІЯ ВИЗНАЧНИКІВ ТА СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ (ЗАВДАННЯ 1, 5)

1.1 Визначники другого і третього порядків та їхні властивості

Визначення

Вираз
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \qquad (1.1)$$
називається **визначником** (детермінантом) **другого порядку.**

Визначення

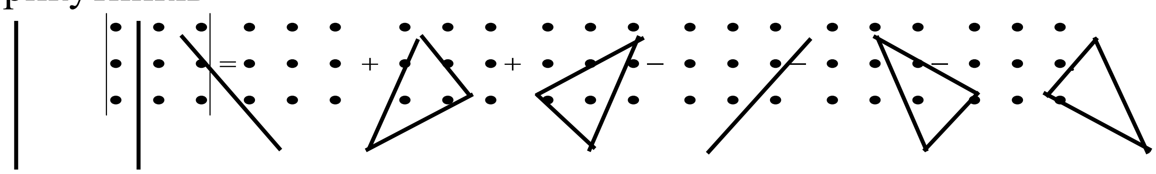
Вираз
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + \qquad (1.2)$$
$$+ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{11} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$$
називається **визначником** (детермінантом) **третього порядку.**

Символи a_{ij} називаються **елементами визначника**, причому перший індекс ***i*** показує номер рядка, а другий індекс ***j*** – номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент. Так, елемент a_{32} стоїть у третьому рядку і другому стовпці.

Елементи a_{11}, a_{22} у визначнику (1.1) і a_{11}, a_{22}, a_{33} у визначнику (1.2) складають **головну діагональ** визначника, а елементи a_{12}, a_{21} і a_{13}, a_{22}, a_{31} в тих самих визначниках – **побічну діагональ**.

Визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів, що стоять на головній діагоналі, та розміщених на побічній діагоналі.

Визначник третього порядку обчислюється за правилом трикутників



або за правилом Саррюса.

Допишемо до визначника перший і другий стовпці, далі перемножуємо, як показано на схемі

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \boldsymbol{a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}}.$$

Зауваження

Елементами визначника можуть бути не тільки числа, а й алгебраїчні чи тригонометричні вирази, функції тощо.

Визначення

Мінором M_{ij} елемент a_{ij} визначника називається визначник, який утворюється з даного визначника в результаті викреслення i – го рядка та j – го стовпця.

Визначення

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника називається мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Властивості визначників

1 Величина визначника не зміниться, якщо його рядки зробити стовпцями з тими ж номерами.

Ця операція називається транспонуванням.

2 Якщо у визначнику поміняти місцями два сусідніх ряди (стовпці), то знак визначника зміниться на протилежний.

3 Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

4 Загальний множник елементів деякого рядка (стовпця) визначника може бути винесеним за знак визначника.

5 Якщо елементи двох рядків (стовпців) визначника

однакові, то визначник дорівнює нулю.

Наслідок

Якщо у визначнику елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

6 Величина визначника не зміниться, якщо до елементів одного рядка (або стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.

7 Визначник, у якого елементи деякого рядка (стовпця) є сумою двох додатків, дорівнює сумі двох визначників, у першого з яких у зазначеному рядку (стовпці) стоять перші додатки, а у другого – другі додатки; всі інші рядки (стовпці) у обох визначників однакові.

Теорема про розклад визначника за елементами рядка або стовпця

Теорема 1 Визначник дорівнює сумі добутків елементів якого – небудь рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

$$\Delta = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

$$\left(\textbf{розклад по елементах } i - \textit{рядка}; \ i = \overline{1, \ n}\right);$$

або

$$\Delta = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \ A_{ij} \ ,$$

$$\left(\textbf{розклад по елементах } j - \textbf{стовпця}; \ j = \overline{1, \ n}\right).$$

Теорема 2 Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Примітка - Розклад визначника за елементами рядка або стовпця називають ще розкладом Лапласа, а самі теореми — теоремою Лапласа.

1.2 Поняття про визначники вищих порядків і їх обчислення

Теорема розкладання визначника за елементами рядка або стовпця дає змогу ввести означення визначника довільного порядку. За означенням визначник n – порядку дорівнює сумі добутків елементів будь - якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}\cdot A_{i1}+a_{i2}\cdot A_{i2}+a_{i3}\cdot A_{i3}+\dots$$

1.2.1 Основні методи обчислення визначників вищих порядків

1 Метод пониження порядку

Метод пониження порядку оснований на застосуванні теореми розкладання визначника за елементами деякого рядка (стовпця), згідно з якою

$$\Delta=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij}\ ,\ i=\overline{1,n}\ \text{ або }\ \Delta=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij}\ ,\ j=\overline{1,n}\ .$$

При цьому корисно, використовуючи основні властивості визначників, обернути в нуль всі, крім одного, елементи деякого рядка (стовпця) визначника, а потім застосувати теорему розкладання. Іноді зручно застосувати теорему розкладання визначника за елементами декількох рядків (стовпців). При цьому добиваються того, щоб у вказаних рядках були мінори, складені з нулів.

2 Метод зведення до трикутного вигляду

Метод зведення до трикутного вигляду полягає у такому перетворенні визначника, коли всі елементи, що лежать по один бік однієї з його діагоналей, рівні нулю.

1.3 Методи розв’язання систем лінійних рівнянь (завдання 5)

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m$ називається система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1.3)$$

Числа $a_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$ біля невідомих називаються **коефіцієнтами**, а числа $b_1,\ b_2, b_3,\ \cdots b_m$ – **вільними членами** системи.

Система рівнянь називається **однорідною**, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і **неоднорідною**, якщо хоч один з них відмінний від нуля.

Розв’язком системи (1.3) називається сукупність чисел ($x_1, x_2, \cdots, x_n$), яка перетворює систему (1.3) у систему тотожностей.

Формули для розв'язання систем двох і трьох лінійних алгебраїчних рівнянь із застосуванням визначників надані у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Вигляд системи	Формули для розв'язання
1	2
1) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$	Формули Крамера $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta},$ де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$ $\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$
2) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{cases}$	Формули Крамера $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta},$ де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta x_1$ $\Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{vmatrix}$
3) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b \end{cases}$	нехай $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ і $x_3 = t \in$ тоді $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 - a_{13}t; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 - a_{23}t. \end{cases}$ $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}$ (формули К де $\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 - a_{13}t & a_{12} \\ b_2 - a_{23}t & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}$

Примітки

1 Якщо головний визначник (детермінант) системи $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}.$$

2 Якщо $\Delta = 0$, то можливі два випадки (за умови, що не всі b_i =0, тобто система неоднорідна):

а) $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$ – то система має безліч розв'язків, або не має жодного розв'язку;

б) хоча б один із детермінантів $\Delta x_1; \Delta x_2; \Delta x_3$ не дорівнює нулю – то система несумісна, тобто не має жодного розв'язку.

Метод Гаусса або метод послідовних виключень

Цей метод полягає в тому, що за допомогою так званих елементарних перетворень система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.. \end{cases} \tag{1}$$

перетворюється в еквівалентну систему, яка має вигляд

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = b'_1; \\ \qquad\quad x_2 + a''_{23}x_3 = b''_2; \\ \qquad\qquad\qquad x_3 = b'''_3.. \end{cases}$$

Продемонстровано це на прикладі 5 при розв'язанні варіанта 31.

Примітка - Метод Гаусса можна застосовувати і для випадку, коли число рівнянь не дорівнює числу невідомих, а також коли $\Delta = 0$.

1.4 Матриці та дії над ними (завдання 2, 3, 4)

Визначення

Матрицею розміру $m \times n$ називається упорядкована множина з $m \times n$ елементів a_{ij}, розміщених у вигляді прямокутної таблиці з $m -$ рядків і $n -$ стовпців

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Примітки

1 На відміну від визначника матриця – це лише упорядкована таблиця елементів, а не результат виконання певних операцій; робити будь-які перестановки в ній не можна;

2 Елементами матриці можуть бути не тільки числа, а й алгебраїчні вирази, функції тощо.

Приклади матриць:

$$(a),\ (a_1 \quad a_2 \quad a_3),\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

коротко матрицю позначають так:

$$A = (a_{ij}) \text{ або } A = \|a_{ij}\|, \qquad i = \overline{1,k}, \quad j = \overline{1,n}$$

де a_{ij} – елементи матриці, причому індекс i в елементі a_{ij} означає номер рядка;

j – номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Визначення

Добуток числа рядків m на число стовпців n називають **розміром матриці** і позначають $m \times n$.

Якщо хочуть вказати розмір $m \times n$ матриці A, то пишуть $A_{m \times n}$.

Визначення

Матриця, в якої число рядків дорівнює числу стовпців, називають **квадратною**. Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її порядком.

Різновиди матриць надані у таблиці 1.2.

Таблиця 1.2

Назва матриці	Вигляд матриці
1	2

1)	Прямокутна розміру $m \times n$	$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$
2)	Транспонована по відношенню до матриці A	$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\text{або } A^{\tau}$$
3)	Квадратна порядку n	$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Продовження таблиці 1.2

1		2
4)	Матриця – стовпець	$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$
5)	Матриця – рядок	$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

6)	Нульова	$$0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
7)	Одинична	$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
8)	Діагональна	$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$ $$D=diag\left(a_{11},\quad a_{22},\quad a_{33},\quad \cdots,\quad a_{nn}\right)$$
9)	Приєднана до квадратної матриці A	$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Дії над матрицями

1 Матриці однакової вимірності можна складати і віднімати:

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

2 Добуток матриці A на число k:

$$k\ A = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

3 Якщо кількість стовпців матриці $A_{m\times n}$ збігається з кількістю рядків матриці $B_{n\times k}$, можна визначити добуток матриць $A{\cdot}B$ за правилом множення рядка на стовпець.

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times k} = C_{m\times k}$$

$$C_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ \cdots \ + a_{in}.$$
$$i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}.$$

У частинному випадку

$$A_{m\times n} \cdot E_{n\times n} = A_{m\times n}; \qquad E_{m\times m} \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}.$$

Примітка - Операція множення матриць не комутативна, тобто при множенні матриць не можна міняти місцями множники $A \cdot B \neq B \cdot A.$

Приклад Знайти матрицю $C = A \cdot B \ i \ D = B \cdot A$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) & 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$D = B \cdot A$ – не існує, тому що матриця *B* не узгоджена з матрицею *A*:

$$B_{2\times 3} - 2 \text{ рядка і 3 стовпця,}$$

$$A_{2\times 2} - 2 \text{ рядка і 2 стовпця.}$$

Примітка - $A \cdot E = E \cdot A = A;$

$A \cdot O = O \cdot A = O$

1.5 Ранг матриці

Визначення

Якщо в матриці $A_{m\times n} = A$ виділити “k” рядків і стільки ж стовпців, де k – число, не більше чисел m і n, тобто $k \le \min(m,n)$, то сукупність елементів матриці, які містяться на перетині цих рядків і стовпців, утворюють матрицю вимірності k×k (тобто квадратну матрицю k – го порядку), визначник якої називається мінором k – го порядку M_k.

Визначення

Рангом матриці *A* називається порядок найбільшого мінору, який відрізняється від нуля.

Ранг матриці позначається так:

$rang\ A = r \ \ (M_r \neq 0)$, а всі останні мінори вищих порядків дорівнюють нулю.

Ранг існує для будь-якої матриці $A_{m\times n}$, причому

$$0 \le \ rang A \ \le \ \min(m,n).$$

Елементарні перетворення матриць:

1) переставлення рядків (стовпців);

2) множення кожного елемента рядка (або стовпця) на число $\alpha \neq 0$;

3) додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів другого рядка (стовпця), помножених на одне і те саме число.

Примітка - Ранг матриці не змінюється, якщо над матрицею виконати елементарні перетворення.

1.5.1 Методи обчислення рангу матриці

1 Метод обвідних мінорів

Нехай в матриці знайдено мінор k – го порядку M, відмінний від нуля. Розглянемо тільки *ті* мінори (k +1) – го порядку, які містять у собі (обводять) мінор M. Якщо усі вони дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k. В протилежному випадку серед обвідних мінорів знайдеться ненульовий мінор (k+1) – го порядку, і вся процедура повторюється.

2 Метод елементарних перетворень

Цей метод базується на незмінності рангу при елементарних перетвореннях. За допомогою елементарних перетворень дану матрицю A перетворюють у матрицю, ранг якої легко знаходиться, тобто до матриці вигляду

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

де $a_{11} \neq 0,\ a_{22} \neq 0,\ a_{33} \neq 0, \dots a_{kk} \neq 0.$

Але тоді

$$M_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ тобто } rangA = k.$$

1.6 Обернена матриця (завдання 4)

Визначення

Оберненою до квадратної матриці A називається A^{-1} така, що $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Примітка - Для того, щоб квадратна матриця A мала обернену достатньо, щоб визначник (детермінант) матриці не дорівнювався нулю, тобто

$$\det A \neq 0 \quad |\Delta A \neq 0|.$$

Обернену матрицю можна обчислити за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}^T = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T ,$$

де $\widetilde{A}$ – називається **приєднаною** до матриці A, складається із алгебраїчних доповнень матриці A, тобто

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix};$$

A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A.

