УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Є.З.Могульський, В.І.Храбустовський, Г.П.Бородай

ВСТУП ДО ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчальний посібник

Харків 2007

Могульський Є.З., Храбустовський В.І., Бородай Г.П. Вступ до лінійної алгебри та аналітичної геометрії: Навчальний посібник. - Харків: УкрДАЗТ, 2007. – 128 с.

Розглянуті в посібнику питання векторної алгебри та аналітичної геометрії відіграють значну роль як при вивченні прикладних дисциплін, так і самого курсу вищої математики.

Основа посібника – курс лекцій (біля тридцяти шести годин), який викладають з початку першого семестру. Прийнятий стиль викладання дозволяє засвоювати матеріал випускнику звичайної середньої школи. В посібнику докладно розглянуто приклади, які надають можливість придбати навички для розв’язання задач, що зустрічаються у спеціальних дисциплінах.

Посібник призначений для студентів загальнотехнічних та економічних спеціальностей денної та заочної форми навчання.

Іл. 69, бібліогр.: 7 назв.

Навчальний посібник розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри “Вища математика” 10 жовтня 2006 р., протокол № 2.

Рецензент

проф. Гордевський В.Д. (ХНУ ім. В.Н.Каразіна)

Могульський Є.З., Храбустовський В.І., Бородай Г.П. Вступ до лінійної алгебри та аналітичної геометрії: Навчальний посібник.- Харків: УкрДАЗТ, 2006. – 110 с.

Розглянуті в посібнику питання векторної алгебри та аналітичної геометрії відіграють значну роль як при вивченні прикладних дисциплін, так і самого курсу вищої математики.

Основа посібника – курс лекцій (біля тридцяти шести годин), який викладають спочатку першого семестру. Прийнятий стиль викладання дозволяє засвоювати матеріал випускнику звичайної середньої школи. В посібнику докладно розібрані приклади, які надають можливість придбати навички для розв’язання задач, що зустрічаються в прикладних дисциплінах.

Призначений для студентів загальнотехнічних та економічних спеціальностей денної та заочної форми навчання.

Нумерація формул та прикладів наскрізна в межах кожного параграфу.

Іл.70, бібліогр.7 назв.

Посібник розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри “Вища математика” 10 жовтня 2006 р., протокол № 2.

Рецензент
проф. Гордевський В.Д

ЗМІСТ

1 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

У багатьох природознавчих дисциплінах зустрічаються величини, які характеризуються не тільки числовим значенням, але і напрямком. Поняття **вектора** виникло з математичної абстракції таких величин, як переміщення і сила в механіці, напруга електричного та магнітного поля в електромагнетизмі. Застосування векторів дозволяє сформулювати більшість тверджень в чіткій і стислій формі.

1.1. Геометричні вектори

Кожним двом точкам A, B зіставляється **вектор** (напрямлений відрізок) $\overrightarrow{AB}$. Точка A називається початком, а точка B – кінцем вектора $\overrightarrow{AB}$.

Інколи для позначення вектора використовують латинські літери $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ та інші (рис. 1.1).

Довжиною (модулем) вектора називається довжина відрізка, який зображує вектор. Довжину вектора $\vec{a}$ позначають $|\vec{a}|$.

Будемо вважати **вектори рівними,** коли вони суміщаються паралельним перенесенням (мають рівні довжини і однакові напрямки). З цієї точки зору вектори, які розглядають у геометрії, є вільними. У фізиці, як правило, вектори пов'язані з конкретними точками.

Сумою векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ називається вектор $\vec{a}+\vec{b}$*,* початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$*,* а кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$, при умові, що кінець вектора $\vec{a}$ збігається з початком вектора $\vec{b}$ (рис. 1.2).

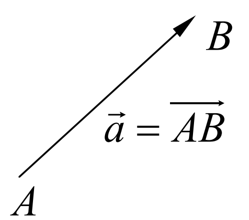


Рис. 1.1

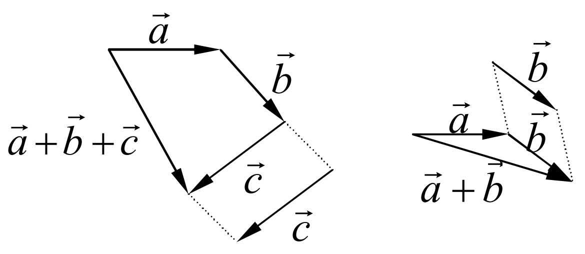


Рис. 1.2

Вектор $\overrightarrow{AA}$, початок і кінець якого збігаються, називається нульовим та позначається $\vec{0}$.

Приклад 1

а) нехай матеріальна точка рухається під впливом сил $\overrightarrow{F_1}$ і $\overrightarrow{F_2}$. Тоді ця точка рухається так, неначе на неї діє одна сила $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$;

б) нехай два літаки летять зі швидкостями $\overrightarrow{V_1}$ та $\overrightarrow{V_2}$, відповідно. Відносна швидкість $\vec{V}_{1,2}$ першого літака щодо другого визначається рівністю $\vec{V}_1=\vec{V}_{1,2}+\vec{V}_2$ (рис. 1.3).

Рис. 1.3

Добутком вектора $\vec{a}$ **на число** t називається вектор $t\vec{a}$, який має довжину $|t||\vec{a}|$ і так само напрямлений, як і вектор $\vec{a}$ у випадку $t>0$, і напрямлений протилежно вектору $\vec{a}$, якщо $t<0$ (рис. 1.4).

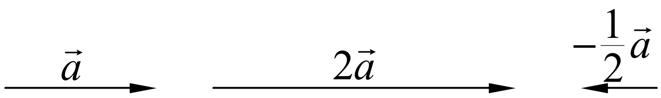


Рис. 1.4

Для операції множення вектора на число характерна властивість $t(\vec{a}+\vec{b})=t\vec{a}+t\vec{b}$, яку ілюструє рис. 1.5.

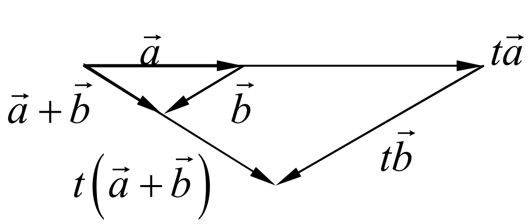


Рис. 1.5

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають **пропорційними (колінеарними),** якщо є таке число t, що $\vec{a}=t\vec{b}$.

Визначимо вектор як **одиничний (орт),** коли його довжина дорівнює одиниці. Позначається орт вектора $\vec{a}$ через $\vec{a}^{\circ}$. Таким чином, $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}^{\circ}$.

Три вектори у просторі називаються **компланарними,** якщо рівні їм вектори, які виходять з однієї точки, лежать в одній площині.

Кутом $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ називається кут $\angle BAC$: $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \in [0, \pi]$. Кутом між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається кут між рівними їм векторами, які мають загальний початок (рис. 1.6). Якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, то вектор $\vec{a} + \vec{b}$ напрямлений по бісектрисі кута між векторами $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$.

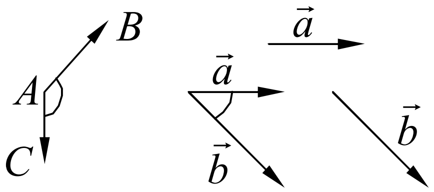


Рис. 1.6

1.2. Координатний метод

Нехай вектор $\vec{e}$, який розташовано на прямій, є відкладеним від точки O (позначають цю пряму $(O;\vec{e})$, рис. 1.7). Тоді **будь-який** вектор $\vec{a}$, що лежить на цій прямій, **однозначно** виражається через вектор $\vec{e}: \vec{a} = x\vec{e}$. Вектор $\vec{e}$ утворює **базис** множини векторів, які лежать на прямій (пряма має один вимір). Число x називається координатою вектора $\vec{a}$ в базисі $\{\vec{e}\}$. Очевидно, що координата вектора $\vec{a}$ дорівнює координаті вектора $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$. Кожній точці M прямої зіставляється вектор $\overrightarrow{OM}$, координата якого називається **координатою точки** M у базисі $\{\vec{e}\}$.

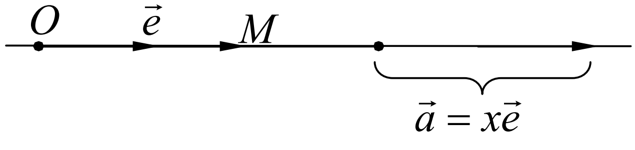


Рис. 1.7

Нехай на площині дві прямі перетинаються в точці O. Припустимо, що вектори $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$ беруть початок у точці O і

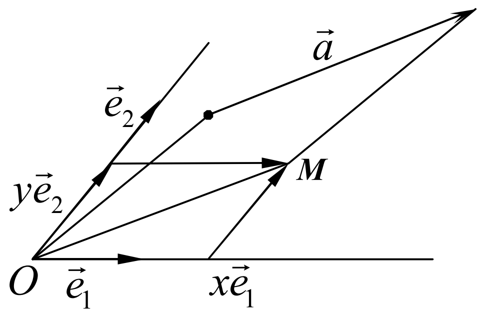


Рис. 1.8

розташовані відповідно на першій та другій прямих (рис. 1.8). Тоді **будь-який** вектор площини лише **єдиним** чином подається у вигляді

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

Кажуть, що вектори $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$ утворюють **базис** множини векторів, які лежать у площині (площина має два виміри). Числа x, y називають **координатами** вектора $\vec{a}$ в базисі $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ і записують $\vec{a}(x; y)$ або $\vec{a} = (x; y)$. Зрозуміло, що ті ж самі координати x, y буде мати і вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$. Кожній точці M площини зіставляється вектор $\overrightarrow{OM}$. Координати вектора $\overrightarrow{OM}$ називаються координатами точки M у базисі $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – три некомпланарні вектори із загальним початком у точці O (рис. 1.9). Тоді **будь-який** вектор $\vec{a}$ простору **однозначно** зображується у вигляді:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

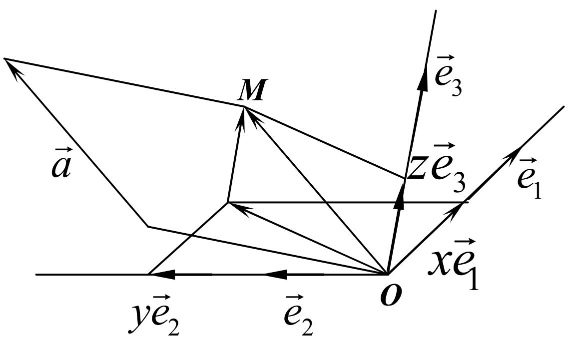


Рис. 1.9

Вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ утворюють **базис** множини векторів простору (простір має три виміри). Числа x, y, z називають

координатами вектора $\vec{a}$ в базисі $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ і записують $\vec{a}(x; y; z)$ або $\vec{a} = (x; y; z)$. Вектори $x\vec{e}_1, y\vec{e}_2, z\vec{e}_3$ називають **складовими** вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Зрозуміло, що вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ також буде мати координати x, y, z. Кожній точці M простору зіставимо вектор $\overrightarrow{OM}$. Координати вектора $\overrightarrow{OM}$ називаються координатами точки M у базисі $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Приклад 2

Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис. Які координати в цьому базисі мають вектори: а) $\vec{a}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$; в) $2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$?

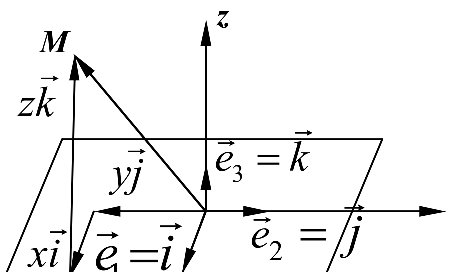
Розв’язання

а) $\vec{a} = (1; 0; 0)$; б) $\vec{a} - \vec{b} = (1; -1; 0)$; в) $2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} = (2; 3; -1)$.

Нехай одиничні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ попарно перпендикулярні. Таку трійку векторів будемо називати **ортонормованим базисом**. Прямі $(O; \vec{e}_1)$, $(O; \vec{e}_2)$, $(O; \vec{e}_3)$ називають **осями прямокутної системи координат** $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Площини, що проходять через дві які-небудь координатні осі, називаються **координатними площинами**. Таких площин три: $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_3)$, $(O; \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. У випадку, коли вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ мають взаємне розташування, як показано на рис. 1.10 (якщо дивитися з кінця вектора $\vec{e}_3$, то поворот на кут 90^o вектора $\vec{e}_1$ до його збігу з вектором $\vec{e}_2$ відбувається проти годинникової стрілки), для них загально уживані позначення $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Відповідні осі позначаються Ox, Oy, Oz і називаються **осями абсцис, ординат** та **аплікат**.

Той факт, що координатами точки M є числа x, y, z, будемо записувати так: $M(x; y; z)$. Для вектора $\overrightarrow{OM}$ будемо використовувати запис $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ або $\overrightarrow{OM} = (x; y; z)$.



У фізиці та механіці для

вектора $\overrightarrow{OM}$ використовують позначення $\vec{r}$ і називають цей вектор **радіус-вектором точки** M. Отже,

O

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\ .$$

Рис. 1.10

У подальшому будемо використовувати систему координат $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Координати вектора $\vec{a}$ в цій системі будемо позначати відповідно a_1, a_2, a_3, тобто $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$; використовують також позначення $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$. У теоретичній механіці та фізиці координати a_1, a_2, a_3 вектора $\vec{a}$ часто називають **проекціями** вектора $\vec{a}$ на осі координат.

Дії над векторами $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ з відомими координатами здійснюються за такими правилами:

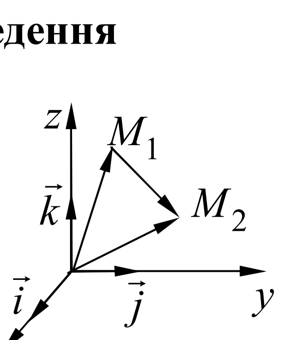
1) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ a_3 + b_3)$;

2) $t\vec{a} = (ta_1; ta_2; ta_3)$.

Теорема 1. Нехай у просторі є заданими дві точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ та $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ має координати $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$, тобто

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1). \qquad (1.1)$$

Доведення



$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2};$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} -$$
$$-(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) =$$
$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

O

Рис. 1.11

Розглянемо наступну задачу. Нехай є заданими дві точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$. Потрібно знайти координати точки $M_3(x_3;\, y_3;\, z_3)$, якщо відомо, що вона поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda : \overrightarrow{M_1M_3} = \lambda\overrightarrow{M_3M_2}$ (рис. 1.12).

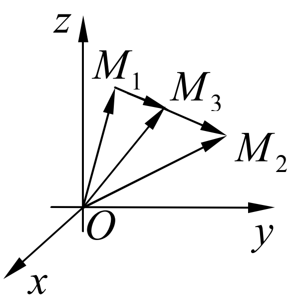


Рис. 1.12

Оскільки $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1M_3} + \overrightarrow{M_3M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3} = \lambda\overrightarrow{M_3M_2}$, то $\overrightarrow{M_1M_2} = (1+\lambda)\overrightarrow{M_3M_2}$.

Переходячи до радіус-векторів точок M_1, M_2, M_3, одержимо

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (1+\lambda)(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \Leftrightarrow \vec{r}_3 = \frac{\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2}{1+\lambda}.$$

Отже, в координатній формі будемо мати:

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\; y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\; z_3 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (1.2)$$

Приклад 3

а) задані вектори $\vec{a}(2;3;-1)$, $\vec{b}(1;0;4)$. Знайти вектор $2\vec{a} - 3\vec{b}$;

б) чи пропорційні вектори $\vec{a}(2;\,3;-1)$ та $\vec{b}(4;6;-1)$? При якому значенні p вектор $\vec{c}(6;9;p)$ буде пропорційним вектору $\vec{a}$?

в) задані точки $A(1;0;4)$, $B(2;3;5)$. Знайти координати середини С відрізка AB;

г) задані точки $A(2;1;5)$, $C(1;3;0)$. Відомо, що точка C поділяє відрізок AB у відношенні $\lambda = 2$. Знайти точку B.

Розв'язання

а) $2\vec{a} - 3\vec{b} = (2\cdot 2 - 3\cdot 1; 2\cdot 3 - 3\cdot 0; 2\cdot(-1) - 3\cdot 4) = (1;6;-14)$;

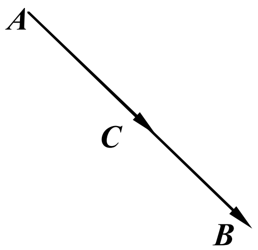
б) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ пропорційні лише тоді, коли $\vec{a} = t\vec{b}$. Останнє означає, що

$$\vec{a}(1;3;-1) = t\vec{b}(4t;6t;-t) \Leftrightarrow 2 = 4t.\ 3 = 6t.\quad -1 = -t.$$

Але одержані рівності – суперечні (перші дві з них дають для t значення $\frac{1}{2}$, а третя -1), а тому вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – непропорційні.

Вектор $\vec{c}$ буде пропорційним вектору $\vec{a}$ при $p = -3$;

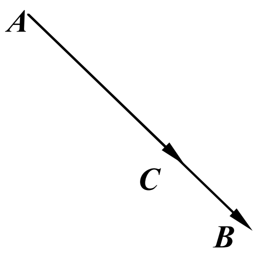
в)



в) якщо точка C – середина $\overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. Тоді λ у формулі (1.2) дорівнює 1 і

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5,\ \ y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+3}{2} = 1.5,\ \ z_C = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{4+5}{2} = 4.5;$$

г)



г) на підставі формули (1.1) знаходимо

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow (-1;2;-5) = 2(x_B - 1; y_B - 3; z_B),$$

$$\begin{cases} 2x_B - 2 = -1, \\ 2y_B - 6 = 2, \\ 2z_B = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 0.5, \\ y_B = 4, \\ z_B = -2.5 \end{cases}$$

$B(0.5;\ 4;\ -2.5)$.

1.3. Паралельне перенесення системи координат

Нехай у просторі введено дві системи прямокутних координат $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ та $(O'; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (рис. 1.13).

Тоді $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$. Отже, координати точки у "новій" системі координат (початок у точці O') зв'язані з координатами у "старій" системі співвідношеннями

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}.$$

$$\begin{cases} x' = x - x_{O'}, \\ y' = y - y_{O'}, \\ z' = z - z_{O'}. \end{cases} \tag{1.3}$$

де $(x_{O'}; y_{O'}; z_{O'})$ - координати точки O' у "старій " системі координат.

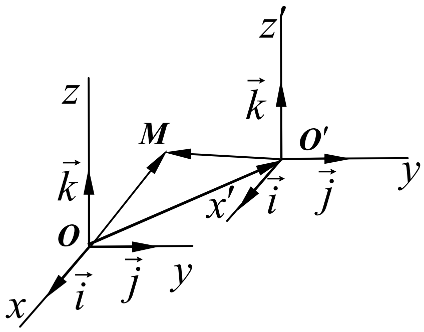


Рис. 1.13

Приклад 4

При паралельному перенесенні осей координат точка $A(3;4;-1)$ переходить у точку $A'(2;-1;0)$. В яку точку переходить точка O (початок координат)?

Розв'язання

$$\overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_A = x'_O + x_A, \\ y'_A = y'_O + y_A, \\ z'_A = z'_O + z_A. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_O = x'_A - x_A = 2 - 3 = -1, \\ y'_O = y'_A - y_A = -1 - 4 = -5, \\ z'_O = z'_A - z_A = 0 - (-1) = 1. \end{cases}$$

Тут через x'_O, y'_O, z'_O позначено кординати точки O у "новій" системі координат.

1.4. Скалярний добуток двох векторів

З курсу фізики добре відомо, що робота постійної сили $\vec{F}$ на переміщенні $\vec{S} = \overrightarrow{AB}$ дорівнює $\left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cos(\vec{F} \hat{,} \vec{S})$ (рис. 1.14).

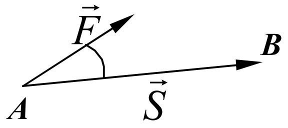


Рис. 1.14

Ми бачимо, що робота є скалярною (чисельною) величиною, значення якої є наслідком взаємодії двох векторних величин $\vec{F}$ та $\vec{S}$.

Означення 1. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ називається ***число***, яке позначають символом $\vec{a} \cdot \vec{b}$ і визначають рівністю

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(\vec{a} \hat{,} \vec{b}). \qquad (1.4)$$

Визначимо основні властивості скалярного добутку:

1) вектори $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ ортогональні (перпендикулярні) тоді і тільки тоді, коли іх скалярний добуток дорівнює нулю: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;

2) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$;

3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

4) $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$ для будь-якого t;

5) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot c$;

6) $\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right| \le |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|$.

Приклад 5

Нехай $\vec{a}$ та $\vec{b}$ - вектори одиничної довжини, кут між якими дорівнює $\pi / 3$. Знайти:

а) довжину вектора $\vec{a} + \vec{b}$ **;**

б) кут між векторами $\vec{a}$ та $2\vec{a} + \vec{b}$ (рис. 1.15).

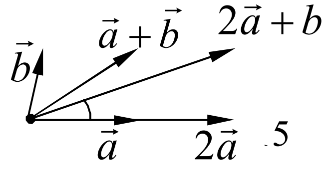


Рис. 1.15

Розв'язання

а) на підставі властивостей 2, 3, 5 скалярного добутку маємо:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})} = \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \left|\vec{b}\right|^2} =$$

$$= \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2 + 2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) + \left|\vec{b}\right|^2} = \sqrt{3};$$

б) з формули (1.4) випливає, що

$$\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,2\vec{a}+\vec{b}) = \frac{(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}}{\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|} =$$

$$= \frac{2\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}}{\sqrt{4\left|\vec{a}\right|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2}} = \frac{2+\frac{1}{2}}{\sqrt{4+2+1}} = \frac{5}{2\sqrt{7}} \Leftrightarrow$$

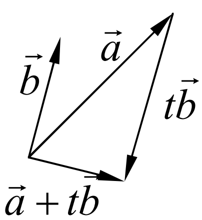
$$\Leftrightarrow \left(\vec{a}\,\hat{,}\,2\vec{a}+\vec{b}\right) = 19^{\circ}6'24''.$$

Приклад 6

Чи можна знайти таке число t, щоб $\left(\vec{a}+t\vec{b}\right)\perp\vec{b}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$?

Розв'язання

Оскільки $\left(\vec{a}+t\vec{b}\right)\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} + t\left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} + t\left|\vec{b}\right|^2$, то вектори $\vec{a}+t\vec{b}$ *і* $\vec{b}$ будуть ортогональні при $t = -\frac{1}{\left|\vec{b}\right|^2}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\left(\vec{b}\neq\vec{0}\right)$.



Ми встановили такий факт: якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють базис на площині, то вектори $\vec{a} - \frac{1}{\left|\vec{b}\right|^2}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{b}$ $і$ $\vec{b}$ утворюють ортогональний базис (рис. 1.16).

Рис. 1.16

Приклад 7

а) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ непропорційні та $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$. Чи будуть ортогональними вектори $\vec{a}+\vec{b}$ та $\vec{a}-\vec{b}$?

б) довести, що $(2\vec{b}+\vec{a}) \perp \vec{a}$, якщо $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$ та $(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$.

Розв'язання

а) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{b}\right|^2 = 0$

(діагоналі ромба взаємно перпендикулярні) (рис. 1.17);

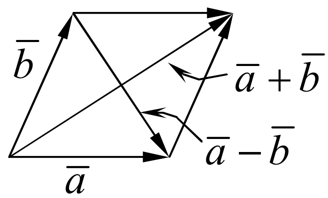


Рис. 1.17

б) $(2\vec{b}+\vec{a})\cdot\vec{a} = 2(\vec{b}\cdot\vec{a})+\vec{a}\cdot\vec{a} =$

$= 2\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cos(\vec{b}\,\hat{,}\,\vec{a}) + \left|\vec{a}\right|^2 =$

$= \left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)\cdot\left|\vec{a}\right|^2 = 0.$

Теорема 2. Нехай в ортонормованому базисі вектори задані своїми координатами $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$. Тоді скалярний добуток цих векторів дорівнює сумі попарних добутків одноіменних координат

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3. \tag{1.5}$$

Доведення

$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ і тому, враховуючи властивості скалярного добутку , отримаємо:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})\cdot(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = a_1\cdot b_1(\vec{i}\cdot\vec{i}) + (a_1 b_2 + a_2\cdot b_1)(\vec{i}\cdot\vec{j}) +$$
$$+ a_2 b_2(\vec{j}\cdot\vec{j}) + (a_1 b_3 + a_3 b_1)(\vec{i}\cdot\vec{k}) + (a_2\cdot b_3 + a_3\cdot b_2)(\vec{j}\cdot\vec{k}) + a_3\cdot b_3(\vec{k}\cdot\vec{k}).$$

Оскільки $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$, а $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3.$$

Для неортонормованого базису формула (1.5) не має місця.

Наслідок 1. Довжина вектора дорівнює квадратному кореню із суми квадратів його координат

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \qquad (1.6)$$

Наслідок 2. Косинус кута між векторами знаходиться так:

$$\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \qquad (1.7)$$

Зокрема, $\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{i}) = \dfrac{a_1}{|\vec{a}|}$ і звідси $a_1 = |a|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{i})$ (аналогічно для інших координат). Таким же чином визначається ортогональна проекція вектора $\vec{a}$ на напрямок вектора $\vec{b}$:

$$Пр_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}); \qquad (1.8)$$

$$Пр_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}. \qquad (1.9)$$

Приклад 8

а) задано чотири точки $A(0;1;-1)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;1;0)$ та $D(2;-3;1)$. Знайти кут між векторами $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD}$ та $\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{DB}$;

б) в умовах прикладу 1,б знайти відносну швидкість першого літака відносно другого, якщо

$V_1 = 800 км/г,\ V_2 = 900 км/г,\ (V_1 \hat{,} V_2) = 60^\circ.$

Розв'язання

а) $\overrightarrow{AB}=(1;-2;3)$, $\overrightarrow{CD}=(-1;-4;1) \Rightarrow 2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD}=(-1;-16;9)$

$\Rightarrow \left|2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{1+256+81}=\sqrt{338}=13\sqrt{2}$, $\overrightarrow{AC}(3;0;1)$,

$\overrightarrow{DB}(-1;2;1) \Rightarrow \overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{DB}=(1;4;3) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{DB}\right|=\sqrt{1+16+9}=$
$=\sqrt{26}$. Отже, використовуючи (1.7), одержимо

$$\cos(2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD} \hat{,} \overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{DB})=\frac{(2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{DB})}{\left|2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD}\right|\left|\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{DB}\right|}=\frac{-1-64+27}{\sqrt{338}\cdot\sqrt{26}}=$$

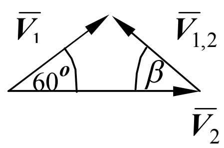
$$=-\frac{19}{13\sqrt{13}} \Rightarrow (2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD} \hat{,} \overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{DB})=113^\circ 55'.$$

б) оскільки $\vec{V}_{1,2}=\vec{V}_1-\vec{V}_2$, то $\left|\vec{V}_{1,2}\right|=\sqrt{(\vec{V}_1-\vec{V}_2)\cdot(\vec{V}_1-\vec{V}_2)}=$

$$=\sqrt{V_1^2+V_2^2-2(\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2)}=\sqrt{V_1^2+V_2^2-V_1\cdot V_2}=100\sqrt{81+64-72}=$$

$$=100\sqrt{73} км/г.$$

.



