УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

В.І. Храбустовський, Ю.С. Шувалова

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ

Частина 1

ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ, СТІЙКІСТЬ, ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ

Конспект лекцій
з дисципліни«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Харків – 2010

Храбустовський В.І., Шувалова Ю.С. Спеціальні розділи. Ч. 1. Лінійні оператори, стійкість, перехідні процеси: Конспект лекцій. – Харків: УкрДАЗТ, 2010. – 44 с.

Конспект лекцій призначено для вивчення (в тому числі і самостійного) таких розділів: лінійні оператори, стійкість, перехідні процеси. Для більш глибокої проробки цих розділів можна використати наведену літературу.

Рекомендовано для студентів факультету АТЗ денної форми навчання. Конспект може бути також використаний студентами загальнотехнічних спеціальностей.

Іл.19, бібліогр.:17назв.

Конспект лекцій розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 31 березня 2008 р., протокол № 9.

Рецензент

д-р фіз.-мат. наук В.Д. Гордевський (ХНУ)

1 ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

Для вивчення цього розділу потрібно знати основи векторної та лінійної алгебри [1, 5,гл.1, 8, 10,гл.1, 12, гл.XXI, 14, гл.2-4]. Матрицю, транспоновану до матриці A, позначатимемо A^*, одиничну матрицю позначатимемо E.

1.1 Означення та приклади

Множину векторів, що лежать на площині, позначимо $\mathbb{R}^2$, а множину векторів у просторі – $\mathbb{R}^3$.

Якщо кожному вектору $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $(n = 2{,}3)$ поставлено у відповідність вектор $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, то говорять, що задано оператор, що діє у $\mathbb{R}^n$. Символічно оператор записують так: $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{y} = \mathcal{B}\vec{x} \ldots$ (вектори будемо позначати маленькими латинськими буквами, а оператори – великими недрукованими буквами).

Визначення. Оператор $\mathcal{A}$ називається *лінійним*, якщо

$$\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\ \mathcal{A}\vec{x},\ \ \mathcal{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathcal{A}\vec{x} + \mathcal{A}\vec{y}.$$

З визначення випливає, що $\mathcal{A}\vec{o} = \mathcal{A}(\vec{x} - \vec{x}) = \mathcal{A}\vec{x} - \mathcal{A}\vec{x} = \vec{o}$.

Приклад 1. Оператор повороту на кут α (див. рисунок 1.1) на площині (тобто у $\mathbb{R}^2$).

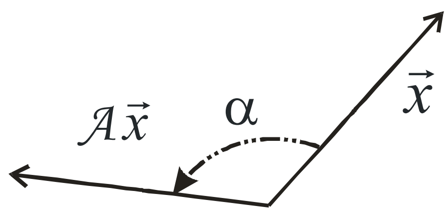


Рисунок 1.1

Як видно з рисунків 1.2, 1.3 оператор $\mathcal{A}$ є лінійним. А саме на рисунку 1.2 бачимо, що поворот вектора $\lambda\vec{x}$ на кут α дорівнює вектору $\lambda\mathcal{A}\vec{x}$. На рисунку 1.3 бачимо, що вектор, який одержується поворотом вектора суми $\vec{x} + \vec{y}$ на кут α, дорівнює вектору $\mathcal{A}\vec{x} + \mathcal{A}\vec{y}$, який є сумою результатів повороту на кут α векторів $\vec{x}$ та $\vec{y}$. Отже, оператор $\mathcal{A}$ є лінійним.

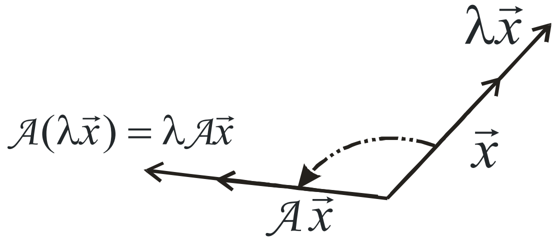


Рисунок 1.2

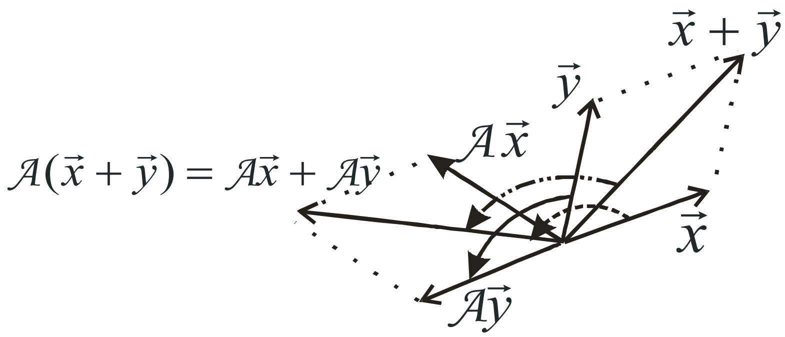


Рисунок 1.3

Приклад 2. Оператор дзеркального відображення від заданої прямої (див. рисунок 1.4) на площині (у $\mathbb{R}^2$).

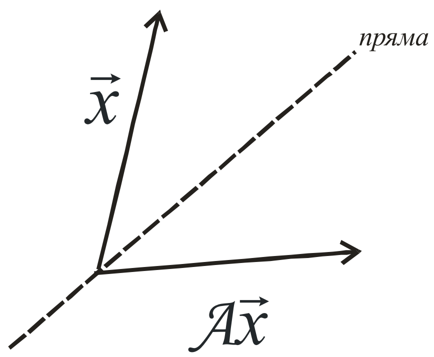


Рисунок 1.4

Як видно з рисунків 1.5, 1.6, оператор $\mathcal{A}$ є лінійним, а саме: з рисунка 1.5 бачимо, що дзеркальне відображення вектора $\lambda\vec{x}$ дорівнює вектору $\lambda\mathcal{A}\vec{x}$. З рисунка 1.6 бачимо, що дзеркальне відображення вектора суми $\vec{x}+\vec{y}$ співпадає з вектором суми $\mathcal{A}\vec{x}+\mathcal{A}\vec{y}$. Отже, оператор $\mathcal{A}$ є лінійним.

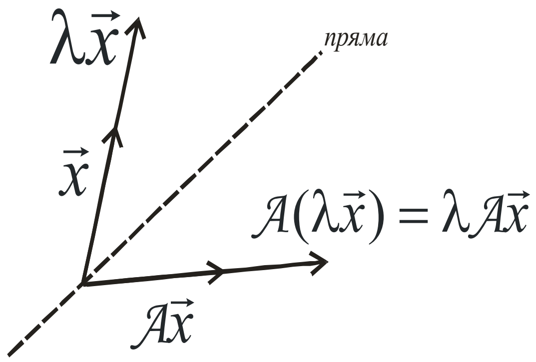


Рисунок 1.5

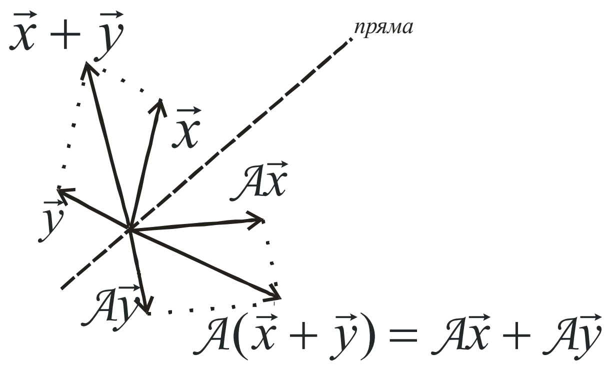


Рисунок 1.6

Приклад 3. Оператор проектування на задану вісь l у просторі $\mathbb{R}^3$ (рисунок 1.7).

$\mathcal{A}\vec{x} = \text{Пр}_{\vec{l}_0}\vec{x}\cdot\vec{l}_0 = \vec{l}_0\cdot(\vec{x}\cdot\vec{l}_0)$, де $\vec{l}_0$-орт осі l.

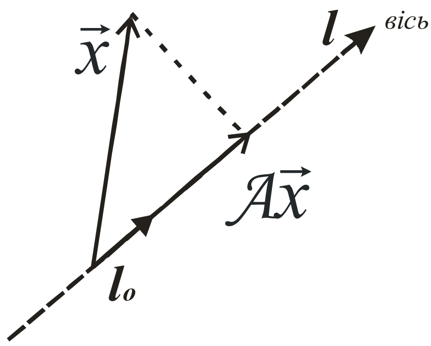


Рисунок 1.7

Лінійність $\mathcal{A}$ випливає з властивостей скалярного добутку.

Приклад 4. $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{x}\times\vec{a}$, де $\vec{a}$ фіксований вектор. Лінійність $\mathcal{A}$ випливає з властивостей векторного добутку.

Приклад 5. Оператор $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{x}+\vec{a}$ при $\vec{a}\neq 0$ не є лінійним. Дійсно, $\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\vec{x}+\vec{a} \neq \lambda(\vec{x}+\vec{a}) = \lambda\mathcal{A}\vec{x}$.