1.7 Матричний метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Систему (1.4) можна записати у вигляді матричного рівняння

$$A \cdot X = B,$$

де матриця *A* утворена із коефіцієнтів при невідомих

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

матриця X – матриця-стовпець із невідомих $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, та матриця

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець із вільних членів системи,

тоді розв'язок $$X = A^{-1} \cdot B,$$

або $$X = \frac{1}{det\ A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T \cdot B,$$

A_{ij} – алгебраїчні доповнення елемента a_{ij} визначника матриці системи.

Основні види матричних рівнянь та формули для їх розв’язання надані у таблиці 1.3

Таблиця 1.3

Вид матричного рівняння	Розв’язок матричного рівняння
1) $A \cdot X = B$	$X = A^{-1} \cdot B$, якщо A— не особлива матриця
2) $X \cdot A = B$	$X = B \cdot A^{-1}$, якщо A— не особлива матриця
3) $A \cdot X \cdot B = C$	$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$, якщо A і B— не особливі матриці

Примітка - Якщо матриця A − прямокутна, то розв’язок матричних рівнянь $A \cdot X = B$, або $X \cdot A = B$ зводиться до розв’язку систем лінійних рівнянь.

2 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА (ЗАВДАННЯ 6, 7)

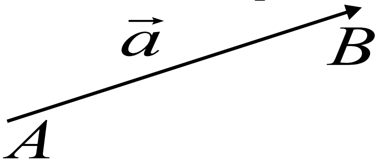
2.1 Вектори та лінійні операції над ними

Визначення

Вектором називається величина, яка характеризується як числовим значенням, так і напрямом у просторі.

Числове значення зветься довжиною або модулем вектора.

Звичайно вектор позначається однією $\bar{a}, \bar{F}, \bar{V}$ або двома латинськими літерами зі стрілкою $\overrightarrow{AB}$, або жирними літерами ***a***.



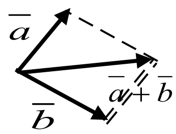
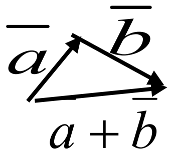
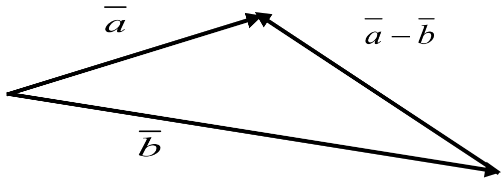
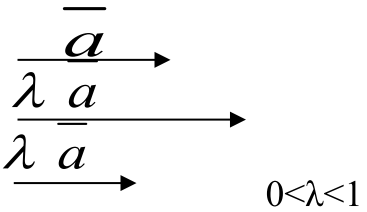
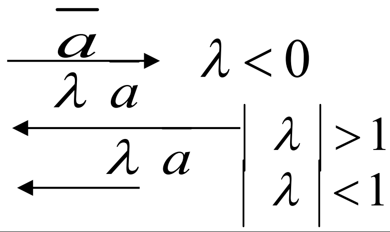
$\bar{a} = \overline{AB}$, точка A – початок вектора, точка B – його кінець.

Модулем або **довжиною** вектора $\bar{a} = \overline{AB}$ називається число $|\bar{a}| = |\overline{AB}|$, яке дорівнює довжині відрізка AB. У фізиці часто модулі векторів позначають відповідними літерами без стрілки

$$|\overline{a}| = a, \quad |\overline{AB}| = AB.$$

Лінійні операції з векторами, заданими геометрично, надані у таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Назва операції	Виконання операції	
Додавання векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$	**Правило паралелограма** 	**Правило трикутника** 
Віднімання векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$		
Множення вектора $\overline{a}$ на скаляр λ		

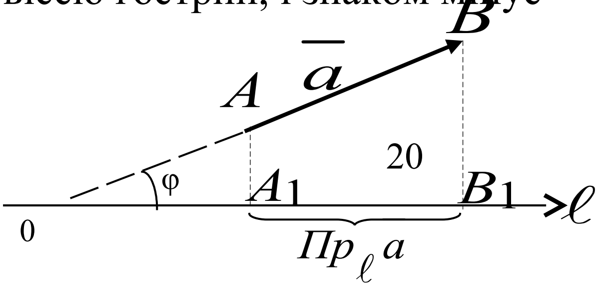
Визначення

Одиничним вектором або **ортом** $\vec{a}_0$ **даного вектора** $\vec{a}$ називається вектор, довжина якого дорівнює одиниці довжини (при даному масштабі), а напрям збігається з напрямом $\vec{a}$, тобто $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ або $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}_0$.

Орти осей декартових координат позначаються $\vec{i}, \vec{j}$ та $\vec{k}$.

Визначення

Проекцією вектора $\vec{a}$ **на вісь** ℓ $\left(\boldsymbol{Пр}_{\ell}\vec{a}\right)$ називається довжина відрізку, який з'єднує проекції на цю вісь початку і кінця даного вектора, взята зі знаком плюс "+", якщо кут між вектором і віссю гострий, і знаком мінус "–", якщо цей кут тупий.



$$Пр_{\ell}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi.$$

Будемо у подальшому позначати проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі Оx, Оy, Оz відповідно a_x, a_y та a_z. Вектор можна задавати цими проекціями, які називаються координатами вектора

$$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\} \text{ або } \vec{a} = (a_x; a_y; a_z),$$

або розкладанням за координатним базисом

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Визначення

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються **колінеарними** $(\vec{a} \parallel \vec{b})$, якщо вони лежать на паралельних прямих або на прямих, які збігаються.

Умова колінеарності двох векторів $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ та $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ рівносильна умові їх пропорційності $\vec{a} = k\vec{b}$, тобто або $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = k \neq 0$, або обидві відповідні координати цих векторів одночасно дорівнюють нулю.

Приклад

Обчислити координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо відомі координати точок його початку та кінця: $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ та $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Розв'язання

$$a_x = x_2 - x_1,\ a_y = y_2 - y_1,\ a_z = z_2 - z_1.$$

Тому $\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}.$

Відповідь $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}.$

Розрізняються два види добутків двох векторів: скалярний та векторний.

Скалярний добуток

Визначення

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів співмножників на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi.$$

Використовуючи визначення проекції вектора, скалярний добуток можна записати так:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot Пр_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot Пр_{\vec{b}}\vec{a}.$$

За допомогою скалярного добутку можна обчислити:

а) косинус кута між двома векторами

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|};$$

б) довжину вектора

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2};$$

в) проекцію одного вектора на напрям іншого

$$Пр_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\ \vec{a}\ |}.$$

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні ($\varphi=\pi/2$), їх скалярний добуток дорівнює нулю. Використовуючи це, можна довести, що скалярний добуток $\vec{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$ та $\vec{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$ дорівнює

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z.$$

Звідси маємо **ознаку перпендикулярності векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих координатами

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0.$$

Визначення

Напрямними косинусами вектора називають косинуси кутів між вектором $\vec{a}$ і координатними осями, тобто

$$\cos\alpha, \quad \cos\beta, \quad \cos\gamma,$$

де
$$\alpha = (\vec{a}; \widehat{O}x) ; \beta = (\vec{a}; \widehat{O}y) ; \gamma = (\vec{a}; \widehat{O}z) .$$

Якщо
$$\vec{a} = (a_x; \quad a_y; \quad a_z),$$

тоді
$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|};$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

причому,
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Векторний добуток

Визначення

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ **і** $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, який задовольняє умови:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b};$

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a} \widehat{;} \vec{b});$

3) вектор $\vec{c}$ напрямлений у той бік, з якого поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ на найменший кут здійснюється проти руху стрілки годинника.

З умови 2 випливає геометричний зміст векторного добутку векторів: модуль векторного добутку векторів дорівнює площі паралелограма, сторонами якого є дані вектори.

Векторний добуток двох векторів $\vec{a} = (a_x; \quad a_y; \quad a_z)$ та $\vec{b} = (b_x; \quad b_y; \quad b_z)$ дорівнює

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix},$$

Тобто координати вектора $\vec{c}$ дорівнюють

$$c_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad c_y = -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \quad c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix},$$

а довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює $|\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$ $\quad (S_{пар} = |\vec{c}|)$.

Мішаний добуток

Розглянемо тепер добуток трьох векторів.

Визначення

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$ **,** $\vec{b}$ та $\vec{c}$ називається число, що дорівнює векторно-скалярному добутку цих векторів

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right] \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \left[\vec{b} \times \vec{c}\right].$$

Геометричний зміст_мішаного добутку полягає в тому, що мішаний добуток векторів з точністю до знака дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах

$$V_{пар} = \pm\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}.$$

Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}$ та $\vec{c}$ задані своїми координатами $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ і $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$, то мішаний добуток може бути записаним у такому вигляді

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Визначення

Вектори, які паралельні будь-якій площині (або лежать в одній площині), називаються **компланарними.**

Умова компланарності векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Лінійні операції з векторами, заданими в координатній формі, надані у таблиці 2.2.

Таблиця 2.2

Назва операції	Виконання операції
Додавання векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$	$\bar{a}+\bar{b}=(a_x;a_y;a_z)+(b_x;b_y;b_z)=(a_x+b_x;a_y+b_y;a_z+b_z)$
Віднімання векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$	$\bar{a}-\bar{b}=(a_x;a_y;a_z)-(b_x;b_y;b_z)=(a_x-b_x;a_y-b_y;a_z-b_z)$

Величина або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Сума векторів	$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k}$.
Добуток вектора на число	$\alpha\vec{a}=\alpha a_x\vec{i}+\alpha a_y\vec{j}+\alpha a_z\vec{k}$.
Скалярний добуток векторів	$(\vec{a},\vec{b})=\vec{a}\,\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\varphi$ $(\vec{a},\vec{b})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.
Векторний добуток векторів	$[\vec{a},\vec{b}]=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$.
Мішаний добуток векторів	$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Продовження таблиці 2.1

1	2

Продовження таблиці 2.3

1	2
Довжина вектора	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.
Відстань між точками $M_1(x_1,y_1,z_1)$ та $M_2(x_2,y_2,z_2)$	$\rho(M_1,M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.
Кут між векторами	$\cos\varphi=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}$; $\cos\varphi=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.
Орт вектора $\overline{a}$	$\overline{a}_0=\dfrac{\overline{a}}{\lvert\overline{a}\rvert},\ \overline{a}_0=\left(\dfrac{a_x}{\lvert\overline{a}\rvert};\ \dfrac{a_y}{\lvert\overline{a}\rvert};\ \dfrac{a_z}{\lvert\overline{a}\rvert}\right)$.

Напрямні косинуси вектора $\overline{a}$	$\cos\alpha = \frac{\left(\overline{a},\overline{i}\right)}{\lvert\vec{a}\rvert} = \frac{a_x}{\lvert\vec{a}\rvert};$ $\cos\beta = \frac{\left(\overline{a},\overline{j}\right)}{\lvert\vec{a}\rvert} = \frac{a_y}{\lvert\vec{a}\rvert};$ $\cos\gamma = \frac{\left(\overline{a},\overline{k}\right)}{\lvert\vec{a}\rvert} = \frac{a_z}{\lvert\vec{a}\rvert};$ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$
Проекція вектора $\overline{a}$ на напрям вектора $\overline{b}$	$Пр_{\overline{b}}\,\overline{a} = \lvert\vec{a}\rvert\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{b}\rvert}.$.

