ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра „Вища математика”

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ. РЯДИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до контрольної роботи з розділу дисципліни “*ВИЩА МАТЕМАТИКА*”

Частина I

Харків – 2009

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри "Вища математика" 22 червня 2007 року, протокол № 12.

Методичні вказівки призначено для студентів факультету УПП денної і заочної форм навчання.

Укладачі:

доценти Р.О. Єфременко,
М.Є. Резуненко,
старш. викл. А.П. Рибалко

Рецензент

доц. О.А. Осмаєв

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ
ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ. РЯДИ

Методичні вказівки
до контрольної роботи з розділу дисципліни "Вища математика"

Частина І

Відповідальний за випуск Рибалко А.П.

Редактор Еткало О.О.

Підписано до друку 04.09.07 р.
Формат паперу 60x84 1/16 . Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 1,75. Обл.-вид.арк. 2,0.
Замовлення № Тираж 300 Ціна
Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК 2874 від 12.06.2007 р.
Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, пл. Фейєрбаха, 7

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

КАФЕДРА „ВИЩА МАТЕМАТИКА”

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ. РЯДИ

Частина І

Методичні вказівки

до контрольної роботи з розділу дисципліни “Вища математика” для студентів факультету УПП всіх форм навчання

ХАРКІВ – 2009

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри “Вища математика” 22 червня 2007 року, протокол № 12.

Методичні вказівки призначено для студентів факультету УПП денної і заочної форм навчання.

Укладачі:

доценти Р.О. Єфременко,
М.Є. Резуненко,
старш. викл. А.П. Рибалко

Рецензент

доц. О.А. Осмаєв

ФУНКЦІЯ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ

Змінна z називається *функцією незалежних змінних* x, y *в множині* D, якщо кожній парі значень $(x, y) \in D$ за певним законом відповідає число z. При цьому множина D називається *областю визначення функції*, змінні x, y — її *аргументами*. Функціональна залежність позначається $z = f(x, y)$ або $z = z(x, y)$.

Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x}$, то вона називається *частинною похідною* функції $z = f(x, y)$ *по* x в точці $M_0(x_0, y_0)$ і позначається одним із символів: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $z'_x(M_0)$, $f'_x(M_0)$. Аналогічно визначається *частинна похідна по* y

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = f'_y(M_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta y}.$$

При обчисленні частинної похідної z'_x треба вважати y сталою, а при обчисленні частинної похідної z'_y сталою величиною вважається x.

Приклад 1

Знайти частинні похідні функції $z = \sin x - y\sqrt{x} + 2y^3$.

Розв'язання

Вважаючи y сталою, диференціюємо функцію по змінній x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x - y \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Тепер, вважаючи x сталою, одержимо $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\sqrt{x} + 6y^2$.

Для функції $u = f(x_1, x_2 ... x_n)$ n змінних можна знайти n частинних похідних $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\Delta_{x_i} f}{\Delta x_i}$ $(i = 1,2...n)$, де

$\Delta_{x_i} f = f(x_1,..., x_i + \Delta x_i, ...x_n) - f(x_1,..., x_i, ...x_n)$. При обчисленні частинної похідної $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ по змінній x_i треба вважати решту змінних сталими.

Приклад 2

Знайти частинні похідні першого порядку функції $u = \ln(3x - y) + e^{2z}$ в точці $M_0(1;-2;0)$.

Розв'язання

Вважаючи y та z сталими, за правилом диференціювання складної функції, знайдемо

$$u'_x(x;y;z) = \frac{1}{3x - y} \cdot 3.$$

Тепер вважаємо x та z сталими та знаходимо

$$u'_y(x;y;z) = \frac{1}{3x - y} \cdot (-1).$$

Нарешті, вважаючи x та y сталими, отримаємо

$$u'_z(x;y;z) = e^{2z} \cdot 2.$$

Обчислимо частинні похідні в точці $M_0(1;-2;0)$

$$u'_x(1;-2;0) = \frac{3}{3 \cdot 1 - (-2)} = \frac{3}{5}; \quad u'_y(1;-2;0) = \frac{-1}{3 \cdot 1 - (-2)} = -\frac{1}{5};$$

$$u'_z(1;-2;0) = 2 \cdot e^{2 \cdot 0} = 2.$$

ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Нехай функція $z = f(x, y)$ задана в області D і має частинні похідні $z'_x = f'_x(x;y)$, $z'_y = f'_y(x;y)$ в усіх точках $(x, y) \in D$. Якщо існують частинні похідні по x і y від функцій z'_x, z'_y, то вони називаються *частинними похідними другого порядку* функції $z = f(x, y)$ і позначаються

$$f''_{xx}(x;y),\ f''_{xy}(x;y),\ f''_{yy}(x;y),\ f''_{yx}(x;y)$$

або відповідно $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$,

або коротше $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}, z''_{yx}$. Таким чином,

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x;y) = (f'_x(x;y))'_x; \quad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x;y) = (f'_y(x;y))'_y;$$
$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x;y) = (f'_x(x;y))'_y; \quad z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x;y) = (f'_y(x;y))'_x.$$

Частинні похідні $f''_{xy}(x;y), f''_{yx}(x;y)$ називаються *мішаними* частинними похідними другого порядку.

Теорема. Якщо функція $z = f(x, y)$ визначена разом із своїми похідними $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, причому f''_{xy} і f''_{yx} неперервні в точці M_0, то в цій точці $f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0)$.

Приклад 3

Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = ye^{xy}$.