1.2 Матриця лінійного оператора

Нехай лінійний оператор $\mathcal{A}$ діє, наприклад, на площині (у $\mathbb{R}^2$). Оберемо на ній базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ та розкладемо за ним вектори $\mathcal{A}\vec{e}_1$, $\mathcal{A}\vec{e}_2$.

$$\mathcal{A}\vec{e}_1 = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},\ \mathcal{A}\vec{e}_2 = \gamma\vec{e}_1 + \delta\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}.$$

Матриця $\mathrm{A} = \begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}$ називається матрицею оператора $\mathcal{A}$ у базисі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Вона дозволяє знаходити координати вектора $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ в базисі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, якщо відомі координати $\vec{x}$ у цьому базисі. А саме, нехай $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$, тоді координати $\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$ вектора $\vec{y} = A\vec{x}$ знаходимо за правилом

$$\boxed{\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha x_1 + \gamma x_2\\ \beta x_1 + \delta x_2\end{pmatrix}.}$$

Дійсно,

$$\begin{aligned}\vec{y} &= \mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = x_1\mathcal{A}\vec{e}_1 + x_2\mathcal{A}\vec{e}_2 = \\ &= x_1(\alpha\,\vec{e}_1 + \beta\,\vec{e}_2) + x_2(\gamma\,\vec{e}_1 + \delta\,\vec{e}_2) = \underbrace{(\alpha\,x_1 + \beta x_2)}_{y_1}\vec{e}_1 + \underbrace{(\gamma\,x_1 + \delta x_2)}_{y_2}\vec{e}_2.\end{aligned}$$

Приклад 1. У базисі $\vec{i}, \vec{j}$ матриця оператора повороту на 90^0 проти стрілки годинника дорівнює $\mathrm{A} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, тому що (див. рисунок 1.8)

$$\mathcal{A}\vec{i} = \vec{j} = 0\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}\vec{j} = -\vec{i} = -1\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} = \begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}.$$

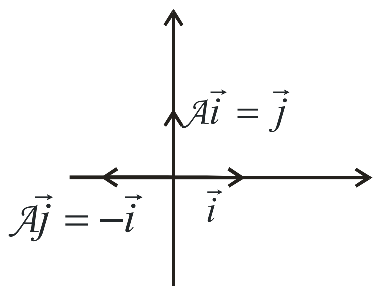


Рисунок 1.8

Приклад 2. У базисі $\vec{i}, \vec{j}$ матриця оператора проектування на бісектрису першого координатного кута (див. рисунок 1.9) дорівнює

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Дійсно, $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{l}_0(\vec{x} \cdot \vec{l}_0)$, де $\vec{l}_0$-орт бісектриси,

$$\mathbf{A}\vec{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})(\underbrace{\vec{i} \cdot \vec{l}_0}_{1/\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}\vec{j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})(\underbrace{\vec{j} \cdot \vec{l}_0}_{1/\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

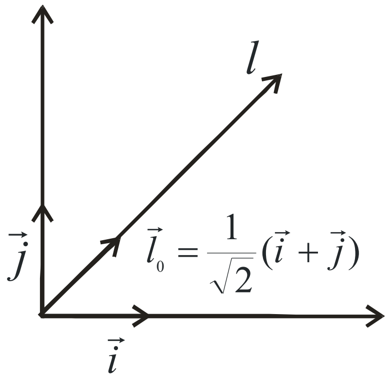


Рисунок 1.9

Приклад 3. У базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ матриця оператора $\mathcal{A}$ дорівнює $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти $\mathcal{A}\vec{x}$, якщо $\vec{x} = 6\vec{e}_1 - \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Розв’язання.

$\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$, де $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\mathcal{A}\vec{x} = 4\vec{e}_1 + 14\vec{e}_2$.

1.3 Матриця переходу та перетворення матриці оператору при зміні базису

Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ та $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ два базиси на площині у $\mathbb{R}^2$. Розкладемо кожен вектор другого базису по першому:

$$\vec{e}_1' = p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},\ \vec{e}_2' = r\vec{e}_1 + s\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}.$$

Матриця $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ називається матрицею переходу від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ до базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$.

Матрицю переходу знаходимо за допомогою теореми 1.1.

Теорема 1.1 про перехід до нового базису (на площині).[*]

Нехай в деякому базисі $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Вектори $\vec{a}, \vec{b}$ самі утворюють базис тоді і тільки тоді, якщо визначник, складений з їх координат, не дорівнює нулю.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

При цьому нові координати λ, μ вектора $\vec{c}$ у базисі $\vec{a}, \vec{b}$ можна знайти, розв'язавши лінійну систему:

$$\begin{cases} a_1\lambda + b_1\mu = c_1 \\ a_2\lambda + b_2\mu = c_2 \end{cases} .$$

Доведення. Нехай $\Delta \neq 0$. Якщо $\vec{a}, \vec{b}$ не базис, то один з цих векторів, наприклад $\vec{b}$, можна виразити через інший $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.

Запишемо цю рівність у координатах $\begin{matrix} b_1 = \alpha a_1 \\ b_2 = \alpha a_2 \end{matrix}$, тоді $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & \alpha a_1 \\ a_2 & \alpha a_2 \end{vmatrix} = 0$. Ми прийшли до протиріччя, тому $\vec{a}, \vec{b}$ базис. Отже $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, записавши цю рівність у координатах, отримаємо шукану систему.

Навпаки, нехай $\vec{a}, \vec{b}$ базис. Якщо $\Delta = 0$, то його стовпці пропорційні: $a_1 = \alpha b_1$; $a_2 = \alpha b_2$. Тобто вектори $\vec{a}, \vec{b}$ паралельні, що суперечить твердженню: $\vec{a}, \vec{b}$ базис.
Теорему доведено.

[*] Аналогічні теореми справедливі і у просторі.

Теорема 1.1 дозволяє знаходити координати будь-якого вектора $\vec{x}$ у базисі $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$, якщо відомі його координати у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. А саме, якщо $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, то $\vec{x} = x_1'\vec{e}_1' + x_2'\vec{e}_2' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \mathrm{T}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, де T- матриця переходу від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ до базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$.

Приклад 1. Знайти матрицю переходу T від базису $\vec{i}, \vec{j}$ до базису $\vec{j}, \vec{l}_0$, де $\vec{l}_0$- орт бісектриси першого координатного кута.

Оскільки

$$\vec{j} = 0\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},\ \vec{l}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\vec{j} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix},$$

то $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Приклад 2. Матриця переходу T від одного декартового базису $\vec{i}, \vec{j}$ до іншого $\vec{i}', \vec{j}'$ є ортогональною, тобто $\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{T}^*$.

Доведення. $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$, де $\vec{i}' = p\vec{i} + q\vec{j}$, $\vec{j}' = r\vec{i} + s\vec{j}$.

$1 = \left(\vec{i}'\right)^2 = p^2 + q^2$, $1 = \left(\vec{j}'\right)^2 = r^2 + s^2$, $0 = \vec{i}'\cdot\vec{j}' = pr + qs$, тому

$$\mathrm{T}^*\mathrm{T} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2+q^2 & pr+qs \\ rp+sq & r^2+s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}.$$

Отже, рівність $\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{T}^*$ доведена.

Теорема 1.2 Нехай у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ матриця оператора $\mathcal{A}$ дорівнює A. Тоді його матриця A' у новому базисі $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ дорівнює $\mathrm{A}' = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{T}$, де T матриця переходу від старого базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ до нового $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$.

Приклад 3. У базисі $\vec{i}, \vec{j}$ матриця оператора $\mathcal{A}$ дорівнює $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти його матрицю A' у новому базисі $\vec{j}, \vec{l}_0$, де $\vec{l}_0$- орт бісектриси першого координатного кута.

Розв'язання. У прикладі 1 знайдена матриця переходу від старого базису до нового $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Тому

$$\mathrm{A}' = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{T} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\Vert \\ \mathrm{T}^{-1}}} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}.$$

1.4 Дії з операторами

- ✓ Добуток $\lambda\mathcal{A}$ оператора $\mathcal{A}$ на число λ - це оператор, який діє так: $(\lambda\mathcal{A})\vec{x} = \lambda(\mathcal{A}\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
- ✓ Сума $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ операторів $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ - це оператор, який діє так: $(\mathcal{A} + \mathcal{B})\vec{x} = \mathcal{A}\vec{x} + \mathcal{B}\vec{x}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
- ✓ Добуток $\mathcal{A}\mathcal{B}$ операторів $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ - це оператор, який діє так: $(\mathcal{A}\mathcal{B})\vec{x} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

При діях з операторами, ті ж самі дії здійснюються з їх матрицями. (Правила дій з матрицями визначалися саме таким чином, щоб це виконувалося.)

Перевіримо це правило на прикладі.

Приклад 1. Нехай $\mathcal{A}$ оператор повороту на 90^0 проти стрілки годинника. Оскільки в базисі $\vec{i}, \vec{j}$ $\mathcal{A}\vec{i} = \vec{j}$, $\mathcal{A}\vec{j} = -\vec{i}$, то матриця цього оператора дорівнює $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Нехай $\mathcal{B}$ - оператор дзеркального відображення відносно осі $0Y$. Оскільки $\mathcal{B}\vec{i} = -\vec{i}$, $\mathcal{B}\vec{j} = \vec{j}$, то матриця цього оператора $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Добуток матриць $\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Знайдемо матрицю оператора добутку $\mathcal{AB}$. Оскільки $(\mathcal{AB})\vec{i} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\vec{i}) = \mathcal{A}(-\vec{i}) = -\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(\mathcal{AB})\vec{j} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\vec{j}) = \mathcal{A}\vec{j} = -\vec{i} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то матриця оператора добутку $\mathcal{AB}$ дорівнює матриці $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, яка співпадає з матрицею AB.

Знайдемо добуток матриць $\mathrm{BA} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Пропонуємо самостійно переконатися, що це й буде матриця оператора $\mathcal{BA}$.

Визначення. Оператор $\mathcal{A}^{-1}$ називається *оберненим* до оператора $\mathcal{A}$, якщо $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}\vec{x} = \vec{x}$.

Приклад 2. Нехай $\mathcal{A}$ оператор повороту на кут α, тоді, як видно з рисунка 1.10, $\mathcal{A}^{-1}$ - це оператор повороту на кут $(-\alpha)$.

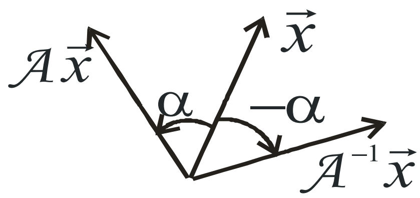


Рисунок 1.10

Приклад 3. Нехай $\mathcal{A}$ оператор дзеркального відображення (див. рисунок 1.4), тоді $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$.

Доведіть самостійно, що якщо оператору $\mathcal{A}$ відповідає матриця A, то оператору $\mathcal{A}^{-1}$ відповідає обернена матриця A^{-1}.

1.5 Власні значення та вектори

Визначення. Якщо оператор $\mathcal{A}$ переводить вектор $\vec{x} \neq 0$ у паралельний, тобто $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, вектор $\vec{x}$ називається *власним вектором* оператора $\mathcal{A}$, а число λ - його *власним значенням*. Множина власних значень оператора $\mathcal{A}$ називається його *спектром* та позначається $\sigma(\mathcal{A})$.

