

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ЗАЛІЗНИЧНОГО  
ТРАНСПОРТУ

КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ  
ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ**

Методичні вказівки і завдання до типового розрахунку

Харків – 2010

Завдання і методичні вказівки призначені для студентів технічних спеціальностей всіх форм навчання. Розглянуті і рекомендовані до друку на засіданні кафедри вищої математики УкрДАЗТ, протокол № 2 від 11 жовтня 2010 р.

Укладачі ст.викл.Рибачук О.В., ст.викл. Шувалова Ю.С.

Рецензент професор Куліш Ю.В.

## ВСТУП

Ці методичні вказівки присвячені одному з розділів курсу вищої математики – диференціальному численню функцій декількох змінних і його додаткам. Методичні вказівки містять в мінімальному об'ємі виклад вузлових розділів теми, яке може бути використаний як для першого ознайомлення з матеріалом перед читанням підручника, так і як довідкове керівництво при розв'язанні задач.

## ФУНКЦІЯ ДЕКИЛЬКОХ ЗМІННИХ

Нехай  $D$  – довільна множина точок на площині  $\mathbf{R}^2$  або в просторі  $\mathbf{R}^3$ . Якщо кожній точці  $P \in D$  поставлено у відповідність за деяким правилом “ $f$ ” число  $u$ , то говорять, що на множині  $D$  задана функція  $u = f(P)$ . Оскільки кожна точка однозначно визначається своїми координатами, то  $u = f(x; y)$

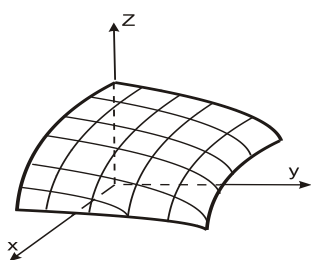


Рис. 1

(якщо  $D \in \mathbf{R}^2$ ) або  $u = f(x; y; z)$  (якщо  $D \in \mathbf{R}^3$ ), та ми приходимо до поняття функції відповідно двох або трьох змінних. Множина  $D$  називається областю визначення функції, а  $x, y, z$  – незалежними змінними.

Функція двох змінних  $z = f(x; y)$  має геометричне зображення – графік, який складається з усіх точок  $(x; y; z) \in \mathbf{R}^3$  таких, що  $(x; y) \in D$ , а  $z = f(x; y)$ . Як правило, графік функції – деяка поверхня (мал.1). Функція повністю визначається заданням свого графіка.

## ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Нехай функція  $z = f(P) = f(x; y)$  визначена в деякому околі<sup>\*)</sup> точки  $P_0$ . Позначимо через  $\rho(P_0; P)$  – відстань між точками  $P_0(x_0; y_0)$  та  $P(x; y)$ ,

$$\rho(P_0; P) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Говорять, що точка  $P$  наближається до точки  $P_0$  ( $P \rightarrow P_0$ ), якщо в процесі зміни координат точки  $P(x; y)$   $\rho(P_0; P) \rightarrow 0$ , що можливе тоді і тільки тоді, коли одночасно  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ .

|| Число  $B$  називається границею функції  $z = f(P)$ , при  $P \rightarrow P_0$

---

<sup>\*)</sup> Під околом точки  $P_0(x_0; y_0) \in \mathbf{R}^2$  розуміється будь-яке коло з центром в точці  $P_0$ , а під околом точки  $P_0(x_0; y_0; z_0) \in \mathbf{R}^3$  будь-яка куля з центром в точці  $P_0$ .

$$B = \lim_{P \rightarrow P_0} f(x; y) = \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x; y),$$

якщо  $(B - f(P)) \rightarrow 0$ , коли  $\rho(P_0; P) \rightarrow 0$ .

Функція  $z = f(x; y)$  називається неперервною в точці  $P_0$ , якщо визначено значення  $f(P_0) = f(x_0; y_0)$ , і

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(x; y) = f(x_0; y_0).$$

Функція називається **неперервною в області\*\*)**  $D \subset \mathbf{R}^2$ , якщо вона неперервна в кожній точці  $D$ .

Визначення границі та неперервності функції декількох змінних аналогічні цим поняттям для функції однієї змінної. Тому справедливі всі правила граничного переходу, та всі елементарні функції декількох змінних неперервні в своїх природних областях визначення. Значить, можна переходити до границі під знаком функції, якщо ця функція елементарна і визначена в деякому околі граничної точки.

Приклад 3: 
$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 1} \frac{(x+1)\ln(x+2y)}{\cos(xy)} = \frac{(0+1)\ln 2}{\cos 0} = \ln 2.$$

## ЧАСТИННІ ПОХІДНІ

Нехай  $z = f(x; y)$  – функція двох змінних. Зафіксуємо одну із змінних, наприклад  $y$ , а другій надамо приріст  $\Delta x$ . Частинним приростом функції по змінній  $x$  називається величина  $\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y)$ . Аналогічно визначається частинний приріст по змінній  $y$ :  $\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y)$ .

Якщо приріст отримують обидві незалежні змінні, то різниця  $\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$  називається повним приростом функції.

**Частинною похідною** від функції двох змінних  $z = f(x; y)$  по змінній  $x$  (позначається  $z_x' = f_x'$  або  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$ ) називається границя відношення частого приросту функції по змінній  $x$  до приросту цієї змінної  $\Delta x$  при умові  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x},$$

тобто похідна цієї функції, обчислена в припущенні, що інша змінна  $y$  фіксована.

Аналогічно визначається частинна похідна по  $y$  ( $x$  вважаємо фіксованим):

\*\*) Визначення області див. на стор. 23.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

Приклад 4.  $z = x^2 + 3xy - 4y^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow z'_x = (x^2)'_x + 3y(x)'_x + (4y^2)'_x = 2x + 3y + 0 = 2x + 3y,$$

$$z'_y = (x^2)'_y + 3x(y)'_y + (4y^2)'_y = 3x + 8y.$$

Частинні похідні функцій більш ніж двох змінних обчислюються в припущенні, що всі змінні фіксовані, окрім однієї, по якій і обчислюється похідна.

Приклад 4.

$$u'_y = \frac{x^2}{z} (\sqrt{y})'_y = \frac{x^2}{2z\sqrt{y}}, \quad u'_z = x^2 \sqrt{y} (z^{-1})'_z = -x^2 \sqrt{y} z^{-2} = \frac{-x^2 \sqrt{y}}{z^2}.$$

## ДИФЕРЕНЦІАЛ

Нехай функція  $z = f(x; y)$  визначена в околі точки  $P_0(x; y)$ , точка  $P(x + \Delta x; y + \Delta y)$  лежить в цьому околі та  $\rho = \rho(P_0; P)$  – відстань між точками  $P_0$  та  $P$ .

Якщо повний приріст  $\Delta f = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$  функції  $z = f(x; y)$  між точками  $P_0$  та  $P$  може бути представлено у вигляді

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \varepsilon(\rho) \rho$$

(1)

де  $\frac{\partial f}{\partial x}$  і  $\frac{\partial f}{\partial y}$  обчислюються в точці  $P_0$ , а  $\varepsilon(\rho)$  – нескінченно мала, коли  $\rho \rightarrow 0$  (тобто коли  $P \rightarrow P_0$ ), то функція  $f(x; y)$  називається диференціюємою\* в точці  $P_0$ , а вираз

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

називається повним диференціалом функції  $f(x; y)$ .

Оскільки прирости незалежних змінних  $x$ ,  $y$  співпадають з їх диференціалами  $\Delta x = dx$ ,  $\Delta y = dy$ , то

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy} \quad (2)$$

ТЕОРЕМА. Достатня умова диференціюємості.

Якщо функція  $z = f(x; y)$  має в деякій області  $D \subset \mathbf{R}^2$  неперервні частинні похідні  $z'_x = f'_x(x; y)$  й  $z'_y = f'_y(x; y)$ , то вона в цій області диференціюєма.

