



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
УКРАЇНИ

УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ЗАЛІЗНИЧНОГО
ТРАНСПОРТУ

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Навчальний посібник

Частина 1

Харків – 2020

УДК 620.2
О 61

університет
залізничного транспорту, 2020.

*Рекомендовано вченою радою Українського державного
університету залізничного транспорту як навчальний посібник
(витяг з протоколу № 7 від 29 жовтня 2019 р.)*

Навчальний посібник

Рецензенти:

д-р техн. наук, професор В. П. Кожушко (ХНАДУ),
д-р техн. наук, професор М. Ю. Ізбаш (ХНУБА)

Берестянська Світлана Юріївна,
Лобяк Олексій Вікторович,
Опанасенко Олена Вікторівна
та ін.

Авторський колектив:

С. Ю. Берестянська, О. В. Лобяк, О. В. Опанасенко,
А. М. Петров, М. В. Павлюченко

О 61 Опір матеріалів: Навч. посібник / С. Ю.
Берестянська, О. В. Лобяк, О. В. Опанасенко та ін. –
Харків: УкрДУЗТ, 2020. – Ч. 1. – 150 с., рис. 101, табл.
1.
ISBN

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Даний навчальний посібник написано відповідно до програми курсу спеціальності «Залізничний транспорт». Він вирізняється вмістом теоретичної частини та прикладів розрахунку до розрахунково-проектувальних завдань. Посібник містить приклади розрахунків у багатофункціональному програмному комплексі для моделювання роботи, дослідження та проектування будівельних конструкцій різного призначення ЛІРА-САПР (ПК ЛІРА-САПР).

Відповідальний за випуск Петренко Д. Г.

Редактор Решетилова В. В.

УДК 620.2

Підписано до друку 09.04.19 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 12,0. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейербаха, 7.

ISBN

© Український державний

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.

ЗМІСТ

Вступ.....	5
1. Побудова внутрішніх зусиль в бусах різного обрису.....	6
1.1. Короткі теоретичні відомості.....	6
1.2. Приклади розв'язання задач.....	14
<i>Задача 1.2.1.</i> Приклад розрахунку консольної балки	14
<i>Задача 1.2.2.</i> Приклад розрахунку консольної балки з розподіленим навантаженням.....	16
<i>Задача 1.2.3.</i> Приклад розрахунку двохопорної балки	19
<i>Задача 1.2.4.</i> Приклад розрахунку двохопорної балки з консоллю.....	22
<i>Задача 1.2.5.</i> Приклад розрахунку бруса.....	25
<i>Задача 1.2.6.</i> Приклад розрахунку вала.....	27
<i>Задача 1.2.7.</i> Приклад розрахунку консольної рами...	29
<i>Задача 1.2.8.</i> Приклад розрахунку двохопорної рами..	33
Контрольні запитання.....	39
2. Розрахунки на міцність при розтяганні, стисканні	40
2.1. Короткі теоретичні відомості.....	40
2.2. Приклади розв'язання задач.....	43
<i>Задача 2.2.1.</i> Приклад розрахунку шарнірно- стрижневої системи.....	43
<i>Задача 2.2.2.</i> Приклад розрахунку східчастого бруса з урахуванням власної ваги.....	45
<i>Задача 2.2.3.</i> Приклад розрахунку статично невизначених систем на температурний вплив.....	49
<i>Задача 2.2.4.</i> Приклад розрахунку статично невизначених систем на зміщення опорних зв'язків...	53
Контрольні запитання.....	57
3. Визначення геометричних характеристик плоских перерізів.....	58
3.1. Короткі теоретичні відомості.....	58
3.2. Приклади розв'язання задач.....	64
<i>Задача 3.2.1.</i> Визначення геометричних характеристик плоских перерізів.....	64
Контрольні запитання.....	69
4. Розрахунок на міцність і визначення переміщень в балках при згині.....	70

4.1. Короткі теоретичні відомості.....	70
4.2. Приклади розв'язання задач.....	78
<i>Задача 4.2.1.</i> Розрахунок на міцність двохопорної балки.....	78
<i>Задача 4.2.2.</i> Визначення переміщень у консольній балці методом початкових параметрів.....	88
<i>Задача 4.2.3.</i> Визначення переміщень у двохопорній балці методом початкових параметрів.....	90
Контрольні запитання.....	93
5. Розрахунки конструкцій у ПК ЛІРА-САПР.....	94
5.1. Загальні дані про ПК ЛІРА-САПР.....	94
5.2. Інтерфейс ПК ЛІРА-САПР.....	95
5.3. Приклади використання ПК ЛІРА-САПР.....	109
<i>Задача 5.3.1.</i> Приклад розрахунку двохопорної балки з консоллю.....	109
<i>Задача 5.3.2.</i> Приклад розрахунку двохопорної рами..	119
<i>Задача 5.3.3.</i> Визначення геометричних характеристик плоских перерізів.....	125
<i>Задача 5.3.4.</i> Розрахунок на міцність двохопорної балки.....	130
Бібліографічний список.....	141
Додаток 1. Сортамент прокатної сталі.....	142
Додаток 2. Зразок оформлення титульної сторінки пояснювальної записки.....	150

ВСТУП

Опір матеріалів є важливою наукою, яка необхідна для формування інженерного мислення. Для успішного вивчення цієї науки необхідно мати навички розв'язання конкретних задач. Для цього студенти мають виконувати розрахунково-графічні роботи.

Цей навчально-методичний посібник є продовженням робіт викладачів кафедри будівельної механіки [1–9]. Він призначений для самостійної роботи студентів денної та заочної форм навчання спеціальності «Залізничний транспорт» освітніх програм «Локомотиви та локомотивне господарство», «Високошвидкісний рухомий склад», «Вагони та вагонне господарство».