З трикутника швидкостей за теоремою синусів знайдемо кут β, який визначає напрямок вектора $\vec{V}_{1,2}$:

$$\frac{V_{1,2}}{\sin 60^\circ}=\frac{V_1}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta=\frac{800\sqrt{3}}{2\cdot 100\sqrt{73}} \approx 0.81 \Rightarrow \beta = 54^\circ 11'.$$

1.5. Поворот системи координат

Нехай на площині вибрані дві системи прямокутних координат xOy та $x'Oy'$. Припустимо, що осі другої системи координат повернуті відносно осей першої системи координат на кут α (рис. 1.18) (α є додатним, якщо поворот здійснюється проти стрілки годинника, і від'ємним у протилежному випадку).

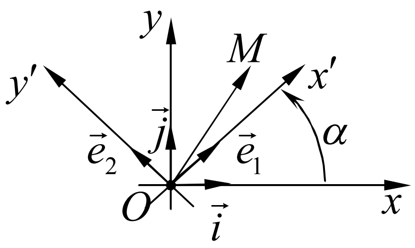


Рис. 1.18

Знайдемо зв’язок між координатами точки в цих системах координат. Припустимо, що в системі координат xOy точка M має координати x, y, а в системі координат $x'Oy'$ - x', y'. Виразимо вектор $\overrightarrow{OM}$ у першій і другій системах координат:

$$x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 = x\vec{i} + y\vec{j}\ .$$

Для того щоб виразити координати x' та y' через координати x та y, помножимо обидві частини цього векторного рівняння скалярно спочатку на вектор $\vec{e}_1$, а потім на вектор $\vec{e}_2$:

$$x'(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + y'(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) = x(\vec{i} \cdot \vec{e}_1) + y(\vec{j} \cdot \vec{e}_1)\,,$$

$$x'(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + y'(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) = x(\vec{i} \cdot \vec{e}_2) + y(\vec{j} \cdot \vec{e}_2)\,.$$

Оскільки

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1;\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0;\ \vec{i} \cdot \vec{e}_1 = \vec{j} \cdot \vec{e}_2 = cos\alpha;$$

$$\vec{j} \cdot \vec{e}_1 = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha;\ \ \vec{i} \cdot \vec{e}_2 = \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha\,,$$

то приходимо до такого результату:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases} \tag{1.10}$$

Приклад 9

У системі координат xOy задані точки $A(4;3)$ та $B(3;-1)$. Знайти координати точки B у системі координат $x'Oy'$, яка повернута відносно першої системи координат таким чином, що вісь Ox' проходить через точку A (рис. 1.19).

Розв'язання

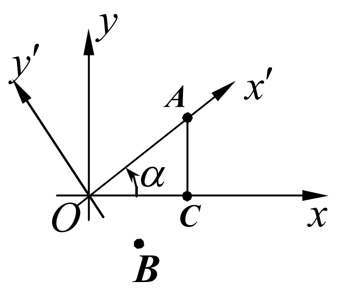


Рис. 1.19

З прямокутного трикутника ОАС маємо:

$$\sin\alpha = \frac{AC}{OA} = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5}, \ \cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

Отже, з формули (1.10) знаходимо:

$$x'_B = 3\cdot\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{9}{5},$$

$$y'_B = -3\cdot\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{13}{5}.$$

2. АРИФМЕТИЧНІ ВЕКТОРИ

Розглянутий раніше тривимірний простір, який описує властивості матерії, не дозволяє вирішувати безліч прикладних задач, що виникають на практиці. Тому виникає необхідність вивчати простори будь-якого числа вимірів.

2.1. Простір R_n

Означення 1. Упорядкований набір із n чисел називається n**-вимірним арифметичним вектором** і записується у вигляді рядка довжини n або стовпця висоти n:

$$\vec{a} = (a_1;\ a_2;\ \dots;\ a_n);\ \vec{a} = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Vmatrix} \quad (a_i \in R).$$

Числа a_i називаються **координатами вектора $\vec{a}$.**

Множення на число і додавання арифметичних векторів здійснюється за такими правилами:

1) сумою двох n-вимірних арифметичних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається n-вимірний вектор, такий, що

$$\vec{a}(a_1;\ a_2;\ \dots;\ a_n) + \vec{b}(b_1;\ b_2;\ \dots;\ b_n) = (a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ \dots;\ a_n + b_n);$$

2) $t\vec{a}(a_1;\ a_2;\ \dots;\ a_n) = (ta_1;\ ta_2;\ \dots;\ ta_n)\ \ (t \in R).$

Сукупність усіх n-вимірних векторів із запровадженими вище операціями додавання і множення на число називають **n-вимірним арифметичним простором** і позначають R_n. Простори $R_1,\ R_2,\ R_3$, по суті, збігаються з сукупностями геометричних векторів прямої, площини та простору.

2.2. Лінійна залежність та незалежність системи векторів

Нехай $\vec{a},\ \vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \dots,\ \vec{a}_m$ вектори з R_n.

Кажуть, що вектор $\vec{a}$ є **лінійною комбінацією векторів** $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \dots,\ \vec{a}_m$ з коефіцієнтами $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_m$, якщо $\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + {} + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_m\vec{a}_m$.

Означення 2. Система векторів $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \dots,\ \vec{a}_p$ називається **лінійно незалежною,** якщо жоден із векторів системи не є лінійною комбінацією решти векторів. У протилежному випадку вектори $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \dots,\ \vec{a}_p$ називаються **лінійно залежними** (хоча б один з них є лінійною комбінацією решти).

Лінійна залежність векторів $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$ означає їх пропорційність, а лінійна залежність векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ та $\vec{a}_3$ в R_3 - їх компланарність. Система векторів $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_p$ є лінійно залежною, якщо знайдуться такі числа $\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_p$, серед яких хоча б одне не дорівнює нулю, що має місце рівність:

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_p\vec{a}_p = \vec{0}. \qquad (2.1)$$

Якщо ж рівність (2.1) можлива лише при $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0$, то система векторів $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_p$ буде лінійно незалежною. В R_n існує система з n лінійно незалежних векторів, але будь-яка система, що складається з більш ніж n векторів, лінійно залежна.

Приклад 1

Довести, що система векторів, яка містить у собі нульовий вектор або пару пропорційних векторів, є лінійно залежною.

Розв'язання

1) нехай, наприклад, $\vec{a}_1 = \vec{0}$. Тоді можна знайти лінійну комбінацію векторів системи, яка дорівнює нульовому вектору, причому не всі коефіцієнти цієї лінійної комбінації дорівнюють нулю:

$$1 \cdot \vec{0}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + ... + 0 \cdot \vec{a}_p = \vec{0};$$

2) нехай, наприклад, $\vec{a}_1 = 2\vec{a}_2$. Тоді одержимо:

$$(-1) \cdot \vec{a}_1 + 2 \cdot \vec{a}_2 + 0 \cdot \vec{a}_3 + ... + 0 \cdot \vec{a}_p = \vec{0}.$$

Приклад 2

Довести, що система векторів

$$\vec{e}_1(1;\ 0;\ 0;...;\ 0), \vec{e}_2(0;\ 1;\ 0;...;\ 0),\ ...,\ \vec{e}_n(0;\ 0;\ 0;...;\ 1)$$

лінійно незалежна

Розв'язання

Оскільки $\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+...+\alpha_n\vec{e}_n=(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)$, то $\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+...+\alpha_n\vec{e}_n=\vec{0}\Rightarrow(\alpha_1;\ \alpha_2;\ ...;\ \alpha_n)=\vec{0}$. Оскільки всі координати нульового вектора дорівнюють нулю, то $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$. Це і означає лінійну незалежність системи векторів.

Приклад 3

Знайти в R_4 лінійну комбінацію $4\vec{a}_1+3\vec{a}_2-\vec{a}_3$ векторів $\vec{a}_1(1;\ 2;\ 0;\ 3)$, $\vec{a}_2(-1;\ 0;\ 3;\ 1)$, $\vec{a}_3(1;\ 8;\ 9;\ 15)$.

Розв'язання

Маємо:

$$4\vec{a}_1+3\vec{a}_2-\vec{a}_3=(4\cdot1+3\cdot(-1)-1;\ 4\cdot2+3\cdot0-8;\ 4\cdot0+3\cdot2-9;\ 4\cdot3+ \\ +3\cdot3-15)=(0;\ 0;\ 0;\ 0)=\vec{0}.$$

Отже, система векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ лінійно залежна. Будь-який з векторів системи є лінійною комбінацією інших:

$$\vec{a}_1=\frac{1}{4}\vec{a}_3-\frac{3}{4}\vec{a}_2,\ \ \vec{a}_2=\frac{1}{3}\vec{a}_3-\frac{4}{3}\vec{a}_1,\ \ \vec{a}_3=4\vec{a}_1+3\vec{a}_2.$$

Відзначимо, що будь-які два вектори цієї системи лінійно незалежні, бо вони неколінеарні (дійсно, якщо, наприклад, $\vec{a}_1=t\,\vec{a}_2$, то повинна мати розв'язок система:

$$\begin{cases}1=t\cdot(-1),\\ 2=t\cdot0,\\ 0=t\cdot3,\\ 3=t\cdot2,\end{cases}$$

але ця система рівнянь розв' язку не має).

2.3. Базис

Означення 3. **Базисом** простору R_n називається **будь-яка** система з n лінійно незалежних векторів цього простору.

Якщо вектори $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_n$ утворюють базис простору R_n, то **будь-який** вектор $\vec{a} \in R_n$ **однозначно** подається у вигляді:

$$\vec{a} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + ... + x_n\vec{a}_n.$$

Числа $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ називаються **координатами вектора** $\vec{a}$ **в базисі**

$$\{\ \vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_n\}.$$

На підставі результату прикладу 2 можна стверджувати, що система векторів $\vec{e}_1(1;\ 0;\ 0;...;\ 0)$, $\vec{e}_2(0;\ 1;\ 0;...;\ 0)$, ..., $\vec{e}_n(0;\ 0;\ 0;...;\ 1)$ є базисом простору R_n.

Якщо задана деяка система векторів, то виникають такі запитання:

1. Буде ця система лінійно залежною чи ні?

2. Як знайти найбільшу кількість лінійно незалежних векторів системи?

Відповідь на обидва ці запитання дамо методом **елементарних перетворень**. Під елементарними перетвореннями системи векторів розуміють:

1) перестановку двох векторів системи;

2) множення вектора на будь-яке число, що відрізняється від нуля;

3) додавання до одного вектора другого, помноженого на довільне дійсне число.

За допомогою елементарних перетворень таблиця координат системи векторів може бути зведена до ступеневого вигляду. Це означає виконання для кожного рядка таблиці такої умови: якщо в рядку перший елемент, який не дорівнює нулю, знаходиться на k-му місці, то в наступному рядку на перших

k місцях знаходяться нулі. Наприклад, для системи з трьох векторів у R_4 можливі сім різних типів ступеневих таблиць:

$$\text{а)}\begin{Vmatrix} \otimes \times \times \times \\ 0 \otimes \times \times \\ 0\ 0 \otimes \times \end{Vmatrix},\ \text{б)}\ \begin{Vmatrix} \otimes \times \times \times \\ 0\ 0 \otimes \times \\ 0\ 0\ 0 \otimes \end{Vmatrix},\ \text{в)}\begin{Vmatrix} \otimes \times \times \times \\ 0 \otimes \times \times \\ 0\ 0\ 0 \otimes \end{Vmatrix},$$

$$\text{г)}\begin{Vmatrix} \otimes \times \times \times \\ 0\ 0\ 0 \otimes \\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{Vmatrix},\ \text{д)}\begin{Vmatrix} \otimes \times \times \times \\ 0\ 0 \otimes \times \\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{Vmatrix},\ \text{е)}\begin{Vmatrix} \otimes \times \times \times \\ 0 \otimes \times \times \\ 00\ 00 \end{Vmatrix},$$

$$\text{ж)}\begin{Vmatrix} \otimes \times \times \times \\ 0000 \\ 0000 \end{Vmatrix},$$

де символом $\otimes$ позначені ті елементи, які обов'язково не дорівнюють нулю. Елементи, які позначені символом $\times$, можуть бути як нульовими, так і ненульовими. Звернемо увагу на таке:

1) елемент $\otimes$ є першим ненульовим елементом у своєму рядку;

2) всі елементи стовпця, які розташовані під елементом $\otimes$, дорівнюють нулю*;*

3) кожен елемент $\otimes$ розташований праворуч елементів $\otimes$ попередніх рядків.

Теорема 1. Нехай таблиця координат системи векторів зведена за допомогою елементарних перетворень до ступеневого вигляду. Тоді максимальне число лінійно незалежних векторів розглядуваної системи дорівнює числу ненульових рядків таблиці ступеневого вигляду.

Максимальне число лінійно незалежних векторів системи називають **рангом** таблиці координат і позначають r.

У зв'язку з теоремою, яка сформульована, зауважимо такі факти:

1) лінійно незалежними будуть ті вектори системи, з координат яких отримані ненульові рядки таблиці ступеневого вигляду;

2) максимальне число лінійно незалежних стовпців таблиці координат дорівнює її рангу r. Лінійно незалежними будуть ті

стовпці, в яких знаходяться перші ненульові елементи рядків таблиці ступеневого вигляду.

Приклад 4

Чи утворюють вектори $\vec{a}_1(1;\,2;\,3)$, $\vec{a}_2(2;\,5;\,7)$, $\vec{a}_3(3;\,7;\,11)$ базис у R_3?

Розв'язання

Складемо таблицю координат системи векторів та перетворимо її до вигляду, який був вказаний раніше:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 11 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Тут на першому кроці вектор $-2\vec{a}_1$ додається до вектора $\vec{a}_2$, а вектор $-3\vec{a}_1$ додається до $\vec{a}_3$. На другому кроці вектор $-\vec{a}_2^{\,'} = -(-2\vec{a}_1 + \vec{a}_2)$ додається до вектора $-\vec{a}_3^{\,'} = -3\vec{a}_1 + \vec{a}_3$. Оскільки нульових рядків у таблиці ступеневого вигляду немає, то система трьох векторів, яка розглядалася, лінійно незалежна і, отже, утворює базис у R_3.

Приклад 5

Знайти максимальне число лінійно незалежних векторів $\vec{a}_1(2;\,-2;\,-4)$, $\vec{a}_2(1;\,9;\,3)$, $\vec{a}_3(-2;\,-4;\,1)$, $\vec{a}_4(3;\,7;\,-1)$ арифметичного простору R_3.

Розв'язання

$$\begin{Vmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 1 & 9 & 3 \\ -2 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & -1 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 9 & 3 \\ -2 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & -1 \end{Vmatrix}$$

$$\to \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 10 & 5 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 10 & -5 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Ми одержали два ненульових рядки, отже максимальне число лінійно незалежних векторів дорівнює двом (проведена процедура показує, що вектори $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$ лінійно незалежні).

Приклад 6

Чи утворюють вектори $\vec{a}_1(-1; 4; -3; -2)$, $\vec{a}_2(2; -8; 5; 3)$, $\vec{a}_3(3; -12; 1; 0)$, $\vec{a}_4(-4; 16; 0; 1)$ базис у R_4?

Розв'язання

$$\begin{Vmatrix} -1 & 4 & -3 & 2 \\ 2 & -8 & 5 & 3 \\ 3 & -12 & 1 & 0 \\ -4 & 16 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \rightarrow \begin{Vmatrix} -1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 12 & 9 \end{Vmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{Vmatrix} -1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{Vmatrix} \rightarrow \begin{Vmatrix} -1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Оскільки в таблиці ступеневого вигляду три ненульових рядки, то максимальне число лінійно незалежних векторів системи $r = 3$. Лінійно незалежними будуть вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Відзначимо, що виконані вище елементарні перетворення дозволяють знайти лінійну комбінацію векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3,$ яка дає вектор $\vec{a}_4$.

Перший крок: $\vec{a}_2^{\,'} = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2,\ \vec{a}_3^{\,'} = 3\vec{a}_1 + \vec{a}_3,\ \vec{a}_4^{\,'} = -4\vec{a}_1 + \vec{a}_4$.

Другий крок:

$$\vec{a}_3^{\,''} = -3\vec{a}_2^{\,'} + \vec{a}_3^{\,'} = -13\vec{a}_1 - 8\vec{a}_2 + \vec{a}_3,\ \vec{a}_4^{\,''} = 12\vec{a}_2^{\,'} + \vec{a}_4^{\,'} = 20\vec{a}_1 + 12\vec{a}_2 + \vec{a}_4.$$

Третій крок:

$$\vec{a}_4^{\,'''} = \frac{3}{2}\vec{a}_3^{\,''} + \vec{a}_4^{\,''} = \frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{3}{2}\vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_4 = -\frac{1}{2}\vec{a}_1 - \frac{3}{2}\vec{a}_3.$$

Приклад 7

Визначити, чи створює будь-яка трійка з векторів $\vec{a}_1(-1;-2;-3)$, $\vec{a}_2(2;5;7)$, $\vec{a}_3(6;14;22)$, $\vec{a}_4(-5;-11;-18)$ базис у просторі R_3 і, якщо це так, знайти координати четвертого вектора в цьому базисі.

Розв'язання

$$\left\|\begin{matrix}-1 & -2 & -3\\ 2 & 5 & 7\\ 6 & 14 & 22\\ -5 & -11 & -18\end{matrix}\right\| \to \left\|\begin{matrix}-1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & -1 & -3\end{matrix}\right\|$$

$$\to \left\|\begin{matrix}-1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -2\end{matrix}\right\| \to \left\|\begin{matrix}-1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\right\|.$$

В отриманій таблиці є три ненульових рядки, отже максимальне число лінійно незалежних векторів $r=3$. Лінійно незалежними будуть вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, тобто вони утворюють базис у просторі R_3. Знайдемо координати вектора $\vec{a}_4$ в цьому базисі. Для цього відновимо послідовність елементарних перетворень, згаданих вище.

Перший крок: $\vec{a}_2^{\,'} = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{a}_3^{\,'} = 6\vec{a}_1 + \vec{a}_3$, $\vec{a}_4^{\,'} = -5\vec{a}_1 + \vec{a}_4$.

Другий крок:

$$\vec{a}_3^{\,''} = -2\vec{a}_1^{\,'} + \vec{a}_3^{\,'} = 2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3,\ \vec{a}_4^{\,''} = \vec{a}_2^{\,'} + \vec{a}_4^{\,'} = -3\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_4.$$

Третій крок:

$$\vec{a}_4^{\,'''} = \vec{a}_3^{\,''} + \vec{a}_4^{\,''} = -\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_4 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3,$$

тобто координати вектора $\vec{a}_4$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ будуть такими:

$$\vec{a}_4(1;1;-1).$$

2.4. Підпростір

Означення 4. Підмножина M простору R_n називається **підпростором** простору R_n, якщо для будь-яких векторів $\vec{a},\ \vec{b} \in M$ та будь-яких чисел α та β має місце співвідношення $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \in M$. Підпростір M простору R_n має розмірність, яка не перевищує n. При цьому, якщо розмірність M дорівнює n, то $M = R_n$.

Приклад 8

а) сукупність усіх векторів із R_n, у яких перша координата дорівнює нулю, є підпростір розмірності $n-1$. Базис цього підпростору утворюють вектори $(0;1;0;...;0)$, $(0;0;1;...;0)$, ..., $(0;0;0;...;1)$;

б) сукупність усіх векторів із R_n, сума координат яких дорівнює нулю, є підпростір розмірності $n-1$;

в) сукупність векторів вигляду $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ... + \alpha_k\vec{e}_k$, де $\alpha_i\,(i = 1,\ldots,k)$ – будь-які числа, а вектори $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_k \in R_n$ – лінійно незалежні, являють собою k-вимірний підпростір R_n, базисом якого є вектори $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_k$. Зокрема, двовимірним (одновимірним) підпростором простору R_3 є сукупність векторів, які розташовані на площині (прямій), яка проходить через початок координат.

2.5. Евклідовий простір

Будемо говорити, що на просторі R_n визначено **скалярний добуток**, якщо кожній парі векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ з R_n зіставляється деяке число, яке позначають $(\vec{a},\vec{b})$ і називають **скалярним добутком векторів** $\vec{a}$ та $\vec{b}$. При цьому припускається, що скалярний добуток має такі властивості: 1) $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$; 2) $(t\,\vec{a},\vec{b}) = t(\vec{a},\vec{b})$; 3) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2,\vec{b}) = (\vec{a}_1,\vec{b}) + (\vec{a}_2,\vec{b})$; 4) $(\vec{a},\vec{a}) \geq 0$, причому $(\vec{a},\vec{a}) = 0$ лише при $\vec{a} = \vec{0}$.

Простір R_n із скалярним добутком називається **евклідовим**.

Довжиною вектора $\vec{a}$ називається число $\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$, яке позначають $\|\vec{a}\|$:

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}.$$

Кутом між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають кут $\alpha \in [0;\pi]$, для якого

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}.$$

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають **ортогональними,** якщо $(\vec{a},\vec{b})=0$.

Система векторів називається **ортогональною,** коли всі вектори цієї системи попарно ортогональні. Система векторів називається **ортонормованою,** якщо всі вектори системи попарно ортогональні і кожний з них має довжину, яка дорівнює одиниці.

Вектори, які утворюють ортогональну систему, є лінійно незалежними (у припущенні, що всі вектори не дорівнюють нулю).

В ортонормованому базисі простору R_n скалярний добуток двох векторів $\vec{a}(a_1;\, a_2;\, a_3)$, $\vec{b}(b_1;\, b_2;\, b_3)$ дорівнює сумі попарних добутків відповідних координат

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

Ми бачимо, що наведені вище визначення довжини і кута є узагальненням на випадок n-вимірного простору уявлень геометрії простору двох та трьох вимірів.

Приклад 9

Знайти косинуси внутрішніх кутів “трикутника”, який задано в ортонормованому базисі координатами вершин

$$A(1;\, 2;\, 1;\, 2),\ B(3;\, 1;\, -1;\, 0),\ C(1;\, 1;\, 0;\, 1).$$

Розв'язання

$$\overrightarrow{AB}(2;\,-1;\,-2;\,-2),\ \overrightarrow{AC}(0;\,-1;\,-1;\,-1),\ \overrightarrow{BC}(-2;\,0;\,1;\,1);$$
$$(\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC})=5,\quad (\overrightarrow{BA},\,\overrightarrow{BC})=8,\ (\overrightarrow{CA},\,\overrightarrow{CB})=-2,$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{13},\ \left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{6},\quad \left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{3};$$
$$\cos\angle B=\frac{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\frac{8}{\sqrt{78}},\ \cos\angle A=\frac{5}{\sqrt{39}},\ \cos\angle C=-\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ евклідового простору виконується **нерівність Коші-Буняковського**

$$\left|(\vec{a},\vec{b})\right|\le\left\|\vec{a}\right\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|,$$

при цьому знак рівності має місце тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно залежні .

Наслідком нерівності Коші-Буняковського є "**нерівність трикутника**"

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|\le\left|\overrightarrow{BC}\right|+\left|\overrightarrow{CA}\right|.$$

Назва останньої нерівності пояснюється тим, що для геометричних векторів вона виявляє той факт, що довжина сторони трикутника не перевищує суми довжин двох інших його сторін.

Нехай вектори $\vec{e}_1,\,\vec{e}_2,\,...,\,\vec{e}_n$ утворюють ортогональний базис евклідового простору. Тоді координати $a_k\,(k=1,...,n)$ вектора $\vec{a}$ в цьому базисі можуть бути одержані за формулою

$$a_k=\frac{(\vec{a},\,\vec{e}_k)}{(\vec{e}_k,\,\vec{e}_k)}\quad (k=1,...,n)\ . \tag{2.2}$$

Дійсно, якщо помножити зображення $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + ... + \alpha_n \vec{e}_n$ скалярно на вектор $\vec{e}_k$, одержимо рівність

$$(\vec{a}, \vec{e}_k) = \alpha_1 (\vec{e}_1, \vec{e}_k) + ... + \alpha_k (\vec{e}_k, \vec{e}_k) + ... + \alpha_n (\vec{e}_n, \vec{e}_k).$$

З умови ортогональності виходить, що $(\vec{e}_j, \vec{e}_k) = 0$ при $j \neq k$, і тому $(\vec{a}, \vec{e}_k) = \alpha_k (\vec{e}_k, \vec{e}_k)$.

У прикладній математиці вивчаються не тільки простори R_n. В системах передачі інформації велику роль відіграють простори n-значних наборів (n-буквених "слів") $(d_1; d_2; ...; d_n)$ з одиниць та нулів. Додавання "слів" проводиться покоординатно за правилами: 0+0=0, 0+1=1+0=1, 1+1=0 (звідси, наприклад, виходить, що сума двох однакових "слів" є нульове "слово"). Для кодування повідомлень використовують набори, сума координат яких дорівнює нулю: $d_1 + d_2 + ... + d_n = 0$. Якщо на приймачі одержано повідомлення з ненульовою сумою координат, то можна зробити висновок, що перешкоди при передачі повідомлення спричинили його перекручення.

3. МАТРИЦІ

3.1. Термінологія

Матрицею A розмірів $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Числа a_{ij} називаються **елементами матриці.** У випадку, коли $m = n$, матриця A називається **квадратною** (розміру n), а при $m \neq n$ – **прямокутною**. Матриця розміру $1 \times n$ називається **матрицею-рядком**, а матриця розміру $m \times 1$ – **матрицею-стовпцем.**

Іноді для матриці A використовують такий запис: $A = \left\| a_{ij} \right\|$. Числа $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$ при фіксованому i утворюють i-й рядок матриці A, а числа $a_{1k}, a_{2k}, ..., a_{mk}$ при фіксованому k її k-й стовпець. Елементи $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ утворюють **головну діагональ** квадратної матриці A. Якщо у квадратної матриці всі елементи, що розташовані не на головній діагоналі, дорівнюють нулю, то матриця називається **діагональною**. Якщо у квадратної матриці всі елементи, які розташовані нижче (вище) головної діагоналі, дорівнюють нулю, то ця матриця називається **верхньотрикутною** *(***нижньотрикутною***)*. Якщо всі елементи головної діагоналі діагональної матриці дорівнюють одиниці, то матриця називається **одиничною**. Для одиничної матриці n-го порядку використовують, як правило, позначення E_n.

