УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПП

Кафедра “Вища математика”

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Частина 1

ЗАВДАННЯ І МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольної роботи

Харків 2006

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики УкрДАЗТ, протокол № 3 від 13 листопада 2006 р.

Методичні вказівки призначені для студентів факультету економіки транспорту безвідривної форми навчання.

Укладачі:
доц. Думіна О. О.,
доц. Удодова О. І.

Рецензент
доц. Юрчак Н. С.

1. Вступ

Методичні вказівки містять теоретичні відомості з основних розділів математичного програмування, зразки розв'язання задач з розгорнутими поясненнями, варіанти завдань для виконання контрольної роботи, список учбової літератури.

Методичні вказівки рекомендовані для студентів безвідривної форми навчання факультету економіки транспорту.

Номери варіантів контрольної роботи видаються викладачем.

2. Задачі математичного і лінійного програмування

Дослідження різних процесів, у тому числі й економічних, звичайно починається з їхнього моделювання, тобто відображення реального процесу через математичні співвідношення. При цьому складаються рівняння або нерівності, які зв'язують різні показники (змінні) досліджуваного процесу та утворюють систему обмежень. У цих співвідношеннях виділяються такі змінні, змінюючи які можна одержати оптимальне значення основного показника даної системи (прибуток, доход, витрати й т.п.). Відповідні методи, що дозволяють вирішувати зазначені задачі, об'єднуються під загальною назвою "математичне програмування" або "методи дослідження операцій".

Математичне програмування містить у собі такі розділи математики, як лінійне, нелінійне й динамічне програмування. Сюди відносять також стохастичне програмування, теорію ігор, теорію масового обслуговування, теорію керування запасами й деякі інші.

Отже, *математичне програмування* – це розділ вищої математики, присвячений розв'язанню задач, пов'язаних зі знаходженням екстремумів функцій кількох змінних при наявності обмежень на змінні.

Математичне програмування виникло в 30-і роки XX ст. Угорський математик Б. Егерварі в 1931 році розв’язав задачу, названу "проблемою вибору". Американський учений Г. Кун узагальнив цей метод, після чого він став називатися "угорським" методом. В 1939 р. російський учений Л. В. Конторович розробив метод розв'язуючих множників розв'язання задач лінійного програмування. Великий внесок у розвиток математичного програмування внесли американські вчені. В 1947 р. американський учений Дж. Данут описав один з основних методів розв'язання задач лінійного програмування, що одержав назву “симплексний”.

Побудова математичної моделі економічної задачі включає наступні етапи: 1) вибір змінних задачі; 2) складання системи обмежень; 3) вибір цільової функції.

Змінними задачі називаються величини $x_1, x_2, ... x_n$, які повністю характеризують економічний процес. Їх звичайно записують у вигляді $X = (x_1, x_2 ..., x_n)$.

Система обмежень містить у собі систему рівнянь і нерівностей, яку задовольняють змінні задачі і які випливають із обмеженості ресурсів або інших економічних та фізичних умов, наприклад, умови позитивності змінних і т.п.

Цільовою функцією називають функцію змінних задачі, що характеризує якість виконання задачі, і екстремум якої потрібно знайти.

Загальна задача математичного програмування формулюється так: знайти екстремум цільової функції

$$F(X) = f(x_1, x_2, ... x_n) \to \max\ (\min) \tag{1}$$

і відповідні йому значення змінних за умови, що ці значення задовольняють систему обмежень

$$\begin{cases} \phi_i(x_1, x_2 ... x_n) = 0, & i = 1, 2, ... l; \\ \phi_i(x_1, x_2 ... x_n) > 0\ (< 0), & i = l+1, l+2, ..., m \end{cases} \tag{2}$$

Якщо цільова функція (1) і система обмежень (2) лінійні, то задача математичного програмування називається *задачею лінійного програмування* (ЗЛП).

У загальному випадку ЗЛП може бути записана у вигляді:

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max\,(\min) \tag{3}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ .... \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + ... + a_{ln}x_n = b_l \\ a_{(l+1)1}x_1 + a_{(l+1)2}x_2 + ... + a_{(l+1)n}x_n \le b_{l+1} \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \tag{4}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, ..., t,\ t \le n. \tag{5}$$

Даний запис означає наступне: знайти екстремум цільової функції задачі (3) і відповідні йому значення змінних $X = (x_1, x_2, ...x_n)$ за умови, що ці значення задовольняють систему обмежень (4) і умови невід’ємності (5).

Допустимим розв'язком (*планом*) ЗЛП називається будь-який n-мірний вектор $X = (x_1, x_2, ...x_n)$, що задовольняє систему обмежень й умови невід’ємності.

Множина допустимих розв'язків (планів) задачі утворює *область допустимих розв'язків* (ОДР).

Оптимальним розв'язком (*планом*) ЗЛП називається такий допустимий розв'язок (план) задачі, при якому цільова функція досягає екстремуму.

Так як у цьому випадку розв’язується задача на екстремум, то виникає питання: чи можна використовувати класичні методи дослідження на екстремум функції багатьох змінних. Застосуємо необхідну умову екстремуму функції, яка полягає в тому, що часткові похідні функції багатьох змінних або дорівнюють нулю, або не існують. У цьому випадку

$$\frac{dF}{dx_i} = c_i = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Але якщо всі $c_i = 0$, то і $F = 0$, тобто екстремум функції не досягається. Пов'язано це з тим, що похідну можна використати для визначення екстремуму тільки у внутрішніх точках області розв'язання, а в цьому випадку екстремум, як буде показано далі, знаходиться на межах області. Звідси й виникає необхідність розробки спеціальних методів пошуку екстремуму.

3. Математична модель задачі про використання сировини.

Припустимо, що виготовлення продукції двох видів $П_1$ і $П_2$ вимагає виготовлення чотирьох видів сировини S_1, S_2, S_3, S_4. Запаси сировини кожного виду обмежені й становлять відповідно b_1, b_2, b_3, b_4 умовних одиниць. Кількість сировини, яка необхідна для виготовлення одиниці кожного з видів продукції, відома і задається таблицею 1.

Таблиця 1

Види сировини	Запаси сировини	Види продукції	
		$П_1$	$П_2$
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}
S_3	b_3	a_{31}	a_{32}
S_4	b_4	a_{41}	a_{42}
Прибуток		C_1	C_2

Таблиця 2

Види сировини	Запаси сировини	Види продукції	
		$П_1$	$П_2$
S_1	19	2	3
S_2	13	2	1
S_3	15	0	3
S_4	18	3	0
Прибуток		7	5

Тут a_{ji} $(i = 1,...,4; \quad j = 1,2)$ означає кількість одиниць сировини S_i, необхідне для виготовлення продукції виду $П_j$. В останньому рядку таблиці указаний прибуток, який одержано підприємством від реалізації одиниці кожного виду продукції.

Потрібно скласти такий план випуску продукції видів $П_1$ й $П_2$, при якому прибуток підприємства від реалізації всієї продукції виявився би максимальним.

Математичну форму поставленої задачі вивчимо на числовому прикладі (таблиця 2).

Приклад 1.

Припустимо, що підприємство випускає x_1 одиниць продукції виду Π_1 і x_2 одиниць продукції виду Π_2. Для цього буде потрібно $2x_1 + 3x_2$ одиниць сировини S_1. Так як у наявності є всього 19 одиниць сировини S_1, то повинна виконуватися нерівність $2x_1 + 3x_2 \le 19$. Нерівність (а не точна рівність) з'являється у зв'язку з тим, що прибуток може бути досягнутий підприємством і у тому випадку, коли запаси сировини виду S_1 використовуються не повністю.

Аналогічні міркування, проведені для інших видів сировини, дозволяють записати наступні нерівності:

$$2x_1 + x_2 \le 13 \text{ (сировина } S_2\text{);}$$
$$3x_2 \le 15 \text{ (сировина } S_3\text{);}$$
$$3x_1 \le 18 \text{ (сировина } S_4\text{).}$$

При цих умовах прибуток F, який одержано підприємством, складе $F = 7x_1 + 5x_2$.

Таким чином, математично задачу можна сформулювати так: дана система лінійних нерівностей

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19 \\ 2x_1 + x_2 \le 13 \\ 3x_2 \le 15 \\ 3x_1 \le 18 \end{cases} \tag{6}$$

і лінійна форма

$$F = 7x_1 + 5x_2 \tag{7}$$

Потрібно серед **невід'ємних** розв'язків системи (6) вибрати такий, при якому форма F приймає **найбільше** значення (**максимізується**).

3. Геометричний метод розв'язування ЗЛП

Для ЗЛП з двома невідомими процес вибору оптимального плану з кутових точок області допустимих розв'язків можна проводити за допомогою графічного зображення цієї області. Для цього в декартовій системі координат креслимо многокутник розв'язків системи обмежень (як перетин множин розв'язків кожної нерівності системи), а потім, враховуючи напрямок зростання цільової функції, обираємо оптимальну вершину цього многокутника і знаходимо її координати. Розглянемо докладніше процес побудови області допустимих розв'язків.

Як відомо, графічним зображенням множини розв'язків лінійного рівняння з двома невідомими є пряма на координатній площині. Геометричним місцем точок з координатами, що задовольняють лінійну нерівність, є одна з двох **напівплощин**, на які поділяє площину пряма з відповідним рівнянням. Для визначення, яку саме напівплощину треба обрати, достатньо перевірити виконання нерівності в одній з точок площини. Наприклад, побудуємо графічний розв'язок нерівності $2x_1 - 3x_2 \geq 6$ (рис. 1). Розглянемо рівняння $2x_1 - 3x_2 = 6$ і побудуємо пряму, яка є множиною його розв'язків на площині (x_1, x_2).

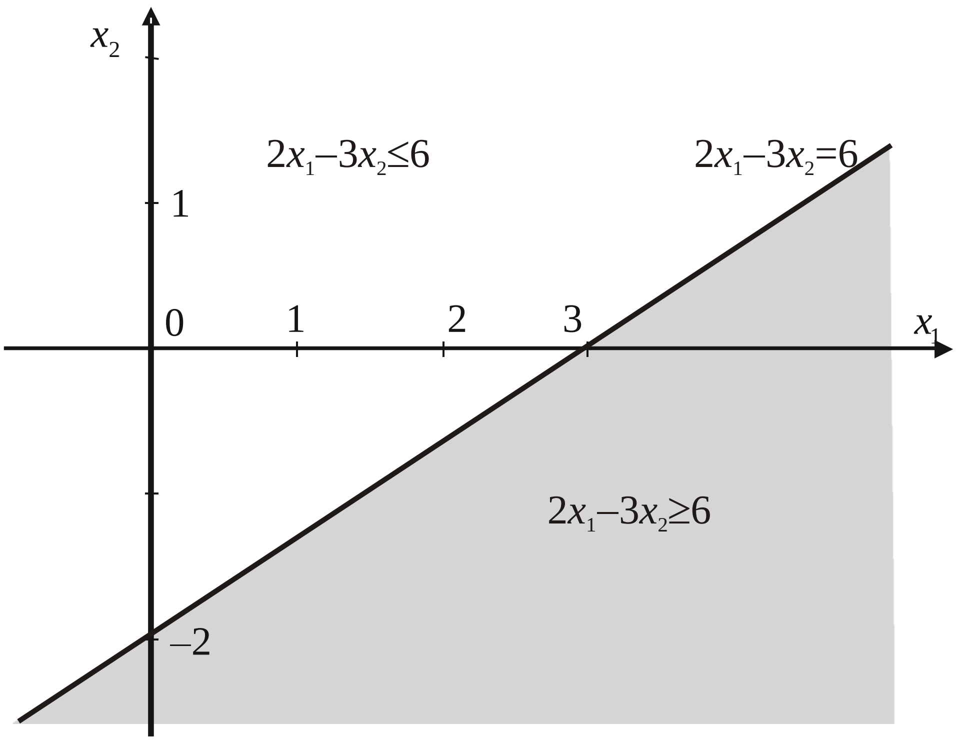


Рис. 1. Графічний розв'язок лінійної нерівності.