Розв'язання

Обчислимо спочатку похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy}.$$

Диференціюємо функцію $y^2 \cdot e^{xy}$ по змінній x, вважаючи y сталою. Одержимо частинну похідну

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 \cdot e^{xy} \cdot y = y^3 e^{xy}.$$

Тепер диференціюємо цю ж функцію $y^2 \cdot e^{xy}$ по змінній y, вважаючи x сталою. Одержимо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (y^2 \cdot e^{xy})'_y = 2y \cdot e^{xy} + y^2 \cdot e^{xy} \cdot x = ye^{xy}(2 + xy).$$

Нарешті, вважаючи сталою x, диференціюємо по y функцію $e^{xy} + xye^{xy}$. Тоді

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (e^{xy} + xye^{xy})'_y = e^{xy}x + x \cdot e^{xy} + x \cdot y \cdot e^{xy}x = xe^{xy}(2 + xy).$$

ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Повним приростом Δz функції $z = f(x; y)$ називається різниця

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y). \qquad (1)$$

Диференціалами незалежних змінних x і y назвемо прирости цих змінних: $\Delta x = dx, \Delta y = dy.$

Повним диференціалом dz функції $z = f(x, y)$ називається вираз

$$dz = f'_x(x; y)dx + f'_y(x; y)dy. \qquad (2)$$

При малих $|\Delta x|$ і $|\Delta y|$

$$\Delta z \approx dz. \qquad (3)$$

З формули (1), якщо врахувати (2) і (3), випливає

$$f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) \approx f(x; y) + f'_x(x; y)\Delta x + f'_y(x; y)\Delta y. \qquad (4)$$

Приклад 4

Дано функцію $z = x^2 y^3$ і дві точки $A(2;1)$ і $B(1{,}96;1{,}02)$. Треба:

а) знайти значення z_1 функції Z в точці B;

б) знайти наближене значення $\bar{z}_1$ функції Z в точці B;

в) оцінити в процентах відносну похибку наближеного значення $\bar{z}_1$.

Розв'язання:

а) підставимо у функцію $z = x^2 y^3$ значення $x = 1{,}96,\ y = 1{,}02.$ Маємо

$$z_1 = 1{,}96^2 \cdot 1{,}02^3 = 4{,}0767364.;$$

б) припустимо, що $x = 2,\ y = 1,\ x + \Delta x = 1{,}96,\ y + \Delta y = 1{,}02,$ тоді

$$\Delta x = 1{,}96 - x = 1{,}96 - 2 = -0{,}04; \qquad \Delta y = 1{,}02 - y = 1{,}02 - 1 = 0{,}02.$$

Знайдемо частинні похідні

$$f'_x(x;y) = 2xy^3, \quad f'_y(x;y) = x^2 3y^2$$

і використаємо формулу (4)

$$(x + \Delta x)^2 (y + \Delta y)^3 \approx x^2 y^3 + 2xy^3 \cdot \Delta x + x^2 3y^2 \cdot \Delta y.$$

Підставимо в неї $x = 2,\ y = 1,\ \Delta x = -0{,}04,\ \Delta y = 0{,}02$. Одержимо наближене значення

$$\bar{z}_1 \approx 2^2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 \cdot (-0{,}04) + 2^2 \cdot 3 \cdot 1^2 \cdot 0.02 = 4{,}08;$$

в) обчислимо відносну похибку наближеного значення $\bar{z}_1$ за формулою $\delta_{від} = \left| \frac{z_1 - \bar{z}_1}{z_1} \right| \cdot 100\%$

$$\delta_{від} = \left| \frac{4{,}0767 - 4{,}08}{4{,}0767} \right| \cdot 100\% \approx 0.082\%.$$

ДОСЛІДЖЕННЯ НА ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Функція $z = f(x;y)$ має в точці $M_0(x_0;y_0)$ *максимум* *(мінімум)* $f(x_0;y_0)$, якщо в деякому околі цієї точки для всіх точок $M(x;y)$, відмінних від M_0, виконується умова $f(x;y) < f(x_0;y_0)$ $\left(f(x;y) > f(x_0;y_0)\right)$.

Точки мінімуму та максимуму називаються *точками екстремуму*.

Теорема *(необхідна умова екстремуму)***.** Якщо функція $z = f(x;y)$ має в точці $M_0(x_0;y_0)$ екстремум, то в цій точці частинні похідні першого порядку $f'_x(x_0;y_0), f'_y(x_0;y_0)$ дорівнюють нулю або не існують.

Точка $M_0(x_0;y_0)$, в якій

$$f'_x(x_0;y_0) = 0, \quad f'_y(x_0;y_0) = 0, \tag{5}$$

називається *стаціонарною*. Стаціонарні точки та точки, в яких частинні похідні не існують, називаються *критичними точками*.

Критична точка лише підозріла на екстремум і потребує дослідження, яке полягає в перевірці достатніх умов екстремуму.

Теорема (*достатня умова екстремуму*). Нехай в стаціонарній точці $M_0(x_0;y_0)$ і деякому її околі функція $f(x;y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку. Позначимо

$$f''_{xx}(x_0;y_0) = A, \quad f''_{xy}(x_0;y_0) = B, \quad f''_{yy}(x_0;y_0) = C.$$

Якщо $AC - B^2 < 0$, то в точці $(x_0;y_0)$ функція $z = f(x;y)$ екстремуму не має. Якщо $AC - B^2 > 0$, то функція $z = f(x;y)$ має в точці $(x_0;y_0)$ екстремум, причому максимум при $A < 0$ і мінімум при $A > 0$. У випадку $AC - B^2 = 0$ потрібне додаткове дослідження.

Приклад 5

Знайти екстремум функції $z = x^2 + y^2 - 4xy + 6x$.

Розв'язання

Знайдемо частинні похідні

$$f'_x(x;y) = 2x - 4y + 6, \quad f'_y(x;y) = 2y - 4x.$$

Стаціонарні точки функції виявимо, розв'язуючи систему

$$\begin{cases} 2x - 4y + 6 = 0 \\ 2y - 4x = 0 \end{cases}$$

звідки $x = 1,\ y = 2$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку

$$f''_{xx}(x;y) = 2, \quad f''_{xy}(x;y) = -4, \quad f''_{yy}(x;y) = 2.$$

Для всіх значень x і y ці похідні сталі, отже, $A = 2,\ B = -4,\ C = 2$. Маємо

$$AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-4)^2 = 4 - 16 = -12 < 0,$$

отже, екстремуму немає.