Приклад 1

а) матриця $A = \begin{Vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 11 & 9 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \end{Vmatrix}$ є квадратною матрицею третього порядку (розміру 3×3);

б) матриця $B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -7 \end{Vmatrix}$ є прямокутною матрицею розміру 2×3;

в) матриця $C = \begin{Vmatrix} 2 \\ 4 \end{Vmatrix}$ є матрицею-стовпцем розміру 2×1, а матриця $D = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 4 & 7 \end{Vmatrix}$ - матрицею-рядком розміру 1×4;

г) матриці $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$ є відповідно нижньотрикутною і верхньотрикутною;

д) матриця $E_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ - одинична третього порядку.

Транспонованою до матриці $A(m \times n)$ називається матриця $A^T(n \times m)$, стовпці якої є рядками матриці A з тими ж номерами.

$$A = \underset{n}{\boxed{m}} \qquad\qquad A^T = \underset{m}{\boxed{\;n\;}}$$

Квадратна матриця A називається **симетричною**, якщо $a_{ik} = a_{ki}$, тобто $A = A^T$.

Приклад 2

Знайти матриці, транспоновані до поданих:

а) $A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{Vmatrix}$, б) $A = \begin{Vmatrix} 2 \\ 7 \end{Vmatrix}$, в) $A = \begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -2 \end{Vmatrix}$.

Розв'язання

а) $A^T = \begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 0 \end{Vmatrix}$, б) $A^T = \begin{Vmatrix} 2 & 7 \end{Vmatrix}$, в) $A = \begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{Vmatrix}$.

3.2. Дії над матрицями

1. Нехай $A = \|a_{ik}\|$, $B = \|b_{ik}\|$ - дві матриці однакового розміру.

Сумою матриць A *і* B називається матриця $C = \|c_{ik}\|$ того ж розміру з елементами $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$.

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}.$$

$$\underset{n}{\boxed{m}} + \underset{n}{\boxed{m}} = \underset{n}{\boxed{m}}$$

2. **Добутком матриці A на число t** є матриця C того ж розміру з елементами $c_{ik} = t\, a_{ik}$.

$$t \cdot A = C.$$

$$t\ \underset{n}{\boxed{m\qquad}} = \underset{n}{\boxed{m\qquad}}$$

Приклад 3

$A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$. Знайти $C = 2A - 3B$.

Розв'язання

$$C = \begin{Vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 8 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -6 & -6 & -9 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -6 & -4 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Операції додавання і множення матриць на число, очевидно, мають такі властивості:

$$\begin{aligned} &1)\ (t + p)A = tA + pA; \\ &2)\ t(A + B) = tA + tB; \\ &3)\ (t \cdot p)A = t(pA). \end{aligned}$$

3. Нехай задані матриця $A = \|a_{ik}\|$ розміру $m \times n$ i матриця $B = \|b_{kj}\|$ роміру $n \times p$.

Добутком матриці A **на матрицю** B називається матриця $C = \|c_{ij}\|$ розміру $m \times p$, така, що

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

Інакше кажучи, для отримання елемента матриці добутку, розташованого в i-му рядку і j-му стовпці, треба знайти суму попарних добутків елементів i-го рядка матриці A на елементи j-го стовпця матриці B (рис. 3.1).

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \; \ldots \; \ldots \\ \underline{a_{i1}} & \underline{a_{i2}} \ldots \underline{a_{in}} \\ \ldots & \ldots \; \ldots \; \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots \underline{b_{1j}} \ldots b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} \ldots \underline{b_{2j}} \ldots b_{2p} \\ \ldots & \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots \underline{b_{nj}} \ldots b_{np} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \ldots \; \ldots \; c_{ij} \; \ldots \ldots \\ \vdots \\ \vdots \end{Vmatrix}.$$

Рис. 3.1

Відзначимо, що операція множення матриць, взагалі кажучи, не має комутативної властивості: $A \cdot B \neq B \cdot A$. Можуть зустрічатися такі випадки:

1) добуток $A \cdot B$ визначено, а $B \cdot A$ – ні $(m \neq p)$;

2) $A \cdot B$ *і* $B \cdot A$ мають різні розміри $(m \neq n)$;

3) $A \cdot B$ *і* $B \cdot A$ мають однакові розміри $(m = n = p)$, але відрізняються. Якщо $A \cdot B = B \cdot A$, то матриці називаються **переставними**.

Якщо матриці $A \cdot B$ *і* $B \cdot C$ визначені, то виконується властивість **асоціативності:** $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Операція множення зв'язана з операціями додавання і транспонування співвідношеннями:

1) $(aA + bB) \cdot C = a(A \cdot C) + b(B \cdot C)$;
2) $A \cdot (bB + cC) = b(A \cdot B) + c(A \cdot C)$;
3) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Приклад 4

Знайти добутки $A \cdot B$ та $B \cdot A$, де:

а) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 2 & 7 \\ 5 & -3 & 12 & 11 \\ 4 & 2 & 6 & 2 \end{Vmatrix}$; б) $A = \begin{Vmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 0 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$;

в) $A=\begin{Vmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{Vmatrix}$, $B=\begin{Vmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{Vmatrix}$; г) $A=\begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix}$, $B=\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

д) $A=\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 1 \end{Vmatrix}$, $B=\begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{Vmatrix}$; е) $A=\begin{Vmatrix} -2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{Vmatrix}$, $B=\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}$.

Розв'язання

а) $A(1\times 3)$, $B(3\times 4) \Rightarrow A\cdot B(1\times 4)$, $B\cdot A$ не визначена.

$A\cdot B=\begin{Vmatrix} 10 & 5 & 14 & 11 \end{Vmatrix}$;

б) $A(2\times 2)$, $B(2\times 2) \Rightarrow A\cdot B(2\times 2)$, $B\cdot A(2\times 2)$,

$A\cdot B=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ (добуток ненульових матриць дорівнює нульовій матриці), $B\cdot A=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 19 & 0 \end{Vmatrix}$;

в) $A\cdot B=\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$, $B\cdot A=\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$ матриці A $і$ B переставні;

г) $A(3\times 3)$, $B(3\times 3) \Rightarrow A\cdot B(3\times 3)$, $B\cdot A(3\times 3)$;

$A\cdot B=\begin{Vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -6 & 1 & -2 \end{Vmatrix}$, $B\cdot A=\begin{Vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \\ 17 & -1 & -2 \end{Vmatrix}$ (добуток нижньотрикутних матриць є матриця нижньотрикутна);

д) $A(1\times 3)$, $B(3\times 1) \Rightarrow A\cdot B(1\times 1)$, $B\cdot A(3\times 3)$,

$A\cdot B=2\cdot 4+(-3)\cdot 3+1\cdot 0=-1$; $B\cdot A=\begin{Vmatrix} 8 & -12 & 4 \\ 6 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$;

е) $A(2\times 4),\ B(4\times 2) \Rightarrow A\cdot B(2\times 2),\ B\cdot A(4\times 4),$

$$A\cdot B=\begin{Vmatrix} 7 & 13 \\ -3 & -5 \end{Vmatrix},\quad B\cdot A=\begin{Vmatrix} -4 & 6 & 0 & 8 \\ -3 & 2 & -2 & 6 \\ 4 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & 10 & 8 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Приклад 5

а) перевірити, що якщо $A=\begin{Vmatrix} 25 & -20 \\ 30 & -24 \end{Vmatrix}$, то $A^2=A$;

б) довести, що якщо для матриці A n-го порядку справедливе співвідношення $A^2=A,$ то для матриці $B=2A-E_n$ справедлива рівність $B^2=E_n$.

Розв'язання

а) $\begin{Vmatrix} 25 & -20 \\ 30 & -24 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 25 & -20 \\ 30 & -24 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 25 & -20 \\ 30 & -24 \end{Vmatrix};$

б) $B^2=B\cdot B=(2A-E_n)\cdot(2A-E_n)=(2A)\cdot(2A)-E_n\cdot(2A)-$
$-(2A)E_n+E_n\cdot E_n=4A^2-2A-2A+E_n=4A-4A+E_n=E_n.$

4. ВИЗНАЧНИКИ

Кожній квадратній матриці однозначно зіставимо деяке число, яке називається **визначником матриці**. Для визначника матриці A використовується одне з двох позначень: $\det A$ або
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

4.1. Визначники другого порядку та їх властивості

Визначником квадратної матриці другого порядку називають число $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$. Отже,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Приклад 1

Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання

а) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix} = a^2b^2 - a^2b^2 = 0;$

б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1;$

в) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix} = 1 - \log_a b \cdot \log_b a = 1 - 1 = 0.$

Безпосередніми обчисленнями переконаємось, що визначники другого порядку мають такі властивості:

1) $\det A = \det A^T$.

Дійсно, $\det A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \det A$. Ця властивість дозволяє в подальшому вести мову лише про рядки визначника;

2) якщо два рядки визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю:

$$a_{11} = ta_{21}.\ a_{12} = ta_{22} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ta_{21} & ta_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0;$$

3) якщо два рядки визначника поміняти місцями, то визначник змінить знак:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{22} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

4) якщо до елементів одного рядка визначника додати елементи другого рядка, помножені на одне і те ж число, то визначник не зміниться:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ta_{11} & a_{22} + ta_{12} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (a_{22} + ta_{12}) - a_{12} \cdot (a_{21} + ta_{11}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

5) якщо матриця трикутна, то її визначник дорівнює добутку елементів головної діагоналі:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22};$$

6) для квадратних матриць однакового розміру визначник їх добутку дорівнює добутку їх визначників:

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B).$$

Дійсно: $A \cdot B = \begin{Vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{Vmatrix} \Rightarrow \det(A \cdot B) =$

$$= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) \cdot (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \cdot (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) =$$
$$= a_{12} \cdot a_{21} \cdot (b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22}) - a_{11} \cdot a_{22} \cdot (b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22}) =$$
$$= (b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22}) \cdot (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = \det A \cdot \det B. \blacksquare$$

4.2. Алгебраїчне доповнення

Якщо із квадратної матриці порядку n викреслити i-й рядок та j-й стовпець, на перехресті яких знаходиться елемент a_{ij}, то одержимо матрицю $n-1$-го порядку.

Означення 1. Помножений на $(-1)^{i+j}$ визначник матриці, яка одержана після викреслення з початкової матриці A i-го рядка та j-го стовпця, називається **алгебраїчним доповненням**, що відповідає елементу a_{ij} та позначається A_{ij}:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} \ldots \vdots a_{1j} \vdots \ldots a_{1n} \\ \ldots \; \ldots \vdots \ldots \vdots \ldots \; \ldots \\ a_{i1} \ldots \vdots a_{ij} \vdots \ldots \; a_{in} \\ \ldots \; \ldots \vdots \ldots \vdots \; \ldots \; \ldots \\ a_{n1} \ldots \vdots a_{nj} \vdots \ldots a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4.1}$$

Приєднаною матрицею для матриці A називається матриця $A^{\vee}$, яка є транспонованою до матриці алгебраїчних доповнень:

$$A^{\vee} = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{4.2}$$

Приклад 2

Знайти алгебраїчні доповнення елементів матриць:

а) $A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{Vmatrix}$; б) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 5 \end{Vmatrix}$.

Розв'язання

а) $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 3 = 3,\; A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-4) = 4,\; A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 1 = -1,$
$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2;$

б) $A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}0&3\\6&5\end{vmatrix}=-18,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-2&3\\1&5\end{vmatrix}=13,$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-2&0\\1&6\end{vmatrix}=-12,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}3&4\\6&5\end{vmatrix}=9,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1&4\\1&5\end{vmatrix}=1,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1&3\\1&6\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}3&4\\0&3\end{vmatrix}=9,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1&4\\-2&3\end{vmatrix}=-11,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1&3\\-2&0\end{vmatrix}=6.$$

Приклад 3

Для матриць, які розглянуті у прикладі 2*,* знайти приєднані.

Розв'язання

а) $A^{\vee}=\begin{Vmatrix}3&-1\\4&2\end{Vmatrix}$; б) $A^{\vee}=\begin{Vmatrix}-18&9&9\\13&1&-11\\-12&-3&6\end{Vmatrix}$.

4.3. Розкладання визначника за елементами рядка

Теорема (розкладання визначника за елементами рядка)

1) визначник дорівнює сумі попарних добутків елементів деякого рядка на їх алгебраїчні доповнення:

$$\det A=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}\ \ (i=1,\ldots,n);\tag{4.3}$$

2) сума попарних добутків елементів деякого рядка на алгебраїчні доповнення елементів другого рядка дорівнює нулю:

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\ldots+a_{in}A_{jn}=0\ \ (i\neq j).\tag{4.4}$$

Зрозуміло, що мають місце аналогічні формули розкладання визначника за елементами стовпця. Перше твердження теореми дозволяє знайти визначник n-го порядку, якщо відомі відповідні визначники $n-1$-го порядку. Тим самим визначник можна ввести індукцією по n, вважаючи для $n=1$ (основа індукції) $\det A = a_{11}$.

Можна довести, що визначник n-го порядку має властивості 1 - 6, які були встановлені для визначників другого порядку. При обчисленні визначника доцільно використовувати основні властивості (наприклад, 4),перетворюючи його так, щоб більшість елементів деякого рядка обертались на нуль.

Приклад 4

Знайти визначники:

$$\text{а)}\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{б)}\begin{vmatrix} 6 & 8 & -9 & -12 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

а) розкладаючи за елементами першого рядка, одержимо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} =$$
$$= 3 + 18 - 6 \cdot (6 - 36) + 3 \cdot (-4 - 4) = 177.$$

Обчислимо цей визначник інакше, а саме - перетворюючи його:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & -11 & 3 \\ 0 & -26 & -9 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -11 & 3 \\ -26 & -9 \end{vmatrix} = 99 + 78 = 177;$$

б) попередньо перетворимо визначник:

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & -9 & -12 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & -4 & -6 & -16 \\ -2 & -3 & -5 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot(-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -3 & -6 & -16 \\ -2 & -5 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -7 \\ -2 & 0 & -4.5 \end{vmatrix} = 2(-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -4.5 \end{vmatrix} = 1.$$

Приклад 5

Знайти добуток матриці на її приєднану.

Розв'язання

Використовуючи формули (4.1) та (4.2), знаходимо:

$$A \cdot A^{\vee} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{Vmatrix} = \det A \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} = \det A \cdot E_n .$$

Аналогічно $A^{\vee} \cdot A = \det A \cdot E_n$.

4.4.Обернена матриця

Нехай A – квадратна матриця порядку n.

Означення 2. Оберненою матрицею для матриці A n-го порядку називається матриця A^{-1}, така, що $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n$.

Матриця A^{-1} існує та єдина тоді і тільки тоді, коли $\det A \neq 0$ (матриці, визначники яких не дорівнюють нулю, називаються **невиродженими**). З результату прикладу 5 виходить, що обернена матриця A^{-1} визначається за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{\vee}. \tag{4.5}$$

Елементи оберненої матриці можуть бути обчислені за формулою

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A} \tag{4.6}$$

Приклад 6

За даною матрицею A знайти її обернену A^{-1}.

а) $A = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}$; б) $A = \begin{Vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{Vmatrix}$.

Розв'язання

а) $\det A = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot (-\sin\alpha) = 1$,

$A_{11} = \cos\alpha,\ A_{12} = -\sin\alpha,\ A_{21} = \sin\alpha,\ A_{22} = \cos\alpha,\ A^{-1} = A^{\vee} =$
$= \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}$;

б) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot 8 + 4 \cdot (-5) + 5 \cdot (-1) = -9,\ A_{11} = 8,\ A_{12} = 5,\ A_{13} = -1,\ A_{21} = -29,$
$A_{22} = -17,\ A_{23} = -2,\ A_{31} = 11,\ A_{32} = 8,\ A_{33} = 2,$

і, отже,

$$A^{-1} = -\frac{1}{9} \cdot \begin{Vmatrix} 8 & -29 & 11 \\ 5 & -17 & 8 \\ -1 & -2 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Добуток $A \cdot B$ двох квадратних матриць одного порядку є невиродженою матрицею тоді і тільки тоді, коли матриці A *і* B невироджені. При цьому справедлива рівність:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}. \qquad (4.7)$$

Операції транспонування і знаходження оберненої матриці переставні:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T. \qquad (4.8)$$

Нарешті відзначимо, що для визначника невиродженої матриці A справедливе співвідношення

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}. \qquad 9)$$

5. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

5.1. Основні означення

Система, яка має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (5.1)$$

називається **лінійною системою** m рівнянь із n невідомими.

Коефіцієнти системи $a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn}$ та **вільні члени** $b_1, b_2, ..., b_m$ є відомими. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ **невідомі,** які необхідно знайти.

Матрицею коефіцієнтів системи (5.1) називається $m \times n$ матриця

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \, ... \, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \, ... a_{2n} \\ ... & ... \, ... \, ... \\ a_{m1} & a_{m2} ... \, a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Розв'язком системи (5.1) називається такий набір чисел $(x_1; x_2; ...; x_n)$, який при підстановці в систему перетворює всі її рівняння в правильні числові рівності. Система називається **сумісною,** якщо вона має принаймні один розв'язок, і несумісною – у протилежному випадку.

Якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, то система називається **однорідною,** а якщо хоча б один вільний член не дорівнює нулю, то **неоднорідною.**

Запровадимо у розгляд вектори $\vec{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{Vmatrix} \in R_n$ і $\vec{b} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{Vmatrix} \in R_m$.

Тоді система (5.1) може бути записана одним матричним рівнянням

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}. \quad (5.2)$$

Дві системи лінійних рівнянь називаються **еквівалентними**, якщо всі розв'язки першої системи є розв'язками другої, і навпаки, всі розв'язки другої є розв'язками першої. Зазначимо, що множення рівнянь на число, не рівне нулю, а також додавання до одного рівняння другого рівняння системи приводить до системи рівнянь, яка є еквівалентною початковій. Зрозуміло, що якщо внаслідок описаних раніше операцій ми одержимо рівняння з нульовими коефіцієнтами та нульовим вільним членом, то воно може бути відкинуте з розгляду (воно не дає ніякої інформації про $x_1, x_2, ..., x_n$).

5.2. Теорема Крамера

Розглянемо випадок, коли в системі (5.1) число рівнянь дорівнює числу невідомих $(m = n)$ і $\det A \neq 0$. Таку систему будемо називати **системою Крамера**.

Теорема. Система Крамера має **єдиний розв'язок**, який у векторній формі має вигляд:

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}\,, \tag{5.3}$$

а в координатній формі задається формулою

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}\ (i = 1, 2, ..., n), \tag{5.4}$$

де A_i-матриця, одержана з матриці A заміною i-го стовпця стовпцем вільних членів.

Доведення. Помножимо матричне рівняння (5.2) зліва на A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot (A\vec{x}) = A^{-1} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow E_n \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}.$$

Формула (5.3) одержана. Для одержання (5.4) розпишемо докладніше ліву частину (5.3) та розкладемо визначник $\det A_i$ за елементами i-го стовпця

$$A^{-1} \cdot \vec{b} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} \ldots & A_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} \ldots & A_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{Vmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{Vmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots A_{n1}b_n \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots A_{nn}b_n \end{Vmatrix}.$$

$$\det A_i = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots b_2 & \ldots & a_{2n} \\ . & . \ \ldots \ . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots b_n & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} = b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \ldots + b_n A_{ni}.$$

Отже, $\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix} = A^{-1} \cdot \vec{b} \Rightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix} = \dfrac{1}{\det A} \begin{Vmatrix} \det A_1 \\ \det A_2 \\ \dots \\ \det A_n \end{Vmatrix}$. ■

Наслідок. Однорідна система Крамера ($m = n$, $\det A \neq 0$) має лише один розв'язок: $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \dots,\ x_n = 0$.

Зауваження. Розглянемо матричне рівняння

$$X \cdot A = B, \qquad (5.2'')$$

де A, B – відомі матриці, матрицю X треба знайти. Якщо існує A^{-1}, то після множення $(5.2'')$ справа на A^{-1} маємо

$$X = B \cdot A^{-1}. \qquad (5.3'')$$

Відзначимо, що формули Крамера (5.2), (5.3) на практиці не використовують для розв'язку систем лінійних рівнянь із великою кількістю невідомих, оскільки вони потребують значного обсягу обчислювальної роботи.

Приклад 1

Розв'язати за формулами Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22. \end{cases} \quad \text{(у матричній формі } \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 11 \\ 8 \\ 22 \end{Vmatrix} \text{).}$$

Розв'язання

Оскільки

$$m = n = 3,\ \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 4 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 12 - 6 = 6 \neq 0,$$

то розглянута система є системою Крамера. Спочатку знайдемо її розв'язок методом оберненої матриці:

1) обчислюємо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$A_{11} = -6,\ A_{12} = 0,\ A_{13} = 6,\ A_{21} = -2,\ A_{22} = -4,\ A_{23} = 3,\ A_{31} = 4,\ A_{32} = 2,$
$A_{33} = -3;$

2) за формулою (4.5) з урахуванням (4.2) одержуємо обернену матрицю $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{Vmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{Vmatrix}$;

3) за формулою (5.3):

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{Vmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 11 \\ 8 \\ 22 \end{Vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{Vmatrix} -6\cdot 11 + (-2)\cdot 8 + 4\cdot 22 \\ 0\cdot 11 + (-4)\cdot 8 + 2\cdot 22 \\ 6\cdot 11 + 3\cdot 8 + (-3)\cdot 22 \end{Vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{Vmatrix} 6 \\ 12 \\ 24 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{Vmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4.$

Формула (5.4) приводить до такої схеми розв'язку:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 11 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 2 \\ 12 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 19 & 0 & 4 \\ 8 & -1 & 2 \\ 30 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 19 & 4 \\ 30 & 6 \end{vmatrix} = 6,\ x_1 = \frac{6}{6} = 1,$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 4 & 22 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12,\ \ x_2 = \frac{12}{6} = 2,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 8 \\ 4 & 1 & 22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 19 \\ 2 & -1 & 8 \\ 6 & 0 & 30 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 19 \\ 6 & 30 \end{vmatrix} = 24,\ \ x_3 = \frac{24}{6} = 4.$$

Приклад 2

Система складається з двох послідовно з’єднаних блоків. Перший блок перетворює сигнал $\vec{x}$ на вході системи в сигнал $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$. Другий блок - сигнал $\vec{y}$ в сигнал $\vec{z} = B \cdot \vec{y}$ на виході системи. Нехай функціонування системи в цілому і блоків описується, відповідно, матрицями C, A, B (рис. 5.1) і відомо, що $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 8 \end{Vmatrix}$. Знайти матрицю B, яка описує роботу другого блоку.

Розв’язання

Маємо $\vec{z} = B \cdot \vec{y} = B \cdot (A \cdot \vec{x}) = (B \cdot A) \cdot \vec{x}$. Отже, $(B \cdot A) \cdot \vec{x} = C \cdot \vec{x}$ для будь-якого сигналу $\vec{x}$, тобто $B \cdot A = C \Rightarrow B = C \cdot A^{-1}$ (згідно з $(5.3'')$). Знайдемо A^{-1}

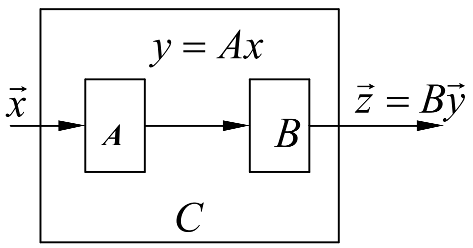


Рис. 5.1

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1;\ A_{11} = 0;\ A_{12} = -1,$$

$$A_{21} = -1;\ A_{22} = 0;$$

$$A^{\vee} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1} A^{\vee} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$B = \begin{Vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 8 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 5 \end{Vmatrix}.$$

5.3. Метод Гаусса

Цей метод послідовного виключення невідомих є практичним засобом розв'язання системи m лінійних рівнянь з n невідомими. Напишемо систему (5.1) у вигляді матриці, відокремлюючи стовпець вільних членів вертикальною рискою:

$$\left\| \begin{array}{llll|l} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right\| . \tag{5.5}$$

Ця матриця називається **розширеною матрицею** системи (5.1). За розширеною матрицею (5.5) система (5.1) відновлюється однозначно. Будемо вважати, що коефіцієнт $a_{11} \neq 0$ (виконання цієї умови можна добитися перестановкою рівнянь системи (5.1)).

Поділимо перший рядок матриці (5.5) на a_{11}, після чого він матиме вигляд:

$$1\ c_{12}\ \ c_{13}\ ...\ c_{1n} \vdots\, \alpha_1. \tag{5.6}$$

Потім помножимо одержаний рядок (5.6) послідовно на $-a_{21},\ -a_{31},\ ...,-a_{m1}$ і додамо відповідно до другого, третього, ..., m-го рядка матриці (5.5). Внаслідок цих дій одержимо нову розширену матрицю:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & \mathrm{c}_{12} & \mathrm{c}_{13} & ... & \mathrm{c}_{1\mathrm{n}} & \vdots\, \alpha_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & ... & a'_{2n} & \vdots\, b'_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & \vdots\, ... \\ 0 & a'_{m2} & a'_{m3} & ... & a'_{mn} & \vdots\, b'_m \end{matrix} \right\| . \tag{5.5$'$}$$

Вона відповідає системі рівнянь, в якій невідома x_1 входить лише в перше рівняння. Ця система є системою рівнянь, яка еквівалентна початковій системі (5.1).

Розглянемо тепер “укорочену” матрицю $\left\| \begin{matrix} a'_{22} & a'_{23} & ... & a'_{2n} & \vdots & b'_2 \\ ... & ... & ... & ... & \vdots & ... \\ a'_{m2} & a'_{m3} & ... & a'_{mn} & \vdots & b'_m \end{matrix} \right\|$.