Такі функції називаються тими, що **неперервно диференціюються**.

Для функції трьох змінних  $u = f(x; y; z)$  диференціал

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz}. \quad (3)$$

Приклад 6.  $z = x^3 + 2x^2y - 3y \Rightarrow z'_x = 3x^2 + 4xy, z'_y = 2x^2 - 3$ .

Частинні похідні неперервні при всіх  $(x; y) \Rightarrow$  функція диференціюєма в кожній точці площини і її диференціал

$$dz = (3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 - 3)dy.$$

### ПОХІДНІ СКЛАДНИХ ФУНКЦІЙ

а) Нехай  $z = f(u; v)$ , де  $u = u(x), v = v(x)$ , тобто  $z = f(u(x); v(x)) = g(x)$  – складна функція однієї змінної  $x$ . Тоді

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}. \quad (5)$$

Приклад 8.  $z = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = u^v$ , де  $u = \sin x, v = \operatorname{tg} x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u} = (u^v)'_u = vu^{v-1}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = (u^v)'_v = u^v \ln u; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = vu^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx} = u^v \left( \frac{v}{u} \frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx} \right) =$$

$$= (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} \cos x + \ln(\sin x) \frac{1}{\cos^2 x} \right) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \left( 1 + \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} \right).$$

б) Нехай  $z = f(u; v)$ , де  $u = u(x; y), v = v(x; y)$ , тобто  $z = f(u(x; y); v(x; y)) = g(x; y)$  – складна функція двох змінних. Тоді її частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (6)$$

Приклад 9.  $z = \sin \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x} = \sin u \cos v$ , де  $u = \frac{x}{y}, v = \frac{y}{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = (\sin u \cdot \cos v)'_u \frac{\partial u}{\partial x} + (\sin u \cdot \cos v)'_v \frac{\partial v}{\partial x} = \cos u \cdot \cos v \frac{1}{y} -$$

$$- \sin u \cdot \cos v (-yx^{-2}) = \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x} - \frac{y}{x^2} \sin \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x}.$$

Обчисліть  $\partial z / \partial y$  самостійно.

в) Формули (5), (6) легко розповсюджуються на випадки функцій більш ніж двох змінних. Наприклад, якщо, де  $u=u(x)$ ,  $v=v(x)$ ,  $w=w(x)$ , то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{dw}{dx}. \quad (7)$$

г) В окремому випадку, коли  $u(x) \equiv x$ ,  $\partial u / \partial x = 1$  з (7) витікає, що

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{dw}{dx}. \quad (8)$$

Звичайна похідна  $dz/dx$  в лівій частині рівності (8) називається **повною похідною** функції  $z = f(x; v(x); w(x))$  по змінній  $x$  на відміну від похідної в правій частині рівності (8) – частинної похідної функції  $z=f(x;v;w)$  по першому з трьох аргументів.

**Приклад 10.** Знайти повну похідну від функції  $z = x^3(u^2 + \sqrt{v})$ , де  $u = \text{sh } x$ ,  $v = \text{ch } x$ .

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= 3x^2(u^2 + \sqrt{v}) + x^3 2u \frac{du}{dx} + x^3 \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{dv}{dx} = \\ &= 3x^2(\text{sh}^2 x + \sqrt{\text{ch } x}) + x^3 \left( 2 \text{sh } x \text{ch } x + \frac{\text{sh } x}{2\sqrt{\text{ch } x}} \right). \end{aligned}$$

## ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Розглянемо функцію  $z = f(x; y)$ . Її частинні похідні  $z_x' = f_x'(x; y)$  й  $z_y' = f_y'(x; y)$  самі є функціями двох змінних.

Частинні похідні від частинних похідних називаються **частинними похідними другого порядку**. Функція двох змінних має, таким чином, чотири частинні похідні другого порядку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}'' &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right), & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}'' &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}'' &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right), & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}'' &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Диференціюючи частинні похідні другого порядку, отримаємо **частинні похідні третього порядку**:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) \text{ і т.д.}$$

**Приклад 11.**  $z = x^2 y + 4xy^2 + x^2 - y + 5 \Rightarrow$

$$z_x' = 2xy + 4y^2 + 2x, \quad z_y' = x^2 + 8xy - 1; \quad z_{xx}'' = 2y + 2, \quad z_{yy}'' = 8x,$$

$$z_{xy}'' = (z_x')_y = 2x + 8y, \quad z_{yx}'' = (z_y')_x = 2x + 8y.$$

Частинні похідні  $z''_{xy}$  та (вони називаються змішаними похідними) виявилися рівні, що відбулося зовсім не випадково.

**ТЕОРЕМА.** Якщо змішані похідні  $z''_{xy}$  та  $z''_{yx}$  нерервні в деякій області, то вони в цій області рівні.

**Наслідок.** Результат повторного диференціювання не залежить від порядку диференціювання (наприклад  $z'''_{xyu} = z'''_{yxu} = z'''_{yux}$ ), якщо всі виникаючі при обчисленнях похідні неперервні.

## ПОХІДНА ЗА НАПРЯМКОМ

Нехай  $z=f(P)$  – функція двох змінних, що диференціюється в околі точки  $P_0(x_0; y_0)$ ,  $\vec{l} = \{l_x; l_y\}$  – вектор, що задає деякий напрямок,  $P_0(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$  – точка на цьому напрямку (така, що вектор  $\vec{P_0P}$  колінеарен вектору  $\vec{l}$  (рис.5)). Очевидно, що  $\Delta x = \rho \cos \alpha$ ,  $\Delta y = \rho \cos \beta$ , де

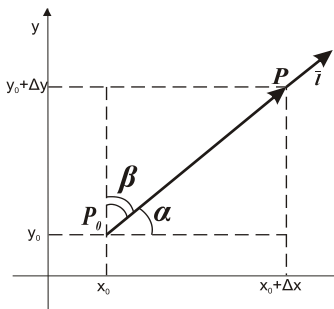


Рис. 5

$$\rho = \rho(P_0; P) = |\vec{P_0P}|, \quad \text{а} \quad \cos \alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|}, \quad \cos \beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|} -$$

направляючі косинуси вектора, тобто косинуси кутів між вектором  $\vec{l}$  і осями координат  $Ox$  і  $Oy$  відповідно.

Величина  $\Delta_l z = f(P) - f(P_0) = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$  називається приростом функції в даному напрямку. Границя відношення цього приросту до величини переміщення  $\Delta l = \rho$  при умові  $\Delta l \rightarrow 0$

називається похідною за напрямком  $\vec{l}$  та позначається  $\frac{\partial z}{\partial l}$ ,

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta l}.$$

Нескладно одержати більш зручні формули для обчислення похідної за напрямком, а саме, для функції двох змінних  $z = f(x; y)$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta;$$

для функції трьох змінних  $u = f(x; y; z)$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma,$$

де направляючі косинуси тривимірного вектора  $\vec{l} = \{l_x; l_y; l_z\}$  відповідно рівні



$$\cos \alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|}, \quad \cos \beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|}, \quad \cos \gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|}.$$

Похідна за напрямком характеризує швидкість зміни функції в даному напрямку  $\vec{l}$ .

Приклад 12.  $z = xy - 2y$ ,  $\vec{l} = \{-3; 4\}$ . Знайти похідну  $\partial z / \partial l$  за напрямком  $\vec{l}$  та обчислити її в точці  $P_0(1; 2)$ .

$$|\vec{l}| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5; \quad \cos \alpha = -3/5, \quad \cos \beta = 4/5; \quad z_x' = y, \quad z_y' = x - 2 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = y \cdot \frac{-3}{5} + (x - 2) \cdot \frac{4}{5} = \frac{4x - 3y - 8}{5}; \quad \frac{\partial z(P_0)}{\partial l} = \frac{4 - 6 - 8}{5} = -2.$$

Оскільки  $\partial z / \partial l < 0$ , то функція в напрямку  $\vec{l}$  спадає.