Зауваження. Кожен вектор паралельний власному вектору оператора $\mathcal{A}$, також є власним вектором оператора $\mathcal{A}$ (тобто якщо $\vec{a}$ власний вектор оператора $\mathcal{A}$, то $k\vec{a}, k \neq 0$ також власний вектор).

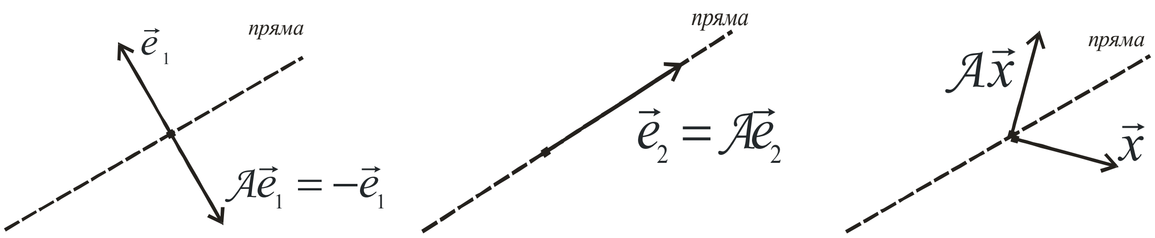
Приклад 1. Оператор повороту на кут α (окрім $\alpha = k \cdot 180^0,\ k \in Z$) не має власних векторів.

Приклад 2. В оператора дзеркального відображення на площині (див. рисунок 1.4) власними векторами є:

по-перше, вектори, перпендикулярні прямій (рисунок 1.11,а), відповідне власне значення дорівнює (-1);

по-друге, вектори, паралельні прямій (рисунок 1.11,б), відповідне власне значення дорівнює 1.

Інші вектори не є власними оператора дзеркального відображення (рисунок 1.11,в).



а) б) в)

Рисунок 1.11

Приклад 3. В оператора $\mathcal{A}$ проектування на вісь l у просторі власними векторами (рисунок 1.12,а) є:

по-перше, вектори, перпендикулярні осі l, відповідне власне значення дорівнює 0:

$$\mathcal{A}\vec{e}_1 = 0 = 0 \cdot \vec{e}_1, \qquad \mathcal{A}\vec{e}_3 = 0 = 0 \cdot \vec{e}_3;$$

по-друге, вектори, паралельні осі l, відповідне власне значення, дорівнює 1:

$$\mathcal{A}\vec{e}_2 = \vec{e}_2 = 1 \cdot \vec{e}_2 \,.$$

Інші вектори не є власними векторами оператора $\mathcal{A}$ проектування на вісь l (рисунок 1.12,б).

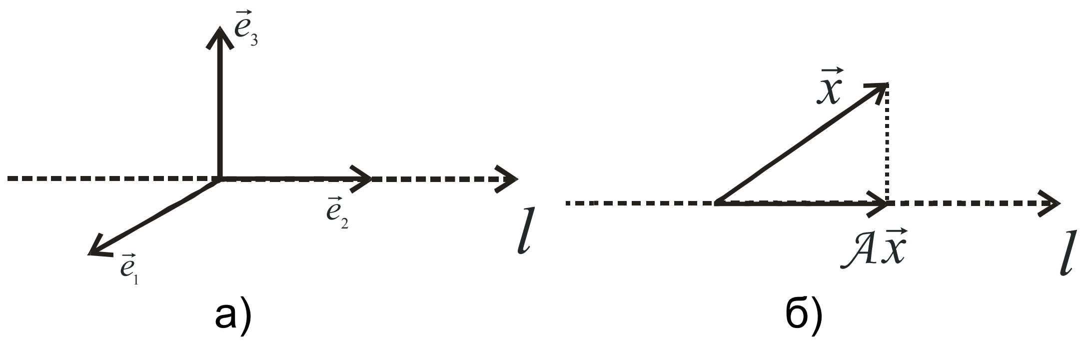


Рисунок 1.12

Деякі властивості власних значень та власних векторів:

1 Якщо оператор $\mathcal{A}$ має обернений $\mathcal{A}^{-1}$, то оператори $\mathcal{A}$ та $\mathcal{A}^{-1}$ мають одні і ті самі власні вектори.

Дійсно, нехай $\vec{x}$ власний вектор оператора $\mathcal{A}$, тоді $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ $\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}^{-1}\lambda\vec{x} = \lambda\mathcal{A}^{-1}\vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \lambda\mathcal{A}^{-1}\vec{x} \Rightarrow \mathcal{A}^{-1}\vec{x} = \dfrac{1}{\lambda}\vec{x}, \; (\lambda \neq 0)$, тобто $\vec{x}$ власний вектор оператора $\mathcal{A}^{-1}$ з власним значенням $\dfrac{1}{\lambda}$.

2. Якщо оператор $\mathcal{T}$ має обернений, тоді оператори $\mathcal{A}$ та $\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T}$ мають одні і ті самі власні значення.

Дійсно, нехай $\vec{x}$ власний вектор оператора $\mathcal{A}$ з власним значенням λ, тоді $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Rightarrow \mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{T}^{-1}\lambda\vec{x} \Rightarrow \mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\underbrace{\mathcal{T}\mathcal{T}^{-1}\vec{x}}_{\vec{x}} = \lambda\mathcal{T}^{-1}\vec{x}$.

Позначимо $\mathcal{T}^{-1}\vec{x} = \vec{y}$, маємо $\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T}\,\vec{y} = \lambda\vec{y}$, тобто $\vec{y}$ власний вектор оператора $\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T}$ з власним значенням λ.

Навпаки, нехай $\vec{x}$ власний вектор оператора $\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T}$ з власним значенням λ, тоді $\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T}\,\vec{x} = \lambda\vec{x} \Rightarrow \mathcal{T}\,\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T}\,\vec{x} = \mathcal{T}\,\lambda\vec{x} \Rightarrow \mathcal{A}\mathcal{T}\,\vec{x} = \lambda\mathcal{T}\,\vec{x}$. Позначимо $\mathcal{T}\,\vec{x} = \vec{y}$, маємо $\mathcal{A}\,\vec{y} = \lambda\,\vec{y}$, тобто $\vec{y}$ власний вектор оператора $\mathcal{A}$ з власним значенням λ.

1.6 Знаходження власних значень та власних векторів (на прикладі)

Нехай в деякому базисі матриця оператора $\mathcal{A}$ дорівнює $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, а координати власного вектора $\vec{x}$ дорівнюють x_1, x_2. Тоді $\mathcal{A}\vec{x}=\lambda\vec{x} \Rightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A\text{-}\lambda E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0$,

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1-4x_2=0 \\ -x_1+(1-\lambda)x_2=0 \end{cases}.$$

Ця однорідна система має ненульовий розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулю. Тому власні значення λ є коренями рівняння

$$\det(A - \lambda E)=0,$$

яке називають *характеристичним*.

Для нашої матриці характеристичне рівняння:

$$\det(A\text{-}\lambda E)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-2=1-2\lambda+\lambda^2-4=-3-2\lambda+\lambda^2=$$
$$=(\lambda+1)(\lambda-3)=0.$$

Маємо два власні значення: $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=3.$

Знайдемо власний вектор $\vec{e}_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, що відповідає власному значенню $\lambda_1=-1$.

$$A\vec{e}_1=\lambda_1\vec{e}_1 \Rightarrow (A\text{-}(\text{-}1)\cdot E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1-4x_2=0 \\ -x_1+2x_2=0 \end{cases} \Rightarrow x_1=2x_2,$$

припустимо $x_2=1$, маємо власний вектор $\vec{e}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пропонуємо вивести самостійно, що власний вектор, який відповідає власному значенню $\lambda_2 = 3$, дорівнює $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.7 Деякі числові характеристики оператора, що не залежать від базису

✓ При заміні базису матриця оператора $\mathcal{A}$ змінюється за формулою $\mathrm{A}' = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{AT}$ (де T – матриця переходу від одного базису до іншого), але характеристичне рівняння залишається при цьому незмінним, оскільки для будь-якого λ

$$\det(\mathrm{A}'\text{-}\lambda\mathrm{E}) = \det(\mathrm{T}^{-1}\mathrm{AT}\text{-}\lambda\mathrm{T}^{-1}\mathrm{T}) = \det(\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A}\text{-}\lambda\mathrm{E})\mathrm{T}) =$$
$$= \det\mathrm{T}^{-1}\det(\mathrm{A}\text{-}\lambda\mathrm{E})\det\mathrm{T} = \frac{1}{\det\mathrm{T}}\det(\mathrm{A}\text{-}\lambda\mathrm{E})\det\mathrm{T} = \det(\mathrm{A}\text{-}\lambda\mathrm{E}).$$

Тому, зокрема, спектр $\sigma(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ і визначник $\det A$ матриці A оператора $\mathcal{A}$ не залежить від вибору базису.

✓ Також від вибору базису не залежить сума діагональних елементів матриці оператора, яка називається її слідом та позначається $sp\mathrm{A}$ (шпур A) або $tr\mathrm{A}$ (трейс A).

Доведемо це на прикладі оператора в $\mathbb{R}^2$. Якщо матриця оператора дорівнює $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то

$$\det(\mathrm{A}\text{-}\lambda\mathrm{E}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - \lambda\underbrace{(a+d)}_{sp\mathrm{A}} + \underbrace{ad-bc}_{\det\mathrm{A}},$$

оскільки $sp\mathrm{A}$ є коефіцієнтом характеристичного рівняння, то він не залежить від базису. Що й потрібно було довести.

✓ Для операторів в $\mathbb{R}^2$: $sp\mathrm{A} = \lambda_1 + \lambda_2$ та $\det\mathrm{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2$, де λ_1 та λ_2 власні значення (пропонуємо вивести це самостійно з попередньої формули $\det(A - \lambda E)$).

✓ Оскільки характеристичні рівняння AB та BA співпадають (пропонуємо довести це самостійно), то $sp\mathrm{AB} = sp\mathrm{BA}$, $\det\mathrm{AB} = \det\mathrm{BA}$.

1.8 Діагоналізація операторів та матриць

Теорема 1.3. Якщо власні вектори оператора $\mathcal{A}$ утворюють базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, то в цьому базисі матриця A оператора має діагональний вид

$$\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = diag(\lambda_1, \lambda_2),$$

де λ_i - власні значення, $i = 1,2$.