Продовження таблиці 2.3

1	2
Координати точки, що ділить відрізок у даному відношенні λ	$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda\,\vec{r}_2}{1+\lambda};$ $x = \frac{x_1 + \lambda\,x_2}{1+\lambda};\ y = \frac{y_1 + \lambda\,y_2}{1+\lambda};\ z = \frac{z_1 + \lambda\,z_2}{1+\lambda}.$
Площа паралелограма та трикутника, побудованих на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$	$S_{пар} = \lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert;\quad S_{тр} = \frac{1}{2}\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert.$
Об’єм паралелепіпеда та піраміди, побудованих на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$	$V_{пар} = \lvert\,(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\,\rvert;\quad V_{пір} = \frac{1}{6}\lvert\,(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\,\rvert.$
Колінеарність та ортогональність двох векторів	$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = 0.\quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 0.\quad a_x b_x + a_y b_y +$

Компланарність трьох векторів	$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0;\ \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$

	Вигляд рівняння прямої l	Назва рівняння	Пояснення
1.	$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$	Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}$	$\vec{n} \perp l;\ \vec{n}=(A,B)$, $M_0 \in l$.
2.	$Ax+By+C=0$	Загальне рівняння	$\vec{n} \perp l,\ \vec{n}=(A,B)$
3.	$y=kx+b$	Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	$k=\mathrm{tg}\alpha$ – кутовий коефіцієнт, $\alpha=(l \hat{,} Ox)$; точка $(0,b)\in l$.
4.	$y-y_0=k(x-x_0)$	Рівняння прямої, що має кутовий коефіцієнт k та проходить через задану точку	$M_0(x_0, y_0)\in l$, $k=\mathrm{tg}\alpha,\ \alpha=(l \hat{,} Ox)$.
5.	$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$	Канонічне рівняння прямої	$M_0(x_0, y_0)\in l$, $\vec{s} \parallel l;\ \vec{s}=(m,n)$.
6.	$\begin{cases} x=x_0+mt; \\ y=y_0+nt. \end{cases}$	Параметричні рівняння прямої	$M_0(x_0, y_0)\in l$, $\vec{s} \parallel l;\ \vec{s}=(m,n),\ t\in\mathbf{R}$.
7.	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	Рівняння прямої у відрізках	Точки $(a,0),(0,b)\in l$.
8.	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$	Рівняння прямої, що проходить через дві точки	$M_1(x_1, y_1)\in l$, $M_2(x_2, y_2)\in l$.
9.	$x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0$	Нормальне рівняння прямої	$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta),\ \vec{n}\perp l$, $p=\rho(O,l)\ge 0$.

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої l	
$l:\ Ax+By+C=0$	$\rho(M_0, l)=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$.
$l:\ x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0$	$\rho(M_0, l)=\lvert x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta-p\rvert$.

Продовження таблиці 3.1

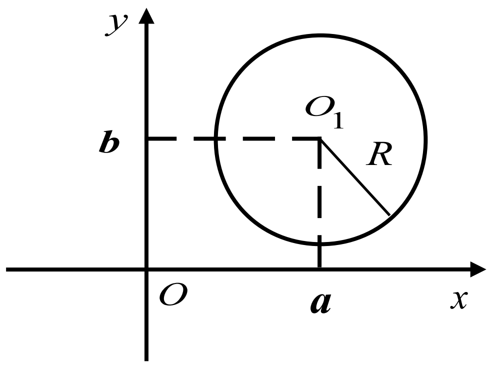
Продовження таблиці 3.1

Кут між прямими l_1 та l_2 на площині		
$l_1:\ y=k_1x+b_1$ $l_2:\ y=k_2x+b_2$	$\mathrm{tg}\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$.	
$l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0$ $l_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0$	$\cos\varphi=\dfrac{(\vec{n}_1,\vec{n}_2)}{\lvert\vec{n}_1\rvert\lvert\vec{n}_2\rvert}=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.	
Паралельність та перпендикулярність прямих l_1 та l_2 на площині		
	$l_1 \parallel l_2$	$l_1 \perp l_2$
$l_1:\ y=k_1x+b_1$ $l_2:\ y=k_2x+b_2$	$k_1=k_2$.	$k_1k_2=-1$.
$l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0$ $l_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0$	$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=0$; $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$.	$(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=0$; $A_1A_2+B_1B_2=0$.
$l_1:\ \dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}$ $l_2:\ \dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}$	$\vec{s}_1\times\vec{s}_2=0$; $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$.	$(\vec{s}_1,\vec{s}_2)=0$; $m_1m_2+n_1n_2=0$.

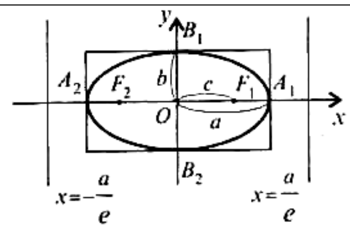
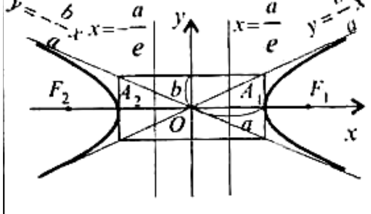
3.2 Криві другого порядку

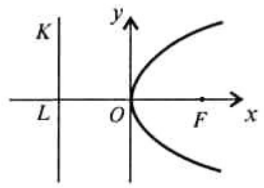
Канонічні розв’язання другого порядку надані у таблиці 3.2.

Таблиця 3.2 - Криві другого порядку / 9 /

Назва кривої	Геометричне зображення у прямокутній системі координат і основні характеристики кривої	Канонічне рівняння кривої і основні залежності між параметрами
1	2	3
Коло		$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ R – радіус кола; $O_1\ (a;b)$ – центр кола

Продовження таблиці 3.2

1	2	3
Еліпс	 $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ — вершини еліпса; $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$ — фокуси еліпса	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ a — велика піввісь; b — мала піввісь ($b<a$); c — фокальна піввісь; $c^2=a^2-b^2$; ексцентриситет $e=\frac{c}{a}$, $0<e<1$; рівняння директрис: $x=\pm\frac{a}{e}$
Гіпербола	 $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$ — вершини гіперболи; $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$ — фокуси гіперболи	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$ a — дійсна піввісь; b — уявна піввісь; c — фокальна піввісь; $c^2=a^2+b^2$; ексцентриситет $e=\frac{c}{a}$, $e>1$; рівняння директрис: $x=\pm\frac{a}{e}$; рівняння асимптот: $y=\pm\frac{b}{a}x$

Парабола	 $O(0;0)$ — вершина параболи; $F(\frac{p}{2};0)$ — фокус параболи; KL — директриса параболи	$y^2 = 2px$, $p = FL$ — параметр параболи; ексцентриситет $e = 1$; рівняння директриси: $x = -\frac{p}{2}$

3.3 Площина у просторі

Формули, що пов'язані з площиною у просторі, надано у таблиці 3.3.

5.	$P:\ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$	Нормальне рівняння площини	$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\vec{n} \perp P, p = \rho(O,l) \geq 0$.
Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини P			
$P: Ax + By + Cz + D = 0$	$\rho(M_0, P) = \frac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.		
$P:\ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$	$\rho(M_0, P) = \lvert x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p\rvert$.		
Кут між площинами P_1 та P_2			
$P_1:\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $P_2:\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$	$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{\lvert\vec{n}_1\rvert \lvert\vec{n}_2\rvert} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$		
Паралельність та перпендикулярність площин P_1 та P_2			
	$P_1 \parallel P_2$	$P_1 \perp P_2$	
$P_1:\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$	$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 0$; $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.	$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$; $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.	

4.	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$	Рівняння прямої, що проходить через дві точки M_1, M_2	$M_1(x_1, y_1, z_1)\in L$, $M_2(x_2, y_2, z_2)\in L$.

3.4 пряма у просторі

Кут між прямими L_1 та L_2	
$L_1:\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ $L_2:\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$	$\cos\varphi=\dfrac{(\vec{s}_1,\vec{s}_2)}{\lvert\vec{s}_1\rvert\lvert\vec{s}_2\rvert}=\dfrac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$.

Кут між прямою L та площиною Q	
$L:\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ $Q:\ Ax+By+Cz+D=0$	$\sin\varphi=\dfrac{\lvert Am+Bn+Cp\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

Паралельність та перпендикулярність прямих L_1 та L_2		
	$L_1 \parallel L_2$	$L_1 \perp L_2$
$L_1:\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ $L_2:\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$	$\vec{s}_1\times\vec{s}_2=0$; $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.	$(\vec{s}_1,\vec{s}_2)=0$; $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

Паралельність та перпендикулярність прямої L та площини Q		
	$L \parallel Q$	$L \perp Q$
$L:\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ $Q:\ Ax+By+Cz+D=0$	$(\vec{s},\vec{n})=0$; $Am+Bn+Cp=0$.	$\vec{s}\times\vec{n}=0$; $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$.

4 ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Частина 4 містить у собі методичні рекомендації і зразок виконання та оформлення контрольної роботи 1.

Спочатку треба переписати умови всіх задач даного варіанта. Потім навести розв'язання кожної задачі у такій послідовності:

1) переписати умову даної задачі і її номер (можна замість повної умови задачі записати лише її номер);
2) у першій частині методичних рекомендацій відшукати необхідні для розв'язання формули і означення (зауважимо, що в кінці назви кожного параграфа першої частини в дужках є номер саме тієї задачі, для якої потрібні формули цього параграфа);
3) застосувавши необхідні формули, розв'язати задачу.

Наведемо зразок контрольної роботи 1, її виконання і оформлення.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА 1

Варіант 31

1 Обчислити визначник двома способами:

а) розкладанням по елементах рядків або стовпців;
б) зведенням матриці до трикутного вигляду

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & -3 & 8 \\ -5 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

2 Дано матриці *A* і *B* і числа $\alpha = 3 \ i \ \beta = -4$.

Знайти: а) $C = \alpha \ A + \beta \ B^{\tau}$; б) $D = A \cdot B$

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 7 & -4 & 8 \\ -1 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

3 Знайти ранг матриці *A*

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

4 Розв'язати матричне рівняння

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5 Розв'язати систему „а” лінійних рівнянь за правилом Крамера, а систему „б” методом Гаусса:

$$(a)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 18 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 32 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -7 \end{cases} \qquad (б)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

6 а) за даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектор $\vec{c} = \alpha \ \vec{a} + \beta \ \vec{b}$

, якщо α=3,5; β=-3;

б) перевірити, чи будуть компланарними вектори $\vec{b}$, $\vec{c} = 3\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{d} = \vec{b} - 3\vec{a}$, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають координати

$$\vec{a}(3, \quad -4, \quad 7) \text{ і } \vec{b}(1, \quad -1, \quad 9).$$

7 Знайти:

а) векторний добуток векторів $\overrightarrow{DA}$ і $\overrightarrow{DC}$;

б) мішаний добуток векторів $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{DC}$ і визначити його геометричний зміст, якщо точки *A, B, C, D* мають координати

$$A\,(9, \quad -2, \quad 7); \; B(-1, \quad 0 \quad -2); \; C(4, \quad 6, \quad 7); \; D(3 \quad 5 \quad 4).$$

8 Визначити, чи будуть перпендикулярними прямі

$$(L_1)\; 4x - 5y + 7 = 0 \text{ і } (L_2)\; 10x + 8y - 15 = 0?$$

9 Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо він проходить через точку $M_0\left(2, \quad -5/3\right)$, а його ексцентриситет дорівнює е=2 / 3.

10 Обчислити об'єм піраміди, яка утворена площинами координат XOY, XOZ, YOZ і площиною $(P)\; 5x - 3y - 2z - 30 = 0.$

11 Чи перетинаються дві просторові прямі

$$(L_1)\; \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-7}{5}, \qquad (L_2)\; \frac{x-11}{3} = \frac{y-1}{6} = \frac{z}{5}?$$

12 Чи розташована пряма

$$(L)\; \frac{x+2}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{1}$$

на площині $(P)\; 3x - 2y - z + 15 = 0$?

Розв'язання

1 Обчислити визначник Δ двома способами:

а) розкладанням по елементах рядків або стовпців;

б) зведенням матриці до трикутного вигляду.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & -3 & 8 \\ -5 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

а) за означенням визначник четвертого порядку дорівнює

$$\Delta_4 = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}.$$

У нашому випадку зручно використати розкладання визначника Δ саме по елементах першого стовпця тому, що серед його елементів є нуль

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & -3 & 8 \\ -5 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & -7 \\ 1 & -3 & 8 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}-0\cdot\cancel{\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 8 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}}+$$

$$+2\cdot\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -7 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}-(-5)\cdot\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -7 \\ 1 & -3 & 8 \end{vmatrix}.$$

Обчислимо кожний із визначників третього порядку, скориставшись розкладом його за елементами першого стовпця:

$$\Delta_3 = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31},$$

а також правило обчислення визначників другого порядку, яке випливає із цього означення

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} = a_{21}a_{22} + a_{21}(-a_{12}),$$ тобто

$$\boxed{\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Таким чином, перший визначник третього порядку дорівнює

$$\begin{vmatrix}-1 & 1 & -7\\ 1 & -3 & 8\\ -1 & 7 & 4\end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix}-3 & 8\\ 7 & 4\end{vmatrix} + 1\left(-\begin{vmatrix}1 & -7\\ 7 & 4\end{vmatrix}\right) + (-1)\begin{vmatrix}1 & -7\\ -3 & 8\end{vmatrix} = (-1)(-3\cdot 4 \quad -7\cdot 8) -$$

$$-(1\cdot 4- \quad 7\cdot(-7)) + (-1)(1\cdot 8- \quad (-3)(-7)) = 68+13-53 = 28;$$

далі другий –

$$\begin{vmatrix}4 & -3 & 1\\ -1 & 1 & -7\\ -1 & 7 & 4\end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix}1 & -7\\ 7 & 4\end{vmatrix} + (-1)\left(-\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 7 & 4\end{vmatrix}\right) + (-1)\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & -7\end{vmatrix} =$$

$$= 4(1\cdot 4 \quad -7\cdot(-7)) + ((-3)\cdot 4 \quad - \quad 7\cdot 1) - ((-3)\cdot(-7) - \quad 1\cdot 1) = 212-19-20 = 173;$$

далі третій визначник дорівнює

$$\begin{vmatrix}4 & -3 & 1\\ -1 & 1 & -7\\ 1 & -3 & 8\end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix}1 & -7\\ -3 & 8\end{vmatrix} + (-1)\left(-\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -3 & 8\end{vmatrix}\right) + 1\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & -7\end{vmatrix} =$$

$$= 4(1\cdot 8 \quad -(-3)\cdot(-7)) + ((-3)\cdot 8 \quad -(-3)\cdot 1) + 1((-3)(-7) - 1\cdot 1) =$$

$$= -52-21+20 = -53.$$

Повертаючись до Δ, обчислюємо його

Δ=5·28 + 2·173 + 5· (–53) = 140 + 346 – 265= 221.