У першій частині курсу передбачається вивчення таких розділів: «Побудова епюр внутрішніх зусиль у брусах різного обрису», «Розрахунки на міцність при розтяганні-стисканні», «Визначення геометричних характеристик плоских перерізів», «Розрахунок на міцність і визначення переміщень в балках при згині». Кожен з цих розділів містить: короткі теоретичні відомості, приклади розв'язання розрахунково-проектувальних завдань та контрольні запитання.

П'ятий розділ присвячено розрахункам задач у програмному комплексі ЛІРА-САПР, що являє широкі можливості як для самостійного навчання студентів моделювання будівельних конструкцій, так і для навчального процесу. У посібнику дано уявлення про загальне функціонування ПК ЛІРА-САПР та викладено опис графічного інтерфейсу. Вся інформація проілюстрована серією навчальних прикладів з раніше розглянутих задач. Навчальні приклади демонструють техніку побудови епюр внутрішніх зусиль в балках і рамах, підбору перерізів з умов міцності і жорсткості, а також визначення мас-інерційних характеристик складених поперечних перерізів.

У додатках наведені допоміжні матеріали, які необхідні для виконання розрахунково-проектувальних робіт та приклад оформлення титульного листа.

Однак цей посібник не може замінити підручник, тому спочатку треба ознайомитись з відповідним матеріалом у підручнику чи у курсі лекцій [1–6].

Зміст та наповнення навчально-методичного посібника з дисципліни «Опір матеріалів» для спеціальності «Залізничний транспорт» (частина 1) виконано згідно з робочою програмою навчальної дисципліни.

1. ПОБУДОВА ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ В БУСАХ РІЗНОГО ОБРИСУ

1.1. Короткі теоретичні відомості

При розрахунках конструкцій та деталей машин і механізмів необхідно знати:

1. Зовнішні навантаження.
2. Властивості матеріалів, з яких виготовлена конструкція.
3. Діючі внутрішні зусилля.

Спочатку розглянемо зовнішні навантаження, які можуть діяти на деталь або конструкцію. До поверхневих сил відносять:

1. Зосереджені сили – діють на малій площі в порівнянні з розмірами деталі і умовно вважаються прикладеними в точці. Наприклад, тиск колеса рухомого складу на колію. Літерне позначення – F . Одиниці виміру – ньютон (H), кілоньютон (kH), кілограм-сила (kgc), тонна-сила (tc).

2. Розподілене навантаження – це навантаження, яке прикладене на ділянці конструкції (шар піску насипаний на тротуар) і являє собою навантаження, розподілене по площі. Якщо навантаження розподілено рівномірно по поверхні, його називають рівномірно розподіленим, якщо нерівномірно – нерівномірно розподіленим. Одиниці виміру – ньютон на метр квадратний (H/m^2), кілоньютон на метр квадратний (kH/m^2). Часто розподілене по площі навантаження зводять до погонного навантаження, інтенсивність якого вимірюється у ньютонах, поділених на метр, (H/m), кілоньютонах, поділених на метр (kH/m). Позначається буквою q .

3. Зосереджений момент – це пара сил, рівних за значенням і протилежно спрямованих, розташованих на деякій відстані. Позначається буквою M . Одиниця виміру – ньютон, помножений на метр (Hm).

Для розрахунків конструкцій необхідно обрати розрахункову схему. **Розрахунковою схемою називається спрощене зображення конструкції, яке відображає основні особливості її роботи.** Найчастіше в інженерній практиці в розрахункових схемах застосовують такі види опорних пристроїв:

- шарнірно-рухома опора. Допускає поворот конструкції навколо центру шарніра і горизонтальне переміщення. Має два ступені свободи. В ній виникає одна реакція R_A (рис. 1.1);

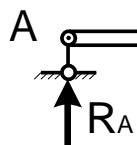


Рис. 1.1. Шарнірно-рухома опора

- шарнірно-нерухома опора. Допускає тільки поворот споруди відносно т. А, тобто має один ступінь свободи. В такому опорному пристрої виникає дві опорні реакції R_A і H_A (рис. 1.2);

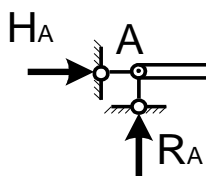


Рис. 1.2. Шарнірно-нерухома опора

- затиснення. Ця опора не допускає ніяких переміщень, тому число ступенів свободи дорівнює нулю. Виникає три опорні реакції R_A , H_A і M_A (рис. 1.3).

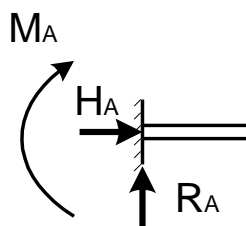


Рис. 1.3. Шарнірно-нерухома опора

Розглянемо внутрішні зусилля, які можуть виникати у конструкції. Міцність твердого тіла обумовлена силами зчеплення між окремими його частками. При навантаженні його зовнішніми силами, як активними так і реактивними, між сусідніми частинами тіла (кристалами, молекулами, атомами) діють певні сили, які називають внутрішніми силами. Ці сили завжди прагнуть зберегти тіло як єдине ціле і протистояти будь-якій спробі змінити взаємне

розташування частинок. **Внутрішніми силами називають сили взаємодії між окремими частинами тіла.** Для визначення цих сил існує метод перерізів. Сутність цього методу полягає в тому, що тіло перебуває в рівновазі під дією системи сил.