Доведення

$$\mathbf{A}\vec{e}_1 = \lambda_1\vec{e}_1 = \lambda_1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}\vec{e}_2 = \lambda_2\vec{e}_2 = 0\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Тобто матриця оператора $\mathcal{A}$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ дійсно має вид, який вказано в теоремі.

Наслідок. Якщо власні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ матриці A утворюють базис, то $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{T} = diag(\lambda_1, \lambda_2)$, звідки $\mathrm{A} = \mathrm{T}\,diag(\lambda_1, \lambda_2)\mathrm{T}^{-1}$ де матриця $\mathrm{T} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, складена зі стовпців координат власних векторів (і є матрицею переходу від даного базису з них).

У загальному випадку базис із власних векторів існує не завжди. Наприклад, взагалі не має власних векторів оператор повороту на кут $\alpha \neq 180^0 n\ (n \in \mathrm{Z})$ на площині.

А у матриці $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ обидва власних значення дорівнюють 0, але будь-який її власний вектор є пропорційним вектору $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тому у цієї матриці базис із власних векторів не існує.

Однак, коли у оператора в $\mathbb{R}^n$ існує n різних власних значень, то базис із власних векторів існує, що випливає з теореми.

Теорема 1.4. Власні вектори, що відповідають попарно різним власним значенням, лінійно незалежні.

Доведення проведемо для двох власних векторів $\vec{x}$ та $\vec{y}$. Нехай $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \mu\vec{y}$, $\lambda \neq \mu$.

Якщо $\vec{x}$ та $\vec{y}$ лінійно залежні, то

$$\vec{x} = a\vec{y} \Rightarrow \mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}a\vec{y} \Rightarrow \lambda\vec{x} = a\mu\vec{y}.$$

З іншого боку $\vec{x} = a\vec{y} \Rightarrow \lambda\vec{x} = \lambda a\vec{y}$.

Тому маємо $a\mu\vec{y} = \lambda a\vec{y} \Rightarrow 0 = a(\mu - \lambda)\vec{y} \Rightarrow \vec{y} = 0$, але власний вектор не може бути нульовим, отже, $\vec{x}$ та $\vec{y}$ лінійно незалежні.

1.9 Функції від матриць

Дана функція $f(\lambda)$ та матриця A, у якої власні вектори утворюють базис, тобто $\mathrm{A} = \mathrm{T}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\mathrm{T}^{-1}$. Тоді за визначенням

$$\boxed{f(\mathrm{A}) = \mathrm{T}\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{pmatrix}\mathrm{T}^{-1}}.$$

Приклад 1. Для функції $f(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}$, маємо $f(\mathrm{A}) = \mathrm{T}\begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 \end{pmatrix}\mathrm{T}^{-1}$. Слід очікувати, що $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^{-1}$. Перевіримо це:

$$\mathrm{A}f(\mathrm{A}) = \mathrm{T}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\mathrm{T}^{-1}\mathrm{T}\begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 \end{pmatrix}\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{T}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 \end{pmatrix}\mathrm{T}^{-1} =$$

$$= \mathrm{T}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{T}\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{E} \Rightarrow f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^{-1}.$$

Приклад 2. Для функції $f(\lambda) = \sqrt[3]{\lambda}$ маємо $f(\mathrm{A}) = \mathrm{T}\begin{pmatrix} \sqrt[3]{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{\lambda_2} \end{pmatrix}\mathrm{T}^{-1}$.

Пропонуємо самостійно перевірити, що $f(\mathrm{A}) = \sqrt[3]{\mathrm{A}}$, тобто $\left(f(\mathrm{A})\right)^3 = \mathrm{A}$.

Приклад 3. $\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}^5 = ?$

Розв’язання. Знайдемо власні значення матриці

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\mathrm{A}\text{-}\lambda\mathrm{E}) = \begin{vmatrix} 0{,}1-\lambda & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 0{,}4-\lambda \end{vmatrix} = (0{,}1-\lambda)(0{,}4-\lambda) - 0{,}6\cdot 0{,}9 = \lambda^2 - 0{,}5\lambda + 0{,}5.$$

Отже, характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 0{,}5\lambda + 0{,}5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\quad \lambda_2 = -0{,}5.$$

Знайдемо власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda_1 = 1$:

$$\mathrm{A}\vec{\mathrm{e}}_1 = \lambda_1\vec{\mathrm{e}}_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -0{,}9x_1 + 0{,}9x_2 = 0 \\ 0{,}6x_1 - 0{,}6x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Пропонуємо вивести самостійно, що власний вектор, який відповідає власному значенню $\lambda_2 = -0,5$, дорівнює $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Тому матриця $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathrm{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ -0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$.

Отже,

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 1,9 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}^5 = \mathrm{T}\begin{pmatrix} \lambda_1^5 & 0 \\ 0 & \lambda_2^5 \end{pmatrix}\mathrm{T}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^5 & 0 \\ 0 & (-0,5)^5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ -0,2 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,38125 & 0,61875 \\ 0,4125 & 0,5875 \end{pmatrix}.$$

2 СТІЙКІСТЬ

Для вивчення цього розділу потрібно знати основи теорії звичайних диференційних рівнянь [2; 11, гл.1, гл.5; 12, гл.XIII; 15, гл.9].

2.1 Автономні системи

Визначення. *Автономними системами* називаються системи диференційних рівнянь (ДР), що не містять незалежну змінну, яку позначимо t. *Нормальна форма* цієї системи така:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}). \tag{2.1}$$

Будь-яку систему ДР можна звести до автономної.

Приклад 1.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2) \end{cases}.$$

Якщо позначимо $t = x_3$, перейдемо до автономної системи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_3, x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_3, x_1, x_2) \\ \dot{x}_3 = 1 \end{cases}.$$

Якщо $\vec{x}(t)$ розв’язок системи ДР (2.1), тоді $\vec{x}(t+c)$ також розв’язок.

Нехай для наочності система (2.1) складається з двох ДР

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}. \tag{2.2}$$

Будь-який її розв'язок $\vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ задає параметрично деяку криву на площині XOY, яка називається *фазовою траєкторією* системи (2.2), а картина, яку утворюють ці траєкторії, називається її *фазовим портретом*. Якщо вектор-функція $\vec{f}(\vec{x})$ задовольняє певні умови, тоді дві траєкторії або не мають спільних точок, або співпадають. Тобто площина XOY «розшаровується» на траєкторіях, що не перетинаються.

Приклад 2. Фазовий портрет ДР $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$, що описує гармонічні коливання, – це фазовий портрет, який відповідає такій системі для $\vec{x} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\omega^2 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}; \ \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Будь-яку траєкторію на площині $yO\dot{y}$ параметрично задано так:

$$\begin{cases} y = A\sin(\omega t + \varphi) \\ \dot{y} = A\omega\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}.$$

Маємо $\left(\dfrac{y}{A}\right)^2 + \left(\dfrac{\dot{y}}{A\omega}\right)^2 = 1$ – еліпс. На рисунку 2.1 зображено фазовий портрет.

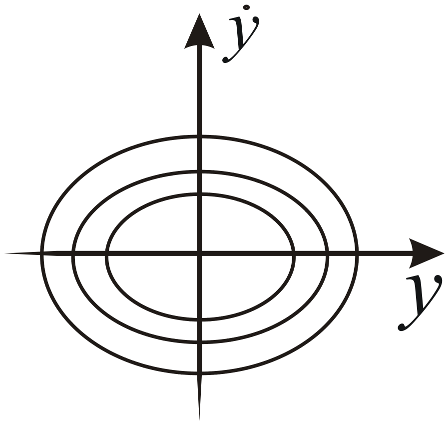


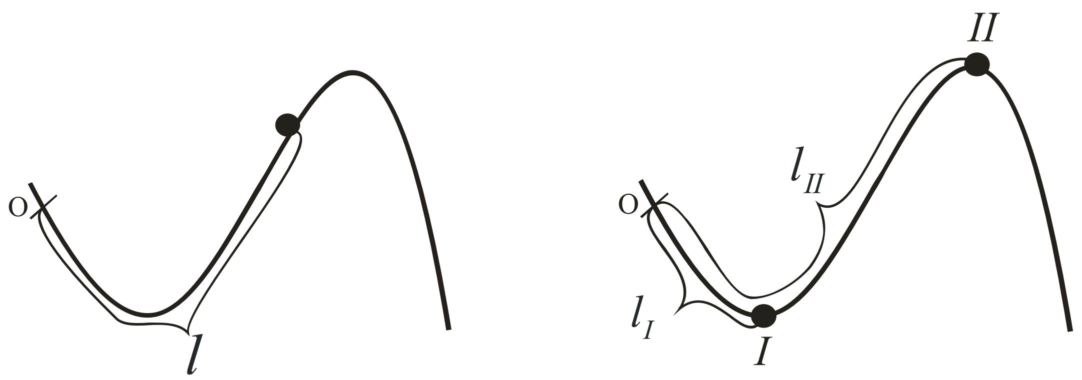
Рисунок 2.1

Замкнута фазова траєкторія називається *циклом*. Можна показати, що якщо розв'язку $\vec{x}(t)$ відповідає цикл, то $\vec{x}(t)$ - періодична вектор-функція.

2.2 Положення рівноваги

Вектор $\vec{a}$ називається *положенням рівноваги* системи (2.1), якщо $\vec{f}(\vec{a}) = 0$. Якщо $\vec{a}$ положення рівноваги системи (2.1), то $\vec{x}(t) = \vec{a}$ її розв'язок.

Приклад. Рух кульки плоскою траєкторією (див. рисунок 2.2,а). Такому руху відповідає ДР виду $\ddot{l} = f(l)$ (l див. рисунок 2.2,а).



а) б)

Рисунок 2.2

Зробимо заміну $\vec{x} = \begin{pmatrix} l \\ \dot{l} \end{pmatrix}$ та зведемо це рівняння до автономної системи

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{l} \\ \ddot{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{l} \\ f(l) \end{pmatrix} = \vec{f}(\vec{x}).$$

Знайдемо її положення рівноваги.

$$0=\vec{f}(\vec{x})=\begin{pmatrix} \dot{l} \\ f(l) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{l}=0 \\ \ddot{l}=0 \end{cases} \quad \forall t .$$

$$\vec{a}_I=\begin{pmatrix} l_I \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_{II}=\begin{pmatrix} l_{II} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

У даному прикладі положення рівноваги це той розв'язок, що відповідає випадку точки спокою. Це можливо тільки, якщо кульку помістити без початкової швидкості у положення I або II (див. рисунок 2.2,б).