$\boxed{\Delta = 221}$

б) за допомогою властивості 4 з розділу 1.1 перетворимо визначник Δ до трикутного вигляду: спочатку додамо до третього і четвертого рядків перший рядок, помножений на множники (–2/5), 1, при цьому всі елементи першого стовпця, крім першого, перетворяться на нулі; потім так само, за допомогою нового другого рядка, перетворимо на нулі третій і четвертий елементи другого стовпця, а далі і четвертий елемент третього стовпця:

$$\begin{vmatrix}5 & 4 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -7\\ 2 & 1 & -3 & 8\\ -5 & -1 & 7 & 4\end{vmatrix} \begin{matrix}-2/5\\ =\\ \\ 1\end{matrix} \begin{vmatrix}5 & 4 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -7\\ 0 & -3/5 & -9/5 & -38/5\\ 0 & 3 & 4 & 5\end{vmatrix} \begin{matrix}-3/5\\ =\\ \\ 3\end{matrix} \begin{vmatrix}5 & 4 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -7\\ 0 & 0 & -12/5 & 59/5\\ 0 & 0 & 7 & -16\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{12}{5}\begin{vmatrix}5 & 4 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -7\\ 0 & 0 & -1 & 59/12\\ 0 & 0 & 7 & -16\end{vmatrix} \underset{7}{=} \frac{12}{5}\begin{vmatrix}5 & 4 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -7\\ 0 & 0 & -1 & 59/12\\ 0 & 0 & 0 & 221/12\end{vmatrix} = \frac{12}{5}\cdot 5\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot\frac{221}{12} = 221.$$

---

2 Дано матриці *A* і *B* і числа α = 3 і β= - 4.

Знайти:

а) $C = \alpha\ A + \beta\ B^{\tau}$;   б) $D = A \cdot B$;

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 8 \\ -1 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

а) використаємо правила множення матриці на число α

$$\alpha\ A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\ a_{11} & \cdots & \alpha\ a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha\ a_{m1} & \cdots & \alpha\ a_{mn} \end{pmatrix}; \tag{4.1}$$

і правило додавання двох матриць однакової вимірності

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

а також означення транспонованої матриці

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \ B^{\tau} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & \cdots & b_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}; \tag{4.3}$$

і побудуємо спочатку

$$B^{\tau} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -4 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Далі за формулою (4.1) будуємо

$$\alpha\ A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 15 & 24 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

і $$\beta\, B^{\tau} = (-4)\cdot\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -4 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & 4 \\ 16 & -24 \\ -32 & -36 \end{pmatrix};$$

і за формулою (4.2) будуємо матрицю

$$C = \alpha\, A + \beta\, B^{\tau} = 3A + (-4)\beta\,\; B^{\tau} = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 15 & 24 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -28 & 4 \\ 16 & -24 \\ -32 & -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -5 \\ 31 & 0 \\ -29 & -39 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} -16 & -5 \\ 31 & 0 \\ -29 & -39 \end{pmatrix}.$$

б) правило добутку двох матриць дозволяє помножити матрицю *A* на матрицю *B*:

$$A \cdot B = \underset{3\times \underline{\underline{2}}}{\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \underset{\underline{\underline{2}}\times 3}{\begin{pmatrix} 7 & -4 & 8 \\ -1 & 6 & 9 \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} [4\cdot 7 + (-3)(-1)] & [4\cdot(-4) + (-3)\cdot 6] & [4\cdot 8 + (-3)(+9)] \\ [5\cdot 7 + 8\cdot(-1)] & [5\cdot(-4) + 8\cdot 6] & [5\cdot 8 + 8\cdot(+9)] \\ [1\cdot 7 + (-1)\cdot(-1)] & [1\cdot(-4) + (-1)\cdot 6] & [1\cdot 8 + (-1)(+9)] \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 31 & -34 & 9 \\ 27 & 28 & 112 \\ 8 & -10 & -1 \end{pmatrix}.$$

3 Знайти ранг матриці *A*:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Використаємо правило визначення рангу матриці, а саме: застосуємо до матриці A такі елементарні перетворення:

а) переставимо перший і третій рядки

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -5 & -1 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}; \qquad -3 \quad -4 \quad -5$$

б) помножимо перший рядок на $(-3),(-4),(-5)$ і додамо послідовно до другого, третього і четвертого рядків. Матриця перетворюється так:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 13 & 13 \end{pmatrix};$$

в) поділимо другий, третій і четвертий рядки відповідно на 8, 3, 13 і отримаємо знову перетворену матрицю

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad -1$$

г) другий рядок матриці помножимо на (-1) і складаємо з третім і четвертим рядками. В результаті перетворень матриця набуває вигляду

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Отже, $|M2| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$ а будь-який мінор третього порядку має вигляд

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{тобто } |M_3| = 0 \text{ і тому} \qquad \underline{rang\ A = 2.}$$

4 Розв'язати матричне рівняння

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Перепишемо рівняння так, щоб всі вільні члени його були справа

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

або

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Для того, щоб знайти невідому матрицю X ,треба помножити обидві частини рівності (*) на матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, яка є коефіцієнтом при X, і використати рівність $A \cdot A^{-1} = E$. Але це можливо лише тоді, коли A^{-1} існує, тобто коли визначник $|A| \neq 0$.

Обчислимо його

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 4(-2) = 5 + 8 = 13 \neq 0.$$

Далі використовуємо формулу для оберненої матриці

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} S^{\tau}.$$

Складаємо спочатку приєднану матрицю

$$S=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Далі її транспонуємо

$$S^{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

і записуємо обернену матрицю

$$A^{-1}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тепер обов'язково потрібно перевірити, чи побудована матриця дійсно виявляється оберненою до матриці *A*, тобто перевірити, що $A \cdot A^{-1} = E.$ Для цього обчислюємо добуток

$$A \cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}= \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Далі множимо рівність (*) на A^{-1} справа, отримаємо

$$XA \cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\cdot A^{-1},$$

$$X \cdot E=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Але $X \cdot E = X$ і тому

$$X=\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 15 & -22 \\ 2 & -9 \end{pmatrix};$$

$$X=\begin{pmatrix} 15/13 & -22/13 \\ 2/13 & -9/13 \end{pmatrix}.$$

5 Розв'язати систему „а” лінійних рівнянь за правилом Крамера, а систему „б” методом Гаусса:

$$(a)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 18 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 32 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -7 \end{cases} \qquad (б)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

а) Використаємо правило Крамера, за яким

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}; \qquad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta},$$

якщо головний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тому обчислення починаємо з Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -13 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 2(-3) - 5(-2) - (-5) = 9 \neq 0.$$

Далі визначники $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ будуємо так: стовпець коефіцієнтів при невідомих x_1, x_2, x_3 замінюємо стовпцем вільних членів:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 18 & -1 & 3 \\ 32 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 18\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 32\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-7)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 18(-3) - 32(-2) - 7(-5) = 45;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 18 & 3 \\ 5 & 32 & 2 \\ -1 & -7 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 32 & 2 \\ -7 & -1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 18 & 3 \\ -7 & -1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 18 & 3 \\ 32 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 2(-18) - 5 \cdot 3 + -60 = 9;$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 18\\ 5 & 1 & 32\\ -1 & 1 & -7\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & 32\\ 1 & -7\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}-1 & 18\\ 1 & -7\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}-1 & 18\\ 1 & 32\end{vmatrix}=$$

$$=2(-39)-5(-11)-(-50)=27.$$

$$x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}=\frac{45}{9}=5; \qquad x_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}=\frac{9}{9}=1; \qquad x_3=\frac{\Delta x_3}{\Delta}=\frac{27}{9=3}.$$

Перевіримо отриманий результат, підставляючи в ліву частину кожного рівняння замість x_1, x_2, x_3 їх числові значення:

2·5- 1+ 3·3= 18

5·5+ 1+ 2·3= 32

–5 + 1 – 3 = –7

Таким чином, розв'язок системи „а” такий

$$x_1=5;\ x_2=1;\ x_3=3.$$

б) за методом Гаусса перетворимо систему „б” до трикутного вигляду, для чого використаємо метод алгебраїчного додавання, а саме: помножимо перше рівняння на (–3) і додамо його до другого рівняння; потім перше–на (–4) і додамо до третього

(б) $\begin{cases}x_1+2x_2-5x_3=0\\ 3x_1-x_2-x_3=0\\ 4x_1+x_2-6x_3=0\end{cases} \Leftrightarrow$ -3 (б') $\begin{cases}x_1+2x_2-5x_3=0\\ \quad -7x_2+14x_3=0\\ \quad -7x_2+14x_3=0\end{cases}$

-4

Друге і третє рівняння еквівалентної системи однакові, тобто фактично ми маємо систему двох рівнянь з трьома невідомими, яка розв'язується так: переносимо x_3 у праву частину і вважаємо x_3 – вільним; далі розв'язуємо систему двох рівнянь з двома невідомими x_1 і x_2 , яка має трикутну форму

$$\begin{cases}x_1+2x_2=5x_3\\ \quad -7x_2=-14x_3\end{cases} \text{або} \begin{cases}x_1+2x_2=5x_3\\ \quad x_2=2x_3\end{cases} \Leftrightarrow x_2=2x_3.$$

Підставляємо в перше рівняння замість x_2 його вираз через x_3:

$$x_1 + 2\cdot 2x_3 = 5x_3 \;\Rightarrow\; x_1 = x_3.$$

Таким чином,

$$x_1 = x_3;\; x_2 = 2x_3;\; x_3 = x_3.$$

Якщо надавати x_3 різних значень, ми будемо отримувати різні розв'язки системи „б”; наприклад, якщо x_3= 1, тоді розв'язок системи „б” буде (1, 2, 1).

Висновок: система „б” має нескінченну множину розв'язків:

$$x_1 = x_3;\; x_2 = 2x_3;\; x_3 = x_3.\; (\forall x_3)$$

6 а) за даними векторами $\vec a$ і $\vec b$ побудувати вектор $\vec c = \alpha\,\vec a + \beta\,\vec b$, якщо α=3,5; β=-3;

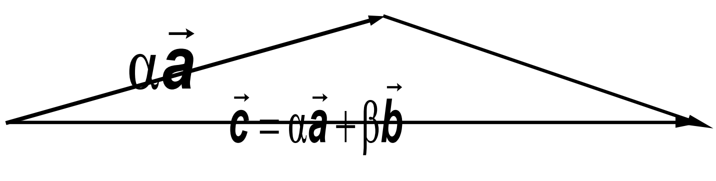
б) перевірити, чи будуть компланарними вектори $\vec b,\ \vec c = 3\vec a + \vec b$ і $\vec d = \vec b - 3\vec a$, якщо вектори $\vec a$ і $\vec b$ мають координати

$$\vec a(3,\ \ -4,\ \ 7)\quad \text{і}\quad \vec b(1,\ \ -1,\ \ 9).$$

Розв'язання

а) нехай вектори $\vec a$ і $\vec b$ такі 

Побудуємо вектори α$\vec a$= 3,5$\vec a$ і β$\vec b$= - 3 $\vec b$. Вектор 3,5$\vec a$ буде колінеарним до вектора $\vec a$, має спільний з ним напрям, а його довжина у 3,5 разу більша за довжину $\vec a$. Вектор - 3 $\vec b$ колінеарний до вектора $\vec b$, має протилежний вектору $\vec b$ напрям і довжину в три рази більшу за довжину вектора $\vec b$.



б) для перевірки компланарності векторів $\vec b$, $\vec c$ і $\vec d$

знайдемо спочатку їх координати:

$\vec{b}$ (1, – 1, 9);

$\vec{c} = 3\vec{a} + \vec{b}$ (3·3+ 1, 3 (–4) – 1, 3·7+ 9)= (10, – 13, 36);

$\vec{d} = \vec{b}$ - 3 $\vec{a}$ (1- 3·3, -1 – 3 (4), 9 – 3 ·7)= (– 8, 11, – 12).