Ця пряма поділяє площину на дві напівплощини. Перевіримо виконання нерівності у початку координат. Для цього підставимо у нерівність $x_1 = x_2 = 0$. Отримаємо $0 \geq 6$, що не є вірною нерівністю. Тому у початку координат нерівність не виконується, і також вона не виконується у всіх точках тієї напівплощини, до якої належить початок координат. Тому шуканий розв'язок нерівності – це напівплощина, що лежить нижче від прямої. На рисунку це затонована напівплощина. Інша напівплощина є розв'язком нерівності $2x_1 - 3x_2 \leq 6$.

Якщо задана система нерівностей, то для її розв'язання треба на одній координатній площині побудувати графічний розв'язок кожної нерівності і знайти перетин отриманих напівплощин. Наприклад, розв'язком системи

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \geq 6 \\ 0 \leq x_1 \leq 5 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

є трикутник, що залишився незаштрихованим на рисунку 2.

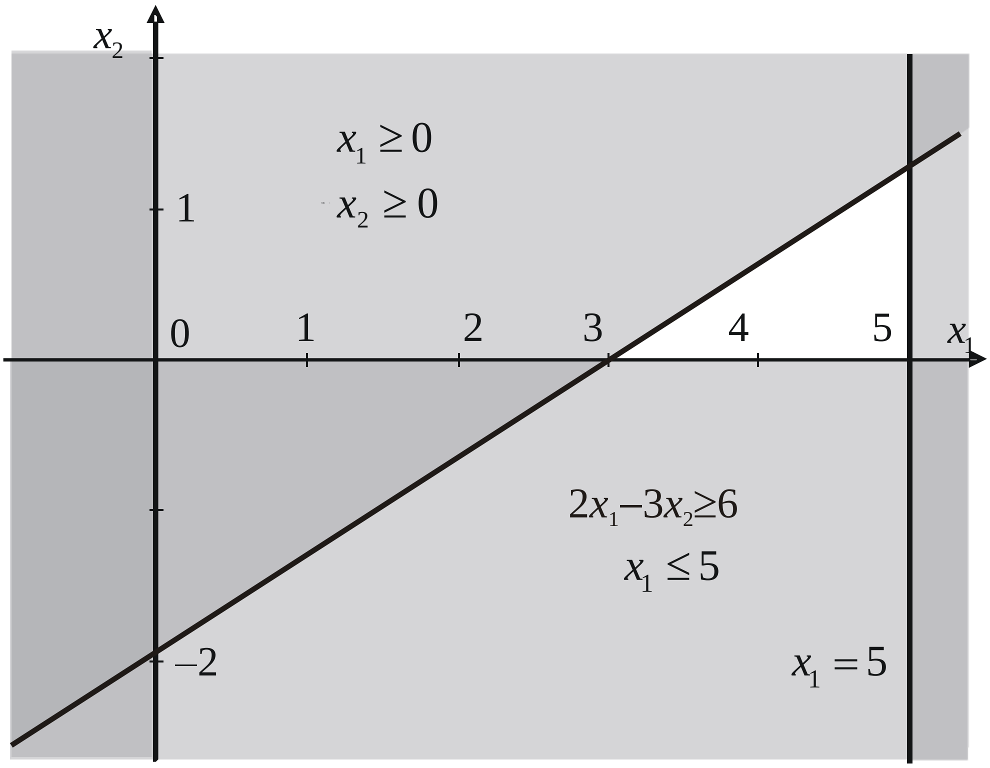


Рис. 2. Графічний розв'язок системи лінійних нерівностейі.

Розглянемо тепер поведінку цільової функції у точках площини. Лінією рівня (тобто лінією, на якій функція зберігає стале значення) лінійної цільової функції є **пряма**. Сімейство таких прямих має спільний вектор нормалі $\vec{N} = (c_1, c_2)$, тобто усі прямі сімейства є паралельними одна одній. Якщо така пряма проходить через початок координат, то значення цільової функції в її точках дорівнює 0. Напрямок зростання значень цільової функції теж визначається напрямком вектора $\vec{N}$ (рис. 3). Таким чином, для знаходження **найбільшого** значення цільової функції в області припустимих розв'язків треба побудувати таку пряму, яка **має заданий вектор нормалі** $\vec{N}$, **проходить через область припустимих розв'язків** та **розташована якомога далі у напрямку вектора** $\vec{N}$. При знаходженні **найменшого** значення функції треба обирати пряму, яка **розташована якомога далі у напрямку, протилежному вектору** $\vec{N}$.

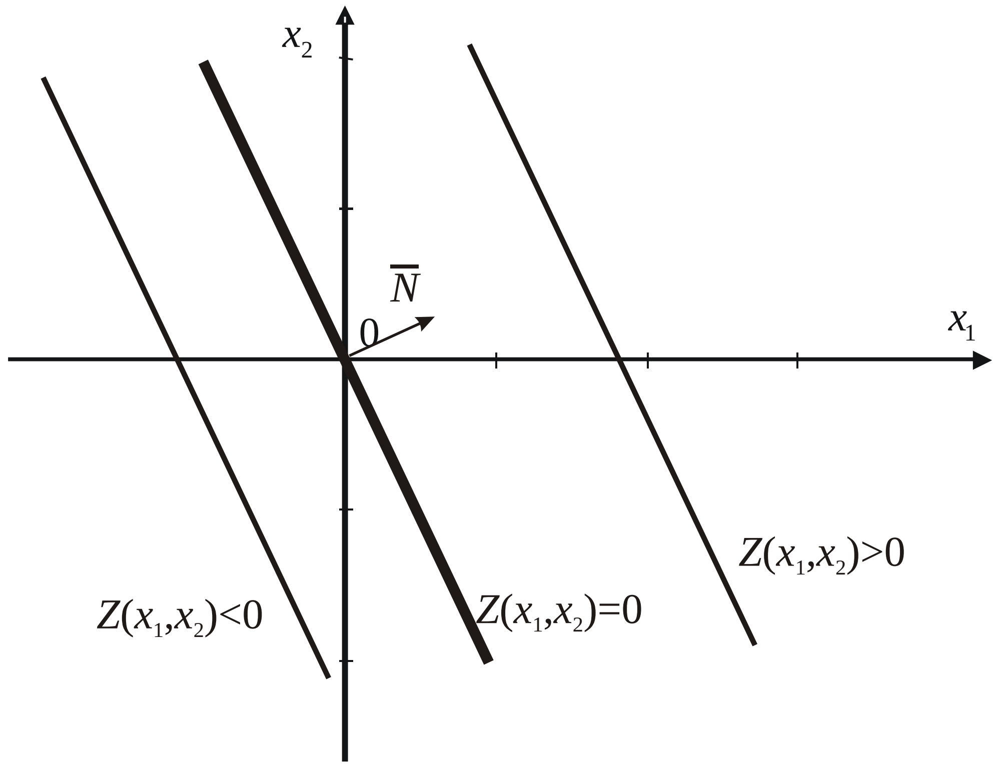


Рис. 3. Лінії рівня цільової функції.

<u>Приклад 2.</u>

Розв'яжемо геометричним методом задачу про використання сировини, яка задана формулами (6), (7) (рис. 4). Областю допустимих розв'язків цієї задачі є шестикутник

$OABCDE$. Лінії рівня цільової функції $F = C = const$ перпендикулярні вектору $\vec{N} = (5;7)$. Якщо зсувати, наприклад, пряму $F = 0$ у напрямку вектора $\vec{N}$, значення функції зростатиме. Максимально можливий зсув досягається у вершині C, тобто $F_{\max} = F(C)$. Координати точки C знаходимо як координати точки перетину двох прямих, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 13; \\ 2x_1 + 3x_2 = 19, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 5; \\ x_2 = 3, \end{cases} \quad C(5;3).$$

Підставивши до цільової функції координати знайденої точки, знаходимо $\max F = F(C) = 7 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 50$.