2.3 Стійкість положення рівноваги

У прикладі розділу 2.2 (див. рисунок 2.2,б) положення рівноваги істотно відрізняються. Перше з них стійке у тому сенсі, що якщо кульку трішки вивести з нього та відпустити з малою початковою швидкістю, то вона буде здійснювати коливання навколо положення рівноваги. Якщо ж кульку вивести з другого положення рівноваги, то вона до нього ніколи не повернеться. Таких наочних уявлень про стійкість зовсім не досить, щоб розв'язати задачу про стійкість реальних технічних систем. Загальне визначення стійкості дав О.М. Ляпунов.

Визначення. Положення рівноваги $\vec{a}$ системи

$$\dot{\vec{x}}=\vec{f}(\vec{x})$$

називається *стійким*, якщо $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)$ таке, що для будь-якого розв'язку $\vec{x}(t)$, початкове значення якого задовольняє умові

$$\left|\vec{x}(0)-\vec{a}\right|<\delta \qquad (2.3)$$

для всіх $0\le t<\infty$, виконується

$$\left|\vec{x}(t)-\vec{a}\right|<\varepsilon .$$

Якщо для деякого ε такого δ не існує, таке положення називають *нестійким*.

Визначення. Положення рівноваги $\vec{a}$ називається *асимптотично стійким*, якщо воно стійке та якщо при малих δ з (2.3) $\vec{x}(t) \to \vec{a}$, коли $t \to +\infty$.

Проілюструємо геометрично ці визначення для випадку одного ДР. Стійкість a (див. рисунок 2.3), асимптотична стійкість a (див. рисунок 2.4).

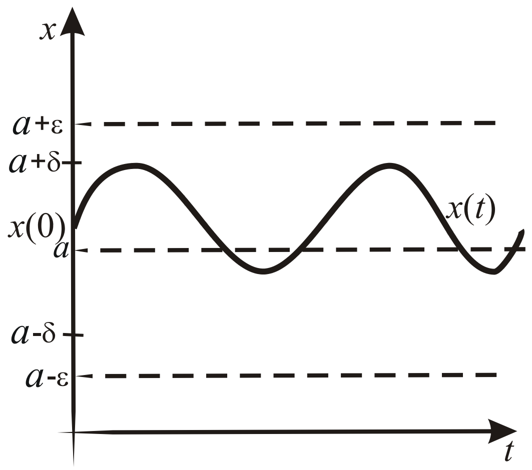


Рисунок 2.3

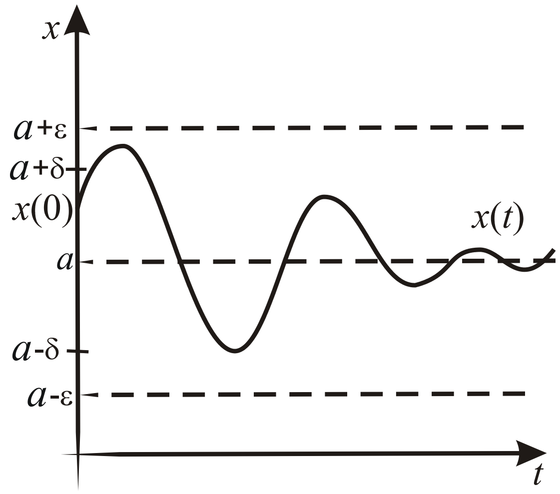


Рисунок 2.4

У прикладі з кульками перше положення рівноваги стійке, а якщо є тертя, то навіть асимптотично стійке. Друге положення нестійке.

2.4 Стійкість положення рівноваги однорідної лінійної системи ДР зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійну однорідну систему зі сталими коефіцієнтами

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}. \tag{2.4}$$

Вектор $\vec{a} = 0$ є її положенням рівноваги.

Теорема 2.1

1 Положення рівноваги $\vec{a} = 0$ системи (2.4) асимптотично стійке, якщо всі власні значення λ_j матриці A лежать у лівій півплощині (тобто $\forall j \;\; \operatorname{Re}\lambda_j < 0$).

2 Положення рівноваги $\vec{a}=0$ системи (2.4) нестійке, якщо хоча б одне з власних значень λ_j матриці A лежить у правій півплощині (тобто $\exists j \ \operatorname{Re}\lambda_j > 0$).

Доведення для випадку попарно різних λ_j.

1 $\vec{a}=0$ асимптотично стійке, коли для будь-якого розв'язку $\vec{x}(t)$ $\lim\limits_{t\to+\infty}\vec{x}(t)=\vec{a}=0$, якщо модуль $\left|\vec{a}-\vec{x}(0)\right|$ достатньо малий.

Але будь-яке $\vec{x}(t)$ дорівнює лінійній комбінації розв'язків виду $\vec{e}_j e^{\lambda_j t}$, де $\vec{e}_j$ власний вектор матриці A, який відповідає власному значенню λ_j. Модуль кожного з цих розв'язків дорівнює $\left|\vec{e}_j e^{\lambda_j t}\right| = \left|\vec{e}_j\right| \cdot \left|e^{\lambda_j t}\right| = \left|\vec{e}_j\right| \cdot e^{\operatorname{Re}(\lambda_j t)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, якщо $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$. Перше твердження теореми доведено.

2 Нехай, наприклад, $\operatorname{Re}\lambda_1 > 0$. Розглянемо розв'язок $\vec{x}(t)=c\vec{e}_1 e^{\lambda_1 t}$. Обираючи сталу $c\neq 0$ можна для будь-якого ε зробити так, щоб

$$|\underset{\substack{\|\\0}}{\vec{a}}-\underset{\substack{\|\\c\vec{e}_1}}{\vec{x}(0)}|<\varepsilon .$$

Однак $|\vec{a}-\vec{x}(t)|=|c|\cdot|\vec{e}_1|\,e^{\operatorname{Re}(\lambda_1 t)} \underset{t\to+\infty}{\to} \infty$, і тому $\vec{a}=0$ нестійке. Друге твердження теореми і теорема в цілому доведенні.

Зауваження. Якщо $\forall j \ \operatorname{Re}\lambda_j \le 0$, причому $\exists j \ \operatorname{Re}\lambda_j = 0$, то положення рівноваги $\vec{a}=0$ може бути як стійким, так і нестійким. Проілюструємо це на прикладах.

Приклад 1. $\dot{\vec{x}}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\vec{x}$.

Власні значення $\lambda_1=\lambda_2=0$. Розглянемо розв'язок $\vec{x}(t)=c\begin{pmatrix}1\\ t\end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{l}\left|\vec{a}-\vec{x}(t)\right|=|c|\cdot\sqrt{1+t^2}<\varepsilon \text{ при } t=0, \text{ якщо } |c|<\varepsilon\\ \left|\vec{a}-\vec{x}(t)\right|=|c|\cdot\sqrt{1+t^2}\to\infty \text{ при } t\to\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{a}=0 \text{ нестійке.}$$

Приклад 2. $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\vec{x}$.

Власні значення $\lambda_1 = -1, \ \ \lambda_2 = 0$. Пропонуємо самостійно показати, що $\vec{a} = 0$ стійке, але не асимптотично стійке.

2.5 Стійкість за лінійним наближенням. Лінеаризація

Якщо числова функція $f(x)$ диференційовна в точці a, то $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$, коли $x \to a$.

Для вектор-функції $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ \ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots x_n) \end{pmatrix}$ від вектора $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, коли $\vec{x} \to \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ справедлива аналогічна формула

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a}) + \vec{f}'(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + o(|\vec{x} - \vec{a}|), \qquad (2.5)$$

де $\vec{f}'(\vec{a})$ – $n \times n$-матриця, що зветься *матрицею Якобі*. Її елемент з номером i, k дорівнює $\left.\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}\right|_{x_1 = a_1,\, x_2 = a_2, \ldots x_n = a_n}$.

Нехай $\vec{a}$ – положення рівноваги нелінійної автономної системи

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}). \qquad (2.6)$$

За формулою (2.5) при $\vec{x}$ близьких до $\vec{a}$

$$\underset{\dot{\vec{y}}}{\underset{\parallel}{\dot{\vec{x}}}} = \underset{0}{\underset{\parallel}{\vec{f}(\vec{a})}} + \underset{A}{\underset{\parallel}{\vec{f}'(\vec{a})}}\underset{\vec{y}}{\underset{\parallel}{(\vec{x} - \vec{a})}} + o(\underset{\vec{y}}{\underset{\parallel}{|\vec{x} - \vec{a}|}}).$$

Відкинувши нелінійний доданок $o(|\vec{x}-\vec{a}|)=o(|\vec{y}|)$, отримаємо однорідну лінійну систему зі сталими коефіцієнтами

$$\dot{\vec{y}}=A\vec{y}\,,\ \vec{y}=\vec{x}-\vec{a}\,,\ A=\vec{f}\,'(\vec{a})\,. \qquad (2.7)$$

Система (2.7) називається *лінеаризованою* для системи (2.6) в околі положення рівноваги $\vec{a}$. Перехід від (2.6) до (2.7) називається *лінеаризацією* (2.6).

За стійкістю нульового положення рівноваги лінеаризованої системи (2.7) можна судити про стійкість положення рівноваги $\vec{a}$ відповідної системи (2.6), як свідчить наступна теорема.

Теорема 2.2 Ляпунова про стійкість за лінійним наближенням. Нехай $\vec{a}$ є положенням рівноваги системи (2.4). Тоді:

1) якщо всі власні значення λ_j матриці $A=\vec{f}\,'(\vec{a})$ лежать в лівій півплощині, то $\vec{a}$ – асимптотично стійке;

2) якщо хоча б одне λ_j лежить у правій півплощині, то $\vec{a}$ нестійке.

Зауважимо, що коли $\max\limits_j \operatorname{Re}\lambda_j=0$, характер стійкості положення рівноваги за лінійним наближенням у загальному випадку дослідити неможливо.

Власні значення є коренями характеристичного рівняння. Його степінь дорівнює числу рівнянь у системі ДР. Якщо рівнянь більше за 2, то виникає проблема Гурвіца-Рауса.