Далі використовуємо умову компланарності трьох векторів в координатній формі

$$\left(\vec{b}\ \times\ \vec{c}\right)\cdot\vec{d} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислюємо визначник

$$\left(\vec{b}\ \times\ \vec{c}\right)\cdot\vec{d} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 10 & -13 & 36 \\ -8 & 11 & -12 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -13 & 36 \\ 11 & -12 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 11 & -12 \end{vmatrix} + (-8)\begin{vmatrix} -1 & 9 \\ -13 & 36 \end{vmatrix} =$$
$$= 1(-240) - 10(-87) - 8(81) = -18 \neq 0.$$

Таким чином, умова компланарності не виконується і вектори $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ не будуть компланарними.

7 Знайти:

а) векторний добуток векторів $\overrightarrow{DA}$ і $\overrightarrow{DC}$;

б) мішаний добуток векторів $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{DC}$; і визначити його геометричний зміст, якщо точки *A, B, C, D* мають координати

$$A\,(9,\quad -2,\quad 7);\ B(-1,\quad 0\quad -2);\ C(4,\quad 6,\quad 7)\ D(3\quad 5\quad 4).$$

Розв'язання:

а) знайдемо за правилами координати векторів $\overrightarrow{DA}$ і $\overrightarrow{DC}$:

$$\overrightarrow{DA}\ \left(x_A - x_D;\ y_A - y_D;\ z_A - z_C\right);\ \overrightarrow{DC}\ \left(x_C - x_D;\ y_C - y_D;\ z_C - z_D\right)$$

$\overrightarrow{DA}\,(9-3;\ -2-5;\ 7-4)=(6;\ -7;\ 3),$

$\overrightarrow{DC}\,(4-3;\ 6-5;\ 7-4)=(1;\ 1;\ 3).$

Далі за формулою векторного добутку у координатній формі

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

обчислюємо векторний добуток

$$\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & -7 & 3\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-7 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}6 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}6 & -7\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-24\vec{i}-15\vec{j}+13\vec{k}.$$

Таким чином,

$$\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DC}=-24\vec{i}-15\vec{j}+13\vec{k},$$

або новий вектор має координати

$$\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DC}\quad(-24;\ -15;\ 13).$$

б) знайдемо, крім визначених раніш координат векторів $\overrightarrow{DA}\ (6;-7;3);\ \overrightarrow{DC}\ (1;\ 1;\ 3),$ ще координати вектора $\overrightarrow{DB}\,(-1-3;0-5;-2-4)=(-4;\ -5;\ -6).$

Далі використаємо формулу для мішаного добутку трьох векторів у координатній формі, а саме:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix},$$

тобто

$$\left(\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DB}\right)\cdot\overrightarrow{DC}=\begin{vmatrix}6 & -7 & 3\\ -4 & -5 & -6\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}-5 & -6\\ 1 & 3\end{vmatrix}-(-4)\begin{vmatrix}-7 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}-7 & 3\\ -5 & -6\end{vmatrix}=$$

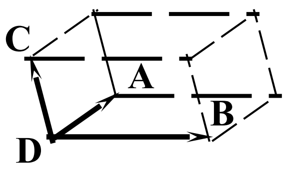
$$=6(-5\cdot3-1(-6))+4((-7)\cdot3-1\cdot3)+1((-7)(-6)-(-5)\cdot3)=-54-96+57=-93.$$

$$\left(\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DB}\right)\cdot\overrightarrow{DC}=-93.$$

Геометричний зміст мішаного добутку полягає у тому, що об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{DC}$, як на ребрах, дорівнює абсолютній величині мішаного добутку цих векторів

$$V = \left| \left(\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DB} \right) \cdot \overrightarrow{DC} \right|.$$

Таким чином, V=93 од^3.



8 Визначити, чи будуть перпендикулярними прямі $(L_1)\ 4x - 5y + 7 = 0$ і $(L_2)\ 10x + 8y - 15 = 0$?

Розв'язання

Розглянемо вектори $\vec{N}_1(4,\ -5)$ і $\vec{N}_2(10,\ 8)$, які перпендикулярні відповідно до прямих $L_1 \perp \vec{N}_1$, $L_2 \perp \vec{N}_2$ і використаємо умову перпендикулярності двох прямих, які задані загальними рівняннями, а саме:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Обчислимо суму добутків

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 B_2 = 4 \cdot 10 + (-5) \cdot 8 = 40 - 40 = 0,$$

тобто прямі L_1 і L_2 перпендикулярні.

9 Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо він проходить через точку $M_0\left(2,\ -\frac{5}{3}\right)$, а його ексцентриситет дорівнює е=2 / 3.

Розв'язання

Канонічне рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ де параметри *a, b, c* і *e* пов'язані між собою співвідношеннями $b^2 = a^2 - c^2$,

$$e=\frac{c}{a}.$$

Щоб записати рівняння еліпса, потрібно відшукати *a* і *b*. Для цього ми маємо систему рівнянь відносно невідомих параметрів

$$\begin{cases} \frac{2^2}{a^2}+\frac{(-5/3)^2}{b^2}=1, \\ \frac{c}{a}=\frac{2}{3}, \\ b^2=a^2-c^2, \end{cases}$$

Якщо точка *M* міститься на еліпсі, її координати задовольняють рівняння еліпса.

тобто систему трьох рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} \frac{4}{a^2}+\frac{25}{9b^2}=1, \\ \frac{c}{a}=\frac{2}{3}, \\ b^2=a^2-c^2. \end{cases}$$

Із другого рівняння виразимо $c=\frac{2}{3}a$ і підставимо у третє:

$$b^2=a^2-\left(\frac{2}{3}a\right)^2=\left(1-\frac{4}{9}\right)a^2=\frac{5}{9}a^2,$$

а тепер замість b^2 його вираз підставимо в перше рівняння:

$$\frac{4}{a^2}+\frac{25}{9\cdot\frac{5}{9}a^2}=1 \Rightarrow \frac{4}{a^2}+\frac{5}{a^2}=1 \Rightarrow \underline{a^2=9}.$$

Але тоді $\underline{b}^2=\frac{5}{9}a^2=\frac{5}{9}\cdot 9=\underline{5}.$

Таким чином, шукане канонічне рівняння еліпса має вигляд

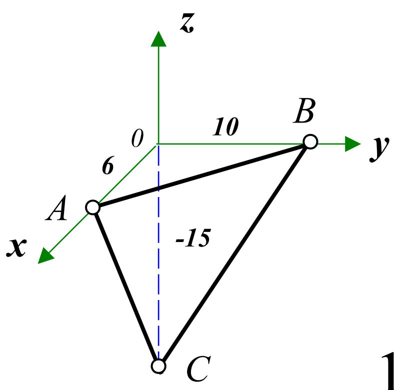
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1.$$

10 Обчислити об'єм піраміди, яка утворена площинами координат XOY, XOZ, YOZ і площиною $(P)\ \ 5x+3y-2z-30=0.$

Розв'язання

Перепишемо загальне рівняння площини (P) у формі рівняння у відрізках на осях для чого переносимо його вільний член у правий бік і ділимо обидві частини рівності на нього

$$5x+3y-2z=30 \ \Rightarrow \ \frac{x}{6}+\frac{y}{10}+\frac{z}{-15}=1.$$



Піраміда, яка розташована між координатними площинами і площиною (P), має взаємно перпендикулярні ребра довжиною 6, 10, 15 одиниць.

Об’єм такої піраміди дорівнює $V=\frac{1}{6}a\cdot b\cdot c$, тобто

$$V=\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 10\cdot 15= \ 150 \ \ од^3$$

11 Чи перетинаються дві просторові прямі

$$(L_1)\ \ \frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-7}{5}\Longrightarrow M_1(3,\ -1,\ 7)\ \ \in L_1;\ \ \vec{S}_1(2,\ 4,$$
$$(L_2)\ \ \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{6}=\frac{z}{5}\ \ \Longrightarrow\ \ M_2(-1,\ 1,\ 0)\ \ \in L_2;\ \ \vec{S}_2(3,\ 6,$$

Розв'язання

Використаємо умову належності двох прямих одній площині (тоді вони будуть або перетинатися, або паралельними):

$$\left(\vec{S}_1 \times \vec{S}_2\right) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0, \text{ або } \begin{vmatrix} \ell_1 & m_1 & p_1 \\ \ell_2 & m_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислюємо визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 5 \\ -4 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 \cdot (-52) - 3 \cdot (-38) - 4 \cdot (-10) = -104 + 114 + 40 = 50 \neq 0,$$

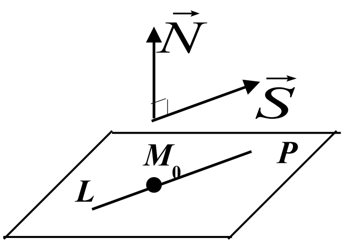
тобто прямі L_1 і L_2 не перетинаються у просторі.

$$(L)\ \frac{x+2}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{1}$$

на площині $(P)\ 3x - 2y - z + 15 = 0$?

12 Чи розташована пряма

Розв'язання



Для того, щоб пряма (L) належала площині (P), необхідно і достатньо, щоб точка M_0(-2, 5, 0), через яку проходить пряма L, належала і площині (P) $/M_0 \in P/$ і щоб пряма L була паралельною до площини (P) $/L // P/$, тобто $\vec{S} // P \left(\vec{S} // L\right),\ \vec{S} \perp \vec{N}.$

Пряма L проходить через точку M_0(-2, 5, 0) і має напрямний вектор $\vec{S}\ (2,\ 4,\ 1)\ //\ L.$

Нормальний вектор площини (P) має координати

$$\vec{N}\ (3,\ -2,\ -1)\ \perp\ P.$$

Перевіримо умови належності $L \subset P$:

$M_0 \in P$: підставимо координати точки M_0 в ліву частину рівняння площини P: $3(-2)\ - 2 \cdot 5\ - 0 + 15 = -6 - 10 + 15 = -1 \neq 0.$

Таким чином, точка M_0, яка міститься на прямій L, не належить площині P, тому пряма L не розташована на площині P.

5 ВАРІАНТИ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №1

Завдання 1 Обчислити визначник двома способами:

а) розкладанням по елементах рядків або стовпців;
б) зведенням матриці до трикутного вигляду

$$1)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & -6 \\ 1 & 4 & -2 & 9 \\ -1 & -4 & 4 & -3 \end{vmatrix} \quad 2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad 3)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$4)\begin{vmatrix} -1 & 6 & 8 & -2 \\ 2 & -7 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \quad 5)\begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 & 9 \\ 2 & -4 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ -8 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$6)\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 7 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad 7)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} \quad 8)\begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

9) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 10) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & -7 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

11) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \end{vmatrix}$ 12) $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & 8 & 5 \end{vmatrix}$

13) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ 14) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 11 & -2 \\ 3 & -1 & 7 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

15) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -7 & 8 \\ -6 & 3 & 9 & 1 \end{vmatrix}$ 16) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 8 & 3 \\ 5 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

17) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 18) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

19) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ 20) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

21) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ 22) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 8 & -5 \end{vmatrix}$

23) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 24) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \\ 1 & -8 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

25) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 7 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & 9 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & -7 \end{vmatrix}$ 26) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

27) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 10 & -1 \\ 2 & -7 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 28). $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

29) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 30) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & -3 & -8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 6 & -3 & -8 \end{vmatrix}$

Завдання 2 Дано матриці A і B і числа α і β. Знайти:

1 а) $C = \alpha A + \beta B$; б) $D = A \cdot B^T$, якщо $\alpha = 2$, $\beta = -4$ і
$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

2 а) $C = \alpha A + \beta B$; б) $D = B^T \cdot A$, якщо $\alpha = 3$, $\beta = -5$ і
$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

3 а) $C = \alpha A + \beta B$; б) $D = A^T \cdot B$, якщо $\alpha = -2$, $\beta = 7$ і
$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 \\ -5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ -2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$.

4 а) $C = \alpha A + \beta B$; б) $D = B^T \cdot A$, якщо $\alpha = -3$, $\beta = 4$ і
$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -7 \\ -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

5 а) $C = \alpha A + \beta B$; б) $D = A \cdot B^T$, якщо $\alpha = -3$, $\beta = 2$ і
$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -6 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

6 а) $C = \alpha A + \beta B$; б) $D = A \cdot B^T$, якщо $\alpha = -3$, $\beta = 5$ і
$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

7 а) $C = \alpha A + \beta B$; б) $D = B^T \cdot A$, якщо $\alpha = 4$, $\beta = -7$ і
$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

8 а) $C = \alpha A + \beta B$; б) $D = A \cdot B^T$, якщо $\alpha = -1/2$, $\beta = 4$ і
$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -6 \\ 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

9 а) $C = \alpha A + \beta B$; б) $D = A \cdot B^T$, якщо $\alpha = 3$, $\beta = -4$ і
$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$.