Припустимо, що в її першому стовпці є число, яке відмінне від нуля. Тоді, повторюючи описану тільки що процедуру, доб’ємося зменшення числа невідомих і рівнянь. Якщо всі числа $a'_{22},...,\ a'_{m2}$ дорівнюють нулю, то процедура повторюється з матрицею

$$\left\| \begin{matrix} a'_{23} & ... & a'_{2n} & \vdots & b'_2 \\ ... & ... & ... & \vdots & ... \\ a'_{m3} & ... & a'_{mn} & \vdots & b'_m \end{matrix} \right\|.$$

В тому випадку, коли на кожному кроці, що описаний вище, виключається лише одне невідоме, після декількох кроків прийдемо до розширеної матриці вигляду

$$
\begin{array}{c}
\longleftarrow \quad r \quad \longrightarrow \longleftarrow \quad n-r \quad \longrightarrow \\
\left\|\begin{array}{cccccc|ccccccc|c}
1 & * & * & * & \ldots & * & \ldots & * & * & * & \ldots & * & * & * & \alpha_1 \\
0 & 1 & * & * & \ldots & * & \ldots & * & * & * & \ldots & * & * & * & \alpha_2 \\
0 & 0 & 1 & * & \ldots & * & \ldots & * & * & * & \ldots & * & * & * & \alpha_3 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & * & * & * & \ldots & * & * & * & \alpha_r \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha_{r+1} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha_m
\end{array}\right\|
\end{array}. \qquad (5.7)
$$

Тут r - ранг матриці коефіцієнтів системи рівнянь (5.1). Матриці (5.7) відповідає система рівнянь

$$
\begin{cases}
x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1r}x_r + c_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{1n}x_n = \alpha_1, \\
\qquad x_2 \; + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2r}x_r + c_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{2n}x_n = \alpha_2, \\
\qquad\qquad x_2 + \ldots + c_{3r}x_r + c_{3r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{3n}x_n = \alpha_3, \\
\qquad\qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
\qquad\qquad\qquad x_r + c_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + c_{rn}x_n = \alpha_r, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \alpha_{r+1}, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \alpha_m,
\end{cases} \qquad (5.8)
$$

яка еквівалентна початковій системі. Система (5.8) дозволяє зробити такі висновки:

1) якщо серед чисел $\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_m$ є **принаймні одне відмінне від нуля,** то система (5.8), а отже, і система (5.1) **несумісні**;

2) якщо всі числа $\alpha_{r+1},...,\alpha_m$ дорівнюють нулю, то останні $m-r$ рівнянь системи (5.8) відкидаються і система набуває "трапецієподібної" форми (r рівнянь з n невідомими). Перенесемо змінні $x_{r+1},...,x_n$ (**вільні змінні**) у праві частини рівнянь. Після цього змінні $x_1,\ x_2,...,x_r$ *(***базисні змінні***)* знаходять оберненою підстановкою: останнє рівняння виражає x_r через $x_{r+1},...,x_n$; підставляючи отриманий результат у передостаннє рівняння, знаходимо x_{r-1}; потім, підставляючи знайдений вираз для x_r та x_{r-1} у попередні рівняння, визначаємо x_{r-2} і т.д. У розглянутому випадку система (5.1) має **нескінченну множину розв'язків;**

3) якщо $m=n=r$, то система рівнянь (5.8) набуває "трикутного" вигляду та має **єдиний розв'язок** (це випадок системи Крамера).

Кількість арифметичних операцій в методі Гаусса ($m=n$) дорівнює:

$$\frac{2n\cdot(n+1)\cdot(n+2}{3}+n\cdot(n+1)\approx Cn^3.$$

Приклад 3

Розв'язати методом Гаусса такі системи ($m=n=4$):

а) $\begin{cases} x_1-x_2-4x_3+9x_4=22, \\ x_1+2x_2 \qquad -4x_4=-3, \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3, \\ 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3-x_4=8, \\ 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=7, \\ 2x_1 \ -x_2 \qquad -5x_4=6, \\ 5x_1-3x_2 \ +x_3-8x_4=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=5, \\ x_1+3x_2+5x_3-2x_4=3, \\ x_1 \ +5x_2-9x_3+8x_4=1, \\ 5x_1+18x_2+4x_3+5x_4=12. \end{cases}$

Розв'язання

а) $$\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & 3 \end{array}\right\| \to \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & 3 & 4 & -13 & -25 \\ 0 & -1 & 9 & -13 & -47 \\ 0 & 1 & 7 & -26 & 3 \end{array}\right\| \to$$

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63 \\ 0 & -1 & 9 & -13 & -47 \\ 0 & 3 & 4 & -13 & -25 \end{array}\right\| \to \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63 \\ 0 & 0 & 16 & -39 & -110 \\ 0 & 0 & -17 & 65 & 164 \end{array}\right\| \to$$

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{39}{16} & -\frac{110}{16} \\ 0 & 0 & -17 & 65 & 164 \end{array}\right\| \to \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{39}{16} & -\frac{110}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right\|.$$

Отже, $r = 4$ і розглянута система є системою Крамера $m = n = 4$. З системи рівнянь, яка відповідає отриманій розширеній матриці, оберненою підстановкою знаходимо:

$$x_4 = 2,\ x_3 = -\frac{110}{16} + 2 \cdot \frac{39}{16} = -2,\ x_2 = -63 + 2 \cdot 26 + 2 \cdot 7 = 3,$$

$$x_1 = 22 - 2 \cdot 9 - 2 \cdot 4 + 3 = -1;$$

б) $$\left\|\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & -5 & 6 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right\| \to \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 2 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{4} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{9}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{27}{4} & -9 \end{array}\right\| \to$$

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & -12 \end{array}\right\| \to \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 \end{array}\right\|.$$

Оскільки $\alpha_4 = -16 \neq 0$, то розглядувана система не сумісна;

в) $$\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right\| \to \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -14 & 10 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \end{array}\right\| \to$$

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right\| \to \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \to (r = 2).$$

Перші два рядки розширеної матриці відповідають системі рівнянь $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ \quad x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -1, \end{cases}$ яка еквівалентна початковій системі. Перенесемо вільні змінні x_3 та x_4 у праву частину рівнянь: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 3 - 5x_3 + 2x_4, \\ \quad x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4. \end{cases}$ Отже, початкова система має нескінченну множину розв'язків:

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4, \\ x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4 \end{cases} (x_3,\ x_4 \in R).$$

Приклад 4

Розв'язати систему однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв’язання

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right\| \to \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -0.5 & 2.5 & 3.5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & 0 \end{array} \right\| \to$$

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -0.5 & 2.5 & 3.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Тут здійснилось одночасне виключення двох невідомих. Отриманій матриці відповідає система двох рівнянь із 4 невідомими

$$\begin{cases} x_1 - 0.5x_2 + 2.5x_3 + 3.5x_4 = 0, \\ x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Перенесемо в праву частину рівнянь невідомі $x_2,\ x_4$

$$\begin{cases} x_1 + 2.5x_3 = 0.5x_2 - 3.5x_4, \\ x_3 = -3x_4. \end{cases}$$

Система має нескінченну множину розв'язків, які залежать від двох параметрів: $\{x_1 = 0.5x_2 + 4x_4,\ x_3 = -3x_4\}$. $(x_2,\ x_4 \in R)$.

5.4. Геометричне тлумачення системи лінійних рівнянь

Впровадимо до розгляду такі вектори простору R_m

$$\vec{a}_1 = \left\| \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{matrix} \right\|, \ \vec{a}_2 = \left\| \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{matrix} \right\|, \ldots, \vec{a}_n = \left\| \begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{matrix} \right\|, \ \vec{b} = \left\| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{matrix} \right\|.$$

Тоді системі (5.1) можна надати форму векторного рівняння у просторі R_m: $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$. Отже, питання про розв’язок системи (5.1) еквівалентне питанню про можливість зображення відомого вектора $\vec{b}$ у вигляді лінійної комбінації заданих векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. У випадку, коли $m = n$ і вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ утворюють базис у R_n, координати $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вектора $\vec{b}$ у цьому базисі знаходяться однозначно (цьому випадку відповідає система Крамера). В інших випадках вектор $\vec{b}$ або не можна зобразити як лінійну комбінацію векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ (система несумісна), або вектор $\vec{b}$ зображується нескінченною кількістю лінійних комбінацій векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ (система має нескінченну множину розв'язків). На рис. 5.2 наведені різні випадки розміщення векторів, які відповідають системі трьох рівнянь з трьома невідомими.

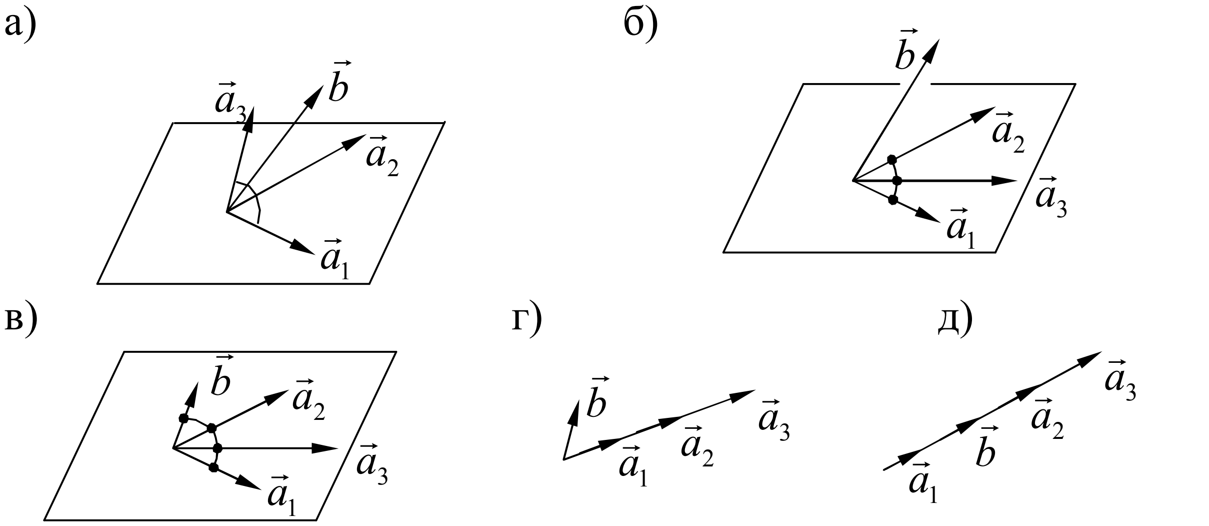


Рис. 5.2

На рис. 5.2, а вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ не компланарні і розкладання вектора $\vec{b}$ єдине. На рис. 5.2, б вектори компланарні і непропорційні, а вектор $\vec{b} \notin \Pi$. Тому розкладання вектора $\vec{b}$ неможливе. Рис. 5.2, в відповідає випадку, коли вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ непропорційні і компланарні, а вектор $\vec{b} \in \Pi$. При цих умовах можлива нескінченна множина розкладань. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, які зображені на рис. 5.2, г, пропорційні, вектор $\vec{b}$ непропорційний їм: розкладання неможливе. Рис. 5.2, д відповідає випадку, коли всі вектори пропорційні, - нескінченна множина розкладань.

Приклад 5

Чи будуть лінійно незалежними в R_4 вектори

$\vec{a}_1(3;\ 4;\ 1;\ 2),\ \vec{a}_2(5;\ 7;\ 1;\ 9),\ \vec{a}_1(2;\ 5; -4;\ 6)$?

Розв'язання

Складемо лінійну комбінацію цих векторів, яка дорівнює нулю:

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{0}.$$

Це векторне рівняння еквівалентне системі з чотирьох скалярних

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Перетворимо розширену матрицю цієї системи:

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 9 & 6 & 0 \end{array} \right\| \to \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & 14 & 0 \\ 0 & 3 & 21 & 0 \\ 0 & 2 & 14 & 0 \end{array} \right\| \to \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Отже, $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ \quad x_2 + 2x_3 = 0, \\ \quad\quad x_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0.$

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ - лінійно незалежні, але не утворюють базис у R_4.

Приклад 6

Вектори $\vec{a}_1(2;\,3;\,4;\,1)$, $\vec{a}_2(3;-1;\,1;-2)$, $\vec{a}_3(-1;\,2;\,-3;\,4)$, $\vec{a}_4(5;-7;\,6;-7)$, $\vec{b}_1(19;-6;\,20;-15)$ задані своїми координатами в деякому базисі. З'ясувати, чи будуть самі вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ утворювати базис у R_4? Якщо відповідь позитивна, то знайти координати вектора $\vec{b}$ в цьому базисі.

Розв'язання

Векторне співвідношення $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + x_4\vec{a}_4 = \vec{b}$ еквівалентне системі рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 19, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = -6, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 20, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = -15. \end{cases}$$

Зробимо елементарні перетворення розширеної матриці системи:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 & 19 \\ 3 & -1 & 2 & -7 & -6 \\ 4 & 1 & -3 & 6 & 20 \\ 1 & -2 & 4 & -7 & -15 \end{array} \right\| \to \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -7 & -15 \\ 0 & 7 & -9 & 19 & 49 \\ 0 & 5 & -10 & 14 & 39 \\ 0 & 9 & -19 & 34 & 80 \end{array} \right\| \to$$

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -7 & -15 \\ 0 & 1 & -2 & 2.8 & 7.8 \\ 0 & 0 & 5 & -0.6 & -5.6 \\ 0 & 0 & -1 & 8.8 & 9.8 \end{array} \right\| \to \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -7 & -15 \\ 0 & 1 & -2 & 2.8 & 7.8 \\ 0 & 0 & 1 & -8.8 & -9.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\|$$

Звідси випливає, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ утворюють базис у R_4 (чому?); $x_4 = 1, x_3 = -9.8 + 8.8 = -1,$ $x_2 = 7.8 - 2.8 - 2 = 3,$ $x_1 = -15 + 7 + 4 + 6 = 2$ і, отже, вектор $\vec{b}$ у базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ має координати $(2; 3; -1; 1)$: $\vec{b} = 2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - \vec{a}_3 + \vec{a}_4$.

6. ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ І ВЛАСНІ ВЕКТОРИ МАТРИЦІ

Для простоти викладення матеріалу обмежимося матрицями другого порядку.

Означення 1. **Власними значеннями** квадратної матриці A називаються корені рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{6.1}$$

Рівняння (6.1) називається **характеристичним рівнянням** матриці A.

Приклад 1

Знайти власні значення матриці $A = \begin{Vmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$.

Розв'язання

1) $A - \lambda E = \begin{Vmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} - \lambda \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2-\lambda & 12 \\ 1 & 3-\lambda \end{Vmatrix};$

2) знайдемо визначник матриці $A - \lambda E$:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 12 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(3-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 5\lambda - 6;$$

3) розв'яжемо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$. Його розв'язком є числа $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -1$. Отже, власними значеннями матриці є $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -1$.

Означення 2. Ненульовий вектор $\vec{x}(x_1; x_2)$ називається **власним вектором** матриці $A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$, який відповідає власному значенню $\lambda_i \ (i = 1, 2)$, якщо його координати є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_i)x_2 = 0. \end{cases} \qquad (6.2)$$

Зазначимо, що система однорідних рівнянь (6.2) має ненульовий розв'язок, оскільки визначник цієї системи дорівнює нулю на підставі (6.1).

Власні вектори, які відповідають **різним** власним значенням, є лінійно незалежними.

Якщо ж матриця є симетричною, то власні вектори, які відповідають **різним** власним значенням, ортогональні.

Приклад 2

Знайти власні вектори матриці $A = \begin{Vmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$.

Розв'язання

Власні значення $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -1$ цієї матриці були знайдені в прикладі 1. Знайдемо власний вектор, який відповідає $\lambda_1 = 6$:

$$\begin{cases} (2-6)x_1 + 12x_2 = 0, \\ x_1 + \quad (3-6)x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x_1 + 12x_2 = 0, \\ \quad x_1 - \ 3x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 3x_2.$$

Таким чином, власний вектор $\vec{x}^{(1)}$, який відповідає власному значенню $\lambda_1 = 6$, має вигляд $\vec{x}^{(1)} = c(3; 1)$, де $c \neq 0$.

Знайдемо власний вектор, який відповідає $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{cases} (2+1)x_1 + 12x_2 = 0, \\ x_1 + \quad (3+1)x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 12x_2 = 0, \\ \ x_1 + \ 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = -4x_2.$$

Отже, власний вектор $\vec{x}^{(2)}$, який відповідає власному значенню $\lambda_2 = -1$, має вигляд $\vec{x}^{(2)} = d(-4;\, 1)$, де $d \neq 0$. Вектори $\vec{x}^{(1)}$ та $\vec{x}^{(2)}$ лінійно незалежні, але не ортогональні $\vec{x}^{(1)} \cdot \vec{x}^{(2)} =$ $= c \cdot d(3 \cdot (-4) + 1) \neq 0$.

Приклад 3

Знайти власні значення і власні вектори симетричної матриці $A = \begin{Vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix}$.

Розв'язання

1) $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 4$.

2) $\lambda_1 = 9:\ \begin{cases} (8-9)x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + (5-9)x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow$

$\vec{x}^{(1)} = c(2;\, 1)$,

де $c \neq 0$.

$$\lambda_2 = 4:\ \begin{cases} (8-4)x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + (5-4)x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_2 \Leftrightarrow$$

$\vec{x}^{(2)} = d(-\frac{1}{2};\, 1)$,

де $d \neq 0$.

Вектори $\vec{x}^{(1)}$ та $\vec{x}^{(2)}$ ортогональні:

$$\vec{x}^{(1)} \cdot \vec{x}^{(2)} = c \cdot d\left(2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right) = 0.$$

Власні вектори $\vec{x}^{(1)}$ та $\vec{x}^{(2)}$, які належать однаковим власним значенням $\lambda_1 = \lambda_2$, можуть бути лінійно залежними.

Приклад 4

Знайти власні значення і власні вектори матриці $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

Розв'язання

1) $\det(A-\lambda E)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$;

2) $\lambda = 1$: $\begin{cases} (1-1)x_1 + 0\cdot x_2 = 0, \\ x_1 \quad + (1-1)x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 = 0, \\ x_1 \quad + 0\cdot x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 \neq 0.$

$\vec{x}^{(1)} = c(0;\,1)$,

де $c \neq 0$.

Звідси випливає, що власні вектори $\vec{x}^{(1)}$ та $\vec{x}^{(2)}$, що відповідають власному значенню $\lambda_1 = 1$, мають вигляд $c(0;\,1)$, де $c \neq 0$ і, отже, вони лінійно залежні.

7. ВЕКТОРНИЙ ТА МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

7.1 Векторний добуток двох векторів

Часто зустрічаються задачі, в яких наслідком операції над двома векторами є не число (як було у випадку скалярного добутку), а деякий третій вектор. Наприклад, на заряд q, який влетів зі швидкістю $\vec{v}$ у магнітне поле з індукцією $\vec{B}$, діє сила Лоренца.

Означення 1. **Векторним добутком** векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається **вектор** з такими властивостями: 1) його довжина дорівнює добутку довжин векторів множників на синус кута між ними; 2) він напрямлений перпендикулярно площині, яку утворюють перемножувані вектори так, що з його кінця обертання від вектора $\vec{a}$ (перший вектор) до вектора $\vec{b}$ (другий вектор) на найменший кут відбувається проти годинникової стрілки (рис. 7.1).

Позначається векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ так: $\vec{a}\times\vec{b}$. Отже:

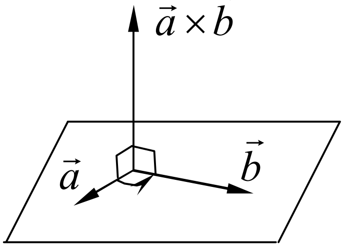


Рис. 7.1

1) $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$, тобто довжина векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (вважаємо, що вектори зведені до загального початку);

2) трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ орієнтована так само, як і орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Основні властивості векторного добутку:

1) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ пропорційні тоді і тільки тоді, коли їх векторний добуток дорівнює нулю. Тобто $\vec{a} = t\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$;

2) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$;

3) $(t\vec{a})\times\vec{b} = t(\vec{a}\times\vec{b})$;

4) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\times\vec{b} = \vec{a}_1\times\vec{b} + \vec{a}_2\times\vec{b}$.

Сила Лоренца, яка згадувалась вище, має вигляд: $F_{Лор} = q\vec{v}\times\vec{B}$. Момент $\overrightarrow{M}$ сили $\vec{F}$, що прикладена в точці A, відносно точки О знаходиться за правилом: $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{F}$.

Приклад 1

Знайти площу паралелограма, який побудовано на векторах $\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2$, $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$, якщо відомо, що $\left|\vec{a}_1\right| = 1$, $\left|\vec{a}_2\right| = 2$, $(\vec{a}_1\,\hat{,}\,\vec{a}_2) = \dfrac{\pi}{6}$.

Розв'язання

$$(\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2)\times(\vec{a}_1 - \vec{a}_2) = \vec{a}_1\times\vec{a}_1 + 2(\vec{a}_2\times\vec{a}_1) - \vec{a}_1\times\vec{a}_2 - 2(\vec{a}_2\times\vec{a}_2) =$$
$$= -3(\vec{a}_1\times\vec{a}_2).$$

Тому шукана площа буде дорівнювати

$$\left|-3(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\right| = 3\left|\vec{a}_1\right|\left|\vec{a}_2\right|\cdot\sin(\vec{a}_1\,\hat{,}\,\vec{a}_2) = 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 3од^2.$$

Теорема 1. Нехай в ортонормованаму базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ два вектори задані своїми координатами $\vec{a}(a_1;\, a_2;\, a_3),\ \vec{b}(b_1;\, b_2;\, b_3)$. Тоді вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ знаходиться за формулою

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (7.1)$$

Доведення

Оскільки $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$, а $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ то, використовуючи властивості векторного добутку, одержимо:

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) =$$
$$(a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k}\ .$$

У правій частині одержаного співвідношення можна впізнати розкладення за елементами першого рядка визначника

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \blacksquare$$

Якщо ортонормований базис має іншу орієнтацію, ніж базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то у формулі (7.1) з'явиться перед визначником знак "-". Для неортонормованого базису формула (7.1) не має місця.

Приклад 2

Знайти площу трикутника, який побудовано на векторах: $\vec{a} + 2\vec{b},\ 2\vec{a} - \vec{b}$, якщо $\vec{a}(1;\, 2;\, 3),\ \vec{b}(-1;\, 3;\, 2)$.

Розв'язання

Оскільки $\vec{a}+2\vec{b}=(-1;\ 8;\ 7),\ 2\vec{a}-\vec{b}=(3;\ 1;\ 4)$, то за формулою (7.1) одержимо

$$(\vec{a}+2\vec{b})\times(2\vec{a}-\vec{b})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 8 & 7\\ 3 & 1 & 4\end{vmatrix}=(32-7)\vec{i}-(-4-21)\vec{j}+(-1-24)\vec{k}\ .$$

Тому площа трикутника дорівнює $\dfrac{1}{2}\left|25\vec{i}+25\vec{j}-25\vec{k}\right|=\dfrac{25\sqrt{3}}{2}\ од^{2}$.

7.2. Мішаний добуток трьох векторів

Означення 2. **Мішаним добутком** трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається число $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Якщо вектори мають спільний початок, то їх мішаний добуток з точністю до знака дорівнює об'єму паралелепіпеда, який побудований на цих векторах (рис. 7.2).

Дійсно, $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|(\vec{c}\cdot\vec{e})$, де $\vec{e}$ – орт вектора $\vec{a}\times\vec{b}$. Оскільки $\left|\vec{c}\cdot\vec{e}\right|=H$, де H - висота паралелепіпеда, то

$$\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot H=V_{\text{паралелепіпеда}}\ .$$

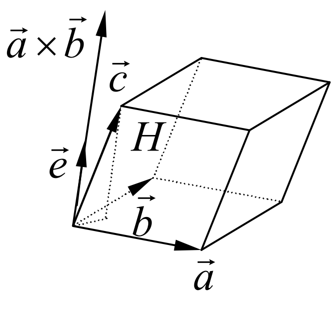


Рис. 7.2

Відзначимо такі властивості мішаного добутку: 1) вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю, тобто компланарність $\Leftrightarrow(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$; 2) циклічна перестановка векторів у мішаному добутку не змінює його величини $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$.

Теорема 2. Нехай в ортонормованому базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ три вектори задані своїми координатами $\vec{a}(a_1;\, a_2;\, a_3)$, $\vec{b}(b_1;\, b_2;\, b_3)$, $\vec{c}(c_1;\, c_2;\, c_3)$. Тоді їх мішаний добуток шукають за формулою

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (7.2)$$

Доведення

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = ((a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k}) \times$$
$$\times (c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}) = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot c_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \cdot c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot c_3 .$$

Права частина останнього співвідношення є розкладанням за елементами третього рядка визначника

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \blacksquare$$

Приклад 3

а) чи лежать точки $A(1;\, 2;\, 3), B(2;\, 0;\, 1), C(-1;\, 2;\, 1)$, $D(3; -1;\, 0)$ в одній площині?

б) знайти висоту DE тетраедра з вершинами в точках $A(3; -2;\, 6)$, $B(1;\, 3;\, 2), C(-1;\, 2;\, 1), D(3; -1;\, 0)$.

Розв'язання

а) $\overrightarrow{AB}(1; -2; -2)$, $\overrightarrow{AC}(-2;\, 0; -2)$, $\overrightarrow{AD}(2; -3; -3)$ і тому за формулою (7.2)

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (-2) \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow$$

точки не лежать в одній площині.

б) $\overrightarrow{AB}(-2;\,5;\,-4)$, $\overrightarrow{AC}(-4;\,1;\,-2)$, $\overrightarrow{AD}(1;\,5;\,-1)$, отже, за формулою (7.2) маємо:

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & 5 & -4\\ -4 & 1 & -2\\ 1 & 5 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 15 & -6\\ 0 & 21 & -6\\ 1 & 5 & -1\end{vmatrix}=(-1)^4\begin{vmatrix}15 & -6\\ 21 & -6\end{vmatrix}=36.$$

Тому об'єм тетраедра (який дорівнює 1/6 об'єму паралелепіпеда) дорівнює 6 од^3. Знайдемо за формулою (7.1) площу основи (площа трикутника ABC):

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|-6\bar{i}+12\bar{j}-18\bar{k}\right|=3\sqrt{14}\text{ од}^2.$$

$$\left|\overline{ДЕ}\right|=\frac{3V_{тетраедра}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{6}{\sqrt{14}}\text{ од.}$$

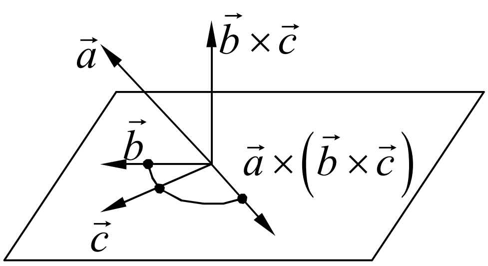


Рис. 7.3

Зауваження. В деяких задачах виникає необхідність розглядати подвійний добуток – вектор вигляду $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$. Можна бачити, що цей вектор належить площині, яка утворена векторами, що перемножуються першими: $\vec{b}$ та $\vec{c}$ (рис. 7.3). Більш того, справедлива формула

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}.$$

8. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

8.1. Різні види рівнянь прямої

Нехай на площині впроваджена прямокутна система координат xOy. Завдання деякої лінії на площині рівнозначне визначенню співвідношення між координатами точок цієї лінії.

Використовуючи ці співвідношення, можна встановити, належить та чи інша точка розглянутій лінії чи ні.