2.6 Проблема Гурвіца-Рауса

Потрібно знайти необхідні і достатні умови на коефіцієнти многочлена, при яких його корені лежать у лівій півплощині. Такі многочлени називаються *стійкими*. Ця задача була поставлена Максвеллом у 1868 р. і Стодолею наприкінці XIX ст. та розв’язана Ермітом у 1856 р., Раусом у 1875 р., Гурвіцем у 1895 р., Льєнаром та Шипаром у 1914 р.

Теорема 2.3 Стодоли (необхідна умова стійкості). Якщо многочлен $P_n(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n$ з дійсними коефіцієнтами стійкий та $a_0>0$, то всі його коефіцієнти додатні.

Для доведення треба розкласти $P_n(\lambda)$ на дійсні лінійні та квадратичні множники, а потім їх перемножити.

Приклад 1. Многочлен $\lambda^3+3\lambda^2+1$ нестійкий, оскільки $a_2=0$.

Умова Стодоли не є достатньою, як показує приклад 2.

Приклад 2. Всі коефіцієнти многочлена $\lambda^3+\lambda^2+4\lambda+30$ додатні, але $\lambda^3+\lambda^2+4\lambda+30=(\lambda+3)(\lambda^2-2\lambda+10)$. Тому його корені $\lambda_{1,2}=1\pm 3i,\ \lambda_3=-3$ не всі лежать у лівій півплощині. Отже, він нестійкий.

Теорема 2.4 Ерміта. Число коренів многочлена $P_n(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n$ з дійсними коефіцієнтами, що лежать у лівій півплощині, дорівнює $\dfrac{n}{2}+\dfrac{\Delta\varphi}{\pi}$, якщо $\forall\omega\in\mathbb{R}\ P_n(i\omega)\neq 0$. Тут $\Delta\varphi$ - кут, на який повертається вектор $P_n(i\omega)$, коли ω змінюється від 0 до $+\infty$.

З теореми Ерміта випливає критерій стійкості Михайлова.

Критерій стійкості Михайлова

Многочлен $P_n(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n$ з дійсними коефіцієнтами є стійким тоді і тільки тоді, якщо $P_n(i\omega)\neq 0$, а вектор $P_n(i\omega)$ робить n чверть-обертів (тобто повертається на кут $\pi n/2$), коли ω змінюється від 0 до $+\infty$.

Теорема 2.5 Льєнара-Шипара. Число коренів многочлена $P_n(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n$ з додатними коефіцієнтами, що лежать у правій півплощині, дорівнює подвоєному числу змін знаків у ряді чисел:

$1, D_1, D_3, \ldots D_{n-3}, D_{n-1}$ - для парних n;

$1, D_2, D_4, \ldots D_{n-3}, D_{n-1}$ - для непарних n;

якщо всі $D_i \neq 0$. Тут

$$D_1 = a_1,\ D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix},\ D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_2 & a_4 & a_6 & a_8 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}, \ldots$$

З теореми 2.5 випливає критерій Льєнара-Шипара.

Критерій Льєнара-Шипара

Многочлен $P_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$ з додатними коефіцієнтами є стійким тоді і тільки тоді, коли

$$D_{n-1} > 0, D_{n-3} > 0, \ldots$$

Приклад 3. Знайти всі положення рівноваги системи $\begin{cases} \dot{x} = \ln(y^2 - x) \\ \dot{y} = x - y - 1 \end{cases}$ та дослідити їх на стійкість.

Розв'язання. Позначимо

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \ln(y^2 - x) = f_1(\vec{x}),$$

$$x - y - 1 = f_2(\vec{x}),\quad f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \end{pmatrix}.$$

Знайдемо положення рівноваги $\vec{a}$: $\vec{f}(\vec{a}) = 0$.

$$\begin{cases} \ln(y^2 - x) = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - x = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 3,\ y_1 = 2 \\ x_2 = 0,\ y_2 = -1 \end{array}\right.$$

Маємо два положення рівноваги $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Матриця Якобі $A=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{y^2-x} & \frac{2y}{y^2-x} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Розглянемо перше положення рівноваги $\vec{a}_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Матриця Якобі для цього положення має вид

$$A=\begin{pmatrix} \frac{-1}{2^2-3} & \frac{2\cdot 2}{2^2-3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння $\det(A-\lambda E)=0$.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda-3=0\,.$$

За теоремою Стодоли характеристичний многочлен нестійкий, оскільки є від’ємні коефіцієнти. Тому $\vec{a}_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ нестійке положення рівноваги.

Пропонуємо самостійно довести, що $\vec{a}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ стійке положення рівноваги.

Приклад 4. Знайти всі положення рівноваги системи

$$\begin{cases} \dot{x}=-y \\ \dot{y}=\sin x-\alpha y-tgz \\ \dot{z}=\ln(1-x+2y) \end{cases}$$ та дослідити їх на стійкість.

Розв’язання. Знайдемо положення рівноваги

$$\begin{cases} -y=0 \\ \sin x-\alpha y-tgz=0 \\ \ln(1-x+2y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ \sin x-\operatorname{tg} z=0 \\ 1-x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ \operatorname{tg} z=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k\pi \end{pmatrix}, k\in Z.$$

Тобто маємо нескінченну кількість положень рівноваги.

Матриця Якобі

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \cos x & -\alpha & -\dfrac{1}{\cos^2 z} \\ \dfrac{-1}{1-x+2y} & \dfrac{2}{1-x+2y} & 0 \end{pmatrix}.$$

В усіх положеннях рівноваги матриця Якобі має вид

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -\alpha & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\det(A-\lambda E)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\alpha-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}=0;$$

$$-\lambda^2(\alpha+\lambda)-1-\lambda-2\lambda=0; \Leftrightarrow \underset{a_0}{\underset{\shortparallel}{1}}\cdot\lambda^3+\underset{a_1}{\underset{\shortparallel}{\alpha}}\cdot\lambda^2+\underset{a_2}{\underset{\shortparallel}{3}}\cdot\lambda+\underset{a_3}{\underset{\shortparallel}{1}}=0.$$

За критерієм Льєнара-Шипара, щоб многочлен був стійким, потрібно: $D_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3\alpha-1>0$, оскільки $n-1=2$. Тобто многочлен стійкий при $\alpha>\dfrac{1}{3}$. При $\alpha\le\dfrac{1}{3}$ многочлен нестійкий.

Висновок. Положення рівноваги $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k\pi \end{pmatrix}, k \in Z$ стійкі при $\alpha > \frac{1}{3}$.

Зауважимо, що при $\alpha < \frac{1}{3}$ маємо одну зміну знака у ряді чисел $1, D_2$, і тому за теоремою 2.5 Льєнара-Шипара два корені характеристичного рівняння лежать у правій півплощині. При $\alpha = \frac{1}{3}$ визначник D_2 дорівнює 0, і тому теорему Льєнара-Шипара використати неможливо. Але

$$\lambda^3 + \frac{1}{3}\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + \frac{1}{3})(\lambda^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{3} < 0,\ \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{3}\,.$$

Тобто при $\alpha = \frac{1}{3}$ два корені характеристичного рівняння лежать на уявній осі, а один у лівій півплощині.

Приклад 5. Дослідити на стійкість многочлен $P_3(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 1$.

Розв'язання. За теоремою Стодоли многочлен $P_3(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 1$ нестійкий. Знайдемо за теоремою Ерміта число коренів у лівій півплощині

$$P_3(i\omega) = (i\omega)^3 - 3i\omega + 1 = 1 + i(-3\omega - \omega^3) = u(\omega) + iv(\omega).$$

Будуємо схематично криву Михайлова (див. рисунок 2.5)

$$\begin{cases} u(\omega) = 1 \\ v(\omega) = -3\omega - \omega^3 \end{cases},\ 0 \le \omega < +\infty\,.$$

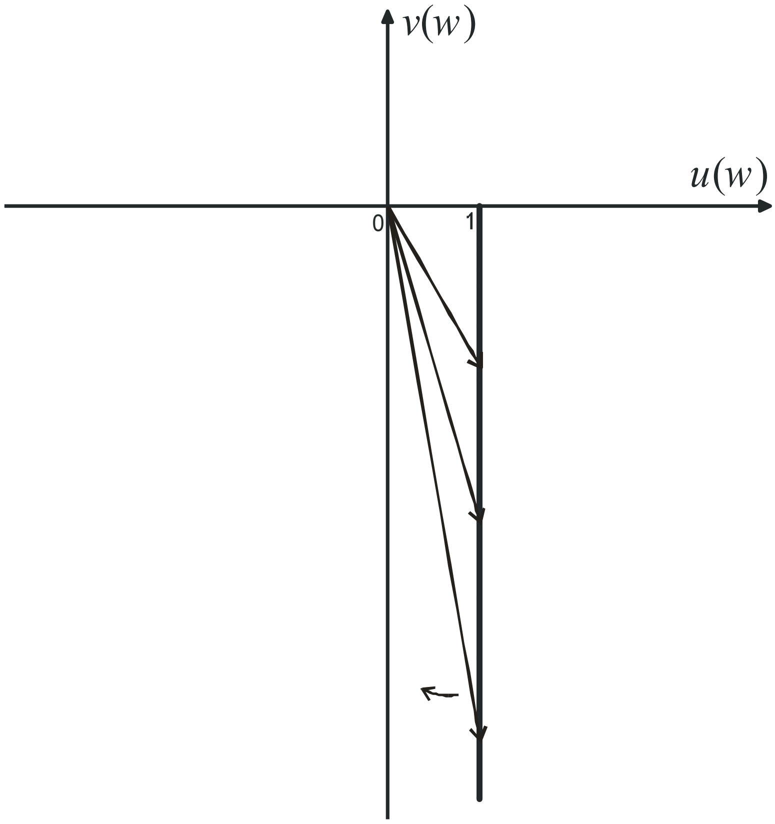


Рисунок 2.5

Оскільки $v(\omega)\to -\infty$ при $\omega \to +\infty$, то $P_3(i\omega)$ робить оберт на $-\dfrac{\pi}{2}$, тобто шукане число коренів $\dfrac{n}{2}+\dfrac{\Delta\varphi}{\pi}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{-\pi/2}{\pi}=1$.