10 а) $C = \alpha A + \beta B$; б) $D = A^T \cdot B$, якщо $\alpha = 5$, $\beta = -7$ і
$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 8 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

11 а) $C = \alpha A + \beta B$; б) $D = A \cdot B^T$, якщо $\alpha = 5$, $\beta = -5$ і
$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

12 а) $C = \alpha A + \beta B$; б) $D = B \cdot A^T$, якщо $\alpha = 5$, $\beta = 3/2$ і
$A = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 9 \\ -3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.

13 а) $C = \alpha A + \beta B$; б) $D = B^T \cdot A$, якщо $\alpha = 12$, $\beta = -7$ і
$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

14 а) $C = \alpha A + \beta B$; б) $D = A^T \cdot B$, якщо $\alpha = -3$, $\beta = 2$ і
$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

15 а) $C = \alpha A + \beta B$; б) $D = B \cdot A^T$, якщо $\alpha = 3$, $\beta = 5$ і
$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

16 а) $C = \alpha A + \beta B$; б) $D = A \cdot B^T$, якщо $\alpha = -2$, $\beta = 5$ і
$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

17 а) $C = \alpha A + \beta B$; б) $D = A^T \cdot B$, якщо $\alpha = -3$, $\beta = -4$ і
$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -8 \\ -4 & -2 & 9 \end{pmatrix}$.

18 а) $C=\alpha A+\beta B$; б) $D=A\cdot B^T$, якщо $\alpha=2$, $\beta=5$ і
$A=\begin{pmatrix}-3 & 5 & -7\\ 2 & 4 & 10\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1 & 5 & -9\\ 4 & 8 & 11\end{pmatrix}$.

19 а) $C=\alpha A+\beta B$; б) $D=B\cdot A^T$, якщо $\alpha=5$, $\beta=-2$ і
$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 6\\ -1 & 5 & 7\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5 & -3 & 1\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

20 а) $C=\alpha A+\beta B$; б) $D=A\cdot B^T$, якщо $\alpha=-5$, $\beta=2$ і
$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5 & -2 & 7\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$.

21 а) $C=\alpha A+\beta B$; б) $D=A^T\cdot B$, якщо $\alpha=-7$, $\beta=3$ і
$A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}6 & -2 & 3\\ 4 & 5 & -1\end{pmatrix}$.

22 а) $C=\alpha A+\beta B$; б) $D=B^T\cdot A$, якщо $\alpha=9$, $\beta=-11$ і
$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 5\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 7\\ -2 & 5 & 6\end{pmatrix}$.

23 а) $C=\alpha A+\beta B$; б) $D=A^T\cdot B$, якщо $\alpha=4$, $\beta=-3$ і
$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 5\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4 & -8 & 6\\ -1 & 5 & -1\end{pmatrix}$.

24 а) $C=\alpha A+\beta B$; б) $D=B\cdot A^T$, якщо $\alpha=-9$, $\beta=4$ і
$A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 6\\ 1 & 5 & -7\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & -8 & 7\\ -1 & 7 & 9\end{pmatrix}$.

25 а) $C=\alpha A+\beta B$; б) $D=A\cdot B^T$, якщо $\alpha=2$, $\beta=-3$ і
$A=\begin{pmatrix}6 & -2 & 8\\ 1 & -1 & 14\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}15 & -2 & 12\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

26 а) $C=\alpha A+\beta B$; б) $D=A^T\cdot B$, якщо $\alpha=5$, $\beta=-3$ і
$A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 7\\ 0 & 4 & -8\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}10 & -3 & 1\\ 0 & 7 & -3\end{pmatrix}$.

27 а) $C = \alpha A + \beta B^T$; б) $D = A \cdot B$, якщо $\alpha = 10$, $\beta = 3$ і
$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.

28 а) $C = \alpha A^T + \beta B$; б) $D = B \cdot A$, якщо $\alpha = 2$, $\beta = -3$ і
$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

29 а) $C = \alpha A + \beta B^T$; б) $D = A \cdot B$, якщо $\alpha = 2$, $\beta = -5$ і
$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -3 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

30 а) $C = \alpha A + \beta B^T$; б) $D = A \cdot B$, якщо $\alpha = 6$, $\beta = -5$ і
$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & -8 \end{pmatrix}$.

Завдання 3 Обчислити ранг матриці *A*, якщо *A* дорівнює:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 & 4 \\ -2 & - & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 8 & -5 \\ -2 & 3 & 9 & -1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & 5 & 8 \\ -2 & 2 & 2 & 12 \end{pmatrix}$. 4) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & -7 \\ 3 & 7 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & -1 & 5 \\ 11 & -1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$. 6) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 & -8 \\ 1 & 5 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$. 8) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 & 9 \\ -6 & 9 & -2 & -7 \\ -1 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & -7 \\ 0 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. 10. $\begin{pmatrix} 6 & -4 & 7 & -8 \\ -1 & 3 & 6 & 9 \\ 5 & -1 & 13 & 1 \end{pmatrix}$.

11) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 8 & -2 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. 12) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & 4 \\ -7 & 12 & 5 & 3 \\ 5 & 12 & 3 & 11 \end{pmatrix}$.

13) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -7 & 4 \\ 1 & 5 & 8 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$. 14) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 & 7 \\ -3 & 8 & 6 & -3 \\ 1 & 5 & 14 & 4 \end{pmatrix}$.

15) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 7 & -3 \\ 8 & -2 & 12 & 1 \end{pmatrix}$. 16) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 5 \\ 12 & -8 & 4 & 1 \\ -1 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

17) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$. 18) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ -3 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

19) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 7 & -10 \\ 1 & -3 & 5 & 8 \\ -2 & 1 & 12 & -2 \end{pmatrix}$. 20) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

21) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -8 \\ 3 & 4 & 1 & 11 \\ 8 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 22) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 & -7 \\ 3 & 6 & -7 & 5 \\ 7 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

23) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & 8 & 6 & -1 \\ 2 & 11 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. 24) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 & 7 \\ -3 & 5 & -1 & -9 \\ 3 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

25) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & -5 \\ 9 & -1 & 11 & 3 \end{pmatrix}$. 26) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 & 9 \\ -3 & 4 & -6 & -8 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

27) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & -3 \\ 4 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. 28) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

29) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \\ -2 & 7 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.   30) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -1 & 4 & 3 \\ 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Завдання 4 Розв'язати матричне рівняння:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$.

2) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$.

4) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

6) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

7) $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

8) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$.

9) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

10) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \cdot X$.

11) $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

12) $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

13) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -10 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X$.

14) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

15) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$.

16) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

17) $\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язати матричне рівняння $A \cdot \overline{X} = \overline{B}$, якщо

18) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 7\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix};\overline{X}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix};\overline{B}=\begin{bmatrix}5\\ -1\\ 3\end{bmatrix}.$

19) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & -1 & 8\\ -1 & 4 & -3\end{pmatrix};\overline{X}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix};\overline{B}=\begin{bmatrix}7\\ -12\\ 5\end{bmatrix}.$

20) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix};\overline{X}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix};\overline{B}=\begin{bmatrix}5\\ -6\\ 0\end{bmatrix}.$

21) $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 6\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix};\overline{X}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix};\overline{B}=\begin{bmatrix}11\\ 2\\ -1\end{bmatrix}.$

22) $A=\begin{pmatrix}13 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix};\overline{X}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix};\overline{B}=\begin{bmatrix}13\\ 1\\ 4\end{bmatrix}.$

23) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 5 & 4 & 3\\ -1 & 8 & 1\end{pmatrix};\overline{X}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix};\overline{B}=\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 5\end{bmatrix}.$

Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці *A*, якщо матриця *A* дорівнює:

24) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}.$ 25) $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}.$ 26) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 3 & 1\\ 5 & -4 & 7\end{pmatrix}.$

27) $\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}.$ 28) $\begin{pmatrix}2 & -3 & 9\\ 1 & 4 & 7\\ -3 & 0 & 3\end{pmatrix}.$29) $\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 7 & -2 & 0\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}.$

30) $\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 1\\ 7 & -1 & 1\end{pmatrix}.$

Завдання 5 Розв’язати систему (а) лінійних рівнянь за правилом Крамера, а систему (б) методом Гаусса:

1 а) $\begin{cases}x_1-2x_2+4x_3=3\\ -x_1+3x_2-5x_3=-3\\ 2x_1+4x_2-7x_3=-1\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=0\\ x_1+2x_2-5x_3=0\\ 3x_1+x_2-2x_3=0\end{cases}$

2 а) $\begin{cases}x_1+x_2-3x_3=0\\ 2x_1-3x_2+x_3=-3\\ -x_1+x_2+5x_3=6\end{cases}$ б)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 10x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 11x_3 = 0 \end{cases}$$

3 а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 10 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -10 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

4 а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 15 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 38 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

5 а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \\ 7x_1 \quad\quad - 7x_3 = 0 \end{cases}$

6 а) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

7 а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5 \\ \quad\quad x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$

8 а) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ -3x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 \quad\quad = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

9 а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -6 \\ \quad\quad x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

10 а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5 \\ \quad\quad x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

11 а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

12 а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

13 а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

14 а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

15 а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 13 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = -12 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$ б)

$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

16 а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 21 \end{cases}$ б)
$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

17 а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 16 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -17 \end{cases}$ б)
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

18 а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -6 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$ б)
$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

19 а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 12 \end{cases}$ б)
$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

20 а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$ б)
$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

21 а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 12 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$ б)
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

22 а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -28 \end{cases}$ б)
$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

23 а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$ б)
$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

24 а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -8 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 10 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = -8 \end{cases}$ б)
$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

25 а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 12 \end{cases}$ б)
$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

26 а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 15 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = -14 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$ б)
$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

27 а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -6 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$ б)
$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

28 а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -11 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$ б)
$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

29 а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

30 а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 11 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

Завдання 6,а) за даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектор $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, якщо α і β дорівнюють:

Номери варіантів	α	β	Номери варіантів	α	β	Номери варіантів	α	β
1	-5	$1/3$	2	3	$1/2$	3	$2/3$	-3
4	$3/4$	-2	5	2	$2/5$	6	-2	$1/4$
7	$1/5$	$-3/4$	8	-2	$3/4$	9	4	-1
10	-2	$2/5$	11	$1/3$	$-3/2$	12	-3	$4/5$
13	-4	$2/5$	14	-6	$1/3$	15	-3	$2/3$
16	-3	$5/2$	17	5	$-1/2$	18	$-1/2$	$5/2$
19	$3/2$	2	20	2	$-3/2$	21	$-3/2$	2
22	$1/2$	-3	23	-3	$3/2$	24	-3	4
25	$-3/2$	3	26	3	$-1/2$	27	-3	-2
28	-3	$5/2$	29	$3/2$	-2	30	$5/2$	-4

Завдання 6,б) перевірити, чи будуть колінеарними (паралельними) вектори $\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}$ і $\vec{d} = \alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b}$, вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають відомі координати, а α_1, α_2, β_1, β_2 дорівнюють

Номери варіантів	$\vec{a}$	$\vec{b}$	α_1	β_1	α_2	β_2
1	(3, -2, 7)	(6, 4, -8)	7	2	2	-1
2	(-1, 0, 4)	(2, 6, -7)	2	3	5	-1
3	(3, -3, 4)	(1, -5, 6)	2	-1	1	2
4	(5, -6, 7)	(4, -3, 8)	5	-3	2	3
5	(3, 7, -1)	(-2, 6, 5)	5	3	2	1
6	(-3, 1, -8)	(2, 6, 5)	5	3	2	-1
7	(-1, 6, -4)	(2, 5, -4)	2	-4	3	1
8	(-4, -3, 7)	(1, -8, 7)	3	2	5	-1
9	(-9, 5, 3)	(7, 1, -2)	3	5	2	-1

Перевірити, чи будуть перпендикулярними вектори $\vec{c}=\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b}$ і $\vec{d}=\alpha_2\vec{a}+\beta_2\vec{b}$, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають відомі координати, а $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ дорівнюють

Номери варіантів	$\vec{a}$	$\vec{b}$	α_1	β_1	α_2	β_2
10	(-6, 7, -2)	(5, 4, -7)	4	3	1	-1
11	(-1, 0, 6)	(2, -4, 7)	4	1	1	-4
12	(-1, -2, 7)	(2, 6, -3)	5	2	3	-1
13	(3, -1, 4)	(-1, 4, -7)	5	-1	1	5
14	(4, -2, 1)	(3, 5, -7)	1	0	3	-4
15	(1, -1, 4)	(3, 4, -5)	2	-1	1	2
16	(2, -2, 5)	(1, -8, 4)	5	-3	3	4
17	(-2, 4, -3)	(2, -5, 7)	5	-1	2	3
18	(5, -3, 7)	(2, 1, -2)	2	-3	2	1