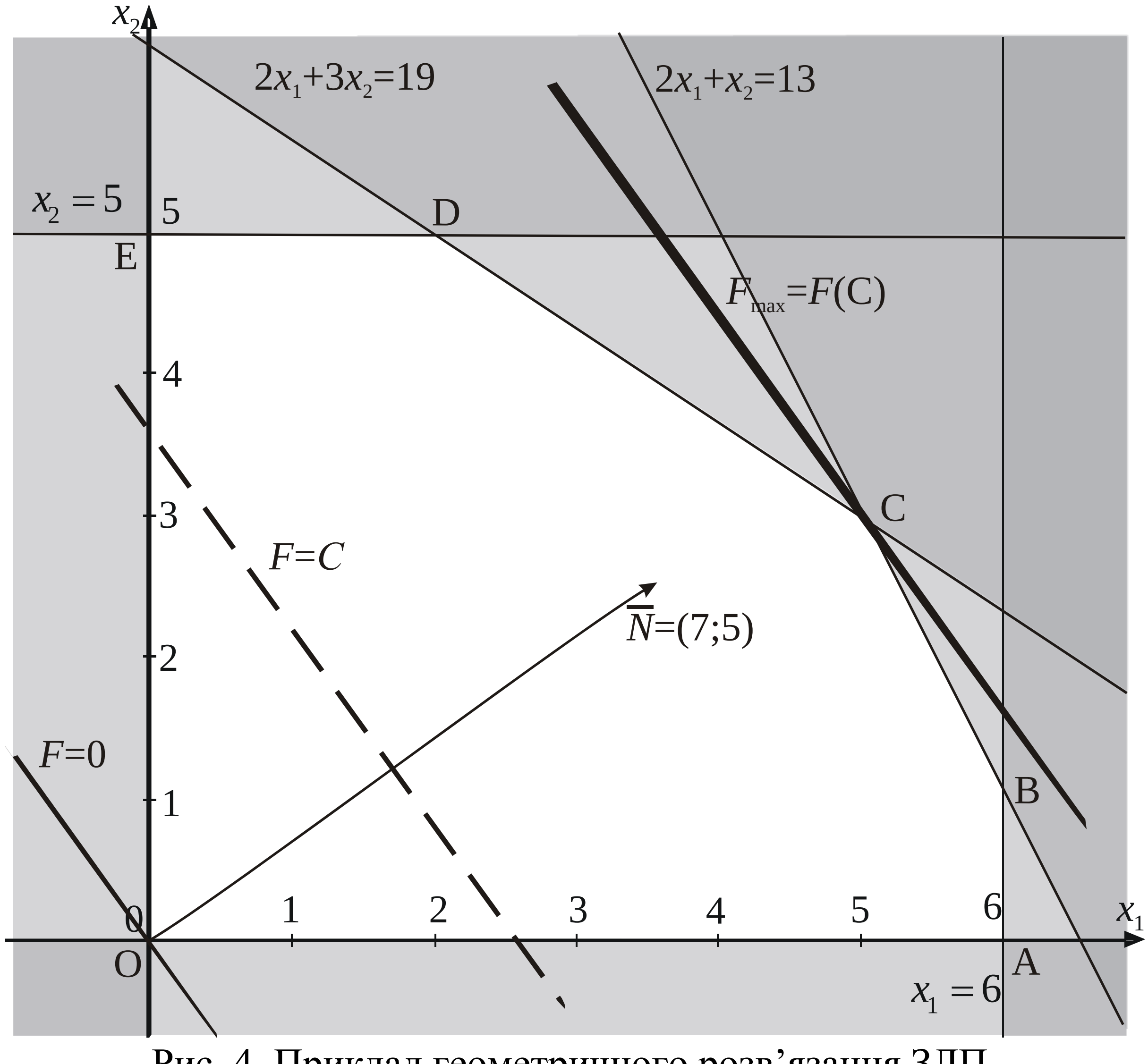


Рис. 4. Приклад геометричного розв'язання ЗЛП.

4. Зведення ЗЛП до канонічної форми

Вважають, що ЗЛП записана в *канонічній формі*, якщо вона має вигляд:

$$F = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min \tag{8}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \ge 0;\ j = 1,\ldots,n \end{cases} \tag{9}$$

де a_{ij}, b_i, c_j – задані сталі величини, припускаємо $b_i \ge 0\ (i = 1,\ldots,m)$ та $m < n$. Будь-яку задачу лінійного програмування можна звести до канонічної форми. Розглянемо можливі відхилення в запису ЗЛП від канонічної форми і шляхи їхніх усунень.

1. Якщо в ЗЛП необхідно знайти максимум лінійної форми (8), то, з огляду на те, що $\max F = -\min(-F)$, задача зводиться до пошуку мінімуму лінійної форми $-F$.

2. Якщо частина або всі обмеження мають вигляд лінійних нерівностей

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i, \tag{10}$$

то для зведення ЗЛП до канонічного вигляду необхідно в лівих частинах таких нерівностей **додати** невід'ємні змінні x_{n+k}, після чого дістанемо рівняння такого вигляду:

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n + x_{n+k} = b_k.$$

Якщо частина або всі обмеження мають вигляд лінійних нерівностей

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i, \tag{11}$$

то для зведення ЗЛП до вигляду (8), (9) необхідно в лівих частинах таких нерівностей **відняти** невід'ємні змінні x_{n+k} і замість нерівності (11) взяти рівняння вигляду

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n - x_{n+k} = b_k .$$

При цьому додаткові змінні входять у лінійну форму з нульовими коефіцієнтами.

3. Якщо на деякі змінні x_s не накладаються умови невід’ємності, то для зведення ЗЛП до канонічної форми необхідно зробити заміну

$$x_i = x_i' - x_i'',$$

де $x_i' \geq 0,\ x_i'' \geq 0$.

Приклад 3.

Звести до канонічної форми ЗЛП:

$$F = 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 9; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \geq 2; \\ x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Зведення ЗЛП до канонічної форми (8), (9) будемо проводити поетапно.

1. З огляду на п. 1, перейдемо до задачі на мінімум:

$$-F = -2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to \min$$

2. Використовуючи рекомендації п. 2, введемо додаткові змінні $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$, тоді замість нерівностей

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 9;$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \geq 2.$$

одержимо рівняння:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 9;$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_6 = 2.$$

Тоді система обмежень приймає вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 9; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_6 = 2; \\ x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0. \end{cases}$$

3. На змінну x_2 не накладають умови невід'ємності, тоді, з огляду на рекомендації п. 3, зробимо заміну $x_2 = x_2' - x_2''$ і остаточно одержимо ЗЛП, записану у формі (8), (9):

$$-F = -2x_1 - x_2' + x_2'' + 3x_3 + 5x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2' - x_2'' + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + x_2'' + x_3 + 2x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_2' - 2x_2'' - x_3 + x_4 - x_6 = 2; \\ x_j \ge 0 \ (j = 1, 3, 4, 5, 6),\ x_2' \ge 0,\ x_2'' \ge 0. \end{cases}$$

5. Алгоритм однократного заміщення Жордана-Гауса

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Будь-які m невідомих системи $(m<n)$ звуться *основними* (*базисними*), якщо визначник матриці їхніх коефіцієнтів відрізняється від 0. Тоді інші $n-m$ невідомих звуться *неосновними* (*вільними*). *Базисним (опорним) розв'язком* зветься розв'язок системи, у якому всі $n-m$ вільні невідомі дорівнюють 0. Сумісна система має нескінчену кількість розв'язків, серед них базисних скінчена кількість, що не перебільшує C_n^m. Розв'язок зветься *допустимим*, якщо він містить тільки невід'ємні компоненти.

Розглянемо приклад 4.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad = 3; \\ \ \ x_1 \qquad + x_3 = -2. \end{cases}$$

Якщо взяти за базисні невідомі x_2, x_3, а за вільну відповідно x_1, отримаємо базисний розв'язок $X_1 = (0;3;-2)$. Для знаходження іншого базисного розв'язку треба вибрати інші базисні невідомі, наприклад x_1, x_3. Поклавши вільну невідому $x_2 = 0$, отримаємо базисний розв'язок $X_2 = \left(3/2; 0; -7/2 \right)$.

Базисні невідомі завжди можна виразити через вільні. При цьому вільні коефіцієнти у правих частинах рівностей будуть дорівнювати значенням відповідних базисних невідомих у базисному розв'язку. В нашому прикладі виразимо x_2, x_3 через x_1:

$$\begin{cases} x_2 = -2x_1 + \underline{3}; \\ x_3 = \ -x_1 \ \underline{-2}. \end{cases}$$

Підкресленням виділені вільні коефіцієнти. Виразивши x_1, x_3 через x_2, отримаємо

$$\begin{cases} x_1 = -1/2\, x_2 + \underline{3/2}; \\ x_3 = \ 1/2\, x_2 \ \underline{-7/2}, \end{cases}$$

звідки одразу бачимо значення базисних невідомих у відповідному базисному розв’язку.

Для отримання виразу базисних невідомих через вільні необхідно проводити перетворення рівнянь системи – виражати одну невідому через інші з одного рівняння і підставляти в інші рівняння. Цей процес – алгоритм Жордана-Гауса – можна виконувати певною стандартною послідовністю дій, для скорочення запису використовуючи таблицю.

Складемо таблицю для коефіцієнтів виразу базисних невідомих через вільні:

	$-x_1$	1
x_2	2	3
x_3	1	–2

Відмітимо, що для подальшої зручності вільні невідомі беруться з протилежним знаком (це позначено знаком «–» в заголовку стовпчика). **В останньому стовпчику маємо значення базисних невідомих у відповідному базисному розв’язку**. Для переходу до іншого набору базисних змінних використовуємо **алгоритм Жордана-Гауса**:

1. Обираємо в таблиці *розв’язуючий елемент*, що відрізняється від 0. Він знаходиться на перетині стовпчика, що відповідає новому базисному невідомому, і рядка, що відповідає новому вільному невідомому. Рядок і стовпчик, у яких знаходиться розв’язуючий елемент, теж називаються *розв’язуючими*.
2. Міняємо місцями заголовки розв’язуючих рядка і стовпчика. Заголовки інших рядків і стовпчиків переписуємо без змін.
3. На місці розв’язуючого елементу записуємо 1.
4. Інші елементи розв’язуючого рядка переписуємо без змін.
5. Інші елементи розв’язуючого стовпчика переписуємо з протилежним знаком.
6. Інші елементи таблиці знаходимо за «*правилом прямокутника»*: креслимо уявний прямокутник з вершинами у розв’язуючому елементі і тій клітині таблиці, яку треба заповнити; від добутку елементів у вершинах

прямокутника на діагоналі з розв'язуючим елементом віднімаємо добуток двох інших кутових елементів.

7. Усі елементи отриманої таблиці ділимо на величину розв'язуючого елементу.

В результаті таких перетворень маємо нову таблицю, що відповідає вибору вільної змінної x_2 та базисних змінних x_1, x_3.

	$-x_2$	1
x_1	1/2	3/2
x_3	–1/2	–7/2

6. Симплексний метод

Розв'язання ЗЛП геометричним методом є наочним у випадку двох змінних. Для випадку ж більшої кількості змінних геометричний метод стає неможливим. Так званий симплекс-метод належить до числа аналітичних і є універсальним методом, яким можливо розв'язати будь-яку ЗЛП.

Ідея симплексного методу полягає у наступному. Використовуючи систему обмежень, приведену до канонічного вигляду, тобто до системи лінійних рівнянь, знаходять її будь-який базисний розв'язок. Якщо цей розв'язок є допустимим, то перевіряють його на оптимальність. Якщо він є неоптимальним, то переходять до іншого допустимого базисного розв'язку. Симплексний метод гарантує, що при цьому новому розв'язку цільова функція якщо і не досягне оптимуму, то наблизиться до нього. Продовжують таку дію, доки не отримають оптимальний розв'язок.

Якщо перший базисний розв'язок виявиться недопустимим, то за допомогою симплекс-методу здійснюється перехід до іншого базисного розв'язку, який дозволяє наблизитись до області допустимих розв'язків, доки на якомусь кроці не отримаємо допустимий базисний розв'язок. Після цього застосовують попередній механізм симплексного методу.

Таким чином, застосування симплексного методу розпадається на два етапи: 1) знаходження допустимого базисного розв’язку системи обмежень; 2) знаходження оптимального розв’язку. При цьому кожний етап може містити кілька кроків, відповідних тому або іншому базисному розв’язку. Оскільки число базисних розв’язків завжди обмежено, то обмежено і число кроків симплекс-методу.

Прослідкуємо ідею методу на прикладі.

Приклад 5.