Розглянемо тіло, яке знаходиться під дією самоурівноваженої системи сил (рис. 1.4). Проведемо переріз, який розрізає тіло на дві частини (рис. 1.5). Розглянемо окремо обидві частини тіла. У перерізі будуть виникати внутрішні сили, які прагнуть поєднати ці частини.

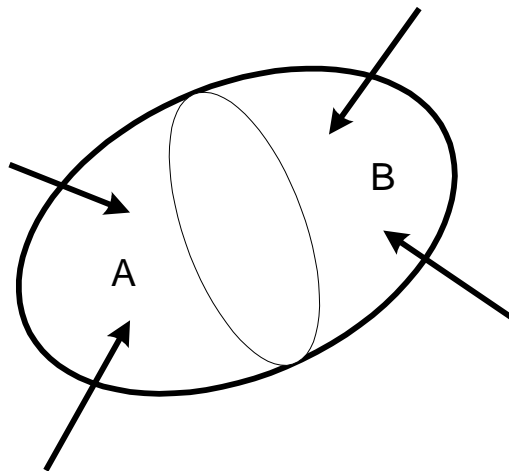


Рис. 1.4. Тіло під дією самоурівноваженої системи сил

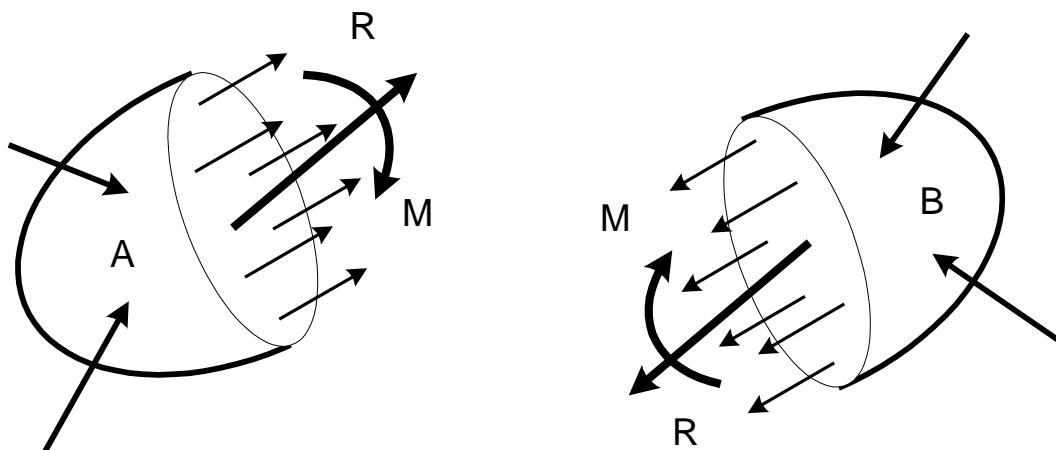


Рис. 1.5. Внутрішні сили, що діють в перерізі

Оскільки прийнята гіпотеза про суцільності матеріалу (передбачається, що матеріал, з якого виготовлена конструкція, є суцільним і безперервним, при цьому не враховується конкретна

структура матеріалу – зерниста, кристалічна та ін.), то внутрішні сили є розподіленим навантаженням. Згідно з 3-м законом Ньютона внутрішні сили частини А дорівнюють силам частини В з протилежним напрямком (дія дорівнює протидії).

Як і будь-яку систему сил, внутрішні сили в перерізі можна привести до однієї точки – центру ваги перерізу (рис. 1.6). В результаті на кожній частині перерізу отримаємо головний вектор і головний момент. Якщо головний вектор і головний момент спроектувати на вісь стрижня x і головні центральні осі y і z , то на кожній стороні перерізу отримаємо шість внутрішніх силових факторів:

- N – поздовжня сила,
- Q_y, Q_z – поперечні сили,
- M_x – крутний момент,
- M_y, M_z – згинальні моменти.

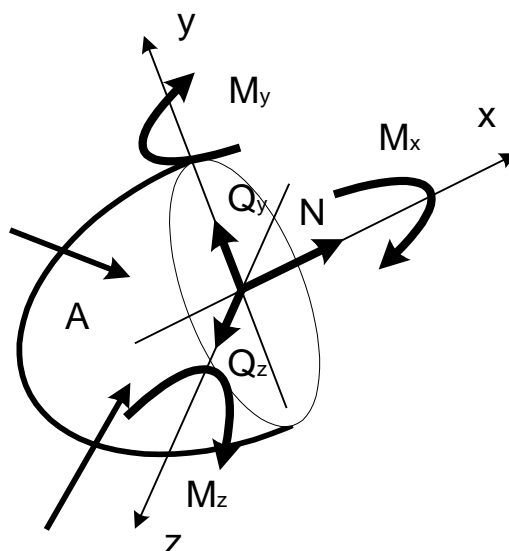


Рис. 1.6. Внутрішні сили, приведені до центру ваги перерізу

Після прикладання до частини А сил, які замінюють дію частини В, частина А знаходиться в рівновазі. Тому для частини А можна записати рівняння рівноваги

$$\sum x = 0, \sum y = 0, \sum z = 0, \sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0. \quad (1.1)$$

Таким чином, маючи шість рівнянь рівноваги, можна знайти шість невідомих внутрішніх зусиль.

З $\sum x = 0$ знаходимо N ,

$$\sum y = 0 - Q_y, \sum z = 0 - Q_z, \sum M_x = 0 - M_x, \sum M_y = 0 - M_y, \sum M_z = 0 - M_z. \quad (1.2)$$

Поздовжньою силою в заданому перерізі називають суму проєкцій всіх зовнішніх поздовжніх сил, розташованих по одну сторону від розглянутого перерізу. Поздовжня сила додатна, якщо вона спрямована від перерізу, тобто розтягує стрижень (рис. 1.7).