## ГРАДІЄНТ

**Градiєнтом** функції декількох змінних  $u = u(P)$  називається вектор, координати якого є частинними похідними по відповідним незалежним змінним.

Таким чином, для функції двох змінних  $u = f(x; y)$

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \vec{j} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y} \right\},$$

а для функції трьох змінних  $u = f(x; y; z)$

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \vec{k} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right\}.$$

Говорять, що в області  $G \subset \mathbf{R}^n$  ( $n=2, 3$ ) задано векторне поле, якщо в кожній точці  $P \in G$  заданий вектор  $\vec{F} = \vec{F}(P)$  (тобто задана вектор-функція декількох змінних). Отже, будь-яка диференціюєма в області  $G$  скалярна функція (скалярне поле)  $u = u(P)$  породжує в цій області векторне поле  $\vec{F}(P) = \text{grad } u(P)$ . Функція  $u(P)$  називається потенціалом векторного поля  $\vec{F} = \text{grad } u$ , а саме векторне поле  $\vec{F}$  називається потенційним полем.

ТЕОРЕМА 1. Похідна за напрямком дорівнює проекції градієнта на цей напрямок  $\frac{\partial u}{\partial l} = \text{pr}_{\vec{l}} \text{grad } u$ .

Наслідок. Похідна за напрямком максимальна у напрямку градієнта, тобто градієнт направлений у бік найшвидшого зростання функції, і в цьому

$$\text{напрямку } \frac{\partial u}{\partial l} = \left( \frac{\partial u}{\partial l} \right)_{\max} = |\text{grad } u|.$$

**ТЕОРЕМА 2.** Градієнт функції двох змінних  $u = f(x; y)$  в кожній точці  $P_0(x_0; y_0)$  перпендикулярний до лінії рівня даної функції, що проходить через цю точку (якщо  $\text{grad} u(P_0) \neq 0$ ).

**Наслідок.** Похідна за напрямком  $\vec{l}$ , який дотичен до лінії рівня, рівна нулю.

## НЕЯВНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Розглянемо рівняння

$$F(x; y; z) = 0. \quad (9)$$

Якщо для всіх  $(x; y)$  з деякої множини  $D \subset \mathbf{R}^2$  існує така функція (не обов'язково єдина), при підстановці якої в (9) ця рівність виконується тотожно в  $D$ , то говорять, що рівняння (9) визначає на множині  $D$  неявну функцію  $z = z(x; y)$ .

**Приклад 13.** Рівняння  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  визначає неявно дві неперервні функції  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  та  $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$  (або одну двозначну функцію  $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ ) з областями визначення кожної  $D = \mathbf{R}^2$ .

Проте отримати явну залежність  $z = z(x; y)$  з рівняння вигляду (9) не завжди можливо, до того ж воно може і не визначати ніякої функції. Тому вельми важливо знати умови, які б гарантували існування такої неявно заданої функції  $z = z(x; y)$ .

**ТЕОРЕМА.** Про існування неявної функції.

Нехай координати точки  $\mathbf{R}^3$  задовольняють рівнянню (9), причому функція  $F(x; y; z)$  та її приватні похідні  $F'_x(x; y; z)$ ,  $F'_y(x; y; z)$ ,  $F'_z(x; y; z)$ , неперервні в околі точки  $M_0$ , та  $F'_z(x_0; y_0; z_0) \neq 0$ . Тоді існує такий окіл точки  $P_0(x_0; y_0) \in \mathbf{R}^2$ , в якій визначена єдина функція, що неперервно диференціюється, та задовольняє рівняння (9), така, що точка  $M_0$  є точкою її графіка.

Помітимо, що теорема не вказує методу знаходження цієї неявної функції, а тільки стверджує, що така функція існує. Проте виявляється, що частинні похідні  $z'_x$  і  $z'_y$  цієї невідомої функції можуть бути обчислені.

Нехай умови теореми виконані, й  $z = z(x; y)$  – неявна функція. Підставляючи її в рівняння (9), отримаємо тотожність, справедливу при всіх  $(x; y)$  з деякого околу точки  $P_0$ . Продиференціюємо обидва частини цієї тотожності по змінній  $x$ , використовуючи правило диференціювання складної функції.

$$F_x' \cdot x_x' + F_y' \cdot y_x' + F_z' \cdot z_x' \equiv 0 \Rightarrow F_x' + F_z' \cdot z_x' \equiv 0 \Rightarrow z_x' = \frac{-F_x'}{F_z'}$$

Аналогічно визначається і частинна похідна  $z_y'$ :

$$F_x' \cdot y_x' + F_y' \cdot y_y' + F_z' \cdot z_y' \equiv 0 \Rightarrow F_y' + F_z' \cdot z_y' \equiv 0 \Rightarrow z_y' = \frac{-F_y'}{F_z'}$$

Приклад 14. Точка  $M_0(0; 1; 1)$  задовольняє рівняння

$$e^{-xy} + e^z - z - e = 0. \quad (10)$$

$$F_x' = (e^{-xy} + e^z - z - e)'_x = -y e^{-xy}; \quad F_y' = (e^{-xy} + e^z - z - e)'_y = -x e^{-xy};$$

$F_z' = (e^{-xy} + e^z - z - e)'_z = e^z - 1$  – неперервні в околі точки  $M_0$  функції, причому  $F_z'(0; 1; 1) = e - 1 \neq 0$ . Значить, в околі точки  $P_0(0; 1)$  існує єдина неявна функція, що задовольняє рівняння (10), така, що  $z(0; 1) = 1$ , причому її похідні

$$z_x' = \frac{y e^{-xy}}{e^z - 1}, \quad z_y' = \frac{x e^{-xy}}{e^z - 1}$$

неперервні в околі точки  $P_0$ , і  $z_x'(0; 1) = (e^z - 1)^{-1}$ ,  $z_y'(0; 1) = 0$ .

Зауваження. У разі, коли рівняння  $F(x; z) = 0$  неявно визначає функцію однієї змінної, що диференціюється, можна, діючи аналогічно, обчислити звичайну похідну  $z'(x) = \frac{-F_x'}{F_z'}$ , якщо  $F_z' \neq 0$ .

## ДОТИЧНА ПЛОЩИНА ДО ПОВЕРХНІ І ГЕОМЕТРИЧНЕ ЗНАЧЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛА

Геометричне зміст диференціала функції двох змінних  $z = f(x; y)$  пов'язано з дотичною площиною до поверхні, яка визначаєтьсяною цією функцією.

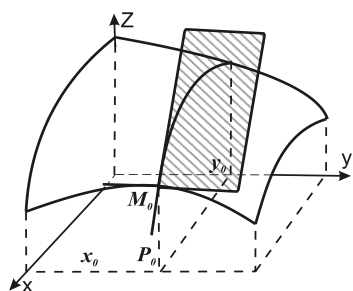


Рис. 6

Нехай  $z = f(x; y)$  функція, що диференціюється в околі точки  $P_0(x_0; y_0)$ , а поверхня  $S$  – її графік. Розглянемо перетин поверхні площиною  $y = y_0$  і проведемо дотичну пряму в точки  $P_0$  до лінії перетину. Аналогічним чином побудуємо дотичну до лінії перетину площиною  $x = x_0$  (рис.6).

Площина, що проходить через ці дві дотичні, які перетинаються, називається **дотичною площиною**

до поверхні  $z = f(x; y)$  в точці  $P_0(x_0; y_0)$ . Її рівняння

$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

(11)  
де  $z_0 = f(x_0; y_0)$ .

Можна показати, що для будь-якої лінії на поверхні, що проходить через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ , дотична пряма, проведена до лінії через цю точку, лежить в дотичній площині.