Розглянемо ЗЛП у канонічному вигляді

$$F = -x_1 + x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$$
$$x_i \geq 0,\ i = 1,\dots,5.$$

Оберемо за базисні змінні x_3, x_4, x_5 та виразимо їх через вільні x_1, x_2

$$\begin{cases} x_3 = x_1 + 3x_2 + 2 \\ x_4 = -2x_1 - 3x_2 + 7 \\ x_5 = -x_1 - x_2 + 2 \end{cases} \tag{12}$$

Так як $x_i \geq 0$, то найменші значення $x_1 = x_2 = 0$, при цьому $x_3 = 2$, $x_4 = 7$, $x_5 = 2$, тобто цей базисний розв’язок є допустимим. Значення цільової функції в цьому розв’язку $F = 0$. Чи можна за рахунок збільшення x_1, x_2 зменшити F? Так, якщо збільшувати змінну x_1, бо вона входить до виразу F зі знаком «–». Збільшення ж змінної x_2 напроти призведе до збільшення F, бо перед цією змінною знак «+», тому залишимо $x_2 = 0$. Необмежено збільшувати x_1 неможна, бо розв’язок перестане бути допустимим. Якщо застосувати умову невід’ємності змінних до (12) та врахувати $x_2 = 0$, отримуємо систему

$$\begin{cases} x_3 = x_1 + 3x_2 + 2 \ge 0 \\ x_4 = -2x_1 - 3x_2 + 7 \ge 0 \\ x_5 = -x_1 - x_2 + 2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2 \ge 0 \\ -2x_1 + 7 \ge 0 \\ -x_1 + 2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \ge -2 \\ x_1 \le 7/2 \\ x_1 \le 2 \end{cases} \Rightarrow \qquad x_1 \le 2$$

Найбільше можливе значення $x_1 = 2$, при цьому $x_5 = 0$, тобто x_5 стає вільною змінною, а x_2 – базисною. Отримуємо новий допустимий базисний розв'язок $x_2 = x_5 = 0$, $x_1 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = 3$. Значення цільової функції при цьому $F = -2$, тобто зменшилося. Розглянемо, як виглядає вираз F через x_2, x_5. Для цього виразимо з третього рівняння (12) x_1 через нові вільні змінні $x_1 = -x_5 - x_2 + 2$ і підставимо до виразу цільової функції $F = -(-x_5 - x_2 + 2) + x_2 = 2x_2 + x_5 - 2$. Так як обидві змінні входять до виразу зі знаком «+», ще зменшити значення F неможливо, тобто ми досягли оптимального розв'язку.

Розглянуті вище дії (перехід від одного базисного розв'язку до іншого) можна проводити у таблиці за допомогою алгоритму Жордана-Гауса.

	$-x_1$	$-x_2$	1
x_3	–1	–3	2
x_4	2	3	7
x_5	1	1	2
F	1	–1	0

	$-x_5$	$-x_2$	1
x_3	1	–2	4
x_4	–2	1	3
x_1	1	1	2
F	–1	–2	–2

Правила вибору розв'язуючого елемента (тобто змінних, які переходять з вільних у базисні та навпаки), які були проілюстровані у прикладі, можна формалізувати у вигляді **алгоритму симплекс-методу:**

<u>0 крок.</u> Записуємо ЗЛП у канонічному вигляді, обираємо будь-які базисні змінні та виражаємо їх через вільні. Складаємо **симплекс-таблицю** – таблицю коефіцієнтів виразу базисних змінних та цільової функції через вільні змінні. Якщо відповідний базисний розв'язок не є допустимим, переходимо до

іншого базисного розв’язку (алгоритм цього переходу опишемо пізніше).

1 крок. Перевіряємо **критерій оптимальності**: **в рядку** F **коефіцієнти при вільних змінних недодатні**. Якщо критерій оптимальності не виконаний, обираємо розв’язуючий елемент наступним чином:

а) **в рядку** F обираємо **найбільший за абсолютною величиною додатній коефіцієнт при вільних змінних** – він визначає розв’язуючий стовпчик;

б) складаємо **невід’ємні відношення** елементів **останнього стовпчика до** відповідних елементів **розв’язуючого стовпчика** та обираємо серед них **найменше** – це визначає розв’язуючий рядок.

2 крок. Виконуємо алгоритм Жордана-Гауса з обраним розв’язуючим елементом.

Повторюємо кроки 1 і 2, доки критерій оптимальності не буде виконаним.

Зауваження. Якщо розв’язується задача на знаходження **максимуму** цільової функції, критерій оптимальності змінюється на такий: **в рядку** F **коефіцієнти при вільних змінних невід’ємні**. Також змінюється правило вибору розв’язуючого стовпчика: **в рядку** F обираємо **найбільший за абсолютною величиною від’ємний елемент**. Інші кроки алгоритму залишаються незмінними.

Приклад 6.

Розв’яжемо симплексним методом задачу про використання сировини, яка задана формулами (6), (7). Приведемо систему обмежень до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19; \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13; \\ 3x_2 + x_5 = 15; \\ 3x_1 + x_6 = 18, \end{cases} \qquad x_i \ge 0, i = 1,...,6$$

Виразимо базисні змінні x_3, x_4, x_5, x_6 через вільні x_1, x_2 (це найпростіший вибір)

$$\begin{cases} x_3 = -2x_1 - 3x_2 + 19; \\ x_4 = -2x_1 - x_2 + 13; \\ x_5 = \quad\quad -3x_2 + 15; \\ x_6 = -3x_1 \quad\quad + 18. \end{cases}$$

Заносимо коефіцієнти у симплекс-таблицю

	$-x_1$	$-x_2$	1
x_3	2	3	19
x_4	2	1	13
x_5	0	3	15
x_6	3	0	18
F	–7	–5	0

Відповідний базисний розв'язок $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 19$, $x_4 = 13$, $x_5 = 15$, $x_6 = 18$ є допустимим, $F = 0$. Критерій оптимальності (див. зауваження) не виконаний (7 і 5 – від'ємні). Обираємо розв'язуючий стовпчик x_1 ($|-7| > |-5|$; 7>5), знаходимо $\min\left\{\frac{19}{2}; \frac{13}{2}; \frac{15}{0}; \frac{18}{3}\right\} = \min\{9,5; 6,5; \infty; 6\} = 6$, тобто розв'язуючий рядок x_6. Виконавши алгоритм Жордана-Гауса, отримуємо таблицю

	$-x_6$	$-x_2$	1
x_3	–2/3	3	7
x_4	–2/3	1	1
x_5	0	3	15
x_1	1/3	0	6
F	7/3	–5	42

Відповідний базисний розв'язок $x_6 = x_2 = 0$, $x_3 = 7$, $x_4 = 1$, $x_5 = 15$, $x_1 = 6$ є допустимим, $F = 42$. Критерій оптимальності не виконаний (–5 – від'ємне). Обираємо розв'язуючий стовпчик x_2

(інших додатних елементів у рядку F немає), знаходимо $\min\left\{\frac{7}{3};\frac{1}{1};\frac{15}{3};\frac{6}{0}\right\}=\min\left\{2\frac{1}{3};1;5;\infty\right\}=1$, тобто розв'язуючий рядок x_4. Виконавши ще раз алгоритм Жордана-Гауса, отримуємо таблицю

	$-x_6$	$-x_4$	1
x_3	4/3	–3	4
x_2	–2/3	1	1
x_5	2	–3	12
x_1	1/3	0	6
F	–1	5	47

Відповідний базисний розв'язок $x_6=x_4=0$, $x_3=4$, $x_2=1$, $x_5=12$, $x_1=6$ є допустимим, $F=47$. Критерій оптимальності не виконаний (–1 – від'ємне). Обираємо розв'язуючий стовпчик x_6 (інших додатних елементів у рядку F немає), знаходимо $\min\left\{\frac{4}{4/3};\frac{1}{-2/3};\frac{12}{2};\frac{6}{1/3}\right\}=\min\{3;-;6;18\}=3$, тобто розв'язуючий рядок x_3. Виконавши ще раз алгоритм Жордана-Гауса, отримуємо таблицю

	$-x_3$	$-x_4$	1
x_6	3/4	–9/4	**3**
x_2	1/2	–1/2	**3**
x_5	–3/2	3/2	**6**
x_1	–1/4	3/4	**5**
F	3/4	11/4	**50**

Відповідний базисний розв'язок $x_3=x_4=0$, $x_6=3$, $x_2=3$, $x_5=6$, $x_1=5$ є допустимим, $F=50$. Критерій оптимальності виконаний, тобто розв'язок задачі $\max F=F(5;3)=50$.

Відмітимо, що під час переходу від одного базисного розв'язку до іншого значення цільової функції тільки збільшувалося, тобто ми поступово наближалися до максимуму.

Порівняємо процес розв'язання задачі симплекс-методом з геометричним розв'язанням. Вихідний базисний розв'язок $x_1 = x_2 = 0$ відповідає точці O області допустимих розв'язків (див. рис. 4). Наступний розв'язок $x_1 = 6$, $x_2 = 0$ – це вершина A шестикутника. Далі ми отримуємо вершину B(6;1) і, нарешті, приходимо до оптимального розв'язку – точка C(5;3). Увесь час ми переходимо від однієї вершини многокутника до сусідньої, розташованої у напрямку найбільшого зростання цільової функції.

Під час розв'язання ЗЛП симплекс-методом можуть виникнути такі **ускладнення**:

1) процес переходу від однієї таблиці до іншої переривається, хоча оптимальний розв'язок не досягнутий. Перешкода виникає при виборі розв'язуючого рядка – **не існує невід'ємних елементів у вибраному розв'язуючому стовпчику** і, як наслідок, неможливо скласти невід'ємні відношення елементів останнього стовпчика до відповідних елементів розв'язуючого стовпчика. Це означає, що така ЗЛП **не має оптимального розв'язку** (область допустимих розв'язків і цільова функція на ній **необмежені**).

2) оптимальний розв'язок не досягається, хоча при переході немає перешкод (**зациклення**). В цьому випадку потрібно ще раз розглянути таблицю, з якої почався цикл і обрати інший розв'язуючий стовпчик.

7. Отримання допустимого базисного розв'язку

Якщо базисний розв'язок **не є допустимим** (ознакою цього є **наявність від'ємних чисел у стовпчику вільних коефіцієнтів**, що відповідають значенням базисних змінних), за допомогою симплексного методу можна поступово наближатися до області допустимих розв'язків і отримати в кінці кінців допустимий розв'язок. Для цього треба дотримуватися такого **алгоритму:**

1 крок. Обираємо розв'язуючий елемент:

а) **в рядку з від'ємним вільним коефіцієнтом обираємо від'ємний коефіцієнт при вільних змінних** – він визначає розв'язуючий стовпчик;

б) складаємо **невід'ємні відношення** елементів **останнього стовпчика до** відповідних елементів **розв'язуючого стовпчика** та обираємо серед них **найменше** – це визначає розв'язуючий рядок.

2 крок. Виконуємо алгоритм Жордана-Гауса з обраним розв'язуючим елементом.