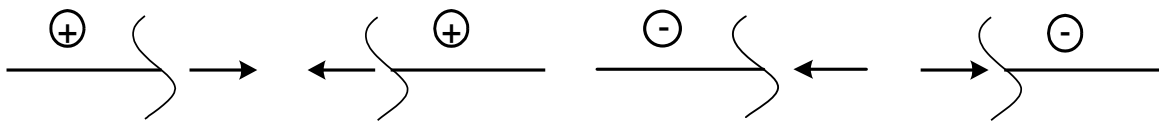


Рис. 1.7. Правило знаків поздовжньої сили

Поперечною силою в заданому перерізі називають суму проєкцій всіх зовнішніх поперечних сил, розташованих по одну сторону від розглянутого перерізу. Поперечна сила додатна, якщо вона обертає залишену частину балки навколо центру перерізу за годинниковою стрілкою (рис. 1.8).

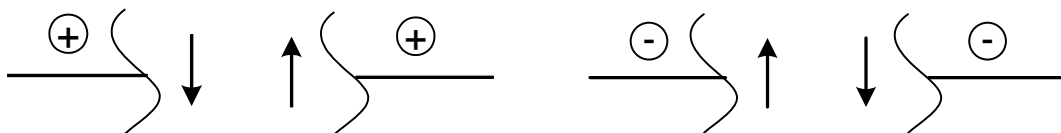


Рис. 1.8. Правило знаків поперечної сили

Згинальним моментом в заданому перерізі називають суму згинальних моментів всіх зовнішніх сил, розташованих по одну сторону від розглянутого перерізу відносно ц.т. перерізу. Згинальний момент додатний, якщо він згинає балку опуклістю вниз (рис. 1.9).



Рис. 1.9. Правило знаків згинального моменту

Крутним моментом в заданому перерізі називають суму моментів всіх зовнішніх крутних моментів, розташованих по одну сторону від розглянутого перерізу. Крутний момент додатний, якщо він обертає вал за годинниковою стрілкою. При цьому дивитися треба в торець перерізу (рис. 1.10).

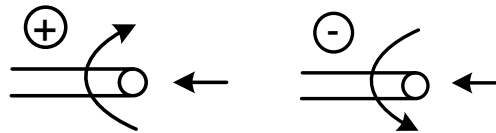


Рис. 1.10. Правило знаків крутного моменту

Якщо в перерізі діє тільки поздовжня сила N , то в ньому виникає деформація розтягання або стискання.

Якщо в перерізі виникає одна з поперечних сил Q_y або Q_z , то такий вид деформації називається зсув.

Якщо в перерізі діє тільки крутний момент M_x , то в ньому виникає деформація кручення.

Якщо в перерізі діє тільки згинальний момент M_y або M_z , то в ньому виникає деформація чистого згину.

Якщо в перерізі виникає один згинальний момент і одна поперечна сила, то такий вид деформації називається поперечним згином.

Небезпечним перерізом є переріз, в якому виникають найбільші внутрішні зусилля. Для визначення таких перерізів будують епюри внутрішніх зусиль. **Епюрою внутрішнього зусилля називають графік розподілу будь-якого зусилля вздовж осі стрижня від дії нерухомого навантаження.** При побудові епюр дотримуються загальних правил.

Епюри внутрішніх зусиль будують на осях елементів або на паралельних їм лініях, які називають базовими лініями.

1. Ординати відкладають в довільному масштабі перпендикулярно осьовим або базовим лініям.

2. Епюри штрихують перпендикулярно осьовим або базовим лініям.

3. На епюрах проставляють знаки (виключенням є епюра згинальних моментів), значення характерних ординат.

4. Епюри підписують і ставлять розмірність.

Рекомендується така послідовність побудови епюр внутрішніх зусиль:

1. Визначають опорні реакції.

2. Намічають характерні точки. Характерними точками будуть:

– лівий і правий кінець балки;

– опорні точки;

– точки прикладання зосереджених сил;

– точки прикладання зосереджених моментів;

– початок і кінець розподіленого навантаження.

3. Розсікають балку між характерними точками на дві частини.

4. Складають функції зусиль для кожної ділянки. Для цього необхідно для довільного перерізу, який розташований на відстані x від обраного початку координат, скласти за формулами (1.2), з урахуванням знаків, вирази для внутрішніх зусиль.

5. Обчислюють внутрішні зусилля в характерних точках перерізу і будують графіки їх зміни, дотримуючись наведених вище правил. Ці графіки називають епюрами внутрішніх зусиль.

6. Перевіряють правильність побудови епюр.

Для цього використовують рівняння статички і диференціальні залежності при згині

$$\frac{dQ}{dx} = -q; \quad \frac{dM}{dx} = Q; \quad \frac{d^2M}{dx^2} = -q. \quad (1.3)$$

1. Якщо на ділянці $Q > 0$, тобто (+), то момент зростає. Якщо на ділянці Q змінює знак, тобто проходить через нуль, то у цій точці, де $Q = 0$, момент набуває екстремального значення (максимум або мінімум).

2. Якщо на ділянці $Q = 0$, тобто відсутня, то $M = const$.

3. На ділянці, де розподілене навантаження відсутнє, $Q = const$ (пряма паралельна базовій лінії), а епюра M описується похилою прямою.

4. На ділянці балки, завантаженої розподіленим навантаженням, поперечна сила Q описується похилою прямою лінією, а згинальний момент M – квадратною параболою. Опуклість параболи спрямована в бік дії розподіленого навантаження.