Позначимо  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta y = y - y_0$ ,  $\Delta z = z - z_0$  – прирости змінних в дотичній площині. З (11) витікає, що

$$\Delta z = f'_x(x_0; y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0; y_0) \cdot \Delta y = dz .$$

Таким чином, для всіх точок дотичної площини  $\Delta z = dz$ , тобто диференціал функції  $z = f(x; y)$  дорівнює приросту аплікати  $z$  точки на дотичній площині, відповідному приростам аргументів  $\Delta x$  та  $\Delta y$ .

## НОРМАЛЬ ДО ПОВЕРХНІ

Вектор  $\vec{N}$ , який перпендикулярен дотичній площині, називається **нормальним вектором** до поверхні, а пряма, перпендикулярна до дотичної площини, що проходить через точку дотику, називається **нормаллю** до поверхні в даній точці.

З рівняння (11) вектор  $\vec{N} = \{f'_x(x_0; y_0); f'_y(x_0; y_0); -1\}$  є нормальним до поверхні  $z = f(x; y)$  (причому будь-який вектор, пропорційний йому,  $\vec{N}\lambda = \lambda \cdot \{f'_x; f'_y; -1\}$  – теж нормальний). Звідси витікає, що рівняння нормалі до поверхні в точці  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  має вигляд

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1} . \quad (12)$$

Хай тепер поверхня  $S$  задана неявним рівнянням  $F(x; y; z) = 0$ , яке визначає в околі точки  $P_0(x_0; y_0)$  функцію  $z = f(x; y)$ , що диференціюється, причому  $z_0 = f(x_0; y_0)$ . Згідно правила диференціювання неявної функції (якщо  $F'_z(x_0; y_0; z_0) \neq 0$ )

$$f'_x = \frac{-F'_x}{F'_z}, \quad f'_y = \frac{-F'_y}{F'_z} \Rightarrow \vec{N} = \left\{ \frac{-F'_x}{F'_z}; \frac{-F'_y}{F'_z}; -1 \right\} .$$

Для зручності помножимо  $\vec{N}$  на множник  $\lambda = -F'_z$ , отримаємо інший нормальний вектор  $\vec{N} = \{F'_x; F'_y; F'_z\}$ , де всі похідні обчислюються в точці

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ . Таким чином, приходимо в цьому випадку до рівняння нормалі

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \quad (12')$$

Помітимо тут же, що рівняння дотичної площини можна записати у вигляді

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0. \quad (11')$$

Хоча раніше було зроблено припущення, що  $F'_z(x_0; y_0; z_0) \neq 0$ , але рівняння (11'), (12') справедливі і коли  $F'_z(x_0; y_0; z_0) = 0$ . Вони не мають сенсу тільки в тому випадку, якщо все три частинні похідні дорівнюють нулю одночасно.

Точка  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  називається особливою точкою поверхні  $F(x; y; z) = 0$ , якщо  $F'_x(M_0) = 0$ ,  $F'_y(M_0) = 0$ ,  $F'_z(M_0) = 0$ .

В особливій точці дотична площина і нормаль до поверхні не визначені.

**Приклад 15:** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до конуса  $4x^2 - y^2 + z^2$  (рис.7) в крапках  $M(3; 10; 4)$  й  $O(0; 0; 0)$ .

Розв'язок:  $F'_x = 8x$ ,  $F'_y = -2y$ ,  $F'_z = 2z$ .

$F'_x(M) = 24$ ,  $F'_y(M) = -20$ ,  $F'_z(M) = 8$ , значить, в точці  $M$  нормальний

вектор  $\vec{N} = \{24; -20; 8\}$ , рівняння дотичної площини має вигляд

$$24(x - 3) - 20(y - 10) + 8(z - 4) = 0$$

або після розкриття дужок і скорочення на 4

$$6x - 5y + 2z = 0,$$

а рівняння нормалі –

$$\frac{x - 3}{6} = \frac{y - 10}{-5} = \frac{z - 4}{2}.$$

В точці  $O(0; 0; 0)$ ,  $F'_x = 0$ ,  $F'_y = 0$ ,  $F'_z = 0$  значить, це особлива точка поверхні, і в ній дотична площина і нормаль не визначена.

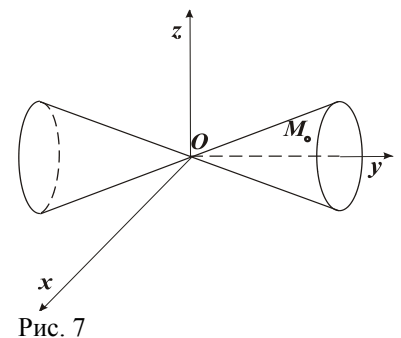


Рис. 7

## ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Точка  $P_0(x_0; y_0) \in \mathbf{R}^2$  називається точкою екстремуму функції двох змінних  $z = f(x; y)$ , а саме точкою максимуму або точкою мінімуму, якщо функція визначена в околі точки  $P_0$ , та її значення в цій точці  $z_0 = f(x_0; y_0)$  є відповідно найбільше або найменше значення функції в

|| цьому околі. Значення функції в точках екстремуму називаються екстремальними.

Розглянемо необхідні і достатні умови існування екстремуму.

ТЕОРЕМА 1. Необхідна ознака екстремуму.

Якщо в точці  $P_0(x_0; y_0)$  функція  $z = f(x; y)$ , що диференціюється, має екстремум, то її частинні похідні дорівнюють в цій точці нулю:  $z'_x(P_0) = 0$ ,  $z'_y(P_0) = 0$ .

Проте умови  $z'_x(P_0) = 0$ ,  $z'_y(P_0) = 0$  (вони називаються умовами стаціонарності функції) не є достатніми, тобто їх виконання не гарантує існування екстремуму в точці  $P_0$ .

ТЕОРЕМА 2. Достатня ознака екстремуму.

Нехай функція  $z = f(x; y)$  має в точці  $P_0(x_0; y_0)$  неперервні частинні похідні другого порядку (двічі неперервно диференційована) і точка  $P_0$  – її стаціонарна точка, тобто  $z'_x(P_0) = 0$ ,  $z'_y(P_0) = 0$ . Позначимо через  $\Delta$  визначник

$$\Delta(x; y) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = z''_{xx}z''_{yy} - z''_{xy}z''_{yx} = z''_{xx}z''_{yy} - (z''_{xy})^2.$$

Тоді:

а) Якщо, то в точці  $P_0$  є екстремум, причому

у випадку  $z''_{xx}(P_0) > 0$  (або  $z''_{yy}(P_0) > 0$ ) – мінімум

а у випадку  $z''_{xx}(P_0) < 0$  (або  $z''_{yy}(P_0) < 0$ ) – максимум.

б) Якщо, то в точці  $P_0$  екстремуму немає (такі точки називаються сідловими).

в) Якщо  $\Delta(P_0) = 0$ , то для відповіді на питання про існування екстремуму потрібне додаткове дослідження з використанням диференціалів третього або більш високого порядку (невизначений випадок).

Приклад 18. Знайти екстремуми функції

$$z = x^3 - 7x^2 + 2xy - y^2 + 11x - 2y.$$

Знайдемо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 + 2y + 11 = 0, \\ z'_y = 2x - 2y - 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 1, \\ 3x^2 - 12x + 9 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, & y_1 = 0, \\ x_2 = 3, & y_2 = 2. \end{cases}$$

Таким чином, функція має дві стаціонарні точки  $P_1(1; 0)$  і  $P_2(3; 2)$ .

Обчислюємо значення визначника  $\Delta(P_1)$  й  $\Delta(P_2)$ :

$$z''_{xx} = 6x - 14, \quad z''_{yy} = -2, \quad z''_{xy} = z''_{yx} = 2 \Rightarrow \Delta(x; y) = z''_{xx}z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = -12(x - 2).$$

Звідки  $\Delta(P_1) = -12(1-2) = 12 > 0$ , значить, в точці  $P_1(1;0)$  є екстремум, а оскільки  $z''_{yy} = -2 < 0$ , то цей екстремум – максимум і його значення  $z(1;0) = 5$ .