Повторюємо кроки алгоритму доти, доки в стовпчику вільних коефіцієнтів є від'ємні числа

Приклад 7.

$$F = x_1 - 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \geq 2 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо симплекс-таблицю ЗЛП.

	$-x_1$	$-x_2$	1
x_3	1	–1	–1
x_4	0	–1	–2
F	–1	2	0

Ми маємо два від'ємних вільних коефіцієнта, тобто базисний розв'язок не є допустимим. Розглянемо, наприклад, перший рядок і оберемо в ньому від'ємний коефіцієнт при x_2, тобто стовпчик x_2 буде розв'язуючим. Знайдемо $\min\left\{\frac{-1}{-1}; \frac{-2}{-1}\right\} = \min\{1; 2\} = 1$, тобто рядок x_3 буде розв'язуючим. Виконавши алгоритм Жордана-Гауса, отримуємо таблицю

	$-x_1$	$-x_3$	1
x_2	–1	–1	1
x_4	–1	–1	–1
F	1	2	–2

В стовпчику вільних коефіцієнтів ще залишився від'ємний елемент –1. Розглянемо цей рядок і оберемо в ньому від'ємний коефіцієнт, наприклад, при x_1. тобто стовпчик x_1 буде розв'язуючим.

Знайдемо

$$\min\left\{\frac{1}{-1};\frac{-1}{-1}\right\}=\min\{-;1\}=1,$$

тобто рядок x_4 буде розв'язуючим. Виконавши алгоритм Жордана-Гауса, отримуємо таблицю

	$-x_4$	$-x_3$	1
x_2	–1	0	**2**
x_1	–1	1	**1**
F	1	1	**–3**

Тепер у стовпчику вільних коефіцієнтів усі елементи додатні, тобто ми отримали допустимий базисний розв'язок $x_4=x_3=0$, $x_2=2$, $x_1=1$. Далі переходимо до звичайного алгоритму симплекс-методу. Критерій оптимальності вже виконаний, тобто ми маємо розв'язок задачі $\max F=F(1;2)=-3$.

Під час відшукання допустимого базисного розв'язку може виникнути **перешкода** до вибору розв'язуючого стовпчика, якщо **у рядку з від'ємним вільним коефіцієнтом** більше **немає від'ємних елементів**. В цьому випадку **система обмежень несумісна** і ЗЛП не має розв'язку.

8. Двоїста задача

Кожній ЗЛП відповідає інша ЗЛП, яку називають *двоїстою*. При цьому задача, що розглядається, називається *прямою* задачею. Можна сформулювати **загальні правила**, якими слід користуватися при **побудові двоїстих задач**.

1. В прямій задачі обмеження-нерівності записують "$\le$", в двоїстій – "$\ge$".
2. Цільова функція прямої задачі задається на максимум, а двоїстої – на мінімум.
3. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає невідома $y_i,\ i=1,...,m$ в двоїстій задачі.
4. Кожній невідомій $x_k, k=1,...,n$ прямої задачі відповідає обмеження двоїстої.
5. Кожному i-му обмеженню-нерівності прямої задачі відповідає умова невід'ємності змінної двоїстої задачі $\left(y_i \ge 0\right)$, а рівності – змінна y_i без обмежень на знак.
6. Кожній невід'ємній змінній $\left(x_k \ge 0\right)$ відповідає k-те обмеження-нерівність, а змінній вільного знаку – рівність.
7. Матриці систем обмежень прямої та двоїстої задач взаємно транспоновані

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

8. Вільні члени обмежень прямої задачі є коефіцієнтами при відповідних змінних двоїстої задачі і навпаки.

<u>Зауваження</u>. Співвідношення двоїстості взаємне, тобто задача двоїста до двоїстої співпадає з прямою.

Пряма задача	Двоїста задача
1. $F=\sum_{k=1}^{n} c_k x_k \to \max$	1. $Z=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$
2. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \le b_i,\ i=1,\dots,l$	2. $y_i \ge 0,\ i=1,\dots,l$
3. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i,\ i=l+1,\dots,m$	3. y_i – *вільного знаку*, $i=l+1,\dots,m$
4. $x_k \ge 0,\ k=1,\dots,s$	4. $\sum_{i=1}^{m} a_{ik} y_i \ge c_k,\ k=1,\dots,s$
5. x_k – *вільного знаку*, $k=s+1,\dots,n$	5. $\sum_{i=1}^{m} a_{ik} y_i = c_k,\ k=s+1,\dots,n$

Приклад 8.

Записати задачу, двоїсту до заданої, та двоїсту до двоїстої.

$$F=3x_1+x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1-x_2 \le 2 \\ 3x_1+4x_2=7 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Розв’язання.

1. Цільова функція прямої задачі задається на максимум, тому двоїстої – на мінімум.
2. У прямій задачі одне обмеження-нерівність і одне – рівність, та дві невід’ємні невідомі x_1, x_2, тому в двоїстій задачі – одна невід’ємна невідома y_1, а друга y_2 – вільного знаку, та два обмеження-нерівності.
3. Матриці систем обмежень прямої та двоїстої задач мають вигляд

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A^T=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Вільні члени обмежень прямої задачі $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ є коефіцієнтами при відповідних змінних в цільовій функції двоїстої задачі, коефіцієнти цільової функції прямої задачі $\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$ є вільними членами системи обмежень двоїстої задачі.

Отримали наступну двоїсту задачу

$$Z = 2y_1 + 7y_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 \ge 3 \\ -y_1 + 4y_2 \ge 1 \\ y_1 \ge 0 \end{cases}$$

Щоб побудувати двоїсту до цієї задачі, запишемо її у вигляді

$$-Z = -2y_1 - 7y_2 \to \max$$
$$\begin{cases} -2y_1 - 3y_2 \le -3 \\ y_1 - 4y_2 \le -1 \\ y_1 \ge 0 \end{cases}$$

та ще раз використаємо правила переходу до двоїстої задачі, отримаємо задачу

$$G = -3z_1 - z_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -2z_1 + z_2 \ge -2 \\ -3z_1 - 4z_2 = -7 \\ z_1 \ge 0,\ z_2 \ge 0 \end{cases}$$

Легко побачити, що ця, двоїста до двоїстої, задача співпадає з прямою, що ілюструє справедливість зауваження.

<u>Приклад 9.</u>

Знайти розв'язок задачі, двоїстої до заданої (див. (6), (7)) симплекс-методом.

$$F = 7x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19 \\ 2x_1 + x_2 \le 13 \\ 3x_2 \le 15 \\ 3x_1 \le 18 \end{cases} \quad x_{1,2} \ge 0$$

<u>Розв'язання</u>. Двоїста задача має вигляд

$$Z = 19y_1 + 13y_2 + 15y_3 + 18y_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 3y_4 \ge 7; \\ 3y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 5; \end{cases} \quad y_i \ge 0, \quad i = 1,\dots,4$$

або

$$Z = 19y_1 + 13y_2 + 15y_3 + 18y_4 \to \min$$

$$\begin{cases} -2y_1 - 2y_2 - 3y_4 \le -7 \\ -3y_1 - y_2 - 3y_3 \le -5 \end{cases} \quad y_i \ge 0, \quad i = 1,\dots,4$$

Складемо симплекс-таблицю двоїстої задачі

	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	$-y_4$	1
y_5	–2	–2	0	–3	–7
y_6	–3	–1	–3	0	–5
Z	–19	–13	–15	–18	0

Розв'язок недопустимий, за допомогою симплекс-методу переходимо до іншого базисного розв'язку

	y_6	$-y_2$	$-y_3$	y_4	1
y_5	–2/3	–4/3	2	–3	–11/3
y_1	–1/3	1/3	1	0	5/3
Z	19/3	–20/3	4	–18	95/3

Розв’язок недопустимий, за допомогою симплекс-методу переходимо до іншого базисного розв’язку

	$-y_6$	$-y_5$	$-y_3$	y_4	1
y_2	1/2	–3/4	–3/2	9/4	**11/4**
y_1	–1/2	1/4	3/2	–3/4	**3/4**
Z	–3	–5	–6	–3	**50**

Розв’язок допустимий та оптимальний.

$$\min Z = Z\left(\frac{3}{4};\frac{11}{4};0;0;0;0\right) = 50.$$

Можна порівняти цю таблицю з останньою симплекс-таблицею прямої задачі

	$-x_3$	$-x_4$	1
x_6	3/4	–9/4	**3**
x_2	1/2	–1/2	**3**
x_5	–3/2	3/2	**6**
x_1	–1/4	3/4	**5**
F	3/4	11/4	**50**

$\max F = F(5;3;0;0;6;3) = 50.$

Такий збіг розв’язків не є випадковим, він ілюструє наступні **теореми двоїстості**.

Перша теорема двоїстості.

Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний розв’язок, то й інша задача теж розв’язувана, при цьому екстремальні значення цільових функцій співпадають

$$\max F = \min Z.$$

Якщо у однієї з цих задач цільова функція необмежена, то двоїста до неї задача не має допустимих розв’язків і, навпаки, якщо одна з цих задач не має допустимих розв'язків, то двоїста до неї задача має необмежену цільову функцію.

Зауваження.

Між змінними прямої та двоїстої задач можна встановити таку відповідність: основним змінним прямої задачі відповідають додаткові змінні двоїстої задачі і навпаки. Так, в нашому прикладі змінним x_1, x_2, x_3, x_4 відповідають змінні y_3, y_4, y_5, y_6, а змінним x_5, x_6 – змінні y_1, y_2. Враховуючи цю відповідність, можна по симплекс-таблиці з розв'язком однієї з пари двоїстих задач визначити розв'язок другої задачі.

Друга теорема двоїстості.

Для того, щоб два допустимі розв'язки $\overline{X}$, $\overline{Y}$ пари двоїстих задач були оптимальними, необхідно і досить, щоб ці розв'язки задовольняли умови

$$1.\ \overline{x}_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\overline{y}_i - c_j\right) = 0,\ j = 1,\dots,n;$$

$$2.\ \overline{y}_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_j - b_i\right) = 0,\ i = 1,\dots,m.$$

Третя теорема двоїстості.

Значення змінних y_i в оптимальному розв'язку двоїстої задачі є оцінками впливу вільних членів обмежень прямої задачі на екстремальне значення її цільової функції $F_{\max}$, тобто

$$y_i = \frac{\partial F_{\max}}{\partial b_i}.$$

9. Задача цілочисельного програмування.

За змістом значної частини економічних задач, їх розв'язок повинен виражатися у цілих числах. Наприклад, це задачі, де змінні означають кількість станків обладнання, кількість кораблів при розподілу за напрямками, кількість турбін у енергосистемі і т.д. *Задачею цілочисельного програмування* називають ЗЛП, у якій на змінні накладається додаткова умова цілочисельності.