5. При лівому початку координат поперечна сила дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до епюри моментів в даному перерізі.

6. У перерізі, де прикладено згинальний момент, на епюрі моментів є розрив 1-го роду (стрибок), величина якого дорівнює зовнішньому моменту. На епюрі поперечних сил згинальний момент не відображається.

7. У перерізі балки, де прикладено зосереджену силу – на епюрі поперечних сил повинен бути стрибок, що дорівнює діючій силі і спрямований у бік дії сили. На епюрі згинальних моментів у цій точці є перелом.

Значення внутрішніх зусиль в перерізі не дозволяють порівняти умови роботи навіть деталей однакової форми, але різних розмірів. Тому ефективною характеристикою для оцінки завантаженості деталей є інтенсивність внутрішніх зусиль – напруження p . **Внутрішні сили, віднесені до одиниці площі, називаються напруженнями.** Оскільки в поперечному перерізі діють N , Q_y , Q_z , то тоді

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}, \quad \tau_y = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_y}{\Delta A}, \quad \tau_z = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_z}{\Delta A}; \quad (1.4)$$

$$\sigma = \frac{dN}{dA}, \quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dA}, \quad \tau_z = \frac{dQ_z}{dA}.$$

Таким чином, в перерізі можуть виникати нормальні і дотичні напруження. Одиниці виміру напружень: ньютон на метр квадратний (H/m^2), паскаль ($Па$), мегапаскаль ($МПа$).

1.2. Приклади розв'язання задач

Задача 1.2.1. Приклад розрахунку консольної балки

Для заданої розрахункової схеми (рис. 1.11) побудувати епюри внутрішніх зусиль.

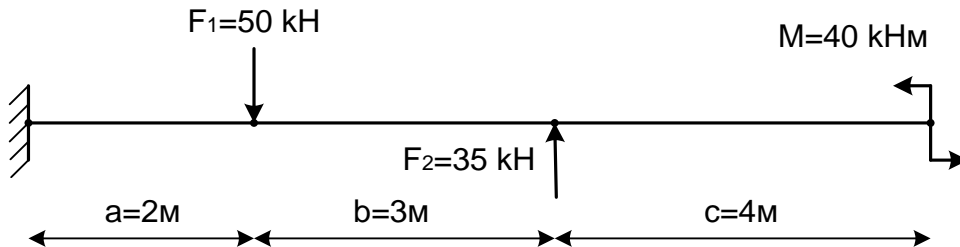


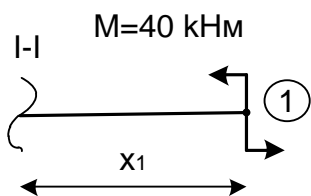
Рис. 1.11. Розрахункова схема консольної балки

Розв'язання

Розрахункова схема являє собою балку, тому із усіх видів внутрішніх зусиль виникають тільки поперечні сили та згинальні моменти. Епюри внутрішніх зусиль будуються методом перерізів, для цього проводимо перерізи I-I, II-II та III-III (рис. 1.12). У кожному перерізі визначаємо величини поперечних сил Q та згинальних моментів M .

Розрахунок консольних систем можна виконувати двома способами: 1) спочатку визначаються реакції, а потім епюри будуються, як і звичайно; 2) реакції не визначаються, при цьому розглядається тільки консольна частина балки.

Побудуємо епюри другим способом.



Переріз I-I проводимо між точками 1-2 та розглядаємо праву частину, тому що праворуч знаходиться менше навантажень.

Визначаємо межі зміни x_1 від початку координат: $0 \leq x_1 \leq c = 4$ м.

Поперечна сила у перерізі – це сума проекцій всіх поперечних сил, розташованих по одну сторону від перерізу, момент – це сума моментів від всіх навантажень, відносно розташованих по одну сторону від перерізу.

$Q_1 = 0$; $M_1 = M = 40 \text{ кНм}$ (відповідно до правила знаків, рис. 1.9). На цій ділянці момент не залежить від x_1 , тому епюра M – це лінія, паралельна осі x .

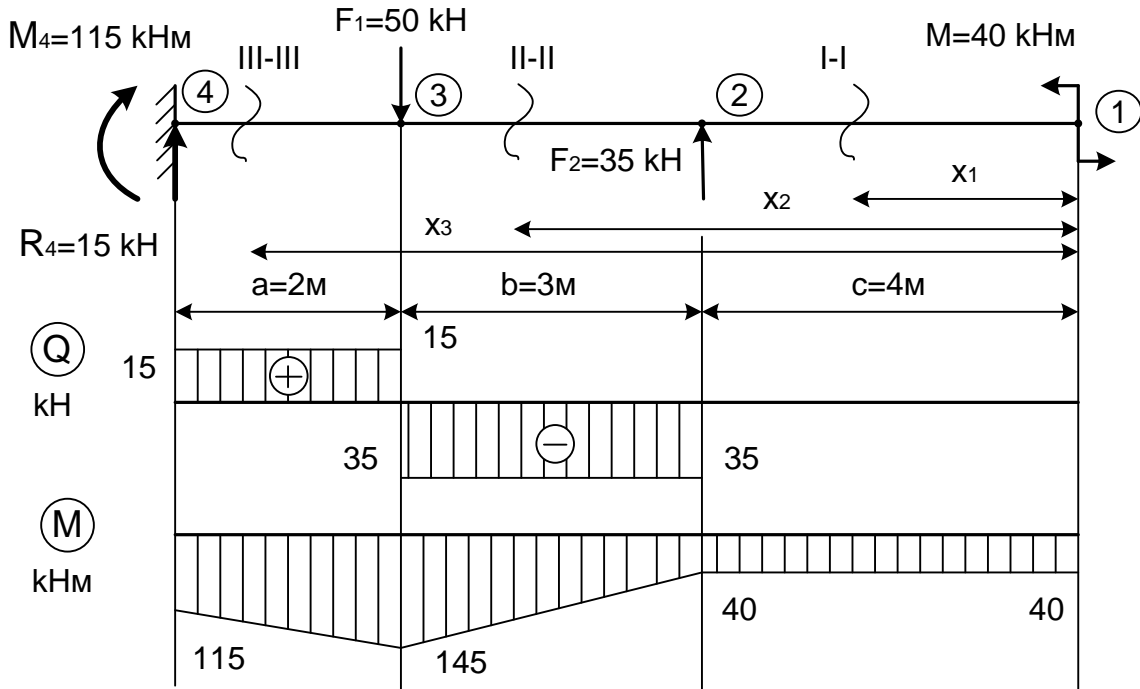
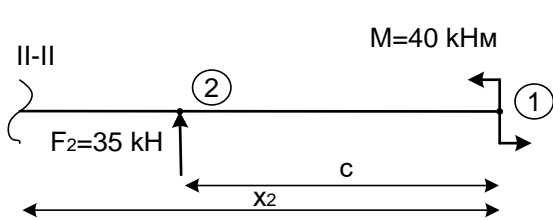