Приклад 6

Знайти екстремум функції $z = 5x^3 + 4y^2 - 15x + 20$.

Розв'язання

Знайдемо частинні похідні

$$f'_x(x;y) = 15x^2 - 15, \quad f'_y(x;y) = 8y.$$

Складемо систему з двох рівнянь

$$\begin{cases} 15x^2 - 15 = 0 \\ 8y = 0 \end{cases}$$

Отримаємо дві стаціонарні точки $M_1(1;0), M_2(-1;0)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку

$$f''_{xx}(x;y) = 30x, \quad f''_{xy}(x;y) = 0, \quad f''_{yy}(x;y) = 8.$$

Для точки $M_1(1;0)$ $AC - B^2\big|_{M_1} = 30 \cdot 1 \cdot 8 - 0^2 = 240 > 0$, отже, в $M_1(1;0)$ екстремум є: це мінімум, бо $A = 30 > 0$. Обчислимо

$$\min z = z(1;0) = 5 \cdot 1^3 + 4 \cdot 0^2 - 15 \cdot 1 + 20 = 10.$$

Для точки $M_2(-1;0)$ $AC - B^2\big|_{M_1} = 30 \cdot (-1) \cdot 8 - 0^2 = -240 < 0$, отже, в $M_2(-1;0)$ екстремуму немає.

НАЙБІЛЬШЕ ТА НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

Функція $z = f(x;y)$, яка неперервна в замкненій області (D), досягає в цій області свого найбільшого та найменшого значень.

Нехай функція $z = f(x;y)$ розглядається в області (D), обмеженій контуром K. Для знаходження *найбільшого та найменшого значення* функції в замкненій обмеженій області (D) потрібно:

1-й етап. Знайти всі її стаціонарні точки, які лежать всередині (D) і обчислити значення функції $z = f(x;y)$ в цих точках.

2-й етап. Знайти найбільше і найменше зі значень, які набуває функція на контурі K.

3-й етап. Відібрати найбільше і найменше з отриманих значень $f(x;y)$.

Приклад 7

Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - xy + 4$ в замкненій області (D), що задана нерівностями: $y \ge 4x^2 - 4,\ y \le 1$.

Розв'язання

І-й етап розв'язання. Знайдемо стаціонарні точки функції. Для цього її частинні похідні $f'_x(x;y) = 2x - y, \quad f'_y(x;y) = -x$ прирівняємо до нуля $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x = 0 \end{cases}$

Розв'язуємо цю систему: $x = 0, y = 0$. Точка $O(0;0)$ – стаціонарна. Вона належить області (D) (рисунок 1), тому знаходимо значення функції в цій точці: $z_O = z(0,0) = 4$. На площині XOY зобразимо область (D). Для цього побудуємо лінії $y = 4x^2 - 4$, $y = 1$. Вони обмежують область (D).

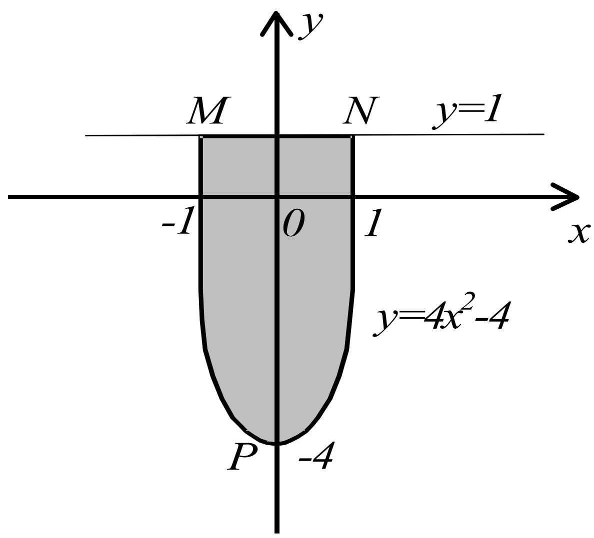

Рисунок 1

2-й етап розв'язання. Межа області (D) складається з двох частин: відрізка MN прямої $y = 1$ і лінії MPN параболи $y = 4x^2 - 4$.

Знайдемо координати точок M і N перетину прямої з параболою. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = 4x^2 - 4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad y = 1.$$

Перетин цих ліній відбувається в точках $M\left(-\frac{\sqrt{5}}{2};1\right)$, $N\left(\frac{\sqrt{5}}{2};1\right)$.

На відрізку MN $y = 1$. Підставимо це значення y в функцію $z = x^2 - xy + 4$ і дістанемо: $z = x^2 - x + 4$ – це функція одного аргументу x, де $x \in \left[-\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

З цією функцією виконаємо дві операції:

а) знайдемо її значення на кінцях відрізка $\left[-\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$

$$x_M=-\frac{\sqrt{5}}{2},\quad z_M=\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+4\approx 6{,}368;$$

$$x_N=\frac{\sqrt{5}}{2},\quad z_N=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\frac{\sqrt{5}}{2}+4\approx 4{,}132;$$

б) знайдемо стаціонарні точки цієї функції, які належать відрізку $\left[-\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$, і обчислимо в них її значення. Для цього похідну $z'=2x-1$ прирівняємо до нуля і розв'яжемо рівняння $2x-1=0,\quad x=\frac{1}{2}$. Точка $x=\frac{1}{2}$ є стаціонарною точкою і вона належить відрізку $\left[-\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$. Знайдемо в ній значення функції $z_Q=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+4=3{,}75$ – це значення функції в точці $Q\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Зауваження. Якщо б стаціонарна точка не належала відрізку $\left[-\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$, то її не треба було б розглядати.