Якщо величина змінної в оптимальному плані є досить великою, порівняно з одиницею, можливо округлити її значення до цілого. Однак, у багатьох випадках просте округлення приводить до плану, який не є оптимальним. Класична транспортна задача забезпечує рішення в цілих числах, однак в загальному випадку умова цілочисельності ускладнює розв’язок.

Алгоритм методу Гоморі.

1. Розв’язуємо симплекс-методом ЗЛП без умови цілочисельності.
2. Якщо оптимальний розв’язок є цілочисельним, то знайдений розв’язок збігається з оптимальним розв’язком задачі цілочисельного програмування.
3. Якщо серед компонент оптимального плану є хоча б одна нецілочисельна, то до обмежень задачі додається нове обмеження з властивостями:

   1) лінійне;

   2) відсікає знайдений оптимальний нецілочисельний план;

   3) не відсікає жодного цілочисельного плану.

   Додаткове обмеження з вказаними особливостями називається *правильним відсіканням*. Розв’язуємо двоїстим симплекс-методом ЗЛП з додатковим обмеженням.

Процес побудови додаткових обмежень продовжується доти, доки не буде отримано цілочисельний план або виявиться відсутність цілочисельного розв’язку задачі.

Побудова правильного відсікання.

Введемо такі позначення:

$[x]$ – *ціла частина* числа x, найбільше ціле число, яке не перевершує x. Наприклад, $\left[\frac{11}{6}\right]=\left[1\frac{5}{6}\right]=1$, $\left[\frac{3}{8}\right]=0$, $\left[-2\frac{1}{4}\right]=-3$.

$\{x\}$ – *дробова частина* числа x, $\{x\}=x-[x]$, $0\le\{x\}<1$.

Наприклад, $\left\{\frac{11}{6}\right\}=\frac{11}{6}-1=\frac{5}{6}$, $\left\{\frac{3}{8}\right\}=\frac{3}{8}$, $\left\{-2\frac{1}{4}\right\}=-2\frac{1}{4}-(-3)=\frac{3}{4}$.

Відсікання Гоморі обирають наступним чином: серед нецілочисельних розв'язків системи обирають компоненту з максимальною дробовою частиною та з відповідного рівняння формують правильне відсікання

$$\{b_k\}-\{a_{k,\,m+1}\}\,x_{m+1}-\{a_{k,\,m+2}\}\,x_{m+2}-\ldots-\{a_{k\,n}\}\,x_n\le 0\,.$$

Вводимо нову змінну x_{n+1}. Отримали розширену симплекс-таблицю, в якій в стовпці вільних членів є від'ємне число. Розв'язуємо цю задачу симплекс-методом. Якщо розв'язок не є цілочисельним, повторюємо алгоритм знову.

<u>Приклад 10.</u>

$$F=2x_1-8x_2\to\max$$

$$\begin{cases}3x_1+5x_2\le 17\\ x_2\le 4\\ x_1,x_2\ge 0,\ x_1,x_2-\text{цілі}\end{cases}$$

	$-x_1$	$-x_2$	1
x_3	3	5	17
x_4	0	1	4
F	–2	8	0

	$-x_3$	$-x_2$	1
x_1	1/3	5/3	**17/3**
x_4	0	1	**4**
F	2/3	34/3	**34/3**

Розв'язок знайдений, але він не є цілочисельним. Максимальна дробова частина $\left\{\frac{17}{3}\right\}=\frac{17}{3}-\left[\frac{17}{3}\right]=\frac{17}{3}-5=\frac{2}{3}$, будуємо додаткове відсікання за першою строкою.

$$\left\{\frac{17}{3}\right\}-\left\{\frac{1}{3}\right\}x_3-\left\{\frac{5}{3}\right\}x_2\le 0,$$

обчислюємо дробові частини

$$-\frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_2 \le -\frac{2}{3},$$
$$-x_3 - 2x_2 \le -2,$$
$$x_5 = x_3 + 2x_2 - 2.$$

Заносимо додаткове обмеження в таблицю і розв'язуємо двоїстим симплекс-методом.

	$-x_3$	$-x_2$	1
x_1	1/3	5/3	17/3
x_4	0	1	4
x_5	–1	–2	–2
F	2/3	34/3	34/3

	$-x_5$	$-x_2$	1
x_1	1/3	1	**5**
x_4	0	1	**4**
x_3	–1	2	**2**
F	2	10	**10**

Розв'язок є оптимальним і цілочисельним.
Відповідь: $\max F = F(5;0) = 10$.

10. Транспортна задача.

Серед задач лінійного програмування, до яких зводиться аналіз практичних моделей управління і планування, можна виділити ряд класів задач, системи обмежень яких мають певні структурні особливості.

Серед спеціальних задач, на практиці частіше за інші зустрічається транспортна задача, різні її модифікації та узагальнення. Класична *транспортна задача* – задача про найдешевший план перевезення однорідного продукту чи взаємозамінних продуктів з пунктів виробництва в пункти споживання. Розглянемо транспортну задачу за *критерієм вартості*.

Нехай на m станціях $A_1, A_2, ..., A_m$ зосереджено $a_1, a_2, ..., a_m$ одиниць деякого однорідного вантажу. Цей вантаж треба перевезти в n пунктів призначення $B_1, B_2, ..., B_n$, причому в кожен з них потрібно завезти відповідно $b_1, b_2, ..., b_n$ одиниць цього вантажу. Вартість перевезення одиниці вантажу з пункту A_i у пункт B_j (*тариф*) дорівнює c_{ij} і вважається заданою. Потрібно скласти такий план перевезення, щоб його загальна вартість була мінімальною. Якщо загальний запас вантажу на всіх станціях відправлення дорівнює загальній сумі потреб усіх пунктів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,, \tag{13}$$

то таку задачу називають *транспортною задачею з правильним балансом* (або *закритою* транспортною задачею). Якщо умова (13) порушується, її називають *транспортною задачею з неправильним балансом* (або *відкритою* транспортною задачею). Відкрита транспортна задача потребує введення умовного постачальника або споживача. Якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводять умовного споживача B_{n+1} з потребою у вантажі $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ та нульовою вартістю перевезення $c_{i\,n+1} = 0$, $i = 1,...,m$ а якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводять умовного постачальника A_{m+1} з потребою у вантажі $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ та $c_{m+1\,j} = 0$, $j = 1,...,n$.

Позначимо x_{ij} – кількість товару, перевезеного з i-го пункту виробництва (A_i) в j-й пункт споживання (B_j). Припустимо, що виконується умова балансу (13). Запишемо задачу у вигляді таблиці.

Таблиця 3.

		B_1	B_2	…	B_n
		b_1	b_2	…	b_n
A_1	a_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	…	x_{1n} c_{1n}
A_2	a_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	…	x_{2n} c_{2n}
…	…	…	…	…	…
A_m	a_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	…	x_{mn} c_{mn}

Із таблиці 3 видно, що кількості товару, перевезеного з першого, другого,…, m-го пунктів виробництва, відповідно, задовольняють умови

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+...+x_{1n}=a_1 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+...+x_{2n}=a_2 \\ .... \\ x_{m1}+x_{m2}+x_{m3}+...+x_{mn}=a_m \end{cases}$$

Звернемо увагу на те, що змінні та права частина рівнянь взяті з одного рядка матриці перевезень. Через це будемо називати ці рівняння *горизонтальними рівняннями*.

Кількості товару, що ввозиться в перший, другий,…, n-й пункт споживання, відповідно, задовольняють умови

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+...+x_{m1}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}+...+x_{m2}=b_2 \\ .... \\ x_{1n}+x_{2n}+...+x_{mn}=b_n \end{cases}$$

Змінні та права частина рівнянь взяті з одного стовпця матриці перевезень. Через це ми будемо називати їх *вертикальними рівняннями*.

Загальна вартість усіх перевезень виражається формулою

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_2 + c_{13}x_{13} + \ldots + c_{1n}x_n + c_{21}x_1 + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + \ldots$$

$$+c_{2n}x_n + \ldots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + c_{m3}x_{m3} + \ldots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Отже, математична модель цієї задачі має такий вигляд: треба знайти мінімальне значення функції

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

при умовах

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = 1,\ldots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = 1,\ldots,n \\ x_{ij} \ge 0,\ i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

Оскільки транспортна задача – це ЗЛП, її можна розв'язати симплекс-методом. Однак через просту будову системи обмежень симплекс-метод тут набагато спрощується. Розглянемо на прикладі такі методи знаходження початкових опорних планів: *північно-західного кута* (діагональний метод) і *метод найменшої вартості*.

Приклад 11.

a_i \ b_j	45	60	80	65
65	2	3	2	4
80	2	4	6	5
105	1	5	4	5

Метод північно-західного кута. Цей метод полягає в тому, що заповнення таблиці починається з верхньої лівої клітинки.

У першого постачальника є 65 одиниць вантажу, а першому споживачу треба тільки 45 одиниць. Тому у першу клітинку запишемо поставку $45=\min\{65,45\}$. Більше першому споживачу вантажу не потрібно, тому інші квадратики у першому стовпчику закреслюємо. Поставки у ці клітинки дорівнюють нулю.

a_i \ b_j	45	60	80	65
65	$45^{\;2}$	^{3}	^{2}	^{4}
80	^{2}	^{4}	^{6}	^{5}
105	^{1}	^{5}	^{4}	^{5}

Заповнені клітинки називатимемо *базисними*, а закреслені – *вільними*. Базисні клітинки відповідають базисним невідомим, а вільні – вільним.

Знову вибираємо верхню ліву клітинку у частині таблиці, що залишилась. У першого постачальника є ще 65–45=20 одиниць вантажу, а другому споживачу треба 60 одиниць вантажу. Тому у другу клітинку запишемо поставку $20=\min\{60,65-45\}$. Перший постачальних вичерпав усі свої запаси, тому закреслюємо всі інші клітинки у першому рядку.

a_i \ b_j	45	60	80	65
65	$45^{\;2}$	$20^{\;3}$	^{2}	^{4}
80	^{2}	^{4}	^{6}	^{5}
105	^{1}	^{5}	^{4}	^{5}

Заповнюємо наступну вільну верхню ліву клітинку. Запаси вантажу дорівнюють 80, а потреби лише 60–20=40, тому поставка дорівнює 40. Продовжуємо такий процес заповнення до останньої клітинки.

a_i \ b_j	45	60	80	65
65	$45^{\;2}$	$20^{\;3}$	^{2}	^{4}
80	^{2}	$40^{\;4}$	$40^{\;6}$	^{5}
105	^{1}	^{5}	$40^{\;4}$	$65^{\;5}$

Зауваження. Кількість базисних клітинок завжди визначають як $r = m + n - 1$. Якщо заповнених клітинок менше, то отримаємо *вироджений опорний розв'язок*. В цьому разі потрібно необхідну кількість клітинок заповнити нульовими поставками.