Рис. 1.12. Епюри внутрішніх зусиль в консольній балці



Переріз II-II проводимо між точками 2-3 та розглядаємо праву частину, тому що ліворуч знаходиться защемлення, реакції у якому ми не знаходили.

Визначаємо межі зміни x_2 від початку координат:

$$c = 4 \text{ м} \leq x_2 \leq (c + b) = 4 + 3 = 7 \text{ м} ;$$

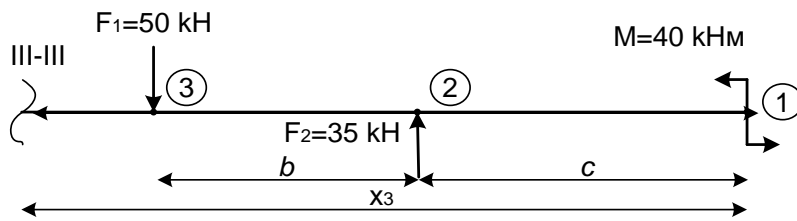
$$Q_2 = -F_2 = -35 \text{ кН} \text{ (відповідно до правила знаків, рис. 1.8).}$$

На цій ділянці поперечна сила не залежить від x_2 , тому епюра Q – це лінія, паралельна осі x .

$$M_2 = M + F_2 \cdot (x_2 - c) = 40 + 35 \cdot (x_2 - 4).$$

$$\text{При } x_2 = 4 \text{ м, } M_2 = 40 \text{ кНм.}$$

При $x_2 = 7 \text{ м}$, $M_2 = 40 + 35 \cdot (7 - 4) = 145 \text{ кНм}$. На цій ділянці функція моментів лінійно залежить від x_2 , тому з'єднуємо точки прямою лінією.



Переріз III-III проводимо між точками 3-4 та розглядаємо праву частину також тому, що не знаємо

реакцій у защемленні, яке знаходиться ліворуч.

Визначаємо межі зміни x_3 від початку координат:

$$c + b = 4 + 3 = 7 \text{ м} \leq x_3 \leq (c + b + a) = 4 + 3 + 2 = 9 \text{ м};$$

$$Q_3 = -F_2 + F_1 = -35 + 50 = 15 \text{ кН};$$

$$M_3 = M + F_2 \cdot (x_3 - c) - F_1(x_3 - c - b) = 40 + 35 \cdot (x_3 - 4) - 50 \cdot (x_3 - 4 - 3).$$

$$\text{При } x_3 = 7 \text{ м, } M_3 = 40 + 35 \cdot (7 - 4) = 145 \text{ кНм.}$$

$$\text{При } x_3 = 9 \text{ м, } M_3 = 40 + 35 \cdot (9 - 4) - 50 \cdot (9 - 4 - 3) = 115 \text{ кНм.}$$

Поперечна сила і момент у точці 4 являють собою реакції у защемленні: $R_4 = Q_3 = 15 \text{ кН}$ (реакція направлена за годинниковою стрілкою, тому що поперечна сила в точці А додатна); $M_4 = M_3 = 115 \text{ кНм}$ (реактивний момент направлено знизу вгору, тому епюру моменту в точці А розташовано внизу). Епюри заштриховуємо лініями, перпендикулярними нульовій лінії, на епюрі поперечних сил ставимо знаки, на епюрі моментів знаки не ставляться тому, що епюра будується на розтягнутих волокнах. Епюри внутрішніх зусиль подано на рис. 1.12.

Перевіримо правильність знаходження реакцій. Для цього спроекуємо всі сили на вісь Y та візьмемо суму моментів відносно точки 4.

$$\sum Y = 0; R_4 - F_1 + F_2 = 15 - 50 + 35 = 0;$$

$$\sum M_4 = 0; M + F_2 \cdot 5 - F_1 \cdot 2 - M_4 = 40 + 35 \cdot 5 - 50 \cdot 2 - 115 = 0.$$

Отже, реакції визначено правильно.

Задача 1.2.2. Приклад розрахунку консольної балки з розподіленим навантаженням

Для заданої розрахункової схеми (рис. 1.13) побудувати епюри внутрішніх зусиль.