Означення 1. Рівняння $g(x,y)=0$ називається **рівнянням лінії** L, якщо цьому рівнянню задовольняють координати будь-якої точки цієї лінії і не задовольняють координати точки, що не належать цій лінії:

$$M_0\left(x_0;y_0\right)\in L \Leftrightarrow g\left(x_0 y_0\right)=0.$$

Одержимо рівняння прямої *l,* яка проходить через задану точку $M_0\left(x_0;y_0\right)$ і паралельна заданому ненульовому вектору $\vec{q}\left(q_1;q_2\right)$, який називається **базисним (напрямним)** вектором цієї прямої (рис. 8.1).

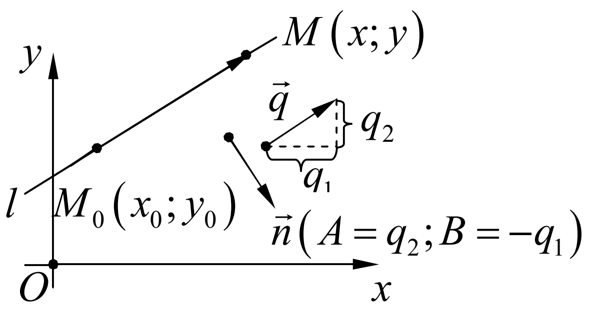


Рис. 8.1

Нехай $M\left(x;y\right)$ - довільна точка прямої *l*. Тоді вектори $\overrightarrow{M_0M}\left(x-x_0;y-y_0\right)$ та $\vec{q}$ пропорційні. Умова пропорційності векторів може бути записана у вигляді

$$l:\frac{x-x_0}{q_1}=\frac{y-y_0}{q_2}, \qquad (8.1)$$

або у вигляді $\overrightarrow{M_0M}=t\vec{q}\left(t\in R\right)$, який зводиться до двох координатних рівнянь

$$l:\begin{cases} x=x_0+q_1t, \\ y=y_0+q_2t. \end{cases} (t\in R) \qquad (8.2)$$

Рівняння (8.1) називають **канонічним (стандартним) рівнянням прямої,** а систему (8.2) **параметричними рівняннями прямої**.

Запишемо рівняння (8.1) в еквівалентній йому формі $q_2\left(x-x_0\right)-q_1\left(y-y_0\right)=0$ і впровадимо позначення $A=q_2, B=-q_1$, $C=-q_2x_0+q_1y_0$. Тоді останнє рівняння набуде вигляду:

$$l: Ax+By+C=0. \tag{8.3}$$

Рівняння (8.3) називається **загальним рівнянням прямої на площині**. Ненульовий вектор $\vec{n}\left(A;B\right)$ є перпендикулярним до базисного вектора $\vec{q}\left(q_1;q_2\right)$, оскільки ($\vec{n}\cdot\vec{q}=A\cdot q_1+B\cdot q_2=q_1\cdot q_2-$ $-q_1\cdot q_2=0$).

Якщо $B\neq 0$, то з рівняння (8.3) одержимо

$$l: y=kx+b, \tag{8.4}$$

де число $k=-\dfrac{A}{B}=\dfrac{q_2}{q_1}$ дорівнює тангенсу кута $\varphi\in\left[0;\pi\right]$ нахилу прямої до осі *0x*. Рівняння (8.4) називається **рівнянням з кутовим коефіцієнтом.** При B=0 з (8.3) одержимо рівняння прямої, що паралельна осі *Oy*

$$l: x=x_0. \tag{8.5}$$

Отже, **будь-яку** пряму на площині можна задати рівнянням першого степеня $Ax+By+C=0$ відносно координат x та y точки прямої. Має місце і обернене твердження: **будь-яке** рівняння першого степеня $Ax+By+C=0$ (хоча б один з коефіцієнтів A, B не дорівнює нулю) описує на площині *x0y* деяку пряму.

Рівняння (8.1) можна записати у вигляді

$$l: y-y_0=k\left(x-x_0\right), \tag{8.1$'$}$$

яке називається **рівнянням прямої, що проходить через задану точку в даному напрямку**. Зауважимо, що рівняння (8.4) можна записати так: $y-b=k(x-0)$ і ми одержимо рівняння (8.1$'$) з точкою $(0;b)$ (рис. 8.2).

У тому випадку, коли пряма задана двома точками $M_1(x_1;y_1)$ та $M_2(x_2;y_2)$, базисний вектор прямої $\vec{q}=\overrightarrow{M_1M_2}$. Отже, рівнянню (8.1) можна надати форму (8.6)

$$l:\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \qquad (8.6)$$

яка називається **рівнянням прямої, що проходить через дві точки.** У випадку, якщо пряма проходить через точки $M_1(a;0)$ та $M_2(0;b)$, то її рівняння набуває вигляду

$$l:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (8.6')$$

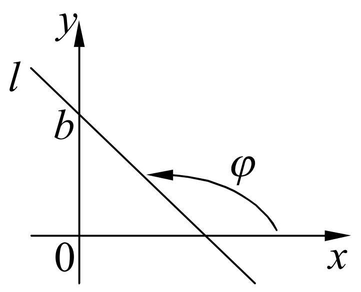


Рис. 8.2

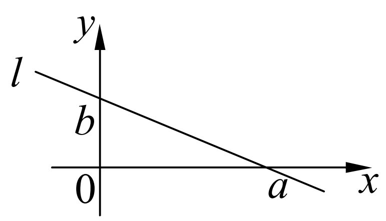


Рис. 8.3

Рівняння $(8.6')$ називають **рівнянням прямої у відрізках на осях** (рис. 8.3). Відзначимо такі окремі випадки загального рівняння прямої:

1) $C=0 \Leftrightarrow$ пряма проходить через початок координат;
2) $A=0 \Leftrightarrow$ пряма паралельна осі *Ox;*
3) $B=0 \Leftrightarrow$ пряма паралельна осі *Oy*.

Приклад 1

Знайти кутовий коефіцієнт прямої $2x-3y+1=0$.

Розв’язання

Пряма задана загальним рівнянням. Перейдемо до рівняння з кутовим коефіцієнтом (8.4). Для цього знайдемо y:

$$-3y=-2x-1 \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3} \Rightarrow k=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \varphi \approx 33^\circ 41'.$$

Приклад 2

Пряма проходить через точки $M_1(2;0)$, $M_2(3;-1)$. Знайти вектор, який перпендикулярний до прямої.

Розв'язання

Згідно з (8.6) рівняння прямої, що проходить через точки M_1 та M_2, має вигляд $\dfrac{x-2}{3-2}=\dfrac{y-0}{-1-0} \Leftrightarrow x+y-2=0$. Отримали рівняння прямої в загальному вигляді. Отже, вектор $\vec{n}(1;1)$ перпендикулярний до прямої.

Нехай пряма l задана загальним рівнянням (8.3). Тоді множина точок площини, для яких виконуються відповідні нерівності $Ax+By+C>0$ та $Ax+By+C<0$, є відкритими півплощинами, межею яких буде пряма *l*.

Приклад 3

Які з трьох точок M_1 (l;l), M_2(-1;3), M_3(l;-l) лежать по один бік від прямої $x-y+1=0$?

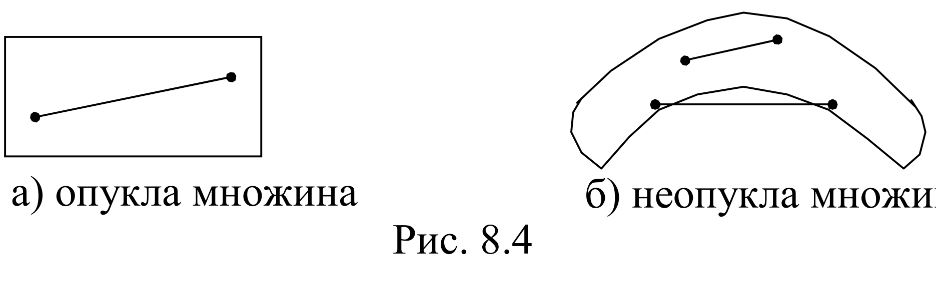
Розв'язання

Підставимо послідовно координати точок M_1, M_2, M_3 у рівняння прямої: M_1 $:1-1+1=1>0$; M_2 $:-1-1+1=-1<0$; M_3: $1+1+1=3>0$.

Таким чином, точки M_1 та M_3 лежать по один бік від прямої.

Означення 2. Назвемо множину **опуклою,** якщо вона разом з будь-якими двома своїми точками містить усі точки відрізка, який їх з'єднує (рис. 8.4).

Замкнена півплощина $Ax+By+C\geq 0(\leq 0)$ є опуклою множиною.



а) опукла множина б) неопукла множина

Рис. 8.4

Переріз півплощин є опуклою множиною. Переріз скінченного числа півплощини називається **багатокутною множиною**. В тому випадку, коли багатокутна множина **обмежена** (може цілком уміститися в коло скінченного радіуса), вона називається ***багатокутником***.

Приклад 4

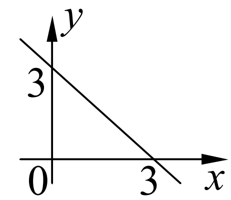
Зобразити на площині фігури, що утворені перерізом півплощин, які описані нерівностями:

а) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 3$;

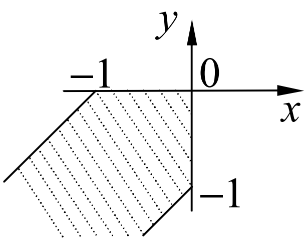
б) $x \leq 0$, $y \leq 0$. $y-x \leq 1$, $y-x \geq -1$;

в) $x \leq 0$, $y \geq 0$, $y-x \leq -2$.

Розв'язання



а) система нерівностей вилучає обмежену багатокутну множину – прямокутний трикутник;



б) система нерівностей вилучає необмежену багатокутну множину;

в) на площині немає фігури, яка б була спільною частиною всіх трьох півплощин.

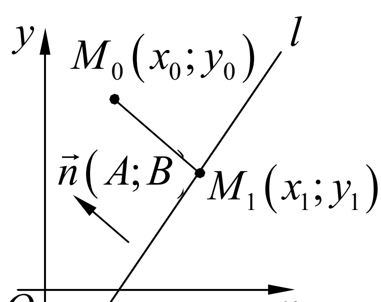


Рис. 8.5

Нехай необхідно знайти відстань $\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|$ від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої l: $Ax+By+C=0$ (рис. 8.5). Позначимо через x_1 та y_1 координати точки M_1. Тоді

$$\overrightarrow{M_0M_1}(x_1-x_0;y_1-y_0)=t\cdot\vec{n}(A;B).$$

Отже, $x_1-x_0=t\cdot A$, $y_1-y_0=t\cdot B$ і відстань $\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|=\sqrt{(tA)^2+(tB)^2}=|t|\sqrt{A^2+B^2}$. Величину числа t знайдемо підстановкою координат точки M_1 у рівняння прямої:

$$A(x_0+tA)+B(y_0+tB)+C=0 \Leftrightarrow t=\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}.$$

Отже, $\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

8.2. Взаємне розташування прямих на площині

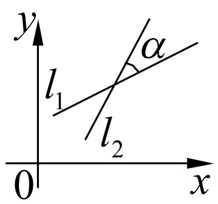


Рис. 8.6

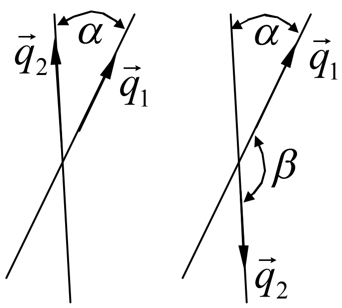


Рис. 8.7

Нагадаємо, що кутом між прямими l_1 та l_2 називається менший із суміжних кутів, які утворені цими прямими: $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 8.6). Тому кут між прямими дорівнює куту β між базисними векторами прямих $\vec{q}_1$ та $\vec{q}_2$, якщо $\beta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, і дорівнює π-β, якщо $\beta \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ (рис. 8.7). При цьому базисні вектори можуть бути замінені векторами $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$. Отже, $\cos\alpha=|\cos\beta|$.

Таким чином, якщо прямі задані рівняннями (8.3), то

$$\cos\left(l_1\hat{,}l_2\right)=\left|\cos\left(\overline{n}_1\hat{,}\overline{n}_2\right)\right|=\frac{|(\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2)|}{|\overline{n}_1|\cdot|\overline{n}_2|}$$

та

$$\cos\left(l_1\hat{,}l_2\right)=\left|\cos\left(\overline{q}_1\hat{,}\overline{q}_2\right)\right|=\frac{|(\overline{q}_1\cdot\overline{q}_2)|}{|\overline{q}_1|\cdot|\overline{q}_2|},$$

коли прямі задані рівняннями (8.1).

Зокрема $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2, l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

та $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overline{q}_1 \parallel \overline{q}_2, l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overline{q}_1 \cdot \overline{q}_2 = 0$.

Якщо прямі l_1 та l_2 не паралельні, то вони мають одну спільну точку. Цю точку перетину двох прямих можна знайти, розв'язавши систему, що складається з рівнянь, за допомогою яких описуються ці прямі.

Приклад 5

Задані рівняння двох сторін прямокутника $l_1 : x - 2y = 0$ та $l_2 : -x + 2y - 15 = 0$ і рівняння однієї з його діагоналей $l\ : 7x + y - 15 = 0$. Знайти вершини прямокутника.

Розв'язання

З'ясуємо взаємне розташування прямих l_1 та $l_2 : \vec{n}_1(1;-2) \parallel \vec{n}_2(-1;2) \Leftrightarrow l_1 \parallel l_2$. Дві вершини прямокутника знайдемо як точки перетину прямих l_1 та l_2 з діагоналлю l :

$$1)\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 7x + y - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 15y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow M_1(2;1);$$

$$2)\begin{cases} -x + 2y - 15 = 0, \\ 7x + y - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8x \\ 15x = 15 \end{cases} \Leftrightarrow M_2(1;8).$$

Рівняння третьої сторони прямокутника, яка проходить через точку M_1 і є перпендикулярною до прямої l_2, будемо шукати у вигляді (8.1$'$). Спочатку знайдемо кутовий коефіцієнт прямої l_2:

$$y = \frac{x}{2} + \frac{15}{2} \Rightarrow k_{l_2} = \frac{1}{2}$$

і, отже, $k_{l_3} = -2$. Таким чином, $l_3 : y - 1 = -2(x - 2) \Leftrightarrow 2x + y - 5 = 0$. Вершину прямокутника M_3 знайдемо як точку перетину прямих l_3 та l_2:

$$\begin{cases} y + 2x - 5 = 0, \\ x - 2y + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow M_3(-1;7).$$

Знайдемо рівняння четвертої сторони l_4 прямокутника, як рівняння прямої, що проходить через точку M_3 паралельно прямій $l_3: y-8=-2(x-1) \Leftrightarrow 2x+y-10=0.$

Четверта вершина прямокутника – точка перетину прямих l_1 та l_4:

$$\begin{cases} x-2y=0, \\ 2x+y-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow M_4(4;2).$$

Отже, вершини прямокутника $M_1(2;1)$, $M_2(1;8)$, $M_3(-1;7)$, $M_4(4;2)$ (рис. 8.8).

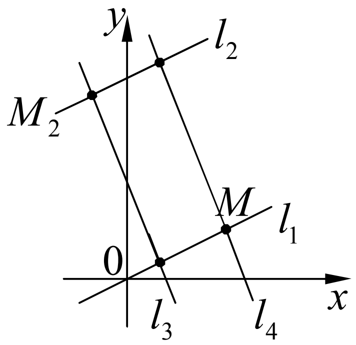


Рис. 8.8

9. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

У цьому параграфі розглядається питання про те, які криві на площині описуються рівнянням другого степеня.

9.1. Коло

Нагадаємо відоме зі шкільного курсу визначення поняття „коло”. **Колом** із центром у точці C та радіусом $R>0$ називається множина M точок площини, які віддалені від C на відстань R:

$$|MC| = R. \tag{9.1}$$

Запровадимо у розгляд систему прямокутних координат xOy. Тоді довільна точка M кола має координати $(x;y)$, а центр –

($a;b$). Оскільки $|MC|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, то з геометричної умови (9.1) одержимо рівність $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$, з якої після піднесення до квадрата маємо

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (9.2)$$

Навпаки, якщо пара чисел $(x;y)$ задовольняє рівнянню (9.2), то точка $M(x;y)$ знаходиться на відстані R від точки $C(a;b)$ і належить колу з центром у точці C і радіусом R. Отже, (9.2) є рівнянням кола. Воно називається **канонічним (стандартним) рівнянням** кола з центром у точці $C(a;b)$ і радіусом R. Якщо в (9.2) виконати дії, то одержимо рівняння вигляду

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0. \qquad (9.3)$$

Координати довільної точки будь-якого кола задовольняють рівняння (9.3). Однак рівняння (9.3) не завжди задає деяке коло. Наприклад, рівняння $x^2+y^2+1=0$ є рівнянням вигляду (9.3), але координати жодної точки площини йому не задовольняють. Якщо ж рівняння (9.3) задає деяку лінію на площині, то ця лінія обов'язково є колом.

9.2. Еліпс

Почнемо з геометричного визначення поняття „еліпс”. Нехай на площині є дві точки F_1 та F_2, відстань $|F_1F_2|$ між якими дорівнює 2c.

Означення 1. Еліпсом називається множина точок M площини, сума відстаней від яких до точок F_1 та F_2 дорівнює $2a$ $(a>c)$:

$$|MF_1|+|MF_2|=2a. \qquad (9.4)$$

При $a=c$ еліпс вироджується у відрізок F_1F_2, а при $a<c$ множина точок M, для яких виконується умова (9.4), порожня.

Точки F_1 та F_2 називаються **фокусами еліпса**. З (9.4) випливає, що середина відрізка $F_1\ F_2$ – точка O є центром симетрії еліпса.

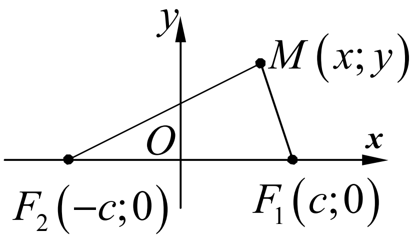


Рис. 9.1

Перейдемо до координатного методу. З цією метою впровадимо систему координат xOy, вісі якої розташовані так, як показано на рис. 9.1.

В цій системі координат фокуси F_1 та F_2 і довільна точка M еліпса мають відповідно координати (с;0),(-с;0), $(x;y)$.

Оскільки $|MF_1| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $|MF_2| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, то рівність (9.4) набуває вигляду

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (9.4')$$

Перетворимо рівняння (9.4') до більш простого вигляду. З цією метою перенесемо другий доданок лівої частини у праву частину, піднесемо обидві частини одержаної рівності до квадрата і після зведення подібних членів одержимо: $a\sqrt{(\text{x-c})^2 + y^2} = a^2 - cx$. Ще раз піднесемо до квадрата обидві частини одержаного рівняння і зведемо подібні члени: $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$. Поділимо ліву та праву частини останньої рівності на $a^2(a^2 - c^2)$ і впровадимо визначення $b^2=a^2-c^2$. Тоді одержимо рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (9.5)$$

Так само отримано наступне: якщо точка M знаходиться на еліпсі (9.4), то її координати $(x;y)$ задовольняють рівнянню (9.5). Можна довести і обернене твердження: якщо пара чисел $(x;y)$ задовольняє рівнянню (9.5), то точка $M(x;y)$ належить еліпсу (9.4). Тому рівняння (9.5) є рівнянням еліпса. Воно називається **канонічним (стандартним) рівнянням еліпса.**

Еліпс симетричний відносно осей координат. Точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ називаються його **вершинами**, а відрізки A_2A_1, B_2B_1 – **великою і малою осями**. Числа a та b називаються відповідно **довжинами великої і малої півосей** еліпса. Сам еліпс розташований у середині прямокутника $\Pi\{-a\le x\le a,\ -b\le y\le b\}$. Еліпс має з будь-якою прямою не більше двох загальних точок. Пряма, яка має з еліпсом одну загальну точку, називається **дотичною еліпса в цій точці.** Сторони прямокутника Π доторкуються еліпса в його вершинах (рис. 9.2). Еліпс можна одержати з кола $x^2+y^2=a^2$ шляхом рівномірного стиску вздовж осі Oy з коефіцієнтом стиску $\frac{a}{b}$. При цьому точка (x,y) переходить у точку $\left(x; y' = \frac{b}{a}y\right)$ (рис. 9.3). Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ називається ексцентриситетом еліпса. Оскільки $c<a$, то $0\le\varepsilon<1$. Ексцентриситет характеризує витягнутість еліпса вздовж більшої з осей. При $c=0$ еліпс перетворюється в коло. Оскільки $\frac{b^2}{a^2}=1-\varepsilon^2$, то при ε, близьких до 1, еліпс є сильно сплющеним. Площа, яка обмежена еліпсом, дорівнює $\pi\cdot a\cdot b$. Еліпси, у яких ексцентриситети рівні, подібні.

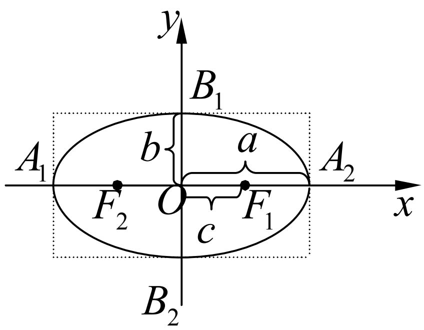


Рис. 9.2

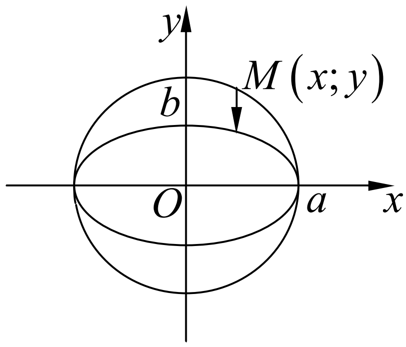


Рис. 9.3

Відомо, що дотична до кола перпендикулярна до радіуса в точці дотику. У випадку еліпса цьому відповідає такий факт: дотична до еліпса в точці M_0 утворює однакові кути з відрізками F_2M_0 та F_1M_0. Тому, якщо розмістити в одному з фокусів еліпса точкове джерело світла, то промені, що дзеркально

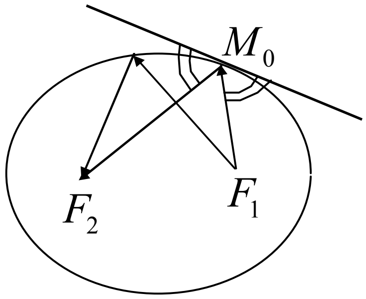


Рис. 9.4

відбиваються від еліпса, збируться у другому його фокусі (рис. 9.4). З цього складається так звана “оптична властивість" еліпса. Орбіти всіх планет Сонячної системи являють собою еліпси з загальним фокусом, в якому розташоване Сонце. Ексцентриситет орбіти планети Плутон дорівнює 0,25, а ексцентриситет орбіти Землі дорівнює 0,017, отже, її орбіта незначно відрізняється від кола.

Нехай r - відстань від центра Землі до точки запуску космічного корабля (r=6378·10^{3}м на поверхні Землі), а μ=398603·10^9 м^3/с^2 – геоцентрична гравітаційна стала. При початкових швидкостях $v \in \left(\sqrt{\frac{\mu}{r}}; \sqrt{\frac{2\mu}{r}} \right)$ орбіта космічного корабля буде еліпсом, фокусом якого є центр Землі. Швидкості $v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$ та $v_2 = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$ називаються, відповідно, першою і другою космічними швидкостями. На поверхні Землі v_1=7,91 км/с, v_2=11,2 км/с.

Приклад 1

Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо точка $M_0(2;-2)$ належить еліпсу, а довжина його великої півосі дорівнює 4. Знайти ексцентриситет еліпса та координати його фокусів.

Розв'язання

Координати точки M_0, яка належить еліпсу, повинні задовольняти рівнянню еліпса. Отже, рівняння еліпса:

$\frac{x^2}{16}+\frac{3y^2}{16}=1$. Оскільки $\frac{b^2}{a^2}=1-\varepsilon^2$, то $\varepsilon=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{16/3}{16}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Оскільки $c=\varepsilon\cdot a$, то $F_1\left(4\cdot\sqrt{\frac{2}{3}};0\right)$, $F_2\left(-4\cdot\sqrt{\frac{2}{3}};0\right)$.

Приклад 2

Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі ординат симетрично відносно початку координат. Відомо також, що довжина його малої осі дорівнює 6, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{4}{5}$.

Розв'язання

Довжина малої півосі $b=\frac{6}{2}=3$. Оскільки $\frac{b^2}{a^2}=1-\varepsilon^2$, то $\frac{9}{a^2}=$ $=1-\frac{16}{25}\Rightarrow a=5$. Рівняння еліпса: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$. Координати фокусів: $F_1(0;4)$, $F_2(0;-4)$.

9.3. Гіпербола

Дамо геометричне визначення поняття „гіпербола”. Нехай на площині вказані дві точки F_1 та F_2, відстань $|F_1F_2|$ між якими дорівнює 2с.

Означення 2. Гіперболою називається множина точок *M* площини, різниця відстані від яких до точок F_1 та F_2 дорівнює $\pm$ 2a (a < c):

$$|MF_1|-|MF_2|=\pm 2a. \tag{9.6}$$

Точки F_1 та F_2 називаються **фокусами гіперболи**. З (9.6) випливає, що середина відрізка F_1F_2 - точка *O* - є центром симетрії гіперболи.