Приклад 6. Дослідити на стійкість многочлен $P_4(\lambda)=\lambda^4+\lambda^3+4\lambda^2+\lambda+1$.

Розв'язання

1 Умова теореми Стодоли виконана, але вона не є достатньою.

2 Застосуємо критерій Льєнара-Шипара: $n=4$ – парне, $n-1=3$

$$P_4(\lambda)=\underset{a_0}{\underset{\parallel}{1}}\cdot\lambda^4+\underset{a_1}{\underset{\parallel}{1}}\cdot\lambda^3+\underset{a_2}{\underset{\parallel}{4}}\cdot\lambda^2+\underset{a_3}{\underset{\parallel}{1}}\cdot\lambda+\underset{a_4}{\underset{\parallel}{1}}\,.$$

$$D_1=a_1=1>0\quad D_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5\\ a_0 & a_2 & a_4\\ 0 & a_1 & a_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=2>0.$$

Многочлен стійкий за критерієм Льєнара-Шипара.

3 Доведемо стійкість за критерієм Михайлова.

$$P_4(i\omega) = (i\omega)^4 + (i\omega)^3 + 4(iy)^2 + (i\omega) + 1 = \omega^4 - 4\omega^2 + 1 + i(-\omega^3 + \omega).$$

Схематично будуємо криву Михайлова (див. рисунок 2.6)

$$\begin{cases} u(\omega) = \omega^4 - 4\omega^2 + 1 \\ v(\omega) = -\omega^3 + \omega \end{cases}, 0 \le \omega < +\infty.$$

Знайдемо точки її перетину з осями координат:

$$u(\omega) = 0 \Rightarrow \omega_{1,2} = \pm\sqrt{2-\sqrt{3}}, \omega_{3,4} = \pm\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$
$$v(\omega) = 0 \Rightarrow \omega_{1,2} = \pm 1, \omega_3 = 0.$$

ω	0	$\sqrt{2-\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{2+\sqrt{3}}$
$u(\omega)$	1	0	-2	0
$v(\omega)$	0	+	0	–

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v}{u} = \frac{-\omega^3 + \omega}{\omega^4 - 4\omega^2 + 1} \underset{\omega\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow \varphi \underset{\omega\to+\infty}{\to} 0.$$

Бачимо, що вектор $P_4(i\omega)$ повертається на кут 2π при зміні ω від 0 до $+\infty$, тобто робить 4 чверть-оберти. Оскільки $n = 4$, многочлен стійкий за критерієм Михайлова.

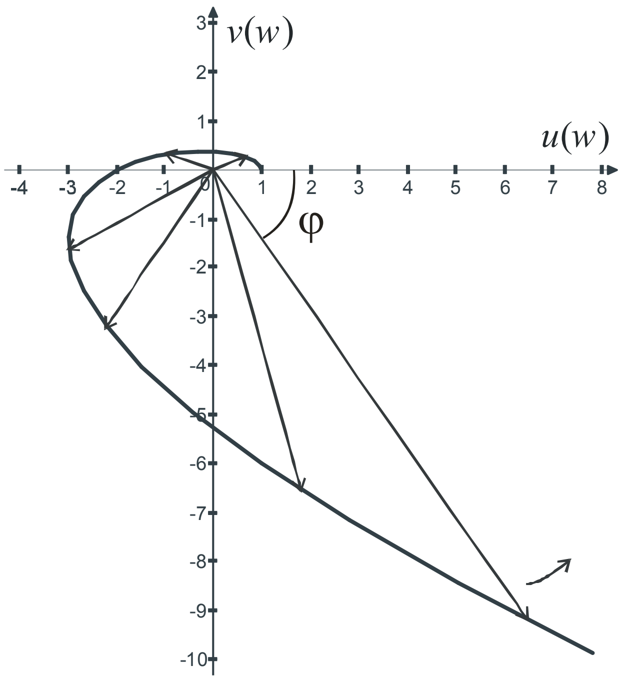


Рисунок 2.6

3 ВІДГУКИ НА СПЕЦІАЛЬНІ ВИДИ ВПЛИВУ ПРИ НУЛЬОВИХ ПОЧАТКОВИХ УМОВАХ

Для вивчення цього розділу потрібне знання основ операційного числення [2, гл.7; 11, гл.2; 12, гл.XIX; 15,гл.13]. Нижче наведені функції, які залежать від t, вважаються оригіналами.

Часто праву частину $f(t)$ диференціального рівняння (ДР)

$$l[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = f(t)$$

можна трактувати як зовнішній вплив на систему яка спостерігається і характеризується коефіцієнтами $a_{n-1},\ldots\ a_0$.

Розв'язок $y(t)$ – це *відгук системи* на цей вплив (рисунок 3.1).

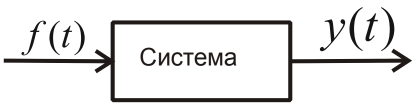


Рисунок 3.1

Наприклад, електричному колу на рисунку 3.2 відповідає ДР $L\ddot{q} + R\dot{q} + \dfrac{1}{C}q = \mathcal{E}$, де q- заряд, струм $I = \dot{q}$. Цьому випадку відповідає рисунок 3.3.

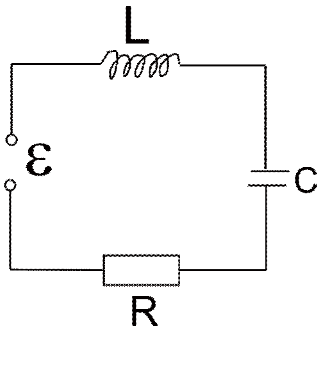


Рисунок 3.2

Рисунок 3.3

3.1 δ - функція Дірака (імпульсна функція)

Визначимо δ - функцію Дірака (або імпульсну функцію) (рисунок 3.4). Нехай

$$\delta_\tau(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\tau}, & 0 \le t < \tau \\ 0, & \tau \le t \end{cases}.$$

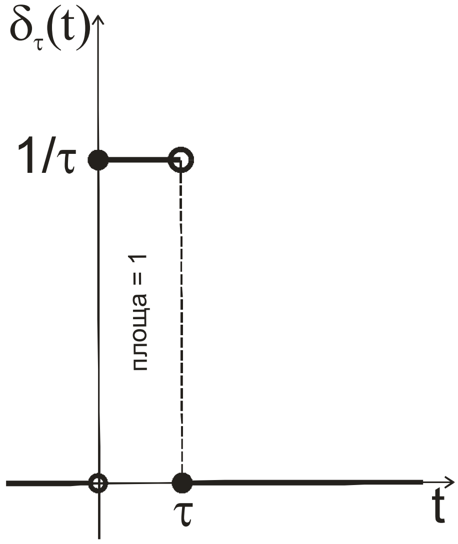


Рисунок 3.4

Визначення. $\delta(t) = \lim\limits_{\tau \to 0} \delta_\tau(t)$ називається *дельта-функцією Дірака* або *імпульсною функцією*.

З визначення випливає, що

$$\boxed{\delta(t) = \begin{cases} 0, \; t \ne 0 \\ \infty, \; t = 0 \end{cases}}, \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1}.$$

Тобто $\delta(t)$ – є математичною моделлю нескінченно великої фізичної величини, що діє у нескінченно малий проміжок часу з сумарним ефектом 1.

Знайдемо зображення (перетворення Лапласа) імпульсної функції $\delta(t)$. Оскільки

$$\delta_\tau(t) \doteqdot \int_0^\infty e^{-p\tau}\delta_\tau(t)dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau e^{-p\tau}dt = \frac{1-e^{-p\tau}}{p\tau},$$

то

$$\delta(t) \doteqdot \lim_{\tau\to 0} L\left[\delta_\tau(t)\right] = \lim_{\tau\to 0}\frac{1-e^{-p\tau}}{p\tau} = 1.$$

$$\boxed{\delta(t) \doteqdot 1}$$

Основна властивість $\delta -$функції:

$$\boxed{f(t)*\delta(t) = f(t)}.$$

Дійсно, оскільки $f(t) \doteqdot F(p)$, $\delta(t) \doteqdot 1$, то за теоремою Бореля

$$f(t)*\delta(t) \doteqdot F(p)\cdot 1 = F(p) \doteqdot f(t).$$

3.2 Відгук $z(t)$ на $\delta -$функцію. Передавальна функція

Нехай $l(y)$- лінійна диференціальна операція $n-$го порядку з постійними коефіцієнтами. Розв'язок $z(t)$ задачі Коші

$$l[z] = \delta(t),\ z(0) = z'(0) = \ldots = z^{(n-1)}(0) = 0,$$

називається *імпульсною характеристикою*. Її зображення $z(p)$ називається *передавальною функцією*.

Знайдемо передавальну функцію, наприклад, при $n = 2$.

$$l[z] = z'' + az' + bz = \delta(t),\ z(0) = z'(0) = 0.$$
$$z(t) \doteqdot Z(p),$$
$$z'(t) \doteqdot pZ(p),$$
$$z''(t) \doteqdot p^2 Z(p),$$
$$\delta(t) \doteqdot 1.$$

Маємо операторне рівняння $p^2Z + apZ + bZ = 1$.

$Z(p) = \dfrac{1}{p^2 + ap + b} = \dfrac{1}{D(p)}$, де $D(p)$ - характеристичний многочлен.

$$\boxed{Z(p) = \frac{1}{D(p)}}.$$

Знайдемо тепер відгук системи на довільний вплив $f(t)$ при $t > 0$, тобто розв'язок $y(t)$ задачі Коші

$$l[y] = f(t),\ y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0. \qquad (3.1)$$

У цьому випадку операторне рівняння буде таким: $Y(p) = F(p)Z(p)$. Отже, зображення відгуку утворюється з образу впливу множенням на передавальну функцію, і тому за теоремою Бореля

$$\boxed{y(t) = f(t) * z(t) = z(t) * f(t)}. \qquad (3.2)$$

Приклад. $y'' - y = \dfrac{1}{cht}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Передавальна функція

$Z(p) = \dfrac{1}{D(p)} = \dfrac{1}{p^2 - 1} \doteqdot sht = z(t)$ – імпульсна характеристика.