Отже, опорний план, знайдений за методом північно-західного кута має вигляд

$$X_{опорн} = \begin{pmatrix} 45 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 65 \end{pmatrix}$$

Обчислимо вартість перевезення

$$F = 45 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 4 + 40 \cdot 6 + 40 \cdot 4 + 65 \cdot 5 =$$
$$= 90 + 60 + 160 + 240 + 160 + 325 = 1035.$$

Метод мінімальної вартості відрізняється від методу північно-західного кута тільки послідовністю заповнення клітинок. Починають заповнювати ті клітинки таблиці, де вартість перевезення c_{ij} на даному етапі мінімальні.

Найменша вартість у нашому прикладі дорівнює одиниці. Тому знаходимо перевезення від третього постачальника до першого споживача, воно дорівнює $\min\{105, 45\} = 45$. Першому споживачу більше вантажу не потрібно, тому закреслюємо вільні клітинки.

a_i \ b_j	45	60	80	65
65	^{2}	^{3}	^{2}	^{4}
80	^{2}	^{4}	^{6}	^{5}
105	45 ^{1}	^{5}	^{4}	^{5}

Серед невикористаних клітинок обираємо клітинку з найменшею вартістю. $c_{13} = 2$. Поставка $x_{13} = \min\{65, 80\} = 65$, закреслюємо ще дві вільні клітинки.

a_i \ b_j	45	60	80	65
65	^{2}	^{3}	65 ^{2}	^{4}
80	^{2}	^{4}	^{6}	^{5}
105	45 ^{1}	^{5}	^{4}	^{5}

Серед клітинок, що залишились, обираємо клітинку з найменшою вартістю. Таких клітинок дві: $c_{22} = c_{33} = 4$. Але $x_{22} = \min\{80, 60\} = 60$, а $x_{33} = \min\{105, 80 - 65\} = 15$. Оскільки $x_{22} > x_{33}$, то заповнюємо спочатку клітинку з більшою поставкою.

a_i \ b_j	45	60	80	65
65	^{2}	^{3}	65 ^{2}	^{4}
80	^{2}	60 ^{4}	^{6}	^{5}
105	45 ^{1}	^{5}	^{4}	^{5}

Наступна клітинка з поставкою $x_{33} = 15$.

a_i \ b_j	45	60	80	65
65	^{2}	^{3}	65 ^{2}	^{4}
80	^{2}	60 ^{4}	^{6}	^{5}
105	45	^{5}	15 ^{4}	^{5}

Серед двох останніх клітинок з однаковими вартостями $c_{24} = c_{34} = 5$ та поставками $x_{24} = 80 - 60 = 20$ і $x_{34} = 105 - 60 = 45$ треба обрати $x_{34} = 45$, а потім $x_{24} = 80 - 60 = 20$.

a_i \ b_j	45	60	80	65
65	^{2}	^{3}	65 ^{2}	^{4}
80	^{2}	60 ^{4}	^{6}	20 ^{5}
105	45 ^{1}	^{5}	15 ^{4}	45 ^{5}

Отже, опорний план, знайдений за методом мінімальної вартості має вигляд

$$X_{опорн} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 65 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 20 \\ 45 & 0 & 15 & 45 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо вартість перевезення

$$F = 65\cdot 2 + 60\cdot 4 + 20\cdot 5 + 45\cdot 1 + 15\cdot 4 + 45\cdot 5 =$$
$$= 130 + 240 + 100 + 45 + 60 + 225 = 800.$$

Отже, найближчий до оптимального плану початковий опорний план, який знайдено методом найменшої вартості. Тому його рекомендується застосовувати на практиці. Метод північно-західного кута, як правило, застосовується при розв'язуванні задач на ЕОМ.

11. Метод потенціалів.

Одні із знайдених початкових планів кращі (ближчі до оптимального), інші – менш ефективні. Найзручнішим для перевірки є критерій оптимальності, названий *методом потенціалів*, який ґрунтується на такій теоремі:

Щоб опорний план був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:
– для базисних клітинок $u_i + v_j = c_{ij}$;
– для вільних клітинок $u_i + v_j \le c_{ij}$,
де u_i, v_j – *потенціали* A_i і B_j відповідно ($i = 1,...,m,\ j = 1,...,n$).

Розглянемо застосування цього методу на прикладі 11. Потенціали для постачальників – u_1, u_2, u_3, для споживачів – $v_{1,}\ v_2, v_3, v_4$.

a_i	b_j	45	60	80	65
		v_1	v_2	v_3	v_4
65	u_1	^{2}	^{3}	65 ^{2}	^{4}
80	u_2	^{2}	60 ^{4}	^{6}	20 ^{5}
105	u_3	45 ^{1}	^{5}	15 ^{4}	45 ^{5}

Обчислимо кількість базисних невідомих $r = 3 + 4 - 1 = 6$, маємо 6 заповнених клітинок, тому опорний план не вироджений. Запишемо рівняння для заповнених (базисних) клітинок

$$\begin{array}{lll} u_1 + v_3 = 2 & u_2 + v_2 = 4 & u_2 + v_4 = 5 \\ u_3 + v_1 = 1 & u_3 + v_3 = 4 & u_3 + v_4 = 5 \end{array}$$

Нехай $u_1 = 0$, тоді з системи рівнянь можемо знайти інші потенціали $u_2 = 2$, $u_3 = 2$, $v_1 = -1$, $v_2 = 2$, $v_3 = 2$, $v_4 = 3$.

Перевіримо виконання умови оптимальності для вільних клітин

$u_1 + v_1 \le 2$	0–1<2	виконано
$u_1 + v_2 \le 3$	0+2<3	виконано
$u_1 + v_4 \le 4$	0+3<4	виконано
$u_2 + v_1 \le 2$	2–1<2	виконано
$u_2 + v_3 \le 6$	2+2<6	виконано
$u_3 + v_2 \le 5$	2+2<5	виконано

Всі умови виконуються, план оптимальний.

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 65 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 20 \\ 45 & 0 & 15 & 45 \end{pmatrix}$$

Обчислимо вартість перевезення

$$F = 65 \cdot 2 + 60 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 45 \cdot 1 + 15 \cdot 4 + 45 \cdot 5 =$$
$$= 130 + 240 + 100 + 45 + 60 + 225 = 800.$$

Приклад 12.

a_i b_j	230	420	650	400
300	^{5}	^{1}	^{2}	^{3}
200	^{6}	^{3}	^{7}	^{1}
500	^{4}	^{5}	^{3}	^{2}
700	^{2}	^{4}	^{6}	^{8}

Розв’язання.

Заповнимо таблицю методом мінімальної вартості (див. приклад 11).

a_i b_j	230	420	650	400
300	^{5}	300 ^{1}	^{2}	^{3}
200	^{6}	^{3}	^{7}	200 ^{1}
500	^{4}	^{5}	300 ^{3}	200 ^{2}
700	230 ^{2}	120 ^{4}	350 ^{6}	^{8}

Перевіримо цей план на оптимальність за допомогою методу потенціалів. Запишемо рівняння для заповнених клітинок

$$u_1 + v_3 = 2, \qquad u_2 + v_4 = 1, \qquad u_3 + v_3 = 3,$$
$$u_3 + v_4 = 2, \qquad u_4 + v_2 = 4, \qquad u_4 + v_3 = 6.$$

Нехай $u_1 = 0$, обчислимо інші потенціали u_2=–1, u_3=0, u_4=3, v_1=–1, v_2=1, v_3=3, v_4=2.

Результати занесемо в таблицю:

a_i	b_j	230	420	650	400
		v_1= –1	v_2=1	v_3=3	v_4=2
300	u_1=0	^{5}	300 ^{1}	^{2}	^{3}
200	u_2= –1	^{6}	^{3}	^{7}	200 ^{1}
500	u_3=0	^{4}	^{5}	300 ^{3}	200 ^{2}
700	u_4=3	230 ^{2}	120 ^{4}	350 ^{6}	^{8}

Перевіримо виконання нерівностей:

$u_1+v_1 \le c_{11}$		$u_1+v_1 \le 5$	$0-1<5$	*виконано*
$\underline{u_1+v_3 \le c_{13}}$		$\underline{u_1+v_3 \le 2}$	$\underline{0+3>2}$	<u>*не виконано*</u>
$u_1+v_4 \le c_{14}$		$u_1+v_4 \le 3$	$0+2<3$	*виконано*
$u_2+v_1 \le c_{21}$		$u_2+v_1 \le 6$	$-1-1<6$	*виконано*
$u_2+v_2 \le c_{22}$	або	$u_2+v_2 \le 3$	$-1+1<3$	*виконано*
$u_2+v_3 \le c_{23}$		$u_2+v_3 \le 7$	$-1+3<7$	*виконано*
$u_3+v_1 \le c_{31}$		$u_3+v_1 \le 4$	$0-1<4$	*виконано*
$u_3+v_2 \le c_{32}$		$u_3+v_2 \le 5$	$0+1<5$	*виконано*
$u_4+v_4 \le c_{44}$		$u_4+v_4 \le 8$	$3+2<8$	*виконано*

Умова оптимальності не виконується, потрібно поліпшити опорний план.

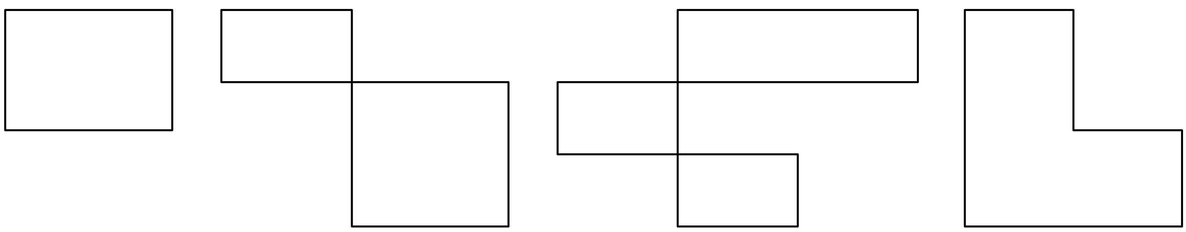
Поліпшити план можна за допомогою **циклу перерахунку**.

12. Цикл перерахунку

Цикл транспортної таблиці – це замкнена ламана, що задовольняє умовам:

1. ламана починається і закінчується у вільній клітинці, в якій не виконана умова оптимальності,[1]
2. ланки ламаної повертають[2] тільки під прямим кутом,
3. поворот може бути тільки у базисній клітинці

<u>Приклади</u> циклів



Перерахунок по циклу:

1. вільній клітині циклу присвоюють знак “+”;

[1] Якщо таких клітинок декілька, обирають з найбільшою різницею $|u_i+v_j-c_{ij}|$.

[2] Напрямок ланок неважливий.

2. при повороті знаки чергуються;
3. серед клітин зі знаком “–” обирають найменше значення поставки θ;
4. з поставок в клітинах зі знаком “–” віднімають θ, а до поставок в клітинах зі знаком “+” додають θ.

Отриманий план перевіряють на оптимальність за допомогою методу потенціалів. Якщо умова оптимальності не виконується, треба зробити перерахунок по циклу знов.