Для отримання рівняння гіперболи розглянемо систему координат тим же чином, що і у випадку еліпса (рис. 9.5). Повторюючи, по суті справи, викладки, які були наведені для еліпса, одержимо рівняння $(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$. Введемо позначення $b^2 = c^2 - a^2$ і поділимо ліву та праву частини останнього рівняння на $a^2 \cdot b^2$. Отримуємо рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (9.7)$$

Таким чином доведено: якщо точка M належить гіперболі (9.6), то її координати $(x;y)$ задовольняють рівнянню (9.7). Справедливе і обернене твердження: якщо пара чисел $(x;y)$ задовольняє рівнянню (9.7), то точка $M(x;y)$ знаходиться на гіперболі (9.6). Рівняння (9.7) називається **канонічним (стандартним) рівнянням гіперболи.**

Гіпербола симетрична відносно осей координат. Гіпербола перетинається з віссю Ox у точках $A_1(a;0)$ та $A_2(-a;0)$ і не перетинається з віссю Oy. Точки A_1 та A_2 називаються **вершинами гіперболи**. Гіпербола розпадається на дві гілки (знак "+" у (9.6) відповідає лівій гілці, а знак "-" – правій). Прямі $y=\pm\frac{b}{a}x$, на яких лежать діагоналі прямокутника $\Pi=\{-a \le x \le a,\ -b \le y \le b\}$, є **асимптотами гіперболи.** Гіпербола має з будь-якою прямою не більше ніж дві загальні точки. Пряма, яка має з гіперболою одну загальну точку, називається **дотичною до гіперболи в цій точці.** Прямі $x=\pm a$, на яких лежать дві сторони прямокутника Π, дотикаються гіперболи в її вершинах. Гіперболу (9.7) можна одержати з рівнобічної гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ шляхом стиску вздовж осі Oy з коефіцієнтом стиску $\frac{a}{b}$. Точка $M(x;y)$ рівнобічної гіперболи переходить при цьому в точку $M'\left(x; y' = \frac{b}{a}y\right)$, яка належить гіперболі (9.7). Число $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ називається **ексцентриситетом гіперболи**. Гіперболи подібні, якщо у них однакові ексцентриситети. Можна показати, що дотична до гіперболи в точці M_0 є бісектрисою кута $F_2M_0F_1$. Цей факт виражає "оптичну властивість" гіперболи: якщо в одному фокусі помістити точкове джерело світла, то промені, відбиваючись дзеркально від гіперболи, здаються такими, що виходять з другого фокуса (рис. 9.6).

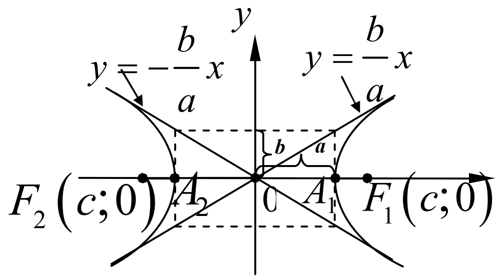


Рис. 9.5

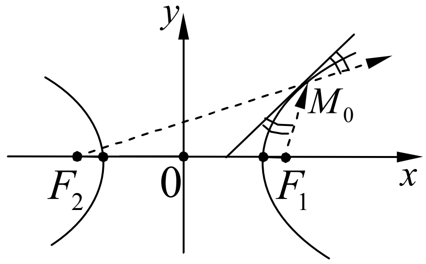


Рис. 9.6

Міжпланетні станції вирушають у політ по гіперболічних орбітах (відносно Землі), потім вони рухаються по еліптичних (відносно Сонця) орбітах у напрямку до планети, що вивчається, назавжди залишаючи Сонячну систему.

Приклад 3

Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо точки $M_1(6;-1)$ та $M_2(-8;2\sqrt{2})$ належать гіперболі. Визначити ексцентриситет гіперболи та координати її фокусів.

Розв'язання

Шукане рівняння гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Оскільки координати точок M_1 та M_2 задовольняють рівнянню гіперболи, то

$$\begin{cases} \frac{36}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1, \\ \frac{64}{a^2}-\frac{8}{b^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=32, \\ b^2=8. \end{cases}$$

Отже:

1) рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$;

2) ексцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{a}=\sqrt{\frac{8+32}{32}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$;

3) $F_1\left(2\sqrt{10};0\right)$, $F_2\left(-2\sqrt{10};0\right)$.

Приклад 4

Побудувати гіперболу y^2 $-4x^2$ = 16 та її асимптоти. Знайти фокуси і ексцентриситет гіперболи.

Розв'язання

Розглядуване рівняння здобувається з канонічного шляхом заміни x на y та y на x. Фокуси гіперболи лежать не на осі Ox, а на осі Oy (рис. 9.7). Зведемо рівняння гіперболи до канонічного вигляду: $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1\Rightarrow a^2=16,\ b^2=4\Rightarrow\Rightarrow a=4,\ b=2.$ Оскільки $c^2=a^2+b^2=16+4=20$, то $c=2\sqrt{5}$. Фокуси гіперболи $F_1\left(0;2\sqrt{5}\right)$ та $F_2\left(0;-2\sqrt{5}\right)$. Ексцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. У нашому випадку рівняння асимптот мають вигляд $x=\pm\frac{b}{a}y\Rightarrow y=\pm 2x$.

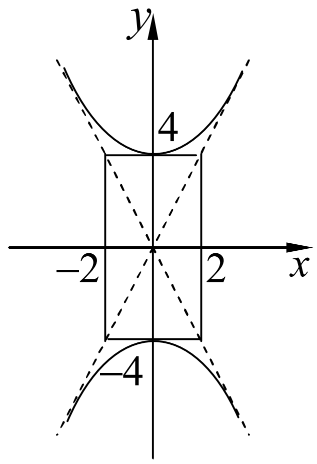


Рис. 9.7

9.4. Парабола

Наведемо геометричне означення параболи. Нехай на площині задані пряма d та точка F, відстань між якими дорівнює $p > 0$.

Означення 3. Параболою називається множина точок M площини, рівновіддалених від F та d:

$$|MF| = |MM'|, \tag{9.8}$$

де M' - основа перпендикуляра, який опущено на пряму d з точки M. Точка F називається фокусом параболи, а пряма d – директрисою. З (9.8) випливає, що пряма, яка проходить через фокус перпендикулярно директрисі, є віссю симетрії параболи. Одержимо рівняння параболи. Вісь Оу напрямимо паралельно директрисі на однаковій відстані від неї і фокуса, а вісь Ох проведемо так, щоб фокус лежав на додатній півосі (рис. 9.8). У цій системі координат фокус має координати$\left(p/2\ ;\ 0 \right)$, а рівняння директриси $x = -\dfrac{p}{2}$. Рівність (9.8) набуває вигляду:

$$\left| x + \frac{p}{2} \right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2} \right)^2 + y^2}. \tag{9.8'}$$

Після піднесення до квадрата обох частин $(9.8')$ і зведення подібних одержимо рівняння

$$y^2 = 2px. \tag{9.9}$$

Отже, якщо точка М знаходиться на параболі (9.8), то її координати (x;y) задовольняють рівнянню (9.9). Справедливо і обернене твердження: якщо пара чисел (x;y) задовольняє рівнянню (9.9), то точка M(x;y) належить параболі (9.8). Рівняння (9.9) називається **канонічним рівнянням параболи**.

Точка О називається вершиною параболи. Парабола має з довільною прямою не більше ніж дві загальні точки. Якщо парабола лежить по один бік від прямої і має з нею загальну точку M_0, то ця пряма називається **дотичною до параболи в точці $\mathbf{M_0}$**. Вісь *Oy* є дотичною у вершині параболи.

Рівняння $x^2 = 2py$ є рівнянням параболи з віссю *Oy*. Фокус цієї параболи знаходиться на осі *Oy*.

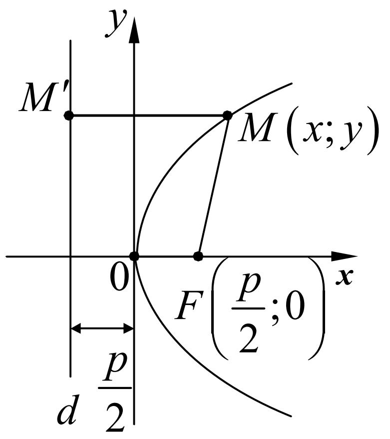


Рис. 9.8

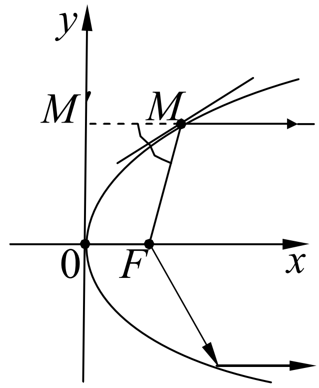


Рис. 9.9

Можна показати, що дотична до параболи в довільній точці M є бісектрисою кута $M'MF$. Цей результат є виразом „оптичної властивості” параболи: промені, що виходять із точкового джерела, який знаходиться у фокусі, після дзеркального відбиття від параболи ідуть паралельно її осі (рис. 9.9). Тому телескопи, прожектори, антени виготовляють у вигляді параболічного дзеркала, яке має форму поверхні, що одержана обертанням параболи навколо її осі.

Приклад 5

Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо відомо, що:

а) парабола симетрична відносно осі *Ox* та проходить через точку M_1(-3;3);

б) парабола симетрична відносно осі *Oy* та проходить через точку $M_2\left(3;\dfrac{9}{4}\right)$.

Розв'язання

а) оскільки $x_{M_1} = -3 < 0$, то парабола розташована в лівій півплощині і має рівняння $y^2 = -2px$. Підставимо в це рівняння координати точки M_1 і знайдемо: $9 = -2p(-3) \Leftrightarrow p = \frac{3}{2}$. Фокус параболи знаходиться в точці $F\left(-\frac{3}{4};0\right)$, а її рівняння $y^2 = -3x$ (рис. 9.10).

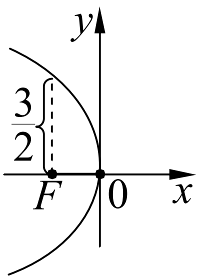


Рис. 9.10

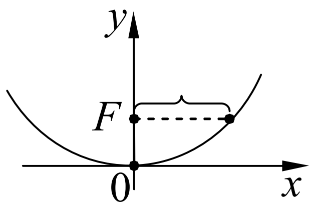


Рис. 9.11

б) оскільки $y_{M_2} = \frac{9}{4} > 0$, то парабола розташована у верхній півплощині і має рівняння $x^2 = 2py$. Підставимо в це рівняння координати точки M_2: $9 = 2p \cdot \frac{9}{4} \Leftrightarrow p = 2$. Рівняння параболи $x^2 = 4y$, а її фокус знаходиться в точці $F(0;1)$ (рис. 9.11).

Приклад 6

Промінь y = -1 відбивається від параболи $y^2 = 6x$. Знайти рівняння відбитого променя і точку M_1 його перетину з параболою.

Розв'язання

Відбитий промінь проходить через фокус $F\left(\frac{3}{2};0\right)$ параболи та через точку $M_0\left(\frac{1}{6};-1\right)$, яка лежить на параболі (рис. 9.12).

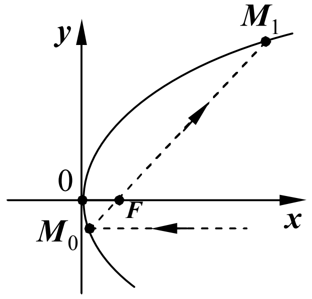


Рис. 9.12

Запишемо рівняння прямої (M_0F):

$$\frac{x-\frac{1}{6}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{6}}=\frac{y+1}{0+1}\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x-\frac{9}{8}.$$

Для знаходження координат точки M_1 розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} y=\frac{3}{4}x-\frac{9}{8}, \\ y^2=6x. \end{cases}$ одержимо $M_1\left(\frac{27}{2};9\right)$.

9.5. Спрощення рівняння кривої другого порядку шляхом паралельного переносу системи координат

Перейдемо до вивчення питання про те, яка крива визначається в системі координат xOy рівнянням:

$$a_1x^2+a_2y^2+b_1x+b_2y+c=0, \tag{9.10}$$

в якому принаймні один з коефіцієнтів a_1, a_2 відмінний від нуля.

Спочатку розглянемо випадок $a_1\neq 0\neq a_2$. Вилучимо повний квадрат за кожною змінною і перепишемо рівняння (9.10) таким чином:

$$a_1\left(x+\frac{b_1}{2a_1}\right)^2+a_2\left(y+\frac{b_2}{2a_2}\right)^2+c-\frac{b_1^2}{4a_1}-\frac{b_2^2}{4a_2}=0. \tag{9.11}$$

Зробимо паралельне перенесення системи координат, яке визначається за формулами: $x'=x+\frac{b_1}{2a_1}$, $y'=y+\frac{b_2}{2a_2}$. Тоді рівняння (9.11) набуває вигляду:

$$a_1\left(x'\right)^2 + a_2\left(y'\right)^2 = d, \qquad (9.12)$$

де $d = \dfrac{b_1^2}{4a_1} + \dfrac{b_2^2}{4a_2} - c$.

У залежності від знаків чисел a_1, a_2 та d рівняння (9.12) визначає такі криві:

1) еліпс, якщо числа a_1, a_2 та d одного знаку і $d \neq 0$

$$\left(2\left(x'\right)^2 + 3\left(y'\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{\left(x'\right)^2}{2} + \frac{\left(y'\right)^2}{4/3} = 1\right);$$

2) гіперболу, якщо числа a_1, a_2 мають протилежні знаки і $d \neq 0$

$$\left(2\left(x'\right)^2 - 3\left(y'\right)^2 = -4 \Leftrightarrow \frac{\left(y'\right)^2}{4/3} - \frac{\left(x'\right)^2}{2} = 1\right);$$

3) точку, якщо a_1, a_2 одного знаку, а $d = 0$

$$\left(2\left(x'\right)^2 + 3\left(y'\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x' = y' = 0\right);$$

4) пару прямих, які перетинаються, якщо числа a_1, a_2 мають протилежні знаки і $d = 0$

$$\left(4\left(x'\right)^2 - \left(y'\right)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x' + y' = 0,\ 2x' - y' = 0\right);$$

5) порожню множину, якщо числа a_1, a_2 мають один знак, протилежний знаку d

$$\left(2\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2 = -1\right).$$

Перейдемо до розгляду другого випадку: один з коефіцієнтів, наприклад, a_1 дорівнює нулю. Вилучаємо повний квадрат за змінною y і запишемо рівняння (9.11) у вигляді:

$$a_2\left(y+\frac{b_2}{2a_2}\right)^2=-b_1x+d_1, \tag{9.13}$$

де $d_1=\dfrac{b_2^2}{4a_2}-c$.

Подальше спрощення залежить від того, дорівнює b_1 нулю або ні. Якщо $b_1\neq 0$, то після паралельного перенесення системи координат за формулами $x'=x-\dfrac{d_1}{b_1}$, $y'=y+\dfrac{b_2}{2a_2}$ рівняння (9.13) матиме вигляд:

$$a_2\left(y'\right)^2=-b_1x'. \tag{9.14}$$

Рівняння (9.14) задає параболу з параметром $p=\dfrac{1}{2}\left|-\dfrac{b_1}{a_2}\right|$.

Якщо $b_1=0$, то після паралельного перенесення системи координат вздовж осі Oy, яке визначається за формулами $x'=x$, $y'=y+\dfrac{b_2}{2a_2}$, рівняння (9.13) запишеться у вигляді:

$$a_2\left(y'\right)^2=d_1. \tag{9.15}$$

В залежності від знаків чисел a_2 та d_1 рівняння (9.15) задає такі криві:

1) пару паралельних прямих, коли знаки чисел a_2 та d_1 збігаються $\left(4\left(y'\right)^2=1 \Leftrightarrow 2y'=1,\ 2y'=-1\right)$;

2) пару збіжних прямих при $d_1 = 0$ $\left(4\left(y'\right)^2 = 0 \Leftrightarrow y' = 0\right)$;

3) порожню множину, якщо числа a_2 та d_1 мають різні знаки$\left(4\left(y'\right)^2 = -1\right)$.

Приклад 7

Які криві задаються рівняннями:

а) $2x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + \frac{1}{2} = 0;$

б) $y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$.

Розв'язання

а) вилучимо повні квадрати за змінними x та y:

$$2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + 4\left(y - 1\right)^2 - 4 + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(y - 1\right)^2 = 4.$$

Зробимо паралельне перенесення системи координат:

$$x' = x + \frac{3}{2},\ y' = y - 1.$$

Рівняння кривої в системі координат $x'O'y'$ матиме вигляд $\frac{\left(x'\right)^2}{4} + \frac{\left(y'\right)^2}{2} = 1$ і визначає еліпс з параметрами a=2, b=$\sqrt{2}$ (рис. 9.13);

б) вилучимо повний квадрат за змінною y: $(y+3)^2 = -4(x-2)$. Зробимо паралельне перенесення системи координат:

$$x' = x - 2, y' = y + 3.$$

У системі координат $x'O'y'$ рівняння кривої запишеться у вигляді $(y')^2 = -4x'$. Крива являє собою параболу з параметром p=2 (рис. 9.14).

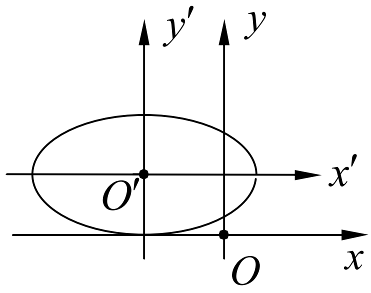


Рис. 9.13

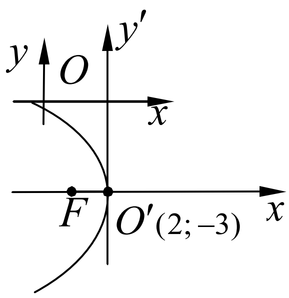


Рис. 9.14

9.6. Спрощення рівняння кривої другого порядку шляхом повороту системи координат

Нехай крива задана в системі координат xOy рівнянням вигляду

$$a_1x^2 + a_3xy + a_2y^2 + b_1x + b_2y + c = 0, \qquad (9.16)$$

в якому коефіцієнт $a_3 \neq 0$.

Розглянемо симетричну матрицю $K = \begin{Vmatrix} a_1 & \frac{a_3}{2} \\ \frac{a_3}{2} & a_2 \end{Vmatrix}$. Нехай λ_1 та λ_2 – власні значення матриці K. При цьому власному значенню λ_1 відповідає той власний вектор $\vec{x}^{(1)}$, який має обидві додатні координати (оскільки власні вектори матриці К ортогональні, такий вектор існує). Нехай $\alpha = \left(\widehat{\vec{x}^{(1)}, \vec{i}} \right)$. Розглянемо прямокутну систему координат $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, що повернута відносно системи координат $(O; \vec{i}, \vec{j})$ на кут α (рис. 9.15). Зазначимо, що $\vec{e}_1(\cos\alpha; \sin\alpha)$ та $\vec{e}_2(-\sin\alpha; \cos\alpha)$. Підставляючи в рівняння (9.16) формули

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \ \ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

які зв'язують координати точки в системі xOy з координатами точки в системі координат $x'O'y'$ (ці формули ми отримали з формул (1.10) заміною α на $-\alpha$), перетворимо його до вигляду

$$\lambda_1\left(x'\right)^2+\lambda_2\left(y'\right)^2+b_1'x'+b_2'y'+c'=0. \qquad (9.17)$$

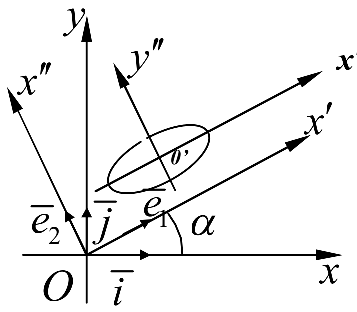


Рис. 9.15

Оскільки рівняння (9.17) не містить доданка з добутком координат, то воно (рівняння) спрощується, як було показано, за допомогою вилучення повного квадрата і відповідного паралельного перенесення.

Таким чином, в залежності від значення коефіцієнтів, загальне рівняння кривої другого порядку (9.16) визначає еліпс, гіперболу, параболу, пару прямих, одну пряму, точку або порожню множину.

Приклад 8

Спростити рівняння кривої $3x^2-4xy-2x+4y=0$.

Розв'язання

Оскільки $a_3=-4\neq 0$, то спочатку треба зробити поворот осей координат.

1) знайдемо власні значення матриці

$$K=\begin{Vmatrix}3 & -2\\ -2 & 0\end{Vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}3-\lambda & -2\\ -2 & -\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\lambda^2-3\lambda-4=0\Leftrightarrow\lambda\in\{-1;4\};$$

2) перейдемо до знаходження власного вектора з додатними координатами. При $\lambda=-1$ маємо:

$$\begin{cases}(3+1)x_1-2x_2=0,\\ -2x_1+x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow x_2=2x_1\Leftrightarrow\vec{x}^{(1)}=c(1;2),\ c>0.$$

Таким чином, $\lambda_1=-1$ і $\vec{x}^{(1)}=c(1;2),\ c>0$;

3) знайдемо кут повороту системи координат $x'Oy'$ відносно системи координат xOy:

$$\cos\alpha = \frac{\left(\vec{x}^{(1)} \cdot \vec{i}\right)}{\left|\vec{x}^{(1)}\right|} = \frac{c}{c\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha \approx 63^{\circ}26';$$

4) зв'язок старих координат з новими має вигляд:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y',\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'.$$

Отже, рівняння кривої в системі координат $x'Oy'$ запишеться так:

$$-\left(x'\right)^2 + 4\left(y'\right)^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}\left(x' - 2y'\right) + \frac{4}{\sqrt{5}}\left(2x' + y'\right) - 5 = 0;$$

5) вилучимо повні квадрати за двома змінними x' та y'

$$-\left(x' - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 4$$

і зробимо паралельне перенесення системи координат

$$x'' = x' - \frac{3}{\sqrt{5}}, y'' = y' + \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

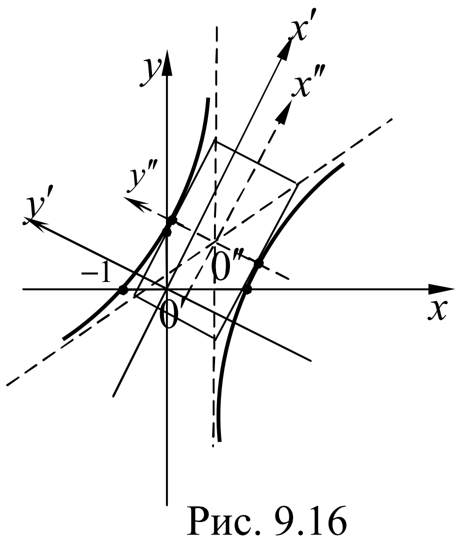


Рис. 9.16

Рівняння кривої набуває в системі координат $x''O''y''$ остаточного вигляду $\left(y''\right)^2 - \frac{\left(x''\right)^2}{4} = 1$. Крива являє собою гіперболу, фокуси якої розташовані на осі $O''y''$, а a=1, b=2 (рис. 9.16).

10. ПОВЕРХНІ ТА ЛІНІЇ У ПРОСТОРІ

10.1. Рівняння поверхні

Нехай у просторі впроваджена система прямокутних координат$\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Так само, як це було на площині, співвідношення між значеннями координат задають поверхні та лінії у просторі.

Означення. Рівняння $\Phi(x,y,z)=0$ називається **рівнянням поверхні S,** якщо цьому рівнянню задовольняють координати будь-якої точки цієї поверхні і не задовольняють координати точки, яка не належить поверхні:

$$P_0(x_0;y_0;z_0)\in S \Leftrightarrow \Phi(x_0,y_0,z_0)=0.$$

Сфера. Одержимо рівняння **сфери** радіуса R, центр якої знаходиться в точці $M_0(a;b;c)$. Нехай $M(x;y;z)$ – довільна точка сфери. Тоді $\left|\overline{M_0M}\right|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=R$, і, отже, координати довільної точки сфери задовольняють рівнянню:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \qquad (10.1)$$

Навпаки, якщо трійка чисел $(x;y;z)$ задовольняє рівнянню (10.1), то точка $M(x;y;z)$ знаходиться на відстані R від точки $M_0(a;b;c)$ і, отже, належить сфері з центром у точці $M_0(a;b;c)$ та радіусом R.

Рівняння (10.1) називається **канонічним рівнянням сфери** з центром у точці $M_0(a;b;c)$ та радіусом R.

Якщо в (10.1) виконати піднесення до квадрата, то одержимо рівняння вигляду

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0. \qquad (10.2)$$

Координати будь-якої точки кожної сфери задовольняють рівнянню (10.2). Рівняння (10.2) не завжди задає деяку сферу. Наприклад, рівняння $x^2+y^2+z^2+1=0$ є рівнянням вигляду (10.2), але у просторі немає точок, координати яких задовольняють цьому рівнянню. Однак, якщо рівняння (10.2) задає деяку поверхню у просторі, то ця поверхня – сфера.

Поверхні обертання. Нехай у правій півплощині xOz задана крива L:{$F(x,z)$=0, y=0}. Будемо обертати цю криву навколо осі Oz. Кожна точка цієї кривої буде описувати коло, площина якого перпендикулярна осі Oz і центр знаходиться на цій осі. Ці кола утворюють **поверхню обертання** (рис. 10.1) з рівнянням $F\left(\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$.

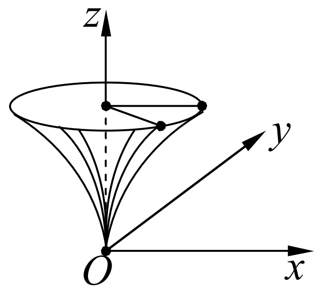


Рис. 10.1

Рівняння поверхонь обертання кривих навколо осей Ox та Oy мають відповідно вигляд:

$$F\left(\sqrt{y^2+z^2},x\right)=0,\ F\left(\sqrt{x^2+z^2},y\right)=0.$$

Наприклад, у результаті обертання кривої $z= sinx$, $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, y=0 навколо осі Oz одержується поверхня з рівнянням $z=\sin\sqrt{x^2+y^2}$, $\sqrt{x^2+y^2}\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, а при обертанні навколо осі Ox - $\sqrt{z^2+y^2}=\sin x$, $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Циліндричні поверхні. Нехай у площині xOy задана крива L:{$F(x,y)$=0, z=0}. Проведемо через усі її точки перпендикуляри до цієї площини. Сукупність цих прямих визначає **циліндричну поверхню,** твірні якої паралельні осі Oz, напрямною якої є лінія L (рис. 10.2). Рівняння циліндричних поверхонь з твірними, які паралельні осям Ox та Oy, мають відповідно вигляд: $F(y,z)$ = 0, $F(x,z)$= 0.

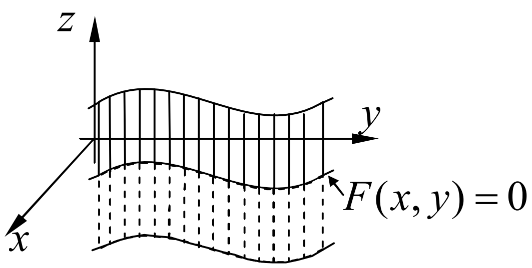


Рис. 10.2

Наприклад, рівняння $y=\ln x$ є рівнянням циліндричної поверхні з твірними, які паралельні осі Oz і напрямною $y=\ln x, z=0$.

10.2. Площина у просторі

Нехай у просторі запроваджена прямокутна система координат. Знайдемо рівняння площини *П,* що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ та перпендикулярна заданому ненульовому вектору $\vec{n}\,(A;B;C)$, який називається **нормальним вектором** цієї площини (рис. 10.3).