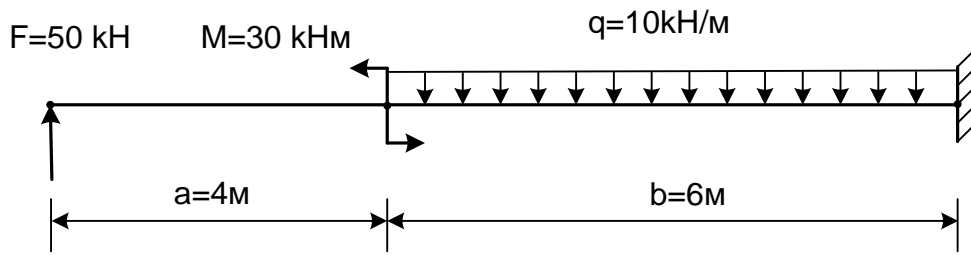


Рис. 1.13. Розрахункова схема консольної балки

Розв'язання

Ця система також є консольна балка, тому необхідно побудувати епюри поперечних сил Q і згинальних моментів M . Для цього розділяємо балку на ділянки перерізами I-I та II-II (рис. 1.14).

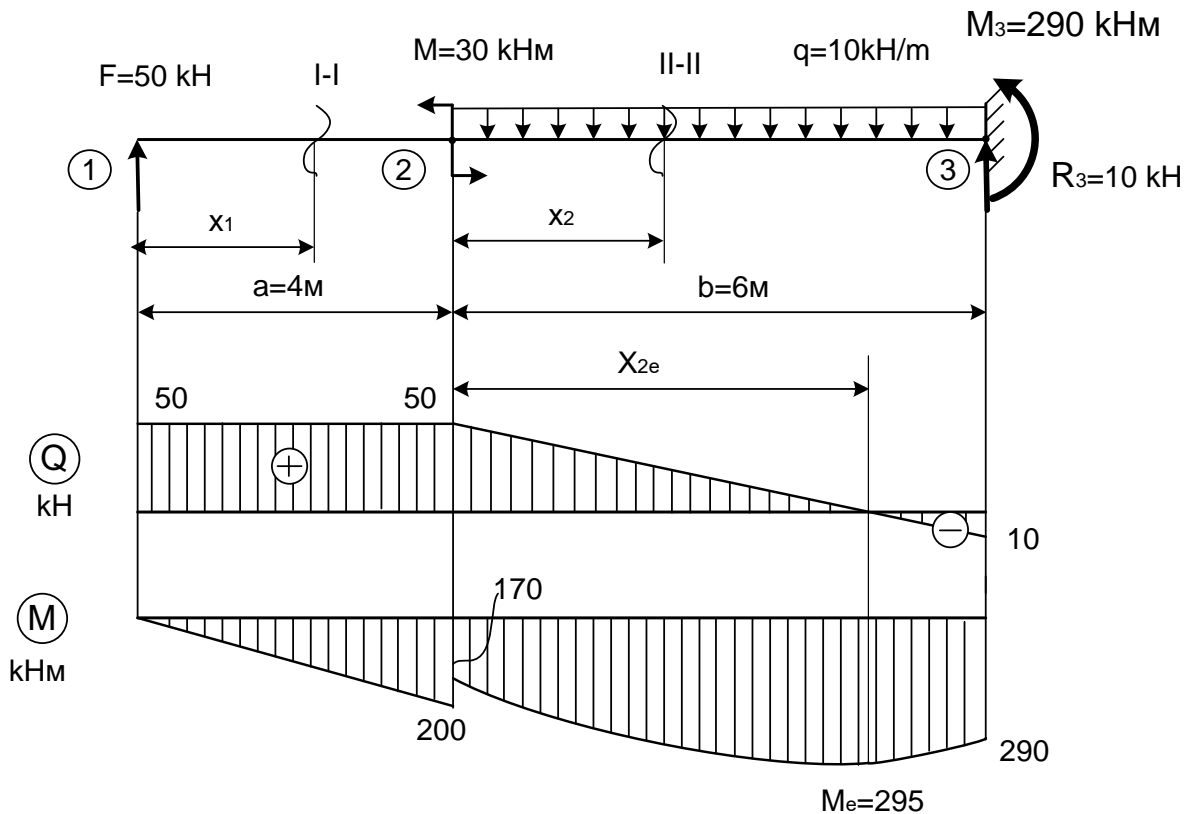
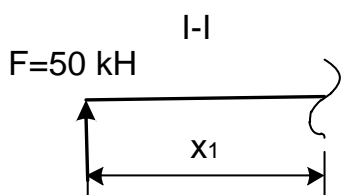


Рис. 1.14. Епюри внутрішніх зусиль в консольній балці

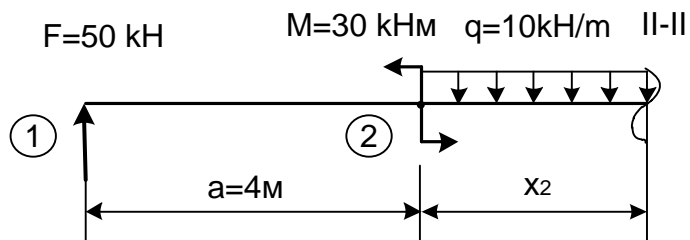


Переріз I-I проводимо між точками 1-2 і розглядаємо ліву частину, тому що ліворуч знаходиться менше навантажень. Визначаємо межі зміни x_1 : $0 \leq x_1 \leq a = 4 \text{ м}$;

$$Q_1 = F = 50 \text{ kH}; M_1 = F \cdot x_1 = 50x_1;$$

при $x_1 = 0 \text{ м}$, $M_1 = 0$;

при $x_1 = 4 \text{ м}$, $M_1 = 50 \cdot 4 = 200 \text{ kHм}$.