$\Delta(P_2) = -12(3-2) = -12 < 0$ , значить, в точці  $P_2(3;2)$  екстремуму немає. Це – сідлова точка.

## ВИЗНАЧЕННЯ ЕМПІРИЧНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Експериментальні дані часто використовують для встановлення функціональної залежності одних величин від інших. Наприклад, при різних температурах  $T = x_1, x_2, \dots, x_n$  виміряна довжина металевого стержня  $L = y_1, y_2, \dots, y_n$ , тобто отримана таблично задана функція  $L = f(T)$ . Виникає задача визначення за експериментальними даними аналітичної формули для цієї функції. Такі формули називаються емпіричними.

При розв'язанні цієї задачі, перш за все, з аналізу експериментальних даних або інших міркувань встановлюється вид шуканої залежності.

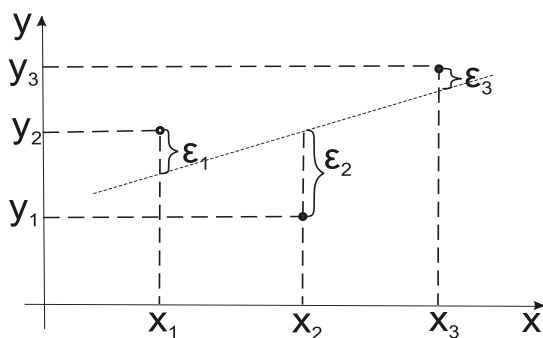


Рис. 12

Наприклад, передбачається наявність лінійної залежності  $y = ax + b$ . Можуть розглядатися і складніші функції: квадратична  $y = ax^2 + bx + c$ , дробово-раціональна  $\frac{ax + b}{cx + d}$  та інші. Тут ми розглянемо найпростіший випадок визначення лінійної залежності

$y = ax + b$ . Задача зветься до визначення відповідних коефіцієнтів  $a$  і  $b$ .

Представимо експериментальні дані на графіку (рис.12), на якому зобразимо також шукану функцію  $y = ax + b$  (її графік – пряма). Позначимо через  $\epsilon_i$  нев'язки або погрішності формули, тобто різниці експериментальних даних  $y_i$  і теоретичних значень цієї величини:  $\epsilon_i = y_i - ax_i + b$ . Поява нев'язки практично неминуча, оскільки, навіть якщо між величинами  $y$  і  $x$  є точна лінійна залежність, наврядчи вдасться провести пряму через все експериментальні точки через помилки вимірювань.

Природно вважати найкращою такою залежністю, для якої нев'язки в сукупності будуть (в деякому розумінні) найменшими. Суть **методу найменших квадратів** полягає в тому, що параметри  $a$  і  $b$  підбираються так, щоб була мінімальною сума квадратів всіх нев'язок. Таким чином, задача зводиться до визначення точки мінімуму функції

$$\Phi(a; b) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2. \quad (13)$$

Знайдемо стаціонарні точки з умови  $\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b) \cdot (-x_i) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b) \cdot (-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n (-y_i x_i + ax_i^2 + bx_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (-y_i + ax_i + b) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n 1 = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}.$$

Позначаючи

$$F = \sum_{i=1}^n 1 = n, \quad G = \sum_{i=1}^n x_i, \quad H = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad A = \sum_{i=1}^n y_i, \quad B = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (14)$$

приходимо до системи

$$\begin{cases} aH + bG = B \\ aG + bF = A \end{cases},$$

$$\text{вирішуючи яку, знаходимо } a = \frac{BF - AG}{FH - G^2}, \quad b = \frac{AH - BG}{FH - G^2}. \quad (15)$$

Перевіряючи достатні умови існування екстремуму, можна переконатися, що знайдена стаціонарна точка  $(a; b)$  і є шукана точка мінімуму (це витікає, втім, із змісту задачі).

Приклад 19. Знайти за допомогою методу найменших квадратів рівняння лінійної залежності за експериментальними даними, зведеними в таблицю

$x_i$	1	2	3	4	5
$y_i$	0,4	1,0	1,2	1,4	1,8

Розв'язок. За формулами (14) знаходимо  $F=5, G=15, H=55, A=5,8, B=20,6$ . Звідси, в силу (15)  $a=0,32; b=0,2$ . Таким чином, шукана залежність має вигляд  $y=0,32x+0,2$ . Представимо знайдену лінійну залежність і експериментальні дані на графіку (мал. 13). Видно, що знайдена залежність достатньо добре апроксимує дані.

## НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ В ЗАМКНУТІЙ ОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Розглянемо декілька визначень.

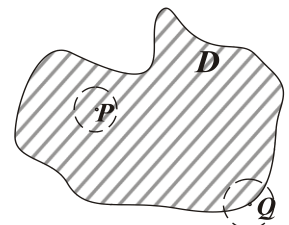


Рис. 14



Точка  $P$  називається **внутрішньою точкою** множини  $D \subset \mathbf{R}^n$ , якщо вона належить  $D$  разом з деяким своїм оточенням.

Точка  $Q$  називається **граничною точкою** множини  $D$ , якщо в будь-якому її оточенні є як точки, що належать множині  $D$ , так і точки, що не належать цій множині (рис.14). Сукупність всіх граничних точок множини  $D$  називається його **межею**.

Множина  $D \subset \mathbf{R}^n$  називається **відкритою областю** (або просто областю), якщо всі її точки внутрішні і будь-які дві з них можна з'єднати лінією, всі точки якої належать множині  $D$ . Якщо до області  $D$  приєднати її межу, то отримана множина точок називається **замкнутою областю** і позначається  $\bar{D}$ .

Область називається **обмеженою**, якщо вона повністю лежить у середині деякого оточення початку координат.

**ТЕОРЕМА.** Неперервна функція двох змінних досягає своїх найбільшого і найменшого значень в замкнутій обмеженій області  $\bar{D}$  або у середині області в точках екстремуму, або на її межі (мал. 15).

**Висновок.** Щоб знайти найбільше або найменше значення функції двох змінних, що диференціюється, в замкнутій обмеженій області  $\bar{D}$  треба:

1. Знайти всі стаціонарні (підозрілі на екстремум) точки у середині області і обчислити в них значення функції.
2. Знайти найбільше або відповідно найменше значення функції на межі області, тобто знайти умовний екстремум функції одним з вищевикладених методів.
3. Порівняти ці значення і вибрати з них потрібне.

**Приклад 23.** Знайти найбільше і найменше значення функції  $z = x^2 + y^2 - 4x - 2y$  в замкнутій області  $\bar{D}$ , обмеженій лініями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ;  $x + 2y = 6$  (рис.16).

**Розв'язок.** а) Знайдемо всі стаціонарні точки функції у середині області  $\bar{D}$ :

$$\begin{cases} z_x' = 2x - 4 = 0 \\ z_y' = 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Отже, у середині області  $\bar{D}$  є єдина стаціонарна точка  $P_0(2;1)$  і функція приймає в ній значення  $z(P_0) = z(2;1) = -5$ .

б) Розіб'ємо межу  $\bar{D}$  на три відрізки  $OA$ ,  $OB$  і  $AB$ . На кожному з них нам необхідно вирішити задачу знаходження умовного екстремуму, для чого

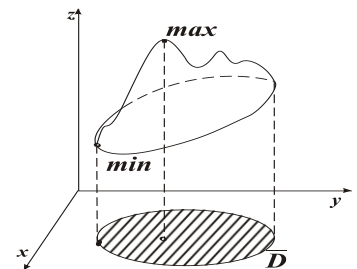


Рис. 15

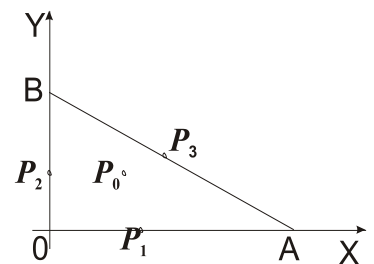


Рис. 16

ми скористаємося першим з викладених вище методів, виключаючи за допомогою рівняння зв'язку одну із змінних. Проте повністю вирішувати ці задачі ми не будемо, а знайдемо тільки точки підозрілі на екстремум.