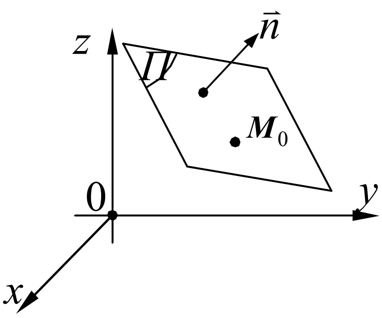


Рис. 10.3

Нехай $M(x;y;z)$ – довільна точка площини *П*. Тоді вектори $\overline{MM_0}\left(x-x_0;y-y_0;z-z_0\right)$ та $\vec{n}$ перпендикулярні. Отже,

$$\vec{n}\cdot\overline{MM_0}=0.$$

Переходячи до координат, одержимо рівняння

$$П\text{:}A\left(x-x_0\right)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\,. \qquad (10.3)$$

Рівняння (10.3) називають **канонічним рівнянням площини**. Розкриємо в (10.3) дужки і введемо визначення $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$. Тоді рівняння (10.3) набуде вигляду

$$П: Ax+By+Cz+D=0. \qquad (10.4)$$

Рівняння (10.4) називається **загальним рівнянням площини.** Отже, будь-яку площину можна задати рівнянням першого степеня відносно координат *x,y,z* точки площини. Справедливе і обернене твердження: **будь-яке** рівняння першого степеня $Ax+By+Cz+D=0$, в якому хоча б один з коефіцієнтів *A,B,C* не дорівнює нулю, описує деяку площину.

В тому випадку, коли площина *П* задана своїми трьома точками , $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, які не лежать на одній прямій, її нормальний вектор можна знайти так: $\vec{n}=\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3}$ (вектори $\overline{M_1M_2}$ та $\overline{M_1M_3}$ неколінеарні). Тоді рівняння площини запишеться у вигляді

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot\left(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}\right)=0.$$

Переходячи в останньому рівнянні до координатної форми, одержимо рівняння

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (10.5)$$

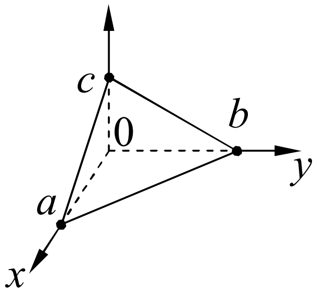


Рис. 10.4

Зокрема, якщо площина проходить через точки $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$, $M_3(0;0;c)$ (a,b,c відрізняються від нуля), то її рівняння має вигляд

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (10.5'')$$

Рівняння (10. $5''$) називають рівнянням площини **у відрізках на осях** (рис. 10.4).

Приклад 1

Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2,-1,3)$ та $M_2(3,1,4)$ паралельно вектору $\vec{a}(3;-1;4)$.

Розв'язання

Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ (l;2;l) лежить у розглянутій площині, а вектор $\vec{a}$ паралельний до неї. Оскільки $\vec{a}$ та $\overline{M_1M_2}$ не пропорційні, то вектор нормалі $\vec{n}$ до площини визначається у вигляді їх векторного добутку: $\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}=9\vec{i}-\vec{j}-7\vec{k}.$

Тоді, згідно (10.3), шукане рівняння площини має вигляд:

$$9(x-2)-(y+1)-7(z-3)=0 \Leftrightarrow 9x-y-7z+2=0.$$

Приклад 2

Обчислити об'єм піраміди, яка обмежена площиною $2x-3y+6z-12=0$ та координатними площинами.

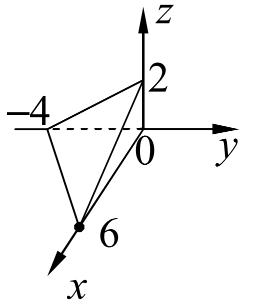


Рис. 10.5

Запишемо рівняння площини у вигляді (10.5'): $\frac{x}{6}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{2}=1$ (рис. 10.5). Як відомо, $V_{\text{ïið}}=\frac{1}{3}S_{\text{îñí}}\cdot H, H=2$,

$S_{осн}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4=12$,

тобто $V_{\text{ïið}}=\frac{1}{3}\cdot 12\cdot 2=8$ од^3.

10.3. Лінії у просторі

Обговоримо два можливих випадки задання лінії у просторі:

1) нехай поверхні S_1 та S_2 перетинаються по деякій лінії. Якщо $\Phi_1(x,y,z)=0$ та $\Phi_2(x,y,z)=0\measuredangle$ - рівняння поверхонь S_1 та S_2, то лінія L, по якій перетинаються ці поверхні, задається системою рівнянь

$$L:\begin{cases}\hat{O}_1\left(x,y,z\right)=0,\\ \hat{O}_2\left(x,y,z\right)=0;\end{cases}$$

2) координати ($x;y;z$) точки лінії розглядаються як функції деякої незалежної змінної t

$$L:\{x=x(t),y=y(t),z=z(t);t\in[\alpha;\beta]\}.$$

Змінна t називається **параметром**, а вказаний спосіб – **параметричним заданням кривої.** В тому випадку, коли параметр t є часом, криву L можна розглядати як траєкторію рухомої матеріальної точки. При цьому точка $M_1(x(t_1);y(t_1);\ z(t_1))$ попередня до точки $M_2(x(t_2);y(t_2);z(t_2))$, якщо $t_1<t_2$. Одна і та ж

сама крива може мати різні параметризації. Від одного способу завдання лінії можна переходити до іншого. Наприклад, нехай лінія задана параметрично $L:\{x=\cos t, y=\sin t, z=t;\ t\in[0;2\pi]\}$. Тоді $t=z$ і після виключення t з двох перших параметричних рівнянь одержимо систему рівнянь цієї лінії:

$$L:\begin{cases} x-\cos z=0, \\ y-\sin z=0. \end{cases} z\in[0;2\pi].$$

Приклад 3

Знайти лінію перетину поверхні $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-z=0$ з площиною $z=3$.

Розв'язання

$$\text{L:}\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-z=0, \\ z=3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1, \\ z=3. \end{cases}$$

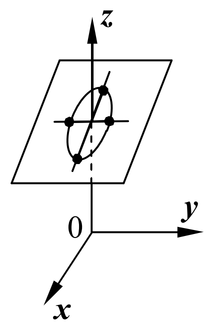


Рис. 10.6

Таким чином, лінія L є еліпсом, який розташований у площині z = 3 (рис. 10.6). Цей еліпс можна задати і параметрично:

$$\text{L:}\left\{ x=\sqrt{12}\cos t,\ y=\sqrt{6}\sin t,\ z=3;\ t\in\left[0;2\pi\right] \right\}.$$

При такій параметризації зображуюча точка рухається проти годинникової стрілки.

Значенню t=0 відповідає вершина еліпса ($\sqrt{12}$;0;3), а значенню $t=\frac{\pi}{2}$ відповідає вершина (0;$\sqrt{6}$;3).

Пряма у просторі

Розглянемо точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ та ненульовий вектор $\vec{q}\left(q_1;q_2;q_3\right)$.Одержимо рівняння прямої з напрямним вектором $\vec{q}$, яка проходить через точку M_o. Приймемо для цієї прямої позначення $(M_0;\vec{q})$. Точка $M(x;y;z)\in(M_0;\vec{q})$ тоді і тільки тоді, коли або $\overline{M_0M} \parallel \vec{q}$, або $\overline{M_0M} \parallel t\vec{q}$ (ясно, що ці умови рівносильні). Перша умова в координатній формі приводить до **канонічного рівняння прямої**:

$$\frac{x-x_0}{q_1}=\frac{y-y_0}{q_2}=\frac{z-z_0}{q_3}, \tag{10.6}$$

а друга – до **параметричних рівнянь прямої**:

$$\begin{cases} x=x_0+q_1t, \\ y=y_0+q_2t, \ t\in(-\infty;+\infty) \\ z=z_0+q_3t. \end{cases} \tag{10.7}$$

Рівняння (10.6) може бути записано у вигляді системи, яка відповідає лінії перерізу двох площин:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{q_1}-\dfrac{y-y_0}{q_2}=0, \\ \dfrac{y-y_0}{q_2}-\dfrac{z-z_0}{q_3}=0. \end{cases}$$

Канонічне рівняння прямої l може бути одержано, якщо пряма l задана як лінія перерізу двох площин Π_1 та Π_2:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{10.8}$$

Дійсно: 1) оскільки $l\in\Pi_1$, та $l\in\Pi_2$, то $\vec{q}\perp\vec{n}_1$ і $\vec{q}\perp\vec{n}_2$. Тому векторний добуток нормальних векторів $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$ можна вважати напрямним вектором $\vec{q}$ прямої l; 2) щоб знайти точку $M_0(x_0;y_0;z_0)\in l$, треба задати значення одного невідомого в системі (10.8) так, щоб можна було знайти значення двох інших невідомих.

Приклад 4

Знайти канонічне і параметричні рівняння прямої l, яка задана як лінія перерізу двох площин $2x+3y-z+1=0$, $x-2y+4z-4=0$.

Розв'язання

$$\vec{q}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix}=10\vec{i}-9\vec{j}-7\vec{k};$$

Нехай $z_0=0$. Тоді $y_0=-\dfrac{9}{7}$, а $x_0=\dfrac{10}{7}$ і, отже, $M_0\left(\dfrac{10}{7};-\dfrac{9}{7};0\right)$.

Канонічне рівняння прямої має вигляд $\dfrac{x-\frac{10}{7}}{10}=\dfrac{y+\frac{9}{7}}{-9}=\dfrac{z}{-7}$, а параметричне: $x=\dfrac{10}{7}+10t,\ y=-\dfrac{9}{7}-9t,\ z=-7t\ \left(t\in(-\infty;+\infty)\right)$.

10.4. Взаємне розташування прямих та площин у просторі

Згадаємо, як визначається кут між двома площинами Π_1 та Π_2. Нехай площини Π_1 та Π_2 перерізаються прямою l. Проведемо площину Π, яка перпендикулярна l. Площина Π перерізається з площинами: Π_1 та Π_2 відповідно по прямих l_1 та l_2. Кут $\alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ між цими прямими називається кутом між площинами Π_1 та Π_2. Позначимо через φ кут між нормальними векторами $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$. Тоді $a=\varphi$, якщо $\varphi\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, і $a=\pi-\varphi$, якщо $\varphi\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$. Отже,

$$\cos a=\left|\cos\varphi\right|=\frac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|}. \tag{10.9}$$

Зокрема площини $П_1$ та $П_2$ паралельні тоді і тільки тоді, коли $\vec{n}_1 \| \vec{n}_2$, і перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$.

Аналогічно знаходиться кут між парою прямих l_1 та l_2 з базисними (напрямними) векторами $\vec{q}_1$ та $\vec{q}_2$:

$$\cos\left(\overset{\wedge}{l_1, l_2} \right) = \cos\left(\overset{\wedge}{\vec{q}_1, \vec{q}_2} \right) = \frac{|\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2|}{|\vec{q}_1| \cdot |\vec{q}_2|}. \qquad (10.10)$$

З (10.10) виходить, що $l_1 \| l_2 \Leftrightarrow \vec{q}_1 \| \vec{q}_2$, $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{q}_1 \perp \vec{q}_2$.

Кут між площиною $П$ та прямою l (рис. 10.7) обчислється за формулою

$$\sin\left(\overset{\wedge}{\ddot{I}, l} \right) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{q}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{q}|}, \qquad (10.11)$$

де $\vec{n}$ - нормальний вектор площини $П$, а $\vec{q}$ - напрямний (базисний) вектор прямої l.

З формули (10.11) виходить, що $П \| l \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{q}$ та $П \perp l \Leftrightarrow \vec{n} \| \vec{q}$.

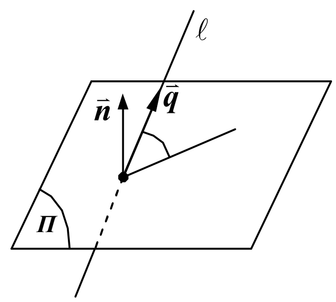


Рис. 10.7

Намітимо шляхи розв'язку основних задач на пряму та площину.

1 Провести пряму через дві задані точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ та $M_1(x_1;y_1;z_1)$: $\vec{q} = \overline{M_0M}\left(x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0\right)$, далі скористатись (10.6).

2 Через задану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ провести пряму, яка паралельна заданій прямій $\left(M_1; \vec{q}_1\right)$: $\vec{q} = \vec{q}_1$, далі скористатись (10.6).

3 Через задану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ провести площину паралельно заданій площині $П$: $\vec{n} = \vec{n}_1$.

4 Через задану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ провести площину, яка паралельна двом заданим прямим l_1 та l_2 : $\vec{n} \perp \vec{q}_1, \vec{n} \perp \vec{q}_2 \Rightarrow \vec{n} = \vec{q}_1 \times \vec{q}_2$.

5 Через задану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ провести пряму, яка перпендикулярна заданій площині Π: $\vec{q} = \vec{n}$.

6 Через задану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ провести площину, яка перпендикулярна заданій прямій $l : \vec{n} = \vec{q}_1$.

7 Знайти відстань від заданої точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до заданої прямої l.

Спочатку знайдемо площину Π, що проходить через точку M_0 перпендикулярно l (п. 7):

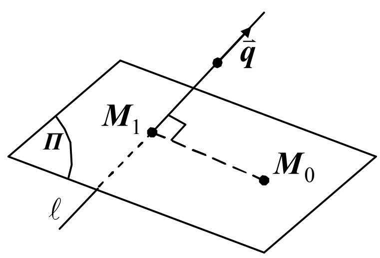
$$\vec{n} = \vec{q}_1 \Rightarrow q_1\left(x - x_0\right) + q_2\left(y - y_0\right) + q_3\left(z - z_0\right) = 0.$$

Для знаходження точки перетину прямої та площини треба розв'язати разом рівняння прямої l та площини Π. При цьому краще за все взяти рівняння прямої в параметричній формі. Тоді для знаходження значення параметра t, який відповідає точці перетину M_1, одержимо рівняння першого степеня. Знайдемо координати точки M_1 і, нарешті, $\overline{M_0M_1}$ (рис. 10.8).

Приклад 5

Знайти відстань від точки $M_0(1;0;3)$ до прямої $l : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-4}{1}$.

Розв'язання



1) $\vec{n} = \vec{q}_1\left(2;3;1\right) \Rightarrow 2\left(x-1\right) + 3y - \left(z-3\right) = 0$

рівняння площини Π (чому?);

2) $\begin{cases} 2\left(x-1\right) + 3y - \left(z-3\right) = 0, \\ x = 2t,\ y = 3t - 1,\ z = -t + 4; \end{cases}$

Рис. 10.8

$$2(2t-1)+3(3t-1)-(-t+4-3)=0 \Rightarrow 14t=6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t=\frac{3}{7} \Rightarrow M_1\left(\frac{6}{7};\frac{2}{7};\frac{25}{7}\right);$$

3) $$\left|\overline{M_0M_1}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{7}\right)^2+\left(\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

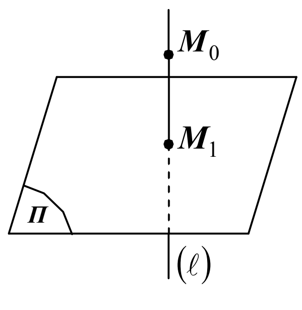
8 Знайти відстань від заданої точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до заданої площини Π.

Спочатку знайдемо рівняння прямої l, яка перпендикулярна площині і проходить через точку M_0. Потім знайдемо точку перетину M_1 прямої та площини Π (як вказано в п. 8), а після цього – $\overline{M_0M_1}$ (рис. 10.9).

Приклад 6

Знайти відстань від точки $M_0(1;2;3)$ до площини $x-2y+5z-4=0$.

Розв'язання



1) $\vec{q}=\vec{n}_1(1;-2;5) \Rightarrow \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{5}$ – рівняння прямої l;

Рис. 10.9

2) $$\begin{cases} x-2y+5z-4=0, \\ x=1+t,\ y=2-2t,\ z=3+5t; \end{cases} \Rightarrow 1+t-2(2-2t)+$$
$$+5(3+5t)-4=0 \Rightarrow 30t=-8 \Rightarrow t=-\frac{4}{15} \Rightarrow M_1\left(1-\frac{4}{15};2+\frac{8}{15};3-\frac{4}{3}\right);$$

3) $$\left|\overline{M_0M_1}\right|=\sqrt{\left(-\frac{4}{15}\right)^2+\left(\frac{8}{15}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{30}}{15}.$$

10.5. Поверхні другого порядку

Загальним рівнянням поверхні другого порядку називається рівняння вигляду:

$$a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+b_1xy+b_2xz+b_3yz+c_1x+c_2y+c_3z+d=0 \qquad (10.12)$$

Ми не будемо наводити схему спрощення загального рівняння поверхні другого порядку (принципово схема така ж сама, як і у випадку кривої другого порядку), а лише дамо класифікацію поверхонь.

Еліпсоїд. Еліпсоїд (рис. 10.10)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ \left(a<0,\ b>0,\ c>0\right). \qquad (10.13)$$

можна отримати із сфери радіуса a шляхом рівномірного стиску (розтягу її до площини xOy з коефіцієнтом стиску (розтягу) $\frac{c}{a}$ і до площини xOz з коефіцієнтом $\frac{b}{a}$. При a=b – трьохосьовий еліпсоїд (півосі a,b,c – різні числа) перетворюється в еліпсоїд обертання (двохосьовий еліпсоїд)

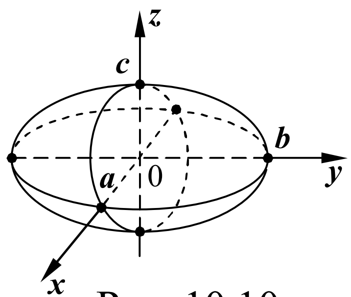


Рис. 10.10

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

який отримується з еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=0$ при обертанні навколо осі Oz.

Якщо площина перерізається еліпсоїдом, то лінія перерізу є еліпс.

Об'єм тіла, яке обмежене еліпсоїдом, дорівнює $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot a\cdot b\cdot c$ од^3.

Гіперболоїди. **Однопорожнинний гіперболоїд** (рис.10.11)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (10.14)$$

отримується шляхом обертання гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=0$ навколо осі Oz і наступного стиску (розтягу) до площини xOz з коефіцієнтом $\frac{b}{a}$. Дійсно, внаслідок обертання гіперболи виходить поверхня обертання з рівнянням $\frac{z^2}{c^2}+\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{a^2}=1$. Тепер виконаємо стиск до площини xOz (вздовж осі Oy) з коефіцієнтом $\frac{b}{a}$. При цьому точка $(x;y;z)$ переходить в точку $\left(x; y' = \frac{b}{a}y; z\right)$, а поверхня обертання – в поверхню $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

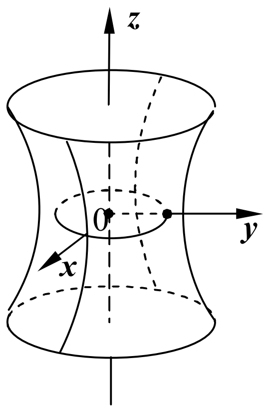


Рис. 10.11

Переріз однопорожнинного гіперболоїда з площиною $z=H$ є еліпсом, півосі якого дорівнюють відповідно $a\sqrt{1+\frac{H^2}{c^2}},\ b\sqrt{1+\frac{H^2}{c^2}}$.

Двопорожнинний гіперболоїд (рис. 10.12).

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (10.15)$$

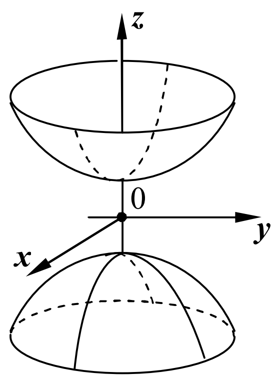


Рис. 10.12

отримується шляхом обертання гіперболи $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1,\ y=0$ навколо осі Oz і стиску (розтягу) здобутої поверхні до площини xOz з коефіцієнтом $\frac{b}{a}$.

Параболоїди. **Еліптичний параболоїд** (рис. 10.13)

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\ \left(p\geq q>0\right) \tag{10.16}$$

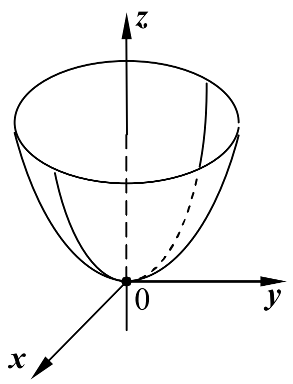


Рис. 10.13

отримують за допомогою обертання параболи $z=\frac{x^2}{2p},\ y=0$ навколо осі Oz та наступного стиску (розтягу) здобутої поверхні до площини xOz з коефіцієнтом $\sqrt{\frac{q}{p}}$. Еліптичний параболоїд може бути здобутий паралельним зсувом параболи $z=\frac{y^2}{2q},\ x=0$, якщо її вершина переміщається вздовж параболи $z=\frac{y^2}{2q},\ x=0$. Площина $z=H>0$ перерізає еліптичний параболоїд по еліпсу з півосями $a\sqrt{H},\ b\sqrt{H}$.

Гіперболічний параболоїд (рис. 10.14)

$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}\ \left(p,q>0\right) \qquad (10.17)$$

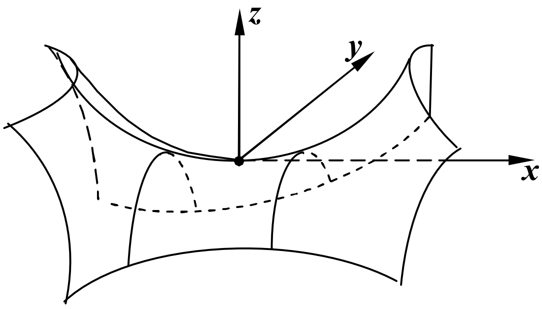


Рис. 10.14

здобутий паралельним зсувом параболи $z=\frac{x^2}{2p}$, $y=0$, якщо її вершина переміщається вздовж параболи $z=-\frac{y^2}{2q}$, $x=0$.

Конус (рис. 10.15)

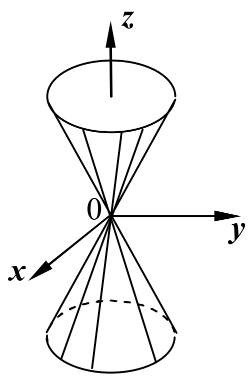


Рис. 10.15

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (10.18)$$

отримується з конуса обертання (фігура, яка утворена обертанням прямої $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0$, $y=0$ навколо осі *Oz*) шляхом стиску (розтягу) до площини *Oz* з коефіцієнтом $\frac{b}{a}$.

Циліндри. Еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$ є напрямною **еліптичного циліндра** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ з твірними, які паралельні осі

Oz (рис. 10.16). Гіпербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ z=0$ є напрямною **гіперболічного циліндра** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ з твірними, які паралельні осі Oz (рис. 10.17). Парабола $y^2 = 2px,\ z = 0$ є напрямною **параболічного циліндра** $y^2 = 2px$ з твірними, які паралельні осі Oz (рис. 10.18).

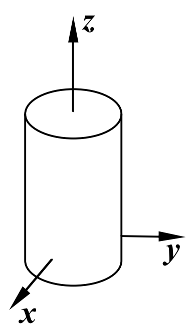


Рис. 10.16

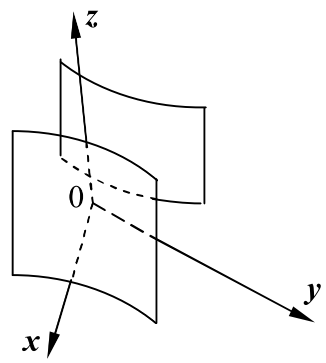


Рис. 10.17

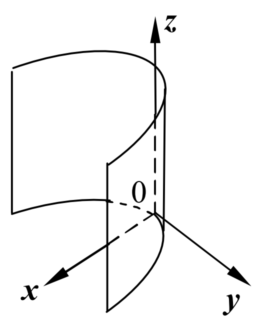


Рис. 10.18

Поверхні другого порядку – єдині поверхні, всі плоскі перерізи яких є кривими другого порядку.

Можна показати, що існує така прямокутна система координат $(O';e_1,e_2,e_3)$, в якій загальне рівняння поверхні другого порядку (10.12) набуває одного з таких стандартних виглядів: 1) еліпсоїд; 2) однопорожнинний гіперболоїд; 3) двопорожнинний гіперболоїд; 4) еліптичний параболоїд; 5) гіперболічний параболоїд; 6) конус; 7) еліптичний циліндр; 8) гіперболічний циліндр; 9) параболічний циліндр; 10) пара перетинних площин $(x^2 - y^2 = 0)$; 11) пара паралельних площин $(x^2 - a^2 = 0)$; 12) пара площин, які збігаються $(x^2=0)$; 13) точка $(x^2 + y^2 + z^2=0)$; 14) порожня множина $(x^2 + y^2 + z^2 +1 = 0)$.

Приклад 7

З'ясувати, яка поверхня задається рівнянням:

а) $3x^2+9y^2 + z^2 = 9;$ б) $\dfrac{x^2}{9} - y^2 + \dfrac{z^2}{4} = 1;$

в) $x^2+z^2=-y$, г) $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$;

д) $xz+2x^2-x=0$.

Розв'язання

а) $3x^2+9y^2+z^2=9 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3}+y^2+\frac{z^2}{9}=1$ – трьохосьовий еліпсоїд;

б) $\frac{x^2}{9}-y^2+\frac{z^2}{4}=1$ – однопорожнинний гіперболоїд, віссю симетрії якого є вісь Oy;

в) $x^2+z^2=-y$ – параболоїд обертання (наслідок обертання параболи $z^2=-y$, $x=0$ навколо осі Oy);

г) $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ – еліптичний циліндр, твірна якого паралельна осі Oz, а напрямною є еліпс $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$, $z=0$;

д) $xz+2x^2-x=0 \Leftrightarrow x(z+2x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ z+2x-1=0. \end{array}\right.$

Поверхня являє собою пару площин, що перетинаються: $x=0$ та $z+2x-1=0$.

Додаток 1

ПОЛЯРНА, ЦИЛІНДРИЧНА ТА СФЕРИЧНА СИСТЕМИ КООРДИНАТ

Окрім прямокутних координат xOy на площині застосовують і інші системи координат. При цьому число координат точки у всіх системах координат на площині дорівнює двом.

Полярними координатами точки М площини є:

1) довжина $\rho > 0$ вектора $\overline{OM}$;
2) кут φ повороту додатньої півосі Ox до вектора $\overline{OM}$.

При цьому $\varphi > 0$, якщо поворот проходить проти стрілки годинника, та $\varphi<0$, якщо поворот – за стрілкою годинника. Звичайно вважають $0 \le \varphi \le 2\pi$ або $-\pi \le \varphi \le \pi$. Точка O (полюс полярної системи), за визначенням, має координати $\rho = 0$, $\varphi = 0$.