На параболічному контурі MPN межі області (D) $y=4x^2-4$. Підставимо це значення y в формулу $z=x^2-xy+4$. Тоді $z=x^2-x(4x^2-4)+4=-4x^3+x^2+4x+4$. Це функція одного аргументу x, де $x\in\left[-\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$. Виконаємо з цією функцією ті ж дві операції:

а) $x_M=-\frac{\sqrt{5}}{2},\ z_M\approx 6{,}368;\quad x_N=\frac{\sqrt{5}}{2},\ z_N\approx 4{,}132;$

б) знайдемо стаціонарні точки цієї функції $z'=-12x^2+2x+4$. $-12x^2+2x+4=0$ при $x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{2}{3}$ – це стаціонарні точки функції $z=-4x^3+x^2+4x+4$ і обидві належать відрізку $\left[-\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$. Обчислимо значення цієї функції в кожній з них

$$x_K=-\frac{1}{2},\quad z_K=-4\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+4\left(-\frac{1}{2}\right)+4=\frac{9}{4};$$

$$x_L=\frac{2}{3},\quad z_L=-4\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^2+4\left(\frac{2}{3}\right)+4=\frac{160}{27}.$$

Тут K і L – точки на параболі з абсцисами $x_K=-\frac{1}{2}$ і $x_L=\frac{2}{3}$ відповідно.

3-й етап розв'язання. Серед усіх знайдених значень z_O, z_M, z_N, z_Q, z_K, z_L відберемо найбільше і найменше

$$z_{найб}=z_L=\frac{160}{27},\quad z_{найм}=z_K=\frac{9}{4}.$$

ПОХІДНА ЗА НАПРЯМОМ. ГРАДІЄНТ

Нехай функція $u=f(x;y;z)$ задана в деякій області простору.

У цій області зафіксуємо яку-небудь точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, виберемо деякий напрям $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$ і проведемо промінь у цьому напрямі через точку M_0. *Похідною функції* $u=f(x;y;z)$ *за напрямом вектора* $\vec{a}$ в точці M_0 називається границя

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{a}}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{f(M)-f(M_0)}{\Delta S},$$

де $f(M)$ – значення функції $u=f(x;y;z)$ в довільній точці $M(x;y)$, яка належить вектору $\vec{a}$,
$f(M_0)$ – значення функції $u=f(x;y;z)$ в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$,
ΔS – відстань між точками M_0 і M.

Для обчислення цієї похідної користуються формулою

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{a}}=f'_x(M_0)\cos\alpha+f'_y(M_0)\cos\beta+f'_z(M_0)\cos\gamma, \qquad (6)$$

де α, β, γ – це кути, утворені вектором $\vec{a}$ з осями OX, OY і OZ відповідно.

Косинуси цих кутів визначаються за формулами

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \tag{7}$$

Тут a_x, a_y, a_z – проекції вектора $\vec{a}$ на осі OX, OY і OZ, $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ – його модуль .

Похідна функції за даним напрямом характеризує швидкість зміни функції в цьому напрямі.

Приклад 8

Знайти похідну функції $z = 3y^2 + 7xy - \sqrt{xz}$ в точці $M_0(1;-1;4)$ за напрямом вектора $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

Розв'язання

Знайдемо частинні похідні

$$f'_x(x;y;z) = 7y - \frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{x}}, \quad f'_y(x;y;z) = 6y + 7x, \quad f'_z(x;y;z) = -\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{z}}.$$

Обчислимо їх значення в точці $M_0(1;-1;4)$

$$f'_x(1;-1;4) = 7\cdot(-1) - \frac{\sqrt{4}}{2\sqrt{1}} = -8, \quad f'_y(1;-1;4) = 6\cdot(-1) + 7\cdot 1 = 1,$$

$$f'_z(1;-1;4) = -\frac{\sqrt{1}}{2\sqrt{4}} = -\frac{1}{4}.$$

За формулами (7) знайдемо

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{3}, \quad \cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{-2}{3},$$

$$\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}.$$

Використовуючи формулу (6), отримаємо

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{a}} = (-8)\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{2}{3} = -\frac{21}{6} = -3{,}5\,.$$

Оскільки $\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{a}} < 0$, то функція u в напрямі $\vec{a}$ спадає.

Градієнтом функції $u = f(x; y; z)$ в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ називається вектор, координатами якого є значення частинних похідних в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$, тобто

$$\operatorname{grad} f(M_0) = f'_x(M_0)\vec{i} + f'_y(M_0)\vec{j} + f'_z(M_0)\vec{k}\,.$$

Градієнт визначає напрям максимальної швидкості зростання функції.

В умовах розглянутого прикладу 8 маємо

$$\operatorname{grad} f(1;-1;4) = -8\vec{i} + \vec{j} - 0{,}25\vec{k} = (-8;1;-0{,}25)\,.$$

МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Одним із застосувань теорії екстремальних значень функції двох змінних є *метод найменших квадратів* при побудові емпіричних формул.

Нехай в результаті експерименту одержано n значень функції Y при відповідних значеннях аргументу X

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_1	$\ldots$	y_n

Будемо вважати, що потрібна функція має вигляд

$$y = kx + b\,. \tag{8}$$

Значення параметрів k і b треба знайти. При підстановці $x = x_i$

у формулу (8) ми повинні одержати $kx_i + b$, а в результаті експерименту одержали y_i. Розбіжність $y_i - (kx_i + b)$ є наслідком помилки експерименту. Значення k і b підбирають так, щоб сума квадратів розбіжностей $\sum\limits_{i=1}^{n}\left[y_i - (kx_i + b)\right]^2 = S$ була мінімальною. Ми прийшли до задачі на мінімум функції $S = S(k;b)$. Маючи на увазі необхідну умову мінімуму функції двох змінних, одержимо

$$S'_k = -\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - kx_i - b)\cdot x_i = 0; \quad S'_b = -\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - kx_i - b) = 0.$$

Звідси

$$k\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \qquad k\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{9}$$

Вирази (9) є системою з двох рівнянь з двома невідомими k і b. Знайдені із системи значення k і b треба підставити в формулу (8).