Тому

$$y(t) = z(t) * f(t) =$$
$$= \int_0^t sh(t-\tau)\frac{1}{ch\tau}d\tau = \int_0^t \frac{shtch\tau - chtsh\tau}{ch\tau}d\tau = tsht - cht\ln(cht).$$

3.3 Відгук $z_1(t)$ на одиничний стрибок. Формула Дюамеля

Поряд з формулою (3.2) розв'язок задачі Коші (3.1) при $t>0$ також дає формула Дюамеля

$$y(t)=z_1'*f=z_1(t)f(0)+z_1*f',$$

де $z_1=z_1(t)$ - розв'язок задачі (3.1) з $f(t)=1$. $z_1(t)$ називають *відгуком на одиничну функцію* або *перехідною характеристикою*. Вона зв'язана з імпульсною характеристикою так:

$$\boxed{z_1'(t)=z(t)}.$$

Приклад. Розв'язати задачу Коші $\begin{cases} y'-y=\dfrac{1}{e^t+3} \\ y(0)=0 \end{cases}.$

Розв'язання. Знайдемо перехідну характеристику $z_1(t)$

$$\begin{cases} z_1'-z=1 \\ z_1(0)=0 \end{cases},$$

$$z_1'(t)\risingdotseq pZ_1(p)-z_1(0);\; z_1(t)\risingdotseq Z_1(p);\; 1\risingdotseq\frac{1}{p}.$$

$$pZ_1(p)-z_1(0)-Z_1(p)=\frac{1}{p}\Rightarrow\; Z_1(p)=\frac{1}{p(p-1)}=-\frac{1}{p}+\frac{1}{p-1}.$$

Тому $z_1(t)=-1+e^t$ - перехідна характеристика. Оскільки $f'(t)=\left(\dfrac{1}{e^t+3}\right)'=-\dfrac{e^t}{\left(e^t+3\right)^2}$, то за формулою Дюамеля

$$y(t)=z_1(t)f(0)+\int_0^t z_1(t-\tau)f'(\tau)d\tau=(-1+e^t)\cdot\frac{1}{4}+$$

$$+\int_0^t(-1+e^{t-\tau})\left(-\frac{e^\tau}{(e^\tau+3)^2}\right)d\tau=\frac{e^t-1}{4}+\int_0^t\frac{e^\tau d\tau}{(e^\tau+3)^2}-e^t\int_0^t\frac{d\tau}{(e^\tau+3)^2}.$$

Обчислимо інтеграли окремо:

$$\int_0^t\frac{e^\tau d\tau}{(e^\tau+3)^2}=\begin{bmatrix}\tau=\ln u\\ d\tau=\dfrac{du}{u}\end{bmatrix}=\int_1^{e^t}\frac{du}{\left(u+3\right)^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{e^t+3};$$

$$\int_0^t\frac{d\tau}{\left(e^\tau+3\right)^2}=\begin{bmatrix}\tau=\ln u\\ d\tau=\dfrac{du}{u}\end{bmatrix}=\int_1^{e^t}\frac{du}{u\left(u+3\right)^2}=\int_1^{e^t}\left(\frac{1/9}{u}-\frac{1/9}{u+3}-\frac{1/3}{(u+3)^2}\right)du=$$

$$=\frac{1}{9}t-\frac{1}{9}\ln\left|\frac{e^t+3}{4}\right|-\frac{1}{12}+\frac{1}{3(e^t+3)}.$$

Отже,

$$y(t)=\frac{e^t-1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{e^t+3}-e^t\left(\frac{1}{9}t-\frac{1}{9}\ln\left|\frac{e^t+3}{4}\right|-\frac{1}{12}+\frac{1}{3(e^t+3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}(e^t-1)-\frac{1}{9}te^t+\frac{1}{9}e^t\ln\left|\frac{e^t+3}{4}\right|.$$

3.4 Відгук на гармонічне збудження. Частотна характеристика

Якщо $Z(p)=\dfrac{1}{D(p)}$ *передавальна функція*, то $Z(i\omega)=\dfrac{1}{D(i\omega)}$ називають *частотною характеристикою*.

Нехай характеристичний многочлен $D(\lambda)$ лінійного однорідного диференціального рівняння $l(y)=0$ зі сталими коефіцієнтами стійкий. Тоді при $t \to +\infty$ будь-який розв'язок неоднорідного рівняння $l(y) = f(t)$ з гармонічною правою частиною $f(t) = Ae^{i(\omega t+\varphi)}$ або $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, або $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ наближається з експоненціальною швидкістю до його розв'язку, який отримується з правої частини $f(t)$ множенням її на $|Z(i\omega)|$ та збільшенням її початкової фази на $\arg Z(i\omega)$. Цей розв'язок називають *сталим режимом*.

Приклад. $6y^{IV} + 12y^{III} + 19y^{II} + 6y = 100e^{i(1,5t+1)}$.

а) необхідно перевірити, що у відповідного однорідного ДР характеристичний многочлен стійкий;

б) знайти сталий режим.

Розв'язання:

а) перевіримо стійкість характеристичного многочлена

$$D(\lambda) = P_4(\lambda) = 6\lambda^4 + 12\lambda^3 + 19\lambda^2 + 13\lambda + 6$$

за критерієм Михайлова.

$$P_4(i\omega) = 6\omega^4 - i12\omega^3 - 19\omega^2 + i13\omega + 6 = 6\omega^4 - 19\omega^2 + 6 + i(13\omega - 12\omega^3) =$$
$$= u(\omega) + iv(\omega).$$

Схематично будуємо криву Михайлова (рисунок 3.5):

$$\begin{cases} u = 6\omega^4 - 19\omega^2 + 6 \\ v = 13\omega - 12\omega^3 \end{cases}, \quad 0 \le \omega < \infty.$$

ω	0	$\sqrt{\frac{19-\sqrt{217}}{12}} \approx 1,60$	$\sqrt{\frac{13}{12}} \approx 1,04$	$\sqrt{\frac{19+\sqrt{217}}{12}} \approx 1,68$
u	6	0	$\approx -7,54$	0
v	0	$\approx 5,21$	0	$\approx -34,76$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v(\omega)}{u(\omega)} \underset{\omega\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow \varphi \underset{\omega\to+\infty}{\to} 0$$

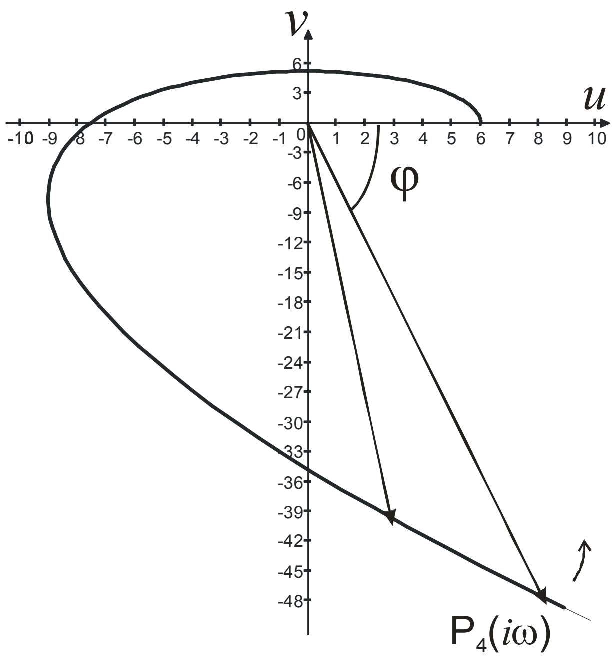


Рисунок 3.5

Коли ω змінюється від 0 до $+\infty$, то вектор $P_4(i\omega)$ робить 4 чверть-оберти, і тому згідно з критерієм Михайлова $P_4(\lambda)$ – стійкий;

б) Знайдемо частотну характеристику

$$Z(i\omega)=\frac{1}{D(i\omega)}=\frac{1}{\left|D(i\omega)\right|e^{-iArgD(i\omega)}}.$$

У даному прикладі $\omega=1,5$,

$$D(i\omega)=D(i1,5)=61,5^4-i121,5^3-191,5^2+i131,5+6=-6,375-21i.$$

Тому $Z(i1,5)=\dfrac{1}{\sqrt{(-6,375)^2+(-21)^2}}e^{-i(\pi+arc\,\mathrm{tg}\frac{21}{6,375})}\approx 0,0456e^{-i4,42}$,

отже, сталий режим дорівнює

$$\left|Z(i1,5)\right|\cdot 100e^{i(1,5t+1+\arg Z(i1,5))}\approx 0,0456\cdot 100e^{i(1,5t+1-4,42)}=4,56e^{i(1,5t-3,42)}.$$

Список літератури

1 Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. –М., 1988.

2 Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. –М., 1988.

3 Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. –М., 1989.

4 Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. –М., 1960.

5 Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К., 2001.

6 Давидов Р.Н., Храбустовский В.И. Методические указания и задания к типовому расчету «Элементы теории функции комплексного переменного». –Харьков, 1993.

7 Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. –М., 1978.

8 Могульський Є.З., Храбустовський В.І., Бородай Г.П. Вступ до лінійної алгебри та аналітичної геометрії: Навч. посібник. –Харків, 2007.

9 Мышкис А.Д. Математика для втузов. Специальные курсы.–М., 1988.

10 Овчинников П.П. Вища математика: Підручник. У 2 ч. – К., 2003. – Ч.1.

11 Овчинников П.П. Вища математика: Підручник. У 2 ч. – К., 2000. – Ч.2.

12 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. –М., 1985. – Т.2.

13 Постников М.М. Устойчивые многочлены. –М., 1981.

14 Сборник задач по математике для втузов/ Под.ред. А.В.Ефимова, В.П.Демидовича. –М., 1986.

15 Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / Под.ред. А.В.Ефимова, В.П.Демидовича. –М., 1986.

16 Филлипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. –М., 1979.

17 Чудесенко В.Ф. Сборник задач по специальным курсам высшей математики. –М., 1983.

В.І. Храбустовський, Ю.С. Шувалова

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ

Частина 1

ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ, СТІЙКІСТЬ,

ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ

Конспект лекцій
з дисципліни«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Відповідальний за випуск Шувалова Ю.С.

Редактор Еткало О.О.

Підписано до друку 25.06.08 р.
Формат паперу 60х84 1/16 . Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 2,25. Обл.-вид.арк. 2,5.
Замовлення № Тираж 200. Ціна

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК 2874 від 12.06.2007 р.
Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, майд. Фейєрбаха, 7