На ділянці  $OA$ :  $y = 0, x \in [0; 6] \Rightarrow z_{OA} = f(x) = x^2 - 4x$ . Ця функція неперервно диференціюється і може досягати своїх найбільшого і найменшого значень або у середині відрізка в стаціонарній точці, або на його кінцях. Стаціонарні точки знаходимо з рівняння  $z'_{OA}(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2, y = 0$ . Функція в цій точці  $P_1(2; 0)$  приймає значення  $z(P_1) = -4$ . Обчислимо також значення функції на кінцях відрізка в крапках  $O(0; 0)$  і  $A(6; 0)$ :  $z(O) = 0, z(A) = 12$ .

На ділянці  $OB$ :  $x = 0, y \in [0; 3] \Rightarrow z_{OB} = g(y) = y^2 - 2y$ . Критичну точку знаходимо з рівняння  $x = 0, y \in [0; 3] \Rightarrow z_{OB} = g(y) = y^2 - 2y$ . Функція приймає в цій точці  $P_2(0; 1)$  значення  $z(P_2) = -1$ . Обчислимо значення функції в точці  $B$ :  $z(B) = 3$ .

На ділянці  $AB$ :  $x = 6 - 2y, x \in [0; 6] \Rightarrow$   
 $\Rightarrow z_{AB} = h(y) = (6 - 2y)^2 + y^2 - 4(6 - 2y) - 2y = -5y^2 - 18y + 12$ .

Прирівнюючи нулю похідну цієї функції  $z'_{AB}(y) = 10y - 18 = 0$ , одержуємо координати її критичної точки:  $y = 1,8; x = 2,4$ . Функція приймає в цій точці  $P_3(2,4; 1,8)$  значення  $z(P_3) = -4,2$ .

Порівнюючи значення функції в точках  $P_0, P_1, P_2, P_3, A, B, O$ , знаходимо, що  $\min_D z = z(P_0) = -5, \max_D z = z(A) = 12$

## ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

### ЗАВДАННЯ 1 Обчислити $dz/dx$ , використовуючи правило

диференціювання складної функції, якщо  $z = u^v$ ,  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$ .

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1. $u = 1 + \sqrt{x}$ , $v = \sin x$                         | 11. $u = \cos x$ , $v = \sqrt{x} - 4x$             | 21. $u = \arccos x$ , $v = \cos x$                           |
| 2. $u = \sin x$ , $v = \cos x$                               | 12. $u = \operatorname{tg} x$ , $v = x - \ln x$    | 22. $u = 5x + x^2$ , $v = \operatorname{arctg} x$            |
| 3. $u = \cos x$ , $v = \operatorname{tg} x$                  | 13. $u = \ln x$ , $v = \operatorname{ctg} x$       | 23. $u = \operatorname{tg} x$ , $v = \operatorname{arctg} x$ |
| 4. $u = \ln x$ , $v = \operatorname{tg} x$                   | 14. $u = \operatorname{ctg} x$ , $v = x^2 + 2x$    | 24. $u = \sqrt{x} + 3x$ , $v = \cos x$                       |
| 5. $u = \arcsin x$ , $v = \sqrt{x+3}$                        | 15. $u = \arccos x$ , $v = \operatorname{tg} x$    | 25. $u = x^3 + 2x$ , $v = \operatorname{ctg} x$              |
| 6. $u = \cos x$ , $v = \arccos x$                            | 16. $u = \sin x$ , $v = x + \sqrt{x}$              | 26. $u = \sin x$ , $v = x^2 - 4x$                            |
| 7. $u = \operatorname{arctg} x$ , $v = 5x + \ln x$           | 17. $u = \cos x$ , $v = \sin x$                    | 27. $u = 2x - \ln x$ , $v = \operatorname{tg} x$             |
| 8. $u = \operatorname{ctg} x$ , $v = x^2 + 4$                | 18. $u = \operatorname{tg} x$ , $v = \cos x$       | 28. $u = \operatorname{ctg} x$ , $v = \arcsin x$             |
| 9. $u = x^3 + 5$ , $v = \sin x$                              | 19. $u = \operatorname{ctg} x$ , $v = x^2 + \ln x$ | 29. $u = x^2 + \sqrt{2x}$ , $v = \sin x$                     |
| 10. $u = \operatorname{arctg} x$ , $v = \operatorname{tg} x$ | 20. $u = x^3 + \sqrt{x}$ , $v = \arcsin x$         | 30. $u = \operatorname{tg} x$ , $v = x^2 - 2 \ln x$          |

### ЗАВДАННЯ 2 Знайти, використовуючи правило диференціювання складної функції, $\partial z / \partial x$ та $\partial z / \partial y$ , якщо $z = f(u, v)$ , де $u = u(x, y)$ , $v = v(x, y)$ .

- |   |   |
|---|---|
| 1. $z = u^3 \ln v$ , $u = x^2 + y$ , $v = x - y^2$                        | 16. $z = v^2 + 2uv + u$ , $u = y \cos x$ , $v = y/x$                                    |
| 2. $z = \sin u \cdot \cos v$ , $u = x\sqrt{y}$ , $v = y\sqrt{x}$          | 17. $z = \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{ctg} v$ , $u = y\sqrt{x}$ , $v = xe^y$ |
| 3. $z = \sqrt{v} \cdot \operatorname{tg} u$ , $u = x - 2y$ , $v = y - 2x$ | 18. $z = \sqrt{u} \operatorname{arctg} v$ , $u = x + 4y$ , $v = 4x - y$                 |
| 4. $z = u^2 - 2uv$ , $u = x \sin y$ , $v = x/y$                           | 19. $z = u^2 + uv - 2v^2$ , $u = ye^{2x}$ , $v = x \cos 2y$                             |
| 5. $z = u \cos v$ , $u = x^2 y$ , $v = xy^2$                              | 20. $z = v \arcsin u$ , $u = \sqrt{xy}$ , $v = 2x^3 y$                                  |
| 6. $z = v^2 + 3uv$ , $u = xe^y$ , $v = x^2 + y$                           | 21. $z = u^2 - u\sqrt{v}$ , $u = y \ln x$ , $v = 3y^2/x$                                |
| 7. $z = u^3 - u\sqrt{v}$ , $u = x \ln y$ , $v = x^2/y$                    | 22. $z = 2v \operatorname{tg} u$ , $u = \sqrt{2x + y}$ , $v = y^2 - 2x$                 |
| 8. $z = 3u \operatorname{ctg} v$ , $u = \sqrt{x+2y}$ , $v = \sqrt{x-y}$   | 23. $z = u^3 - \sqrt{2v}$ , $u = x^2/y$ , $v = ye^{3x}$                                 |
| 9. $z = 5u^3 + v^2$ , $u = y \ln x$ , $v = y - x^{-1}$                    | 24. $z = (u^2 + 1)(v - 3)$ , $u = 4xy^3$ , $v = 2x^3/y$                                 |
| 10. $z = \sqrt{u} \arcsin v$ , $u = x + e^y$ , $v = y\sqrt{x}$            | 25. $z = v^3 \operatorname{arctg} u$ , $u = xy^2$ , $v = 5y - x^{-1}$                   |
| 11. $z = (u+3)(v-1)$ , $u = x + 2y$ , $v = 2x - y$                        | 26. $z = 3uv + v^2$ , $u = x \cos 2y$ , $v = 2y \sin 3x$                                |
| 12. $z = u \operatorname{arctg} v$ , $u = \sqrt{x+3y}$ , $v = \sqrt{xy}$  | 27. $z = (u+4) \operatorname{tg} v$ , $u = x + 2\sqrt{y}$ , $v = y\sqrt{x}$             |
| 13. $z = v^2 e^y$ , $u = 2x^2 y$ , $v = y/x$                              | 28. $z = v^3 \ln u$ , $u = x^2 - 2y$ , $v = x - 2y^3$                                   |
| 14. $z = u^2 + 3uv + v$ , $u = x \sin y$ , $v = y \cos x$                 | 29. $z = \cos u \cdot \operatorname{tg} v$ , $u = x + 3y^2$ , $v = y - x^3$             |
| 15. $z = \ln(u+2v)$ , $u = x\sqrt{y}$ , $v = ye^x$                        | 30. $z = u^2 - 2uv + 4v^2$ , $u = y\sqrt{x}$ , $v = 5y/x$                               |

**ЗАВДАННЯ 3**Дана поверхня  $S$  рівнянням  $F(x; y; z) = 0$ , точка $M(x_0; y_0; z_0)$ . Потрібно пересвідчитися, що точка  $M \in S$ , та знайти нормальний вектор  $\vec{N}$  до поверхні  $S$  в точці  $M$ , що утворює гострий кут з оссю  $Oz$ .Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні  $S$  в точці  $M$ .