Перевірити, чи будуть вектори $\vec{c}=\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b}$, $\vec{d}=\alpha_2\vec{a}+\beta_2\vec{b}$ і $\vec{g}=\alpha_3\vec{a}+\beta_3\vec{b}$ компланарними, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають відомі координати, а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ дорівнюють

Номери варіантів	$\vec{a}$	$\vec{b}$	α_1	β_1	α_2	β_2	α_3	β_3
19	(1, 0, 0)	(4, -2, 7)	3	-1	4	-1	3	2
20	(7, -2, 3)	(5, 4, -3)	0	1	3	-2	2	3
21	(4, -2, 7)	(3, 4, -5)	1	0	2	-1	1	2
22	(4, 6, -3)	(1, 0, -8)	1	0	3	4	4	-2
23	(3, -1, 4)	(2, 1, -3)	1	0	2	-1	1	2
24	(-3, -2, 7)	(1, 0, -4)	0	1	2	3	3	2
25	(-2, 6, 5)	(1, 7, 9)	1	0	2	-1	5	3
26	(3, 5, -2)	(-1, -4, -8)	0	1	3	4	-2	1
27	(-1, -1, 3)	(4, 6, 9)	1	0	-2	5	7	1
28	(3, 5, 4)	(-2, 3, 1)	0	1	3	1	2	-1

29	(-2, 3, 5)	(1, 1, -1)	1	0	3	4	5	2
30	(1, -1, -1)	(-2, 3, 4)	0	1	2	1	4	3

Завдання 7 Знайти:

а) векторний добуток векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$;

б) мішаний добуток векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$ і визначити його геометричний зміст, якщо точки *A*, *B*, *C*, *D* мають координати

Номери варіантів	A	B	C	*D*
1	(4, 3, -5)	(2, -1, 3)	(3, 0, -4)	(4, -1, 4)
2	(5, -1, 7)	(1, 2, -1)	(4, 2, 8)	(2, 1, 4)
3	(3, 6, -1)	(4, -5, 1)	(-7, 4, -2)	(2, 9, -8)
4	(5, -4, 3)	(2, -1, 8)	(4, 5, -7)	(2, -4, -3)
5	(-2, -2, -7)	(2, -6, -8)	(1, 5, -2)	(-1, -2, 8)
6	(5, 4, -2)	(-2, 5, -3)	(1, -2, -3)	(-1, -6, 2)
7	(4, -2, 7)	(1, -6, 4)	(1, -5, -7)	(-2, 8, -4)
8	(3, -2, 7)	(-2, 8, -4)	(1, 5, 6)	(-5, 6, 9,)
9	(3, -5, 7)	(-2, 4, -7)	(1, 4, 8)	(-1, 3, 4)

Номери варіантів	A	B	C	*D*
10	(3, -6, 7)	(1, 0, -2)	(-1, -2, 3)	(-6, 7, 9)
11	(2, -3, -1)	(-1, -2, 8)	(2, -3, 7)	(2, 9, -6)
12	(2, -1, 6)	(-2, 7, 9)	(4, -7, 8)	(5, -3, -1)
13	(3, 7, -2)	(3, -1, -3)	(5, 6, 7)	(-5, 2, -1)
14	(8, -2, 10)	(5, 4, -3)	(1, 0, -2)	(-1, 4, 5)
15	(5, -7, 8)	(-1, 0, -3)	(1, 6, 5)	(7, 2, 8)
16	(4, -2, 3)	(-1, 0, 7)	(2, -4, 9)	(2, -3, 5)
17	(6, -2, 7)	(7, -3, 8)	(4, 2, -1)	(-3, -1, -7)
18	(-1, 3, -2)	(4, -3, 1)	(4, -7, 0)	(-7, 4, 6)
19	(-1, 3, 6)	(2, 5, 8)	(4, 3, 7)	(5, -2, -3)
20.	(1, -2, 5)	(-2, -3, 7)	(3, 6, 5)	(5, -4, 9)
21.	(4, -2, 1)	(4, 3, 7)	(-1, 0, 8)	(3, 5, -2)
22	(1, 8, -3)	(-2, 4, -4)	(3, 5, 8)	(7, -1, 0)
23	(4, -1, 4)	(-2, 8, -1)	(5, -7, 8)	(2, 2, -1)
24	(10, -2, 7)	(7, -3, 5)	(-1, 0, 9)	(8, -3, 9)

25	(6, -2, 1)	(2, 5, -3)	(2, -1, 0)	(7, 4, 8)
26	(3, -2, 7)	(-1, 0, 8)	(2, 4, 3)	(4, 5, 8)
27	(1, 0, -2)	(4, 5, -3)	(-3, 6, 7)	(4, -7, 5)
28	(-1, 0, 6)	(4, -3, 7)	(5, -2, 8)	(4, -3, 9)
29	(5, 7, 9)	(-2, 4, -3)	(1, 3, 8)	(-1, -3, 7)
30	(3, -2, 1)	(4, 2, -3)	(5, 6, 7)	(-3, 5, 8)

Завдання 8

1 Дано загальне рівняння прямої: $4x+12y+60=0$. Визначити відрізки, які пряма відсікає на осях координат.

2 Дано загальне рівняння прямої: $x+2y-7=0$. Визначити кутовий коефіцієнт "*k*" і відрізок "*b*", який пряма відсікає на осі *OY*.

3 Дана пряма (*L*) $3x+y-7=0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2,5)$ і перпендикулярна до прямої *Z*.

4 Знайти кут між прямими (L_1) $3x+y-7=0$ і (L_2) $5x-y+8=0$.

5 Дана пряма (*L*) $2x+5y+7=0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2,-1)$ перпендикулярно до прямої *L*.

6 Написати рівняння прямих, які проходять через початок координат і утворюють з віссю *OX* кути: а) $45°$; б) $60°$.

7 Знайти відрізки, які пряма (*L*) $7x-8y-56=0$ відсікає на осях координат *OX* і *OY*.

8 Знайти кутовий коефіцієнт "*k*" і відрізок "*b*", який пряма (*L*) $5x+16y-80=0$ відсікає на осі *OY*.

9 Обчислити кут між двома прямими (L_1) $\frac{x-2}{3}=\frac{y-8}{5}$ і (L_2) $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-7}{2}$.

10 Перевірити, чи будуть прямі (L_1) $2x+7y-8=0$ і (L_2) $3x+8y-5=0$ перпендикулярними.

11 Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(4,-2)$ і $M_2(5,7)$.

12 Знайти кут між прямими (L_1) і (L_2), якщо задані їх рівняння: (L_1) $3x-y+8=0$ і (L_2) $4x+2y-7=0$.

13 Перевірити, чи будуть перпендикулярними прямі (L_1) $y = 2x - 3$, (L_2) $x - 2y + 8 = 0$.

14 Знайти площу прямокутного трикутника, утвореного осями координат *OX* і *OY* і прямою (L) $2x + 3y - 6 = 0$.

15 Через точку $M_0(4,5)$ побудувати пряму, перпендикулярну до прямої (L) $y = 2x + 3$ і записати її рівнянням.

16 Скласти рівняння прямої *L*, яка проходить через точку $M_0(2,5)$ і відсікає на осях координат *OX* і *OY* рівні відрізки $a = b$.

17 Під яким кутом до осі *OX* розташована пряма *L*, якщо її загальне рівняння має вигляд (L) $x + y - 4 = 0$.

18 Визначити площу трикутника, утвореного осями координат *OX* і *OY* і прямою (L) $4x + 3y - 12 = 0$.

19 Визначити кут, який пряма (L) $\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4}$ утворює з віссю *OX*.

20 Знайти кут між прямими (L_1) $y = 2x + 5$ і (L_2) $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

21 Чи будуть перпендикулярними прямі (L_1) $3x - y + 5 = 0$ і (L_2) $x + 3y - 1 = 0$?

22 Визначити координати точки перетину прямих (L_1) $x + 5y - 35 = 0$ і (L_2) $3x + 2y - 27 = 0$.

23 Обчислити площу трикутника, утвореного осями координат *OX* і *OY* і прямою (L) $3x + 5y - 15 = 0$.

24 Визначити, чи будуть перпендикулярними прямі (L_1) $3x - y + 5 = 0$ і (L_2) $x + 3y - 1 = 0$.

25 Визначити кут між прямими (L_1) $5x - y + 7 = 0$ і (L_2) $3x + 2y = 0$.

26 Визначити, чи будуть перпендикулярними прямі (L_1) $3x - 4y + 7 = 0$ і (L_2) $4x + 3y - 1 = 0$.

27 Чи будуть перпендикулярними прямі (L_1) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{5}$ і (L_2) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-5}$?

28 Визначити кут між прямими (L_1) $y = 2x - 3$ і (L_2) $y = -3x + 1$.

29 Обчислити площу трикутника, утвореного осями координат *OX* і *OY* і прямою (L) $5x - 7y - 35 = 0$.

30 Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(-2,4)$ і $M_2(3,7)$.

Завдання 9

1 Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відома відстань між його фокусами $2c = 8$, а велика вісь його дорівнює $2a = 10$.

2 Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що відстань між її фокусами дорівнює $2c = 10$, а її дійсна вісь $2a = 8$.

3 Рівняння еліпса має вигляд $9x^2 + 5y^2 = 45$. Знайти його велику і малу осі, відстань між фокусами і ексцентриситет.

4 Рівняння гіперболи має вигляд: $16x^2 - 9y^2 = 144$. Знайти її дійсну та уявну осі, відстань між фокусами і ексцентриситет.

5 Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо його мала вісь дорівнює $2b = 3$, а ексцентриситет дорівнює $e = 4/5$.

6 Скласти рівняння гіперболи, якщо відомі координати двох точок гіперболи $M_1(6,1)$ і $M_2(-8, 2\sqrt{2})$.

7 Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між її фокусами дорівнює $2c = 20$, а її дійсна вісь дорівнює $2a = 16$.

8 Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що відстань між його фокусами дорівнює $2c = 8$, а велика вісь $2a = 10$.

9 Скласти канонічне рівняння параболи, якщо відомо, що її фокус міститься у точці F (0, -3), парабола проходить через початок координат і її вісь симетрії збігається з віссю OY.

10 Знайти велику і малу осі еліпса $25x^2 + 144y^2 = 169$; знайти відстань між фокусами і ексцентриситет.

11 Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо його мала вісь дорівнює $2b = 4$, а ексцентриситет дорівнює $e = 1/2$.

12 Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо її дійсна вісь дорівнює 2a = 6, а ексцентриситет - e = 2.

13 Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що еліпс проходить через точки $M_1(3/2, \sqrt{3})$; $M_2(3\sqrt{3}/2, 1)$.

14 Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо його велика вісь дорівнює $2a$ = 26, а відстань між фокусами – $2c$ = 10.

15 Знайти канонічне рівняння параболи, якщо її вершина міститься у початку координат і парабола проходить через

точку $M_0(4,4)$.

16 Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо гіпербола рівнобічна (a = b), а відстань між фокусами дорівнює $2c = 4\sqrt{2}$.

17 Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між її фокусами $2c$ = 10 і рівняння асимптот мають вигляд $y = \frac{1}{2}x$.

18 Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо його велика вісь дорівнює $A_1A_2 = 10$, а відстань між фокусами $F_1F_2 = 8$.

19 Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відома відстань між його фокусами $F_1F_2 = 10$ і велика вісь $A_1A_2 = 26$.

20 Скласти канонічне рівняння параболи, якщо відомо, що її директриса має рівняння $x = -2$.

21 Рівняння еліпса має вигляд $9x^2 + 25y^2 = 225$. Визначити його велику вісь ($2a$), малу вісь ($2b$) і відстань між фокусами.

22 Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо її дійсна вісь дорівнює $2a = 16$, а ексцентриситет - $e = 5/4$.

23 Скласти канонічне рівняння параболи, симетричної відносно осі OX, якщо вона проходить через початок координат і точку $M_0(-1,3)$.

24 Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо він проходить через точки $M_1(4,-\sqrt{3})$ і $M_2(2\sqrt{2},3)$.

25 Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо її уявна піввісь дорівнює $b = 3$, а асимптоти мають рівняння $y = \pm\frac{1}{2}x$.

26 Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо фокальна відстань $2c = 6$, а ексцентриситет дорівнює $e = 3/5$.

27 Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо фокальна відстань $2c = 20$, а рівняння її асимптот мають вигляд $y = \pm\frac{4}{3}x$.

28 Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо його мала вісь $2b = 6$, і еліпс проходить через точку $M_0(-5/2,2)$.