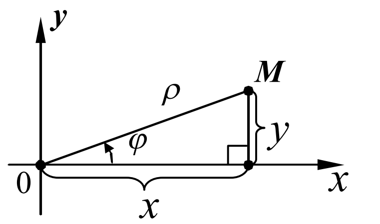


Рис. Д.1.1

Прямокутні координати $(x;y)$ зв'язані з полярними координатами $(\rho;\varphi)$ співвідношеннями (рис. Д.1.1)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Приклад 1

Знайти полярні координати таких точок:

а) $M_0(-1;\sqrt{3})$; б) $M_1(-\sqrt{3};-1)$; в) $M_2(1;-1)$.

Розв'язання

а) $\rho = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2,\ tg\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$.

Оскільки точка M_0 знаходиться у другій координатній чверті, то $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Отже, $M_0\left(\rho = 2; \varphi = \dfrac{2\pi}{3}\right)$;

б) $\rho=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+\left(-1\right)^2}=2,\ tg\varphi=\dfrac{-1}{-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Точка M_1 лежить у третій чверті і тому $\varphi=\dfrac{7\pi}{6}$. Отже, $M_1\left(\rho=2;\varphi=\dfrac{7\pi}{6}\right)$;

в) точка M_2 лежить у четвертій чверті. Її полярні координати такі: $\rho=\sqrt{2}$, $\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$ (або $\varphi=\dfrac{7\pi}{4}$).

Приклад 2

Знайти в полярній системі координат рівняння кола:

а) $x^2+y^2=a^2$; б) $x^2+y^2=2x$; в) $x^2+y^2=2y$.

Розв'язання

а) $\rho^2=a^2 \Leftrightarrow \rho=a$; б) $\rho^2=2\rho\cos\varphi \Leftrightarrow \rho=2\cos\varphi$;
в) $\rho^2=2\rho\sin\varphi \Leftrightarrow \rho=2\sin\varphi$.

Рівняння еліпса, гіперболи та параболи в полярній системі координат має вигляд $\rho=\dfrac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$.

1) коли $\varepsilon<1$, $p=\dfrac{b^2}{a}$ рівняння задає еліпс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, лівий фокус якого є полюсом полярної системи; 2) коли $\varepsilon>1$, $p=\dfrac{b^2}{a}$ рівняння задає праву гілку гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, правий фокус якої є полюсом полярної системи; 3) при $\varepsilon=1$ рівняння задає параболу $y^2=2px$, фокус якої є полюсом полярної системи.

У просторі поряд з прямокутною системою координат широко використовуються циліндрична і сферична системи координат. Число координат точки у всіх просторових системах координат дорівнює трьом.

Опустимо з точки M перпендикуляр на площину xOy. Нехай M' – основа цього перпендикуляра.

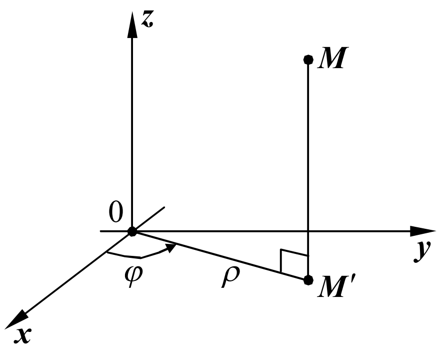


Рис. Д.1.2

Циліндричними координатами точки M є :

1) полярні координати $(\rho;\varphi)$ точки M';

2) координата z точки М.

Циліндричні координати $(\rho;\varphi;z)$ точки зв'язані з її прямокутними координатами $(x;y;z)$ співвідношеннями (рис. Д.1.2):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}, \\ z = z \end{cases} \qquad x_M = x_{M'},\ y_M = y_{M'}$$

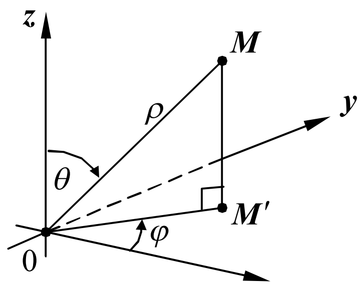
Сферичними координатами точки M є:

1) довжина r вектора $\overline{OM}$;

2) кут θ між векторами $\overline{OM}$ та $\vec{k}$;

3) полярний кут φ точки M'.

Сферичні координати $(r;\theta;\varphi)$ точки зв'язані з її прямокутними координатами співвідношеннями (рис. Д.1.3).



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \cos\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta = \arccos\dfrac{z}{r}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Рис. Д.1.3

Приклад 3

Знайти в циліндричній системі координат рівняння таких поверхонь:

а) $z=x^2+y^2$; б) $z=\sqrt{x^2+y^2}$; в) $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

Розв'язання

а) рівняння параболоїда обертання в циліндричній системі координат має вигляд: $z=\rho^2$;

б) рівняння верхньої порожнини конуса: $z=\rho;$

в) рівняння нижньої півсфери має вигляд: $z=-\sqrt{R^2-\rho^2}$.

Приклад 4

Знайти у сферичній системі координат рівняння поверхонь, які розглянуті у прикладі 3.

Розв’язання

а) $x^2+y^2=r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi=r^2\sin^2\theta$ і тому рівняння параболоїду має вигляд $rc\,\mathrm{os}\,\theta=r^2\sin^2\theta \Leftrightarrow r=\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$;

б) $\sqrt{x^2+y^2}=r\sin\theta$, отже, рівняння верхньої порожнини конуса має вигляд $r\cos\theta=r\sin\theta \Leftrightarrow tg\theta=1 \Leftrightarrow \theta=\dfrac{\pi}{4}$;

в) оскільки рівняння сфери у сферичній системі координат має вигляд $r=R$, то рівняння нижньої півсфери буде таким:

$$r=R, \theta\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right].$$

Додаток 2

ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ В ЕКОНОМІЦІ

1. Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки

Серед питань, що виникають при розгляді будь-якої макроекономічної системи, є, наприклад, таке, що пов'язане з ефективністю ведення багатогалузевого господарства: яким має бути обсяг виробництва кожної з n галузей, щоб задовольнити всі потреби в продукції цієї галузі? При цьому кожна галузь виступає, з одного боку, як виробник деякої продукції, а з іншого – як споживач продукції і своєї, і виробленої іншими галузями.

Відповідь на це питання дали дослідження, проведені на початку 30-х рр. XX ст. американським економістом російського походження Василем Леонтьєвим (1906 - 1999 рр.), лауреатом Нобелівської премії 1973 р., який запропонував застосувати математичну модель міжгалузевого (міжпродуктового) балансу (МБ).

Розглянемо процес виробництва за деякий період часу (наприклад, рік). Введемо такі позначення:

x_i - загальний (валовий) обсяг продукції i-ї галузі (i=1,2, ..., n);

x_{ij} - обсяг продукції i-ї галузі, що споживається в j-й галузі у процесі виробництва (i, j=1,2, ..., n);

y_i - обсяг кінцевої продукції i-ї галузі для невиробничого споживання.

Оскільки валовий обсяг продукції будь-якої i-ї галузі дорівнює сумарному обсягу продукції, що споживається n галузями, і кінцевої продукції, то

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \quad (i = 1, 2, ..., n). \qquad (Д.2.1)$$

Рівняння (Д.2.1) називаються **співвідношеннями балансу.** Розглядатимемо **вартісний міжгалузевий баланс**, коли всі величини, що входять до рівнянь (Д.2.1), мають вартісне вираження.

Введемо **коефіцієнти прямих витрат**

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (i, j = 1, 2, ..., n), \qquad (Д.2.2)$$

які відображають витрати продукції i-ї галузі, на виробництво одиниці продукції j-й галузі.

Звичайно вважають, що на деякому проміжку часу коефіцієнти прямих витрат будуть сталими і залежними від технології виробництва, що склалася. Отже, це виражає лінійну залежність матеріальних витрат від валового випуску, тобто

$$x_{ij} = a_{ij} x_j \quad (i, j = 1, 2, ..., n), \qquad (Д.2.3)$$

внаслідок чого побудована на цій основі модель міжгалузевого балансу одержала назву лінійної.

Тепер співвідношення балансу (Д.2.1) матимуть вигляд

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i \quad (i = 1, 2, ..., n). \qquad (Д.2.4)$$

Позначимо

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{Vmatrix}, \; A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \; ... \; a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \; ... a_{2n} \\ ... & ... \; ... \; ... \\ a_{m1} & a_{m2} \; ... \; a_{mn} \end{Vmatrix}, \qquad Y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{Vmatrix}, \qquad (Д.2.5)$$

де X - вектор валового випуску (валовий обсяг продукції в його галузевій структурі);

A - матриця прямих витрат (технологічна або структурна матриця);

Y - вектор кінцевого продукту (національний дохід у його галузевій структурі).

Тоді систему рівнянь (Д.2.1) можна записати в матричному вигляді

$$X = AX + Y. \qquad (Д.2.6)$$

Основне завдання міжгалузевого балансу **полягає у відшуканні такого вектора валового випуску X, який при відомій матриці прямих витрат A забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y.**

Перепишемо рівняння (Д.2.6) у вигляді

$$(E - A)X = Y. \qquad (Д.2.7)$$

Якщо матриця $E - A$ невироджена, тобто $\det(E - A) \neq 0$, то

$$X = (E - A)^{-1} Y. \qquad (Д.2.8)$$

Матриця $B = (E - A)^{-1}$ називається **матрицею повних витрат.**

Щоб з’ясувати економічний зміст елементів матриці $B = \left\| b_{ij} \right\|$, будемо брати одиничні вектори кінцевого продукту: $Y_1 = (1, 0, ..., 0)^T, Y_2 = (0, 1, ..., 0)^T, ..., Y_n = (1, 0, ..., 0)^T$, тоді за формулою (Д.2.8) відповідні вектори валового випуску будуть

$$X_1 = (b_{11}, b_{21}, ..., b_{n1})^T, X_2 = (b_{12}, b_{22}, ..., b_{n2})^T, ..., X_n = (b_{1n}, b_{2n}, ..., b_{nn})^T.$$

Отже, кожний елемент b_{ij} матриці B є величиною валового випуску продукції i-ї галузі, необхідного для забезпечення випуску одиниці кінцевого продукту j-ї галузі $y_j = 1$ $(j = 1, 2, ..., n)$.

Відповідно до економічного змісту завдання значення x_i мають бути невід’ємними при невід’ємних значеннях y_i та $a_{ij} \geq 0$, де $i, j = 1, 2, ..., n$.

Матриця $A \geq 0$ називається **продуктивною,** якщо для будь-якого вектора $Y \geq 0$ існує розв’язок $X \geq 0$ матричного рівняння

(Д.2.7). У цьому випадку і модель Леонтьєва називають продуктивною.

Існує кілька критеріїв продуктивності матриці A. Один з них полягає у тому, що матриця продуктивна, якщо $a_{ij} \geq 0$ для будь-яких $i, j = 1, 2, ..., n$ і максимум сум елементів її стовпців не перевищує одиниці:

$$\max_{j=1,2,...,n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1, \qquad (Д.2.9)$$

причому хоча б для одного зі стовпців сума елементів строго менше одиниці:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq 1. \qquad (Д.2.10)$$

Означення. Чистою продукцією галузі називається різниця між валовою продукцією цієї галузі та витратами продукції усіх галузей на виробництво цієї галузі.

Матриця прямих витрат є інструментом найкращим чином пристосованим для вивченння наслідків, які виникають в інших галузях при зміненні кінцевого попиту або інших показників галузі.

Приклад 1

Розглянемо економічну систему, яка складається з трьох галузей: промисловість, паливно-енергетичний комплекс (ПЕК), сільське господарство. У табл. Д.2.1 наведена матриця прямих витрат та кінцевий продукт галузей на плановий період в умовних грошових одиницях.

Таблиця Д.2.1

Галузі	Прямі витрати			Кінцевий продукт
	ПЕК	пр-ть	сіл. госп.	
ПЕК	0.2	0.25	0.2	1200
промисловість	0.25	0.3	0.2	3000
сільське госп.	0.1	0.15	0.2	500

Знайти:

а) плановий обсяг валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

б) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцевий попит продукції сільського господарства збільшився на 25% , промисловості – на 15%, а ПЕК - на 10%.

Розв'язання

а) $A = \begin{Vmatrix} 0.2 & 0.25 & 0.2 \\ 0.25 & 0.30 & 0.2 \\ 0.10 & 0.15 & 0.2 \end{Vmatrix}$, $Y = \begin{Vmatrix} 1200 \\ 3000 \\ 500 \end{Vmatrix}$.

Позначимо $B = E - A$.

$$\det B = \begin{vmatrix} 0.8 & -0.25 & -0.2 \\ -0.25 & 0.70 & -0.2 \\ -0.1 & -0.15 & 0.8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1.45 & 6.2 \\ 0 & 1.075 & -2.2 \\ -0.1 & -0.15 & 0.8 \end{vmatrix} = -0.1 \begin{vmatrix} -1.45 & 6.2 \\ 1.075 & -2.2 \end{vmatrix} =$$
$$= 0.3475.$$

Алгебраїчні доповнення елементів матриці B:

$B_{11} = 0.56 - 0.03 = 0.53, B_{12} = 0.2 + 0.02 = 0.22, B_{13} = 0.0375 +$
$+0.07 = 0.1075,$
$B_{21} = 0.2 + 0.03 = 0.23, B_{22} = 0.64 - 0.02 = 0.62, B_{23} = 0.12 + 0.025 = 0.145,$
$B_{31} = 0.05 + 0.14 = 0.19, B_{32} = 0.16 + 0.05 = 0.21, B_{33} = 0.56 - 0.0625 =$
$= 0.4975.$

Приєднана матриця до матриці B

$$B^{\vee} = \begin{Vmatrix} 0.53 & 0.23 & 0.19 \\ 0.22 & 0.62 & 0.21 \\ 0.1075 & 0.145 & 0.4975 \end{Vmatrix}.$$

За формулою (4.5) обернена матриця $B^{-1} = \dfrac{1}{\det B} B^{\vee}$.

$$B^{-1}=\frac{1}{0.3475}\begin{Vmatrix}0.53 & 0.23 & 0.19\\ 0.22 & 0.62 & 0.21\\ 0.1075 & 0.145 & 0.4975\end{Vmatrix}.$$

Згідно з (Д.2.8) вектор валового випуску

$$X=B^{-1}Y=\frac{1}{0.3475}\begin{Vmatrix}0.53 & 0.23 & 0.19\\ 0.22 & 0.62 & 0.21\\ 0.1075 & 0.145 & 0.4975\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}1200\\ 3000\\ 500\end{Vmatrix}=\frac{1}{0.3475}\begin{Vmatrix}1421\\ 2229\\ 812.75\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}4089.2\\ 6414.4\\ 2338.8\end{Vmatrix}.$$

Міжгалузеві поставки знайдемо за формулами (Д.2.3) $x_{ij}=a_{ij}x_j$. Наприклад,

$$x_{11}=a_{11}x_1=0.2\cdot 4089.2=817.84 \text{ ум. гр.од.},$$
$$x_{21}=a_{21}x_1=0.25\cdot 4089.2=1022.3 \text{ ум. гр.од.},$$
$$x_{31}=a_{31}x_1=0.1\cdot 4089.2=408.92 \text{ ум. гр. од.}$$

це поставки відповідно першої, другої, третьої галузі у першу галузь, а різниця $x_1-(x_{11}+x_{21}+x_{31})$=4089.2 – (817.84+1022.3+ +408.92)=1840.4 – чиста продукція першої галузі, тобто ПЕК.

Валовий продукт галузей, міжгалузеві поставки, а також чиста продукція галузей наведені в табл. Д.2.2, ум. гр. од.

Таблиця Д.2.2

Галузі	Прямі витрати			Кінцевий продукт	Валовий продукт
	ПЕК	пр-ть	сіл. госп.		
ПЕК	817.84	1603.6	467.76	1200	4089.2
пр-ть	1022.3	1924.32	467.76	3000	6414.4
сіл. госп.	408.92	962.16	467.76	500	2338.8
чист. пр-т	1840.14	1924.32	935.52		
вал. пр-т	4089.2	6414.4	2338.8		

б) за умовою, вектор кінцевого попиту $Y = (1200 \cdot 1.1; 3000 \cdot 1.15; 500 \cdot 1.25)^T = (1320; 3450; 625)^T$. Згідно з (Д.2.8) вектор валового випуску

$$X = B^{-1}Y = \frac{1}{0.3475}\begin{Vmatrix} 0.53 & 0.23 & 0.19 \\ 0.22 & 0.62 & 0.21 \\ 0.1075 & 0.145 & 0.4975 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 1320 \\ 3450 \\ 625 \end{Vmatrix} = \frac{1}{0.3475}\begin{Vmatrix} 1611.8 \\ 2560.6 \\ 953.1 \end{Vmatrix} =$$

$$= (4638.4; 7368.8; 2742.7)^T.$$

Таким чином, випуск у ПЕК треба підвищити на 549.2 ум. гр. од., у промисловості – на 954.4 ум. гр. од., у сільському господарстві – на 403.9 ум. гр. од.

2. Модель рівноважних цін

В економіці застосовують балансову модель, яка є двоїстою до моделі Леонтьєва і називається моделлю рівноважних цін.

Одержимо балансові співвідношення цієї моделі.

Нехай, як і у розділі 1, A – матриця прямих витрат, X – вектор валового випуску. Позначимо $P = \| p_1, p_2, ..., p_n \|^T$ вектор цін, i-та координата якого дорівнює ціні одиниці продукції i-ї галузі. Тоді, наприклад, перша галузь одержить прибуток, який дорівнює $p_i x_i$. Частину свого доходу ця галузь витратить на закупівлю продукції інших галузей. Так, (за визначенням коефіцієнтів a_{ij}) для виробництва одиниці продукції їй необхідна продукція першої галузі в обсязі a_{11}, другої галузі – в обсязі a_{21}, ..., n-ї галузі – в обсязі a_{n1}. На закупівлю цієї продукції нею буде витрачена сума, яка дорівнює $a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n$. Отже, на виробництво продукції в обсязі x_1 першої галузі необхідно витратити на закупівлю продукції інших галузей суму,яка дорівнює

$$x_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n).$$

Частина доходу, яка залишилась, називається **додатковою вартістю.** Будемо позначати її V_1. Ця частина доходу йде на виплату заробітної плати й податків, прибуток підприємців та інвестиції.

Таким чином має місце рівність:

$$x_1 p_1 = x_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n) + V_1. \qquad (Д.2.11)$$

Поділивши (Д.2.11) на x_1, одержимо

$$p_1 = (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n) + v_1, \qquad (Д.2.12)$$

де $v_1 = \dfrac{V_1}{x_1}$ - **норма додаткової вартості** (величина додаткової вартості на одиницю виробленої продукції).

Так само одержимо для інших галузей

$$\begin{aligned} p_2 &= (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{n2}p_n) + v_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_n &= (a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{nn}p_n) + v_n. \end{aligned} \qquad (Д.2.13)$$

Систему рівнянь (Д.2.12), (Д.2.13) можна записати у матричному вигляді

$$P = A^T P + \vec{v}, \qquad (Д.2.14)$$

де $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ - вектор норм додаткової вартості.

Як ми бачимо, одержані рівняння дуже схожі на рівняння моделі Леонтьєва, з тією лише різницею, що X замінено на P, Y на $\vec{v}$, A на A^T.

Модель рівноважних цін дозволяє при відомій величині норм додаткової вартості прогнозувати ціни на продукцію галузей . Вона також дозволяє прогнозувати зміну цін та інфляцію, яка є наслідком зміни норм додаткової вартості в одній або в декількох галузях.

Перепишемо рівняння (Д.2.14) у вигляді

$$(E - A^T)P = \vec{v}\,. \qquad (Д.2.15)$$

Якщо матриця $E - A^T$ не вироджена, тобто $\det(E - A^T) \neq 0$, то

$$P = (E - A^T)^{-1}\vec{v}\,. \qquad (Д.2.16)$$

Приклад 2

Продовжимо розгляд економічної системи з прикладу 1. Нехай

$$A^T = \begin{Vmatrix} 0.2 & 0.25 & 0.1 \\ 0.25 & 0.3 & 0.15 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{Vmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{Vmatrix} 5 \\ 13 \\ 6 \end{Vmatrix},$$ відповідно, транспонована технологічна матриця та вектор норм додаткової вартості. Знайти вектор рівноважних цін P.

Розв'язання

Оскільки $(E - A^T)^{-1} = ((E - A)^{-1})^T$, то, позначивши $C^T = (E - A^T)^{-1}$, з прикладу 1 маємо $C^T = (B^{-1})^T$, тобто

$$C^T = \frac{1}{0.3475}\begin{Vmatrix} 0.53 & 0.22 & 0.1075 \\ 0.23 & 0.62 & 0.145 \\ 0.19 & 0.21 & 0.4975 \end{Vmatrix},$$

а далі за формулою (Д.2.16)

$$P = C^T\vec{v} = \frac{1}{0.3475}\begin{Vmatrix} 0.53 & 0.22 & 0.1075 \\ 0.23 & 0.62 & 0.145 \\ 0.19 & 0.21 & 0.4975 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 5 \\ 13 \\ 6 \end{Vmatrix} = \frac{1}{0.3475}\begin{Vmatrix} 6.155 \\ 10.08 \\ 6.885 \end{Vmatrix} \approx \begin{Vmatrix} 17.7 \\ 29.0 \\ 19.2 \end{Vmatrix}.$$

3. Обчислення рівня інфляції

Рівень інфляції, звичайно, обчислюється у відсотках. Позначимо $P(p'_1; p'_2; ...; p'_n), P(p_1; p_2 ...; p_n)$ вектори рівноважних цін на n видів товарів та послуг, відповідно, після і до підвищення цін.

Означення. Рівень (величина) інфляції I – це відношення різниці загальної вартості виробленої продукції та послуг після і до підвищення цін до загальної вартості цієї продукцції до підвищення цін, тобто

$$I = \frac{(p' - p_1)x_1 + (p_2' - p_2)x_2 + \ldots + (p_n' - p_n)x_n}{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n} \cdot 100\% . \quad \text{(Д.2.17)}$$

Очевидно, що з (Д.2.17) випливає формула

$$I = \left(\frac{p_1'x_1 + p_2'x_2 + \ldots + p_n'x_n}{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n} - 1 \right) \cdot 100\% . \quad \text{(Д.2.17}'\text{)}$$

Приклад 3

Припустимо, що у ПЕК сталося підвищення норми додаткової вартості на 20% (координата v_1 замість 5 стала дорівнювати 6) внаслідок підвищення заробітної плати працівників або податків на прибуток у цій галузі. Потрібно:

а) обчислити змінений вектор рівноважних цін P';

б) знайти рівень інфляції внаслідок цього підвищення.

Розв’язання

а) позначимо змінений вектор норм додаткової вартості $\vec{v}' = (6; 13; 6)^T$. Новий вектор рівноважних цін буде

$$P' = C^T \vec{v}' = \frac{1}{0.3475} \begin{Vmatrix} 0.53 & 0.22 & 0.1075 \\ 0.23 & 0.62 & 0.145 \\ 0.19 & 0.21 & 0.4975 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 6 \\ 13 \\ 6 \end{Vmatrix} = \frac{1}{0.3475} \begin{Vmatrix} 6.685 \\ 10.31 \\ 6.855 \end{Vmatrix} \approx \begin{Vmatrix} 19.2 \\ 29.7 \\ 19.7 \end{Vmatrix} .$$

Враховуючи з прикладу 2, що $P = (17.7; 29.0; 19.2)$, одержуємо, що продукція першої галузі подорожчала на

$\dfrac{p_1' - p_1}{p_1}100\% = \dfrac{19.2 - 17.7}{17.7}100\% = \dfrac{1.5}{17.7}100\% = 8.47\%$, другої – на $\dfrac{p_2' - p_2}{p_2}100\% = \dfrac{29.7 - 29}{29}100\% = \dfrac{0.7}{29}100\% = 2.41\%$, третьої – на $\dfrac{p_3' - p_3}{p_3}100\% = \dfrac{19.7 - 19.2}{19.2}100\% = \dfrac{0.5}{19.2}100\% = 2.6\%$;

б) з результату прикладу 1 вектор валового випуску $X = (4089.2; 6414.4; 2338.8)^T$, а вектор рівноважних цін з прикладу 2 є $P = (17.7; 29.0; 19.2)^T$. Обчислюємо рівень інфляції за формулою (Д.2.17), де $n = 3$.

Загальна вартість усієї продукції до підвищення цін дорівнює:
$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 17.7 \cdot 4089.2 + 29.0 \cdot 6414.4 + 19.2 \cdot 2338.8 \approx$
$\approx$ 303301.4 ум.гр.од.

Різниця загальної вартості виробленої продукції після і до підвищення цін:

$$(p' - p_1)x_1 + (p_2' - p_2)x_2 + (p_3' - p_3)x_3 = 1.5 \cdot 4089.2 + 0.7 \cdot 6414.4 +$$
$$+ 0.5 \cdot 2338.8 = 11793.28 \text{ ум.гр.од.}$$

Отже, за формулою (Д.2.17)

$$I = \frac{11793.28}{303301.4}100\% \approx 3.9\%.$$

Зауважимо, що отримано середній , теоретичний рівень інфляції. Формула (Д.2.17) разом з (Д.2.16) та (Д.2.8) застосовується до прогнозування загальних наслідків підвищення цін, прийняття рішень щодо підвищення заробітної плати, податків тощо. Звичайно, ціни на різні товари та послуги змінюються різним способом. Тому в існуючій економічній практиці більш реальний, практичний рівень інфляції визначають за “споживчим кошиком” - офіційно визнаним набором товарів та послуг, що найбільше споживаються.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Сборник задач по математике для втузов / Под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. - М.: Наука, 1981-1986. - Ч.1.
2. Могульский Е.З. Введение в линейную алгебру и геометрию. – Харьков, 1987.
3. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. - М.: Наука, 1975-1985.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.А. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М.: Высшая школа, 1986.
5. Высшая математика для экономистов / Под ред. Н.Ш.Кремера. - М.: ЮНИТИ, 2004.
6. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г. Математика в экономике. - М.: Финансы и статистика. 2001. - Ч. 1.
7. Васильченко І.П. Вища математика для економістів. – К.: Знання-Прес, 2002.

Є.З.Могульський, В.І.Храбустовський, Г.П.Бородай

ВСТУП ДО ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск Бородай Г.П.

Редактор Буранова Н.В.

Підписано до друку 13.01.07 р.
Формат паперу 60x84 1/16 . Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 7,5. Обл.-вид.арк. 7,75.
Замовлення № Тираж 500 Ціна

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК № 2874 від. 12.06.2007 р.
Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, пл. Фейєрбаха, 7