№	$S$	$M(x_0; y_0; z_0)$	№	$S$	$M(x_0; y_0; z_0)$
1.	$x^2 + 9y^2 + z^2 - 6x + 4z + 9 = 0$	(3; 0; -4)	2.	$x^2 + 2x - 2y^2 - 4y + z^2 - 1 = 0$	(1; 1; 2)
3.	$x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 1 = 0$	(1; 1; 1)	4.	$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$	(4; 4; 0)
5.	$x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 1 = 0$	(1; 2; 2)	6.	$x^2 - 2x - 2y^2 + 2z^2 - 8z + 6 = 0$	(2; 0; 3)
7.	$x^2 + 4y^2 - z^2 - 4 = 0$	(-2; 0,5; 1)	8.	$2x^2 - y^2 - 4x + 4z - 10 = 0$	(3; 4; 5)
9.	$x^2 - y^2 - 3z^2 + 5xz + 8 = 0$	(2; 2; 4)	10.	$x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 2x + 4z - 2 = 0$	(0; 1; 2)
11.	$4z - x^2 - y^2 + 9 = 0$	(2; 1; -1)	12.	$z^2 - x^2 - 4y^2 + 2x + 2z - 4 = 0$	(-1; 0,5; 2)
13.	$7x^2 - 4y^2 + 4z^2 - 7 = 0$	(1; 1; 1)	14.	$-4x^2 + y^2 - z^2 + 5 = 0$	(0,5; 0; -2)
15.	$x^2 + y^2 - 2z - 10 = 0$	(2; 2; -1)	16.	$3x - y^2 + z^2 - 12 = 0$	(4; 2; 2)
17.	$4x^2 - y^2 + z^2 - 16 = 0$	(1; -2; 4)	18.	$2x^2 + 6x - 8y^2 + 8z^2 - 8 = 0$	(1; 2; 2)
19.	$x^2 + y^2 - 24z - 1 = 0$	(3; 4; 1)	20.	$x^2 - 8x - y^2 + z^2 + 12 = 0$	(2; 1; 1)
21.	$x^2 - y^2 + z^2 - 4 = 0$	(1; 1; -2)	22.	$2x^2 + 8x - y^2 + z^2 - 2z - 14 = 0$	(2; 3; 1)
23.	$z - x^2 + y^2 = 0$	(1; 1; 0)	24.	$9x^2 + y^2 - z^2 - 4y - 6z - 5 = 0$	(0; -4; 3)
25.	$2x^2 - y^2 + z^2 - 7 = 0$	(0; -3; 4)	26.	$2x^2 - 8x - 2y^2 + z^2 - 2z + 6 = 0$	(3; 0; 2)
27.	$2x + 2y^2 - z^2 = 0$	(4; 2; 4)	28.	$-x^2 + 2y^2 + 4y - 4z + 6 = 0$	(4; 3; 5)
29.	$2x^2 + 4x + 2y^2 - 4y - z^2 = 0$	(1; 1; 2)	30.	$z^2 - 2x^2 + 2y^2 + 4x - 2z - 2 = 0$	(2; 1; 0)

**ЗАВДАННЯ 4**Задано скалярне поле  $u = u(x; y; z)$  та напрямок  $\vec{l}$ :а) Знайти  $\text{grad} u$  та похідну за напрямком  $\partial u / \partial l$ .б) Знайти усі частинні похідні другого порядку від функції  $u(x; y; z)$ .

№	$u(x; y; z)$	$\vec{l}$	№	$u(x; y; z)$	$\vec{l}$
1.	$\ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x + z}$	(1; 1; 2)	2.	$x^2 z + \ln(z^2 + x^2)$	(3; 0; -4)
3.	$4 \ln(3 + xy) - 8xy\sqrt{z}$	(4; 4; 0)	4.	$y \ln(1 + x^2) - x \arctg z$	(1; 1; 1)
5.	$\ln(5 + x^2) - 4xy/z$	(2; 0; 3)	6.	$x \ln(e + y^2) - x^2 z \sqrt{y + 1}$	(1; 2; 2)
7.	$x^2 y - \sqrt{x + 5z}$	(3; 4; 5)	8.	$\sqrt{y}/x - yz/(x + y)$	(-2; 0,5; 1)
9.	$xz^2 - \sqrt{y^3 z}$	(0; 1; 2)	10.	$2\sqrt{x + y} + z \arctg x$	(2; 2; 4)
11.	$x\sqrt{y} - yz^2$	(-1; 0,5; 2)	12.	$\ln(z - 1) + \sqrt{2x^2 + y^2}$	(2; 1; -1)
13.	$z(\ln(13 + y^2)) - 4xy^2$	(0,5; 0; -2)	14.	$xz^2 + (z - 2) \arctg y$	(1; 1; 1)
15.	$\arctg(x/y) - xz\sqrt{2y}$	(4; 2; 2)	16.	$\sin \pi(x - y) + \sqrt{2x - yz}$	(2; 2; -1)

№	$u(x; y; z)$	$\bar{l}$	№	$u(x; y; z)$	$\bar{l}$
17.	$\sqrt{z} \ln(1+x^2) - zy\sqrt{x}$	(1; 2; 2)	18.	$(xyz - x)/z$	(1; -2; 4)
19.	$\sqrt{x^2 + 4y} - \sqrt{xz}$	(2; 1; 1)	20.	$yz\sqrt{x} - \ln(y^2 - 3z^2)$	(3; 4; 1)
21.	$x\sqrt{y} - (y+z)\sqrt{x}$	(2; 3; 1)	22.	$z\sqrt{y} - yz\sqrt{x+2}$	(1; 1; -2)
23.	$\sqrt{xy} - 4x\sqrt{4-z^2}$	(0; -4; 3)	24.	$z \operatorname{arctg}(x/y) + \sqrt{x-y}$	(1; 1; 0)
25.	$xz/y + \sqrt{x+y^2+z^2}$	(3; 0; 2)	26.	$(x-3)\arccos(z/4) - xz^2\sqrt{y}$	(0; -3; 4)
27.	$x\sqrt{z} - y\sqrt{x}$	(4; 3; 5)	28.	$\sqrt{x}/y - xz/(x+y)$	(4; 2; 4)
29.	$x \arcsin(y/z)$	(2; 1; 0)	30.	$2\sqrt{z+y} + (x+y^2)\operatorname{arctg} z$	(1; 1; 2)