Переріз II-II проводимо між точками 2-3 і розглядаємо ліву частину, тому що праворуч знаходиться защемлення, реакції у якому ми не

визначали. Визначаємо межі зміни x_2 : $0 \leq x_2 \leq b = 6 \text{ м}$,

$$Q_2 = F - q \cdot x_2 = 50 - 10x_2;$$

при $x_2 = 0$, $Q_2 = F = 50 \text{ kH}$;

при $x_2 = 6 \text{ м}$, $Q_2 = 50 - 10 \cdot 6 = -10 \text{ kH}$;

$$M_2 = F \cdot (a + x_2) - M - qx_2 \frac{x_2}{2} = 50(4 + x_2) - 30 - 10 \frac{x_2^2}{2},$$

при $x_2 = 0$, $M_2 = 50 \cdot 4 - 30 = 170 \text{ kHм}$;

при $x_2 = 6 \text{ м}$, $M_2 = 50(4 + 6) - 30 - 10 \cdot \frac{6^2}{2} = 290 \text{ kHм}$.

На цій ділянці в рівнянні моментів x_2 у другому порядку, тому точки необхідно з'єднувати квадратичною параболою. Випуклість цієї параболи направлена в сторону дії розподіленого навантаження. Крім того, на цій ділянці поперечна сила міняє знак, тому на епюрі моментів має бути екстремум. Знайдемо його. Екстремум знаходиться у точці, де поперечна сила дорівнює нулю, тому прирівняємо рівняння для поперечної сили на цій ділянці до нуля

$$Q_2 = F - q \cdot x_{2e} = 50 - 10x_{2e} = 0.$$

Звідси $x_{2e} = \frac{50}{10} = 5 \text{ м}$. Підставимо x_{2e} в рівняння моментів

$$M_{2e} = 50(4 + x_{2e}) - 30 - 10 \frac{x_{2e}^2}{2} = 50(4 + 5) - 30 - 10 \frac{5^2}{2} = 295 \text{ kHм}.$$

Момент і поперечна сила на кінці цієї ділянки (при $x_2 = 6 \text{ м}$) – це реакції у защемленні, тобто поперечна сила – це реакція, яка направлена проти годинникової стрілки тому, що поперечна сила в цій точці від'ємна, а момент направлено проти годинникової стрілки, тому що момент в цій точці має розтягнуту зону внизу.

Епюри внутрішніх зусиль подано на рис. 1.14.

Перевіримо правильність знаходження реакцій. Для цього складемо рівняння рівноваги:

$$\sum Y = F - q \cdot 6 + R_3 = 50 - 10 \cdot 6 + 10 = 0?$$

$$\sum M_1 = M_3 + R_3 \cdot 10 - q \cdot 6 \cdot 7 + M = 290 + 10 \cdot 10 - 10 \cdot 6 \cdot 7 + 30 = 0.$$

Це означає, що реакції знайдено правильно.

Задача 1.2.3. Приклад розрахунку двохопорної балки

Для заданої розрахункової схеми (рис. 1.15) побудувати епюри внутрішніх зусиль.

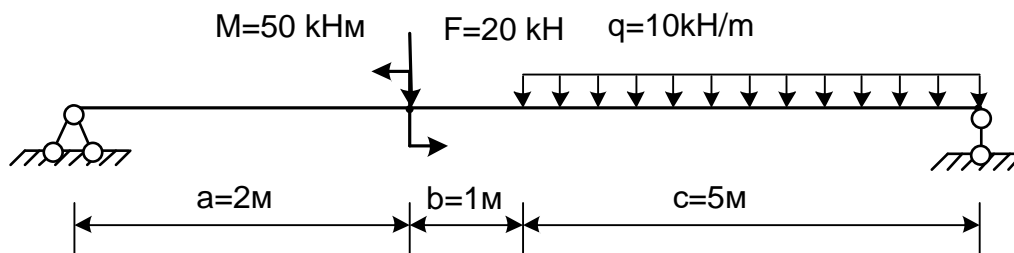


Рис. 1.15. Розрахункова схема двохопорної балки

Розв'язання

Ця система являє собою двохопорну балку. Як і раніше, для балки необхідно побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів. Для будь яких двохопорних систем спочатку треба визначити реакції.

В шарнірно нерухомій опорі (точка 1) виникає горизонтальна та вертикальна реакції, в шарнірно рухомій опорі (точка 4) – тільки вертикальна реакція (рис. 1.16). До балки ніяких горизонтальних сил не прикладено, тому горизонтальна реакція дорівнює нулю і її зазвичай не показують. Реакції знаходимо за допомогою рівнянь рівноваги. При складанні цих рівнянь необхідно, по можливості, складати такі рівняння, щоб невідомі реакції не залежали одна від одної. Тому для знаходження реакцій використовуємо рівняння

$$\sum M_1 = 0, M - F \cdot a - q \cdot c \left(a + b + \frac{c}{2} \right) - R_4(a + b + c) = 0,$$

звідси

$$R_4 = \frac{-M + F \cdot a + q \cdot c \left(a + b + \frac{c}{2} \right)}{a + b + c} = \frac{-50 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 5 \cdot 5,5}{8} = 33,125 \text{ kN},$$

$$\sum M_4 = 0, \quad -R_1(a + b + c) + q \cdot c \frac{c}{2} + F(b + c) + M = 0,$$

звідси

$$R_1 = \frac{q \cdot c \frac{c}{2} + F(b + c) + M}{a + b + c} = \frac{10 \cdot 5 \cdot 2,5 + 20 \cdot 6 + 50}{8} = 36,875 \text{ kH}$$