Приклад 9

Експериментально одержано п’ять значень функції Y при п’яти значеннях аргументу X, які записані в таблиці

x	1	2	3	4	5
y	3	4	2,5	1	0,5

Методом найменших квадратів знайти функцію у вигляді $y = kx + b$. Побудувати графік.

Розв’язання

Щоб скласти систему (9), треба обчислити її коефіцієнти

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 56;$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15;$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2{,}5 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0{,}5 = 25;$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 3 + 4 + 2{,}5 + 1 + 0{,}5 = 11.$$

Система (9) матиме вигляд $\begin{cases} 56 \cdot k + 15b = 25 \\ 15 \cdot k + 5b = 11 \end{cases}$

Розв'яжемо цю систему і дістанемо $k = -\frac{8}{11}; b = 4\frac{21}{55}$.

Запишемо функцію $y = -\frac{8}{11}x + 4\frac{21}{55}$ і побудуємо її графік (рисунок 2).

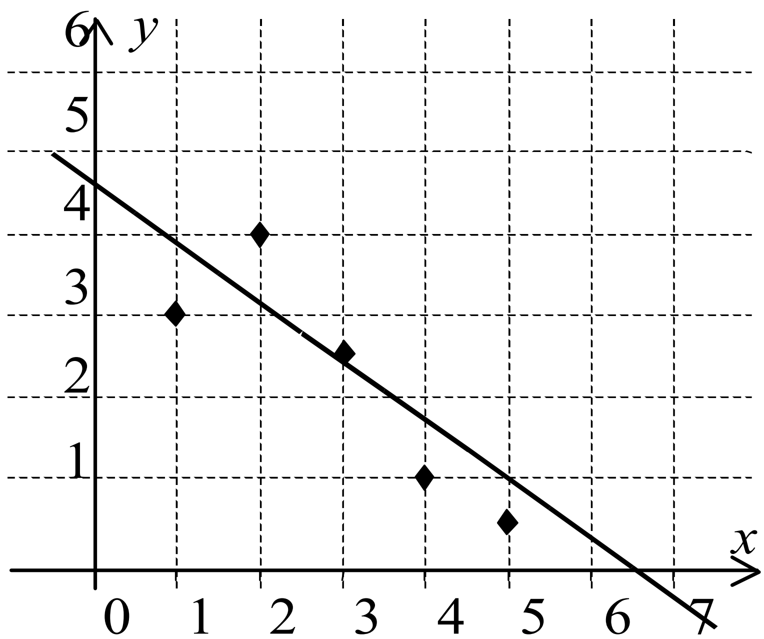

Рисунок 2

ЗАВДАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання 1

Дана функція $z = f(x; y)$. Знайти її частинні похідні другого порядку.

1 $z=\dfrac{y}{x^2-1}$.

2 $z=\ln(x^2-y^2)$.

3 $z=\sin(2x+3y)$.

4 $z=\sqrt{xy+3}$.

5 $z=y^{x+1}$.

6 $z=\left(y^2-1\right)\mathrm{tg}x$.

7 $z=\dfrac{\log_2 x}{y}$.

8 $z=3^{x^3-xy}$.

9 $z=\dfrac{x\arcsin y}{1-x^2}$.

10 $z=\mathrm{ctg}(y-x)$.

11 $z=\dfrac{xy^2}{\cos x}$.

12 $z=\ln\left(\dfrac{x}{y}-2x\right)$.

13 $z=\sqrt{xy}\cos 3x$.

14 $z=\sqrt{e^{2x}-y}$.

15 $z=\dfrac{\ln(x+y)}{y-x}$.

16 $z=\sin xy^3$.

17 $z=e^{2xy}$.

18 $z=\cos y+(y-x)\sin y$.

19 $z=\dfrac{x-y}{x+y}$.

20 $z=\cos\dfrac{y^2}{x}$.

21 $z=\sqrt[3]{y-3x^2}$.

22 $z=x^{\sin y}$.

23 $z=\ln\dfrac{y+1}{x}$.

24 $z=xe^y\sqrt{y}$.

25 $z=2^{x-2y^2}$.

26 $z=y^{\ln x}$.

27 $z=\sqrt{\dfrac{x}{y}-1}$.

28 $z=y4^{xy}$.

29 $z=\left(e^x-2y\right)^3$.

30 $z=\dfrac{x}{y^2}e^{x+1}$.

Завдання 2

Дана функція $z=f(x;y)$ та дві точки $A(x_0;y_0)$ і $B(x_1;y_1)$.
Необхідно:

а) обчислити значення функції z_1 в точці B;

б) обчислити наближене значення $\bar{z}_1$ функції в точці B, відштовхуючись від значення z_0 функції в точці A, замінивши приріст функції при переході від точки A до точки B диференціалом;

в) оцінити у відсотках відносну похибку при заміні приросту функції її диференціалом.

1 $z=x^2+xy+y^2$; $A(1;2)$, $B(1{,}02;1{,}96)$.

2 $z=3x^2-xy+x+y$; $A(1;3)$, $B(1{,}06;2{,}92)$.

3 $z=x^2+3xy-6y$; $A(4;1)$, $B(3{,}96;1{,}03)$.

4 $z=x^2-y^2+6y+3x$; $A(2;3)$, $B(2{,}02;2{,}97)$.

5 $z = x^2 + 2xy + 3y^2$; $A(2;1)$, $B(1{,}96;1{,}04)$.
6 $z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1$; $A(2;4)$, $B(1{,}98;3{,}91)$.
7 $z = 3x^2 + 2y^2 - xy$; $A(-1;3)$, $B(-0{,}98;2{,}97)$.
8 $z = x^2 - y^2 + 5x + 4y$; $A(3;3)$, $B(3{,}02;2{,}98)$.
9 $z = 2xy + 3y^2 - 5x$; $A(3;4)$, $B(3{,}04;3{,}95)$.
10 $z = xy + 2y^2 - 2x$; $A(1;2)$, $B(0{,}97;2{,}03)$.
11 $z = x^2 - xy + 4y$; $A(2;1)$, $B(2{,}02;0{,}97)$.
12 $z = 3xy + y^2 - 2$; $A(-1;4)$, $B(-1{,}01;3{,}98)$.
13 $z = x^2 + 2y^2 - 3x + 1$; $A(3;-1)$, $B(2{,}96;-0{,}99)$.
14 $z = y^2 + 3x + 4y - 5$; $A(2;-5)$, $B(2{,}03;-4{,}98)$.
15 $z = 2x^2 - xy + 2y$; $A(-2;-3)$, $B(-1{,}99;-3{,}02)$.
16 $z = xy - 3y^2 + 5x - y$; $A(4;3)$, $B(3{,}97;3{,}01)$.
17 $z = 4x^2 - y^2 + 2x - 3$; $A(1;-1)$, $B(1{,}02;-0{,}96)$.
18 $z = 2xy - y^2 + x - y$; $A(1;2)$, $B(0{,}98;2{,}03)$.
19 $z = 3y^2 + 4x + 2y - 1$; $A(-3;2)$, $B(-3{,}04;1{,}95)$.
20 $z = 5x^2 - xy + 7x - 3$; $A(-2;1)$, $B(-1{,}97;1{,}03)$.
21 $z = xy + 4y^2 - 5y + 1$; $A(4;1)$, $B(4{,}02;0{,}96)$.
22 $z = x^2 - 2y^2 + x + 3y$; $A(3;-2)$, $B(2{,}94;-2{,}01)$.
23 $z = y^2 - 3x + y - 2$; $A(5;4)$, $B(5{,}03;3{,}98)$.
24 $z = 4xy + 2y^2 - x + y$; $A(1;-2)$, $B(0{,}95;-2{,}02)$.
25 $z = x^2 + xy + 3x - y$; $A(1;3)$, $B(1{,}06;3{,}01)$.
26 $z = 2xy - 4y^2 - 3y + 7$; $A(2;1)$, $B(1{,}98;0{,}93)$.
27 $z = 3x^2 - xy + y^2 - 4y$; $A(-1;1)$, $B(-1{,}01;1{,}04)$.
28 $z = 5y^2 + 3x - 2y + 1$; $A(-5;2)$, $B(-4{,}97;2{,}03)$.
29 $z = 3xy + y^2 + 4x - y$; $A(2;-3)$, $B(2{,}05;-2{,}96)$.
30 $z = 2x^2 - 3xy + 5x - 3$; $A(1;1)$, $B(0{,}99;1{,}02)$.

Завдання 3

Знайти найменше та найбільше значення функції $z = f(x;y)$ в області (D), яка задана системою нерівностей. Зробити рисунок.

1 $z = x^2 + y^2 - 3xy + 2x$; $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 3$.
2 $z = x^2 - 2y^2 - 2x + 4y$; $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 3$.
3 $z = x^2 - 3xy + y^2 - 1$; $x \le 1$, $y \ge 0$, $y \le x$.
4 $z = x^2 + 3y^2 + x - 4$; $x \ge 0$, $y \ge -1$, $x + y \le 1$.
5 $z = 2xy + y^2 - x + 5$; $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

6 $z = 5x^2 - 3xy + 4y + 2$; $x \ge 0$, $y \le 0$, $x - y \le 1$.
7 $z = 4x^2 - 6x + y - 3$; $0 \le y \le 4 - x^2$.
8 $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$; $x \le 0$, $y \le 0$, $x + y + 3 \ge 0$.
9 $z = 2 - 3xy - 3x$; $x^2 - 4 \le y \le 0$.
10 $z = y^2 + xy - 2x - 4y$; $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 3$.
11 $z = 2x^2 - 3xy + 9y - 1$; $x \ge 0$, $y \le 5$, $x \le y$.
12 $z = x^2 + xy - y^2 - 3x$; $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$.
13 $z = y^2 - x^2 + 6y + 3$; $x \ge -1$, $y \ge -4$, $x + y \le 0$.
14 $z = 3x^2 - 2y^2 + 6x - 1$; $x \le 0$, $y \ge -1$, $y - x \le 2$.
15 $z = 5xy + y^2 - 8y + 3$; $1 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 1$.
16 $z = x^2 - 4xy + 2x - 5$; $x \ge -1$, $y \ge 0$, $y + x \le 1$.
17 $z = 7 - x^2 + 2y^2 + 3x$; $0 \le y \le 1 - x^2$.
18 $z = 3y^2 - x^2 + 2xy + 2y$; $x \le 0$, $y \le 0$, $x + y + 1 \ge 0$.
19 $z = x^2 - xy + 4x - 3$; $x^2 - 1 \le y \le 0$.
20 $z = x^2 + 4xy + 2y^2 + 2x$; $0 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 0$.
21 $z = x^2 + y^2 - y + 2$; $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.
22 $z = 2x^2 - 2y^2 + 3y - 4$; $x \ge -1$, $y \ge 0$, $x + y \le 1$.
23 $z = 4x - 3x^2 - 2xy - y^2$; $x \le 2$, $y \ge -2$, $y \le x$.
24 $z = x^2 + y^2 - 4x + 5$; $x \le 3$, $y \le 1$, $x + y \ge 1$.
25 $z = 2x^2 + 4xy - y^2 + 3x$; $-1 \le x \le 0$, $-1 \le y \le 1$.
26 $z = 7y^2 - 2xy + 3x + 1$; $x \ge 1$, $y \ge -1$, $3x + 2y \le 6$.
27 $z = 6 + 8x + 3xy - x^2$; $-3 \le y \le 1 - x^2$.
28 $z = x + xy - y - y^2 + 5$; $x \le 0$, $y \le 0$, $2x + y + 4 \ge 0$.
29 $z = 3x^2 + 6xy - 3y + 16x$; $x^2 - 4 \le y \le -1$.
30 $z = x^2 + xy - 2y + 7$; $1 \le x \le 4$, $-5 \le y \le 0$.

Завдання 4

Дана функція $z = f(x; y)$. Знайти її екстремум.

1 $z = 2x^2 + xy + y^2 + 7y - 1$.
2 $z = x^2 + 3y^2 - 6x + 12y - 2$.
3 $z = x^2 - y^2 + 5xy + 4x + 3$.
4 $z = 3x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 9$.
5 $z = 5 + 12x - 8y - 3x^2 - 2y^2$.
6 $z = 5x^2 + 2y^2 - 6xy + 4x - 2y$.
7 $z = 3x^2 + 2y^2 + 2xy + 6x - 5$.

8 $z = 4x^2 + 3y^2 - xy + 9x - 7y - 3$.
9 $z = -2x^2 - y^2 + 2xy + 4x - 2y + 7$.
10 $z = 6x^2 + y^2 - 2xy - x + 6y + 1$.
11 $z = 3x^2 + 4xy + 2y^2 + 7x + 5y$.
12 $z = x^2 + 2y^2 - x + 4y - 3$.
13 $z = 7x^2 + y^2 - 2xy - 12y + 1$.
14 $z = x^2 + 4y^2 + 3xy - x + 5y$.
15 $z = 7 - x + 5y - x^2 - 2y^2$.
16 $z = x^2 + 5y^2 - 4xy - 2x + 4y - 3$.
17 $z = 2x^2 + y^2 + 3xy - 5x + y$.
18 $z = 2x^2 + 3y^2 - 5xy - 4x + 7y - 1$.
19 $z = -x^2 - 2y^2 + 2xy + 6y + 9$.
20 $z = x^2 + 3y^2 - 2xy + 8y - 4$.
21. $z = 6x^2 + xy + y^2 + 10x - 3y$.
22 $z = 1 - x^2 - 3y^2 + 4x - 6y$.
23 $z = 4x^2 + y^2 - 2xy + 6x - 5$.
24 $z = x^2 + 3y^2 - xy - 7x - 2y$.
25 $z = 13 + xy - 5y - 3x^2 + y^2$.
26 $z = x^2 + 4y^2 - 8xy - 6x + 2$.
27 $z = 3xy - x^2 - 6y^2 - 15y + 1$.
28 $z = x^2 + 3y^2 - 2xy - 8x - 5$.
29 $z = 1 - 4x^2 - y^2 + 2xy + 5x + y$.
30 $z = x^2 + 9y^2 - xy + 5x + y - 4$.

Завдання 5

Дано функцію $u = f(x, y, z)$, точку M і вектор $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$.
Знайти:

а) $\operatorname{grad} u$ в точці M;
б) похідну функції в точці M за напрямом вектора $\vec{a}$.

1 $u = 4\ln\left(3 + x^2\right) - 8xyz, \quad \vec{a} = (2; 1; -1), \quad M = (1; 1; ,1)$.
2 $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}, \quad \vec{a} = (-3;\ 0; 4), \quad M = (2; 4; 1)$.
3 $u = -2\ln\left(5 + x^2\right) - 4xyz, \quad \vec{a} = (4; 3; -1), \quad M = (1; 1; 1)$.
4 $u = 3x^3y + \sqrt{xz}, \quad \vec{a} = (-1; 2; 2), \quad M = (4; 0.5; 1)$.
5 $u = x^2z^3 + \sqrt{y^3}, \quad \vec{a} = (-5;\ 12; 0), \quad M = (2; 2; 4)$.
6 $u = x^4\sqrt{y} + yz^2, \quad \vec{a} = (3;\ 0; -4), \quad M = (1; 4; 3)$.
7 $u = 7\ln\left(12 + x^2\right) + 4xyz, \quad \vec{a} = (-2; -1; -2), \quad M = (1; 1; 1)$.

8 $u = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + xz^2, \quad \bar{a} = (-3; -4; 1), \quad M = (2; 2; -1)$.
9 $u = \ln\left(1 + x^2\right) - xy\sqrt{z}, \quad \bar{a} = (2; 3; -3), \quad M = (1; -2; 4)$.
10 $u = \sqrt{x^2 + y^2} + z, \quad \bar{a} = (5; 1; -4), \quad M = (3; 4; 1)$.
11 $u = x\sqrt{y} + (z + y)\sqrt{x}, \quad \bar{a} = (-6; 0; 8), \quad M = (1; 1; -2)$.
12 $u = \sqrt{xy} + \sqrt{5 - z^2}, \quad \bar{a} = (-2; 2; 3), \quad M = (1; 4; -1)$.
13 $u = \sqrt{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3}, \quad \bar{a} = (-1; -2; 3), \quad M = (0; -3; 4)$.
14 $u = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) - \sqrt{z}, \quad \bar{a} = (2; 1; -3), \quad M = (3; 0; 4)$.
15 $u = x + \ln\left(z^2 + y^2\right) - \sqrt{z}, \quad \bar{a} = (1; 2; -2), \quad M = (2; 1; 4)$.
16 $u = x^2 y + \sqrt{xy + z^2}, \quad \bar{a} = (5; -12; 0), \quad M = (1; -7; 4)$.
17 $u = y\ln\left(1 + x^2\right) - \operatorname{arctg} 3z, \quad \bar{a} = (0; -4; -1), \quad M = (2; 1; 0)$.
18 $u = x(\ln y - \operatorname{arctg} 2z), \quad \bar{a} = (12; 0; -5), \quad M = (-2; 1; -1)$.
19 $u = \ln\left(3 - x^2\right) - xy^2 z, \quad \bar{a} = (8; 1; -2), \quad M = (-1; 0; 1)$.
20 $u = x + 2y + \sqrt{xyz}, \quad \bar{a} = (5; 0; -12), \quad M = (9; 1; 4)$.
21 $u = -\ln(z - 1) + x^3 y^2 z, \quad \bar{a} = (2; 1; -2), \quad M = (1; -1; 2)$.
22 $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \bar{a} = (5; 2; -1), \quad M = (1; -3; 4)$.
23 $u = 3x^4 + 2z + \sqrt{xyz}, \quad \bar{a} = (2; -1; 3), \quad M = (1; 4; 9)$.
24 $u = \sqrt{xy} + \sqrt{10 - z^2}, \quad \bar{a} = (1; -2; -1), \quad M = (1; 4; -1)$.
25 $u = 2\sqrt{x + y} + y\operatorname{arctg} x, \quad \bar{a} = (-2; 2; -3), \quad M = (3; -2; 1)$.
26 $u = z^2 + 2\operatorname{arctg}(x - y), \quad \bar{a} = (0; 4; -3), \quad M = (1; 2; -1)$.
27 $u = \ln\left(y^2 + x^2\right) + xyz, \quad \bar{a} = (2; 2; -1), \quad M = (1; -1; 2)$.
28 $u = xy - \frac{x}{z}, \quad \bar{a} = (3; 2; -1), \quad M = (2; 3; 6)$.
29 $u = \ln x + \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \bar{a} = (-1; 2; -1), \quad M = (1; -3; 4)$.
30 $u = x^2 - \operatorname{arctg}(z + y), \quad \bar{a} = (0; -4; -3), \quad M = (1; -1; 1)$.

Завдання 6

Експериментально одержано п’ять значень функції $y = f(x)$ при п’яти значеннях аргументу X, які записані у вигляді таблиці. Методом найменших квадратів знайти функцію $y = kx + b$. Зробити рисунок.

1

x	1	2	3	4	5
y	4,3	5,3	3,8	1,8	2,3

2

x	1	2	3	4	5
y	4,5	5,5	4,0	2,0	2,5

3

x	1	2	3	4	5
y	4,7	5,7	4,2	2,2	2,7

4

x	1	2	3	4	5
y	4,9	5,9	4,4	2,4	2,9

5

x	1	2	3	4	5
y	5,1	6,1	4,6	2,6	3,1

6

x	1	2	3	4	5
y	3,9	4,9	3,4	1,4	1,9

7

x	1	2	3	4	5
y	5,2	6,2	4,7	2,7	3,2

8

x	1	2	3	4	5
y	5,5	6,5	5,0	3,0	3,5

9

x	1	2	3	4	5
y	5,7	6,7	5,2	3,2	3,7

10

x	1	2	3	4	5
y	5,9	6,9	5,4	3,4	3,9

11

x	1	2	3	4	5
y	2,7	5,1	4,8	3,5	3,9

12

x	1	2	3	4	5
y	2,5	3,0	1,2	1,4	0,8

13

x	1	2	3	4	5
y	6,7	6,8	7,2	9,2	8,6

14

x	1	2	3	4	5
y	7,9	7,7	10,4	9,6	13,9

15

x	1	2	3	4	5
y	12,1	7,3	2,6	2,8	0,1

16

x	1	2	3	4	5
y	– 4,9	0,9	3,4	6,2	8,7

17

x	1	2	3	4	5
y	7,2	6,2	7,5	6,7	7,2

18

x	1	2	3	4	5
y	4,5	2,7	3,9	3,2	2,5

19

x	1	2	3	4	5
y	2,7	4,3	5,2	6,0	5,8

20

x	1	2	3	4	5
y	4,9	6,5	7,4	6,9	8,0

21

x	1	2	3	4	5
y	1,8	3,1	3,9	3,5	4,5

22

x	1	2	3	4	5
y	2,8	2,5	0,9	0,1	0,8

23

x	1	2	3	4	5
y	– 2,5	– 1,4	0,2	0,3	0,5

24

x	1	2	3	4	5
y	8,6	6,7	4,4	2,9	2,7

25

x	1	2	3	4	5
y	1,1	4,5	7,2	7,6	10,8

26

x	1	2	3	4	5
y	7,9	6,1	4,8	4,2	0,9

27

x	1	2	3	4	5
y	4,2	4,7	6,1	5,9	7,8

28

x	1	2	3	4	5
y	5,1	3,3	3,9	1,7	2,8

29

x	1	2	3	4	5
y	0,7	2,5	2,2	4,6	3,9

30

x	1	2	3	4	5
y	5,1	6,8	4,4	3,9	4,9

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов. − М.: Наука,1976. − Т. 1. − 456 с.

2 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов. − М.: Наука,1976. − Т. 2. − 576 с.

3 Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для ВТУЗов. − М.: Наука,1966. − 736 с.

4 Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. − М.: Наука,1986. − 544 с.

5 Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. − М.: Наука, 1969. − 640 с.

6 Методичні вказівки і завдання до контрольних робіт з дисципліни “Вища математика” для студентів 2 курсу факультету УПП заочної форми навчання. − Харків: УкрДАЗТ, 1999. − 39 с.