Намалюємо цикл перерахунку для приклада 12.

a_i \ b_j	230	420	650	400
300	^{5}	300 – ^{1}	+ ^{2}	^{3}
200	^{6}	^{3}	^{7}	200 ^{1}
500	^{4}	^{5}	300 ^{3}	200 ^{2}
700	230 ^{2}	120 + ^{4}	350 – ^{6}	^{8}

З клітинок зі знаком мінус віднімаємо найменше число $\theta = \min\{300; 350\} = 300$, а в клітинки зі знаком плюс його додаємо:

a_i \ b_j	230	420	650	400
300	^{5}	^{1}	300 ^{2}	^{3}
200	^{6}	^{3}	^{7}	200 ^{1}
500	^{4}	^{5}	300 ^{3}	200 ^{2}
700	230 ^{2}	420 ^{4}	50 ^{6}	^{8}

Отриманий план перевіряємо на оптимальність за методом потенціалів.

a_i	b_j	230	420	650	400
		v_1	v_2	v_3	v_4
300	u_1	^{5}	^{1}	300 ^{2}	^{3}
200	u_2	^{6}	^{3}	^{7}	200 ^{1}
500	u_3	^{4}	^{5}	300 ^{3}	200 ^{2}
700	u_4	230 ^{2}	420 ^{4}	50 ^{6}	^{8}

$u_1+v_3=2 \qquad u_2+v_4=1 \qquad u_3+v_3=3 \qquad u_3+v_4=2$
$u_4+v_1=2 \qquad u_4+v_2=4 \qquad u_4+v_3=6$

Звідки для $u_1=0$ знайдемо $u_2=0$, $u_3=1$, $u_4=4$, $v_1=-2$, $v_2=0$, $v_3=2$, $v_4=1$.

$u_1+v_1\le 5 \qquad -2<5$
$u_1+v_2\le 1 \qquad 0<1$
$u_1+v_4\le 3 \qquad 2<3$
$u_2+v_1\le 6 \qquad -2<6$
$u_2+v_2\le 3 \qquad 0<3$
$u_2+v_3\le 7 \qquad 2<7$
$u_3+v_1\le 4 \qquad -1<4$
$u_3+v_2\le 5 \qquad 1<5$
$u_4+v_4\le 8 \qquad 5<8$

Умови оптимальності виконані, план оптимальний.

$$X_{опт}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 300 & 200 \\ 230 & 420 & 50 & 0 \end{pmatrix}$$

Обчислимо вартість перевезення.

$F=300\cdot 2+200\cdot 1+300\cdot 3+200\cdot 2+230\cdot 2+420\cdot 4+50\cdot 6=$
$=600+200+900+400+460+1680+300=4540$

<u>Відповідь:</u> $X_{опт}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 300 & 200 \\ 230 & 420 & 50 & 0 \end{pmatrix}$, $\min F=4540$.

Варіанти завдань.
ЗАВДАННЯ 1.

1. Розв’язати задачу лінійного програмування
а) геометричним методом;
б) симплекс-методом.
2. Побудувати двоїсту задачу та двоїсту до двоїстої. Розв’язати двоїсту задачу геометрично і симплекс-методом. Перевірити виконання теорем двоїстості.
3. Розв’язати задачу з додатковою умовою цілочисельності методом Гоморі.

1. $F = x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8; \\ x_2 \le 5, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	2. $F = -x_1 + 2x_2 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8; \\ x_2 \ge 5, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	3. $F = 2x_1 + 3x_2 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 8; \\ x_2 \ge 5, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$
4. $F = -4x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 8; \\ x_2 \le 5, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	5. $F = -2x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12; \\ x_1 \le 2, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	6. $F = x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 12; \\ x_1 \le 2, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$
7. $F = 3x_1 + x_2 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 12; \\ x_1 \ge 2, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	8. $F = -x_1 + 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12; \\ x_1 \ge 2, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	9. $F = x_1 + 2x_2 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 6; \\ x_2 \le 4, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$
10. $F = -x_1 + 4x_2 \to \min$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 6; \\ x_2 \ge 4, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	11. $F = -2x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge 6; \\ x_2 \ge 4, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	12. $F = 3x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge 6; \\ x_2 \le 4, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$
13. $F = 2x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2; \\ x_1 \le 3, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	14. $F = -x_1 + x_2 \to \min$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 2; \\ x_1 \le 3, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	15. $F = -3x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 2; \\ x_1 \ge 3, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$

16. $F = 4x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2; \\ x_1 \ge 3, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	17. $F = -x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 3; \\ x_1 \le 1, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	18. $F = 2x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 3; \\ x_1 \le 1, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$
19. $F = 3x_1 + x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 3; \\ x_1 \ge 1, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	20. $F = -2x_1 + 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 3; \\ x_1 \ge 1, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	21. $F = -2x_1 - 5x_2 \to \min$ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12; \\ x_2 \le 2, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$
22. $F = x_1 - 2x_2 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12; \\ x_2 \ge 2, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	23. $F = -2x_1 - 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \ge 12; \\ x_2 \ge 2, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	24. $F = -x_1 - 3x_2 \to \min$ $\begin{cases} -3x_1 + x_2 \ge 3; \\ x_2 \le 7, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$
25. $F = 2x_1 - 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} -3x_1 + x_2 \ge 3; \\ x_2 \ge 7, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	26. $F = -x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \ge 6; \\ x_1 \ge 5, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	27. $F = -3x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \ge 6; \\ x_1 \le 5, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$
28. $F = -3x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 20; \\ x_1 \le 4, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	29. $F = 4x_1 - 2x_2 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \ge 20; \\ x_1 \le 4, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$	30. $F = -x_1 + 5x_2 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 20; \\ x_1 \ge 4, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$

ЗАВДАННЯ 2.

На m станціях $A_1, A_2, ..., A_m$ зосереджено $a_1, a_2, ..., a_m$ тон піску. Цей пісок треба перевезти в n пунктів призначення $B_1, B_2, ..., B_n$, причому в кожний з них потрібно завезти, відповідно, $b_1, b_2, ..., b_n$ тон. Вартість перевезення однієї тони піску з пункту A_i у пункт B_j дорівнює c_{ij} (вказані в таблиці).

1) Знайти опорний розв'язок методом найменшої вартості. Обчислити значення цільвої функції для цього розв'язку.
2) Знайти опорний розв'язок методом північно-західного кута, обчислити значення цільвої функції для цього розв'язку. Порівняти зі значенням цільової функції із пункту 1).
3) Знайти оптимальний розв'язок задачі, виходячи з опорного розв'язку, знайденого за методом найменшої вартості.
4) Знайти оптимальний розв'язок задачі, виходячи з опорного розв'язку, знайденого за методом північно-західного кута.

1.

a_i b_j	80	140	110
60	4	3	5
150	10	1	2
80	3	8	6
40	6	4	9

2.

a_i b_j	70	120	105	125	110
120	14	8	17	5	3
180	21	10	7	11	6
230	3	5	8	4	9

3.

a_i b_j	80	60	30	90
70	3	7	5	2
45	5	3	4	7
90	2	1	8	5
55	5	7	2	8

4.

a_i b_i	120	150	130
140	5	8	4
110	3	1	8
50	7	3	6
100	4	9	6

5.

a_i b_j	150	130	120
125	6	3	4
115	4	7	2
60	8	5	9
100	3	7	2

6.

a_i b_j	80	70	90	60	70
120	7	4	15	9	14
150	11	2	7	3	10
100	4	5	12	8	17

7.

a_i b_j	112	105	108
107	7	5	4
103	4	9	5
35	8	6	2
80	3	5	1

8.

a_i b_j	110	135	120
120	7	2	4
125	3	8	9
80	1	3	9
40	6	4	2

9.

a_i b_j	140	145	45
70	7	4	1
145	5	9	8
55	3	8	3
60	3	1	4

10.

a_i b_j	120	170	110
90	6	4	2
100	3	5	7
80	1	4	6
130	5	6	8

11.

a_i b_j	16	14	10
17	2	1	3
11	4	2	4
5	1	3	5
7	4	7	1

12.

a_i b_j	10	16	14
8	3	7	3
10	2	1	5
7	2	5	1
15	4	2	7

13.

a_i \ b_j	300	280	330	290	100
370	21	18	14	3	4
450	7	11	10	5	12
480	4	8	16	9	13

14.

a_i \ b_j	7	8	15	10
16	2	5	5	4
18	4	7	2	9
6	3	2	1	2

15.

a_i \ b_j	19	13	18
17	3	1	2
10	4	2	6
12	2	3	4
11	3	7	1

16.

a_i \ b_j	11	10	19
6	9	5	3
13	4	1	9
12	3	2	1
9	4	5	6

17.

a_i \ b_j	10	17	18
10	3	5	2
9	2	6	9
14	5	2	8
12	4	1	3

18.

a_i \ b_j	115	119	111
117	2	1	6
50	1	7	4
110	4	2	8
68	3	1	2

19.

a_i \ b_j	120	130	140
115	3	2	6
125	8	7	2
50	4	1	7
100	3	5	1

20.

a_i \ b_j	120	130	140
115	6	7	5
100	3	7	1
125	2	3	4
50	8	2	1

21.

a_i \ b_j	130	230	190	160	120
260	2	4	11	5	3
300	8	17	13	7	6
270	14	10	5	8	9

22.

a_i \ b_j	90	120	110	130	70
175	12	9	7	11	6
165	4	3	12	2	8
180	5	17	9	4	11

23.

a_i \ b_j	20	25	35	40
25	12	15	14	10
50	16	20	28	17
45	19	21	16	13

24.

a_i \ b_j	120	50	190	110
160	7	8	1	2
140	4	5	9	8
170	9	2	3	6

25.

a_i \ b_j	100	90	160	150	80
150	2	10	15	14	4
170	3	7	12	5	8
260	1	18	6	13	16

26.

a_i \ b_j	100	110	80	210
120	11	4	15	7
130	9	7	14	5
150	8	3	6	10

27.

a_i \ b_j	100	110	120	130
220	11	2	3	9
150	12	4	10	20
90	18	5	1	6

28.

a_i \ b_j	45	55	75	85
120	4	5	2	6
60	1	4	8	3
80	5	6	1	9

29.

a_i \ b_j	150	110	100	140
220	2	4	7	11
120	6	1	5	2
160	1	9	5	12

30.

a_i \ b_j	160	90	80	70
170	3	3	4	5
120	8	9	3	1
110	2	1	8	3

Література

1. Васильченко І. П. Вища математика для економістів (спеціальні розділи). К.: Кондор, 2004 г.
2. Венцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. М: Дрофа, 2004, 208 с.
3. Дутка Г. Я. Практикум з математики для економістів. Львів: Львівський банківський коледж, 1998, 362 с.
4. Зуховицкий С.И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1967 г., 460 с.
5. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. М.: Высшая школа, 1969 г.
6. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. М.: Высшая школа, 1980 г.

Зміст