29 Скласти канонічне рівняння гіперболи, яка проходить через дві точки $M_1(6,-1)$ і $M_2(-8,2\sqrt{2})$.

30 Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо його фокальна відстань $2c = 8$ і він проходить через точку $M_0(\sqrt{15},-1)$.

Завдання 10

1 Задані координати двох точок: A(-7, 2, -1), B(3, 4, 10). Знайти рівняння площини, яка проходить через точку B перпендикулярно до відрізка AB.

2 Знайти рівняння площини, що проходить через три точки: A(2, -2, 1), B(-1, -4, 3), C(7, 6, -2).

3 Знайти рівняння площини, що проходить через три точки: A(6, -2, 1), B(2, 5, -4), C(-8, 3, -1).

4 Знайти відрізки, які площина (P) $5x+3y-2z-30=0$ відсікає на осях координат.

5 Написати рівняння площини (P), яка проходить через точку $M_0(0,-4,3)$ і відсікає на осях OX і OY відрізки $a=4$, $b=2$.

6 Відомі кординати двох точок: A(3, 1, 2), B(4, 1, 1). Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A і перпендикулярна до вектора $\overline{AB}$.

7 Скласти рівняння площини, що проходить через три точки: $M_1(-1,2,-2), M_2(4,-1,0), M_3(2,1,-2)$.

8 Знайти відрізки, які площина (P) $5x-4y+10z-20=0$ відсікає на осях координат.

9 Визначити рівняння площини, яка проходить через три точки: A(4, 0, -4), B(2, 6, -7), C(0, 2, -3).

10 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A(-2, 6, 7) і перпендикулярна до прямої (L) $\frac{x+5}{5}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{3}$.

11 Визначити рівняння площини (P), яка проходить через три точки $M_1(2,-6,-2), M_2(21,0,-1), M_3(0,-1,4)$.

12 Знайти відрізки, які площина (P) $4x-3y+6z-12=0$ відсікає на осях координат.

13 Скласти рівняння площини (P), яка проходить через точку $M_0(2,-4,7)$ перпендикулярно до вектора $\overline{N}(3,-1,4)$.

14 Скласти рівняння площини (P), яка відсікає на осях координат OX, OY і OZ відрізки $a=3, b=-1, c=4$.

15 Скласти рівняння площини, яка проходить через три точки: O(0, 0, 0), A(3, 7, -2) і B(6, -1, 5).

16 Скласти рівняння площини (P), яка проходить через точку $M_0(4,-6,7)$ перпендикулярно до вектора $\overline{N}(3,-1,5)$.

17 Скласти рівняння площини (P), яка відсікає на осях координат OX, OY і OZ відрізки $a = 2, b = -3, c = -5$.

18 Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2,-3,1)$ паралельно площині (P) $3x + 4y - 7z + 5 = 0$.

19 Записати рівняння площини (P), яка проходить через три точки $M_1(2,-1,4), M_2(-3,8,-1), M_3(-2,0,7)$.

20 Знайти відрізки, які площина $5x + 3y - z - 15 = 0$ відсікає на осях координат OX, OY і OZ.

21 Визначити рівняння площини (P), яка проходить через точку $M_0(2,-1,1)$ перпендикулярно до вектора $\overline{N}(1,-2,3)$.

22 Знайти кут між площинами (P_1) $3y - z = 0$ і (P_2) $2y + z = 0$.

23 Знайти кут між площинами (P_1) $6x + 3y - 2z = 0$ і (P_2) $x + 2y - 6z = 0$.

24 Знайти координати точок перетину площини (P) $2x - 3y - 4z - 24 = 0$ з осями координат.

25 Обчислити об'єм піраміди, яка розташована між координатними площинами XOY, XOZ, YOZ і площиною (P) $2x - 3y + 6z - 12 = 0$.

26 Обчислити площу трикутника на площині XOY, який відсікає площина (P) $5x - 6y + 3z - 120 = 0$.

27 Знайти координати точок перетину площини (P) $3x - 4y - 5z - 60 = 0$ з осями координат OX, OY і OZ.

28 Знайти кут між площинами (P_1) $x + 2y + 2z - 3 = 0$ і (P_2) $16x + 12y - 15z - 1 = 0$.

29 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(4,-2,7)$ перпендикулярно до вектора $\overline{N}(5,-1,6)$.

30 Чи будуть перпендикулярними площини (P_1) $2x - 5y + z = 0$, (P_2) $x + 2z - 3 = 0$?

Завдання 11

1 Знайти кут між просторовими прямими (L_1) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{7} = \frac{z+2}{5}$ і (L_2) $\frac{x-3}{5} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{7}$.

2 Чи перетинаються прямі L_1 і L_2, якщо їх рівняння мають вигляд $(L_1)\ \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{5}$, $(L_2)\ \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-5}{4}$?

3 Чи будуть перпендикулярними просторові прямі з рівняннями $(L_1)\ \frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+4}{1}$, $(L_2)\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-2}{-1}$?

4 Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3,4,1)$ паралельно прямій $(L)\ \frac{x-4}{3}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+1}{2}$.

5 Написати рівняння прямої L, яка проходить через точку $A(2, -1, 3)$ паралельно вектору $\overline{N}(-2,1,2)$.

6 Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(4,-6,5)$ і $M_2(1,0,-7)$.

7 Перевірити, чи перетинаються дві прямі L_1 і L_2 у просторі $(L_1)\ \frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{5}$, $(L_2)\ \frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{7}=\frac{z+1}{3}$.

8 Знайти кут між просторовими прямими L_1 і L_2, якщо їх рівняння такі: $(L_1)\ \frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-4}{5}$, $(L_2)\ \frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-6}{5}$.

9 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1,1,3)$ паралельно до вектора $\overline{N}(-2,4,-5)$.

10 Перевірити, чи перетинаються просторові прямі (L_1) $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{3}$ і $(L_2)\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{5}$.

11 Перевірити, чи перетинаються просторові прямі (L_1) $\frac{x+4}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{5}$ і $(L_2)\ \frac{x}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1}$.

12 Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(-2,6,-7)$ і $M_2(3,-3,5)$.

13 Чи будуть прямі (L_1) $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{5}=\frac{z}{6}$ і (L_2) $\frac{x}{4}=\frac{y-7}{7}=\frac{z+1}{-1}$ перпендикулярними?

14 Знайти кут між прямими (L_1) $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-1}{7}$ і (L_2) $\frac{x}{4}=\frac{y-1}{5}=\frac{z}{-1}$.

15 Перевірити, чи належить прямій L точка $A(2, 5, 4)$, якщо пряма L прходить через дві точки $M_1(1,4,-2), M_2(3,-1,2)$.

16 Перевірити, чи перетинаються прямі (L_1) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-4}{5}$ і $(L_2)\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{4}$.

17 Знайти кут між просторовими прямими (L_1) $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{2}$ і

(L_2) $\frac{x-4}{-1}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+2}{2}$.

18 Чи будуть паралельними прямі (L_1) $\frac{x}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{2}$ і (L_2) $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z}{-2}$?

19 Чи будуть перпендикулярними прямі (L_1) $\frac{x-7}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{1}$ і (L_2) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-2}{8}$?

20 При якому значенні параметра "m" прямі (L_1) $\frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z}{5}$ і (L_2) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-3}$ будуть перпендикулярними?

21 Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(3,-1,0), i\ M_2(-3,2,-11)$.

22 Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2,0,-3)$ паралельно вектору $\overline{s}(2,-3,5)$.

23 Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через дві точки A(1, -2, 1) і B(3, 1, -1).

24 Знайти кут між прямими (L_1) $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$ і (L_2) $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$.

25 Перевірити, чи перетинаються просторові прямі (L_1) $\frac{x-1}{4}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-3}{3}$ і (L_2) $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+2}{-3}$.

26 Скласти канонічні рівняння прямої (L), яка проходить через дві точки A(3, -1, 0) і B(1, 0, -3).

27 Скласти канонічні рівняння прямої (L_2), яка проходить через точку $M_0(2,0,-4)$ паралельно до прямої (L_1) $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z-1}{4}$.

28 Чи перетинаються просторові прямі (L_1) $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{3}$ і (L_2) $\frac{x+1}{5}=\frac{y+2}{7}=\frac{z+1}{4}$?

29 Чи міститься точка A(4, -7, 8) на прямій (L) $\frac{x-1}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-1}{14}$?

30 Визначити кут між прямими (L_1) $\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{5}$ і (L_2) $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{7}$.

Завдання 12

1 При якому значенні коефіцієнта "p" пряма (L) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-8}=\frac{z-2}{p}$ буде паралельною до площини (P) $3x-4y+7z-33=0$?

2 Знайти кут між площиною (P) $2x-y-7z-1=0$ і прямою (L) $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{-1}$.

3 Чи будуть перпендикулярними пряма (L) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+7}{4}$ і площина (P) $6x-2y+8z-15=0$?

4 Через початок координат провести площину, яка буде перпендикулярною до прямої (L) $\frac{x-2}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{5}$.

5 Знайти точку перетину прямої (L) $\frac{x-1}{6}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ і площини (P) $2x+3y+z-1=0$.

6 Знайти кут між прямою (L) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{7}$ і площиною (P) $2x+3y-z-2=0$.

7 Перевірити, чи будуть паралельними пряма (L) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-1}{3}$ і площина (P) $3x-2y+5z-1=0$.

8 Перевірити, чи буде пряма (L) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-8}{5}=\frac{z+1}{-1}$ перпендикулярною до площини (P) $6x+10y+3z=0$.

9 Перевірити, чи будуть паралельними пряма (L) $\frac{x-8}{-2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{3}$ і площина (P) $3x+6y-2z+5=0$.

10 Знайти точку перетину прямої (L) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-5}{2}$ і площини (P) $2x+y+z-5=0$.

11 При якому значенні параметра "l" пряма (L) $\frac{x-1}{l}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-3}{4}$ буде перпендикулярною до площини (P) $x-2y-3z+1=0$?

12 Знайти кут між прямою (L) $\frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z}{4}$ і площиною (P) $x+3y-z-7=0$.

13 Знайти координати точки перетину прямої (L) $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{4}$ і площини (P) $x+y-z-5=0$.

14 Чи буде пряма (L) $\frac{x}{5}=\frac{y}{8}=\frac{z}{5}$ паралельною до площини (P) $x-2y+z-8=0$?

15 Чи будуть пряма (L) $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{5}$ і площина (P) $x+3y-z-8=0$ паралельними?

16 Знайти точку перетину прямої (L) $\frac{x-5}{5}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{-3}$ і площини (P) $2x-y+5z-1=0$.

17 При якому значенні параметра "l" пряма $\frac{x-4}{l}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{7}$ буде перпендикулярною до площини $3x-2y-7z-15=0$?

18 Знайти кут між прямою (L) $\frac{x}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{5}$ і площиною (P) $x+5y-7z+1=0$.

19 Знайти точку перетину прямої (L) $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-1}$ і площини (P) $x-y+3z-4=0$.

20 Чи будуть пряма (L) $\frac{x-7}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+5}{-5}$ і площина (P) $2x+y+z+1=0$ паралельними?

21 Знайти координати точки перетину прямої (L) $\frac{x}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ і площини (P) $3x+5y-z-2=0$.

22 Перевірити, чи розташована пряма (L) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$ на площині (P) $4x+3y-z+3=0$?

23 При якому значенні коефіцієнта "A" площина (P) $Ax+3y-5z+1=0$ буде паралельною до прямої (L) $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{1}$?

24 При якому значенні коефіцієнта "B" площина (P) $2x+By-3z-1=0$ буде паралельною до прямої (L) $\frac{x-5}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{3}$?

25 Перевірити, чи міститься пряма (L) $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{7}=\frac{z-2}{3}$ на площині (P) $5x-8y-2z-1=0$?

26 При яких значеннях коефіцієнтів "A" і "B" площина (P) $Ax+By+6z-7=0$ буде перпендикулярною до прямої (L) $\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z+1}{3}$?

27 Через початок координат провести площину, яка буде

перпендикулярною до прямої (L) $\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{-2}$.

28 Знайти координати точки перетину площини (P) $3x-3y+2z-5=0$ з прямою (L) $\frac{x-2}{-1}=\frac{z-1}{2}=\frac{y-4}{5}$.

29 При якому значенні коефіцієнта "C" площина (P) $3x+2y+Cz-1=0$ буде паралельною до прямої (L) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-1}{-4}$?

30 При якому значенні параметра "l" пряма (L) $\frac{x-3}{l}=\frac{y-4}{5}=\frac{z}{7}$ буде перпендикулярною до площини (P) $3x-y-z-7=0$?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1976.

2 Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1984.

3 Карпелевич Ф.И., Садовский А.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. – М.: Наука,1984.

4 Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1960.

5 Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1967.

6 Ковалішина і.В. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії: Консп. лекцій з вищої математики. — Харків, 1998. - Ч. I, II.