**ЗАВДАННЯ 5** Дослідити функцію  $z = f(x; y)$  на екстремуми та обчислити екстремальні значення.

- $z = 2x^3 - 3x^2 - 6y^2 + 12xy - 12y + 3$
- $z = 2x^3 + 18xy + 3x^2 + 9y^2 - 18x + 1$
- $z = y^3 + 6x^2 + y^2 - 12xy - 8x + 6$
- $z = y^3 + 18x^2 - 18xy - 3y^2 + 12y - 4$
- $z = 3x^3 - 3x^2 - 6y^2 + 12xy - 8y + 11$
- $z = x^2y + 2xy^2 - 2xy + 4y^2 - 8y + 15$
- $z = 2y^3 + 6x^2 + 5y^2 - 12xy + 20x + 3$
- $z = x^2y - 2xy^2 + 3xy + 6y^2 - 18y - 7$
- $z = 6x^3 + 3x^2 + 15y^2 - 30xy - 10y + 4$
- $z = 2x^2y + xy^2 + 4x^2 + 3xy + 2x - 3$
- $z = x^3 - 3x^2 + 12xy - 6y^2 - 36y + 7$
- $z = x^2y + xy^2 + 2xy + 3y^2 - 3y + 5$
- $z = y^3 + 3x^2 - 6xy - 6y^2 + 36x - 12$
- $z = 2x^2y + xy^2 - 4x^2 + xy - 6x + 3$
- $z = x^3 + 6x^2 - 18xy + 9y^2 - 72y + 24$
- $z = x^2y + 2xy^2 - 3xy + 4y^2 - 10y - 7$
- $z = y^3 + 3x^2 - 6xy - y^2 + 4x + 3$
- $z = 3x^2y + xy^2 + 6x^2 - xy - 4x + 7$
- $z = x^3 + 3x^2 - 4xy + 2y^2 - 8y + 8$
- $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2 - 3$
- $z = y^3 + 9x^2 - 18xy - 2y^2 + 24x - 15$
- $z = x^2y + xy^2 + 2x^2 + 2xy + 4$
- $z = x^3 + 9x^2 - 4xy + 2y^2 - 24y - 9$
- $z = xy^2 + x^2 + 3y^2 + 2x + 2$
- $z = 2y^3 + 3x^2 - 6xy + y^2 - 2x + 4$
- $z = 8x^2y + x^2 + 16y^2 + 2y - 3$
- $z = 2x^3 - 3x^2 - 4xy + 2y^2 + 4y - 8$
- $z = x^3 + 3x^2 + 24xy + 24y^2 - 24x + 12$
- $z = 3y^3 + 3x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x + 2$
- $z = 4x^2y + 4x^2 + y^2 + y + 6$

**ЗАВДАННЯ 6** Для значень  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5$  задано відповідні значення  $y_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ). Потрібно за цими даними знайти за допомогою метода найменших квадратів рівняння лінійної залежності  $y = ax + b$ . Представити експериментальні дані та шукану лінію на графіку.

№	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
1.	1,48	1,68	2,53	2,88	3,72
2.	1,57	2,17	2,51	2,83	3,43
3.	1,47	2,03	2,63	3,23	3,47
4.	1,56	1,94	2,34	2,92	3,55
5.	1,26	1,66	2,74	3,34	3,46
6.	0,98	2,68	5,03	6,88	9,22
7.	1,07	3,17	5,01	6,83	8,93
8.	0,97	3,03	5,13	7,23	8,97
9.	1,06	2,94	4,84	6,92	9,05
10.	0,76	2,66	5,24	7,34	8,96
11.	1,39	2,42	2,35	3,32	3,37
12.	1,62	1,81	2,41	3,16	4,02
13.	1,19	1,89	2,59	3,12	3,39
14.	1,73	2,12	2,27	2,87	3,52
15.	1,67	1,83	2,77	2,68	3,39

№	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
16.	0,89	3,42	4,85	7,32	8,87
17.	1,12	2,81	4,91	7,16	9,52
18.	0,69	2,89	5,09	7,12	8,89
19.	1,23	3,12	4,77	6,87	9,02
20.	1,17	2,83	5,27	6,68	8,89
21.	0,39	2,42	3,35	5,32	6,37
22.	0,62	1,81	3,41	5,16	7,02
23.	0,19	1,89	3,59	5,12	6,39
24.	0,73	2,12	3,27	4,87	6,52
25.	0,67	1,83	3,77	4,68	6,39
26.	0,48	1,68	3,53	4,88	6,72
27.	0,57	2,17	3,51	4,83	6,43
28.	0,47	2,03	3,63	5,23	6,47
29.	0,56	1,94	3,34	4,92	6,55
30.	0,26	1,66	3,74	5,34	6,46

**ЗАВДАННЯ 7** Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = f(x; y)$  в замкнутій області, обмеженій вісями координат та прямою  $\varphi(x; y) = 0$ .

№	$z = f(x; y)$	$\varphi(x; y) = 0$	№	$z = f(x; y)$	$\varphi(x; y) = 0$
1.	$z = 2x^2 - y^2 - 12x - 2y + 3$	$3x - 2y - 12 = 0$	2.	$z = 2x^2 - y^2 - 4x - 4y + 2$	$5x - 4y - 20 = 0$
3.	$z = x^2 + 2y^2 - 2x - 4y - 14$	$x + y - 3 = 0$	4.	$z = 4x^2 + y^2 - 8x + 6y - 3$	$2x - y - 10 = 0$
5.	$z = xy - y + x + 4$	$6x - 5y - 30 = 0$	6.	$z = xy + 3x - y - 3$	$4x - 7y - 28 = 0$
7.	$z = x^2 - 2y^2 - 2x + 4y + 3$	$x + y - 3 = 0$	8.	$z = x^2 - 3y^2 + 6x + 6y + 4$	$6x - 5y + 30 = 0$
9.	$z = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1$	$3x + 5y - 15 = 0$	10.	$z = 2x^2 + 5y^2 + 8x - 20y + 11$	$x - 2y + 10 = 0$
11.	$z = xy + 2y - x - 3$	$2x - 5y + 20 = 0$	12.	$z = xy - 2x - 3y + 5$	$3x + 2y - 12 = 0$
13.	$z = 2x^2 - y^2 + 12x - 6y - 2$	$4x + 7y + 28 = 0$	14.	$z = 2x^2 - 3y^2 + 8x - 18y - 7$	$2x + y + 8 = 0$
15.	$z = 2x^2 + y^2 - 4x + 4y - 7$	$5x - 4y - 20 = 0$	16.	$z = 5x^2 + 2y^2 - 30x - 8y - 9$	$x + y - 6 = 0$
17.	$z = xy + 2x - y + 4$	$3x - 5y - 15 = 0$	18.	$z = xy - 2x + 2y + 2$	$-x + 2y - 8 = 0$
19.	$z = 5x^2 - 2y^2 - 30x + 8y + 1$	$x + y - 6 = 0$	20.	$z = 4x^2 - y^2 - 8x - 6y + 1$	$2x - y - 10 = 0$
21.	$z = x^2 + 3y^2 + 6x - 6y - 2$	$6x - 5y + 30 = 0$	22.	$z = 2x^2 + y^2 + 12x + 6y + 4$	$4x + 7y + 28 = 0$
23.	$z = xy + 3y - x - 2$	$-x + y - 8 = 0$	24.	$z = xy + 3x + 3y - 1$	$x + 3y + 15 = 0$
25.	$z = x^2 - y^2 - 4x + 2y - 6$	$3x + 5y - 15 = 0$	26.	$z = 2x^2 - 5y^2 + 8x + 20y - 5$	$x - 2y + 10 = 0$
27.	$z = 2x^2 + 3y^2 + 8x + 18y + 4$	$2x + y + 8 = 0$	28.	$z = 2x^2 + y^2 - 12x + 2y + 3$	$3x - 2y - 12 = 0$
29.	$z = xy + 3x + 2y + 7$	$2x + y + 10 = 0$	30.	$z = xy - 3y + x - 6$	$4x - 3y - 24 = 0$

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. –М.: Наука, 1970-1985. Т.1.
2. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов. –М.: Наука, 1966.
3. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М.: Наука, 1969.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. –М.: Высшая школа, 1980. Ч.1.
5. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. –М.: Наука, 1987.
6. Сборник задач по математике для втузов :Линейная алгебра и основы математического анализа /Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981;1986.
7. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Ч.2. – Харьков: ХГУ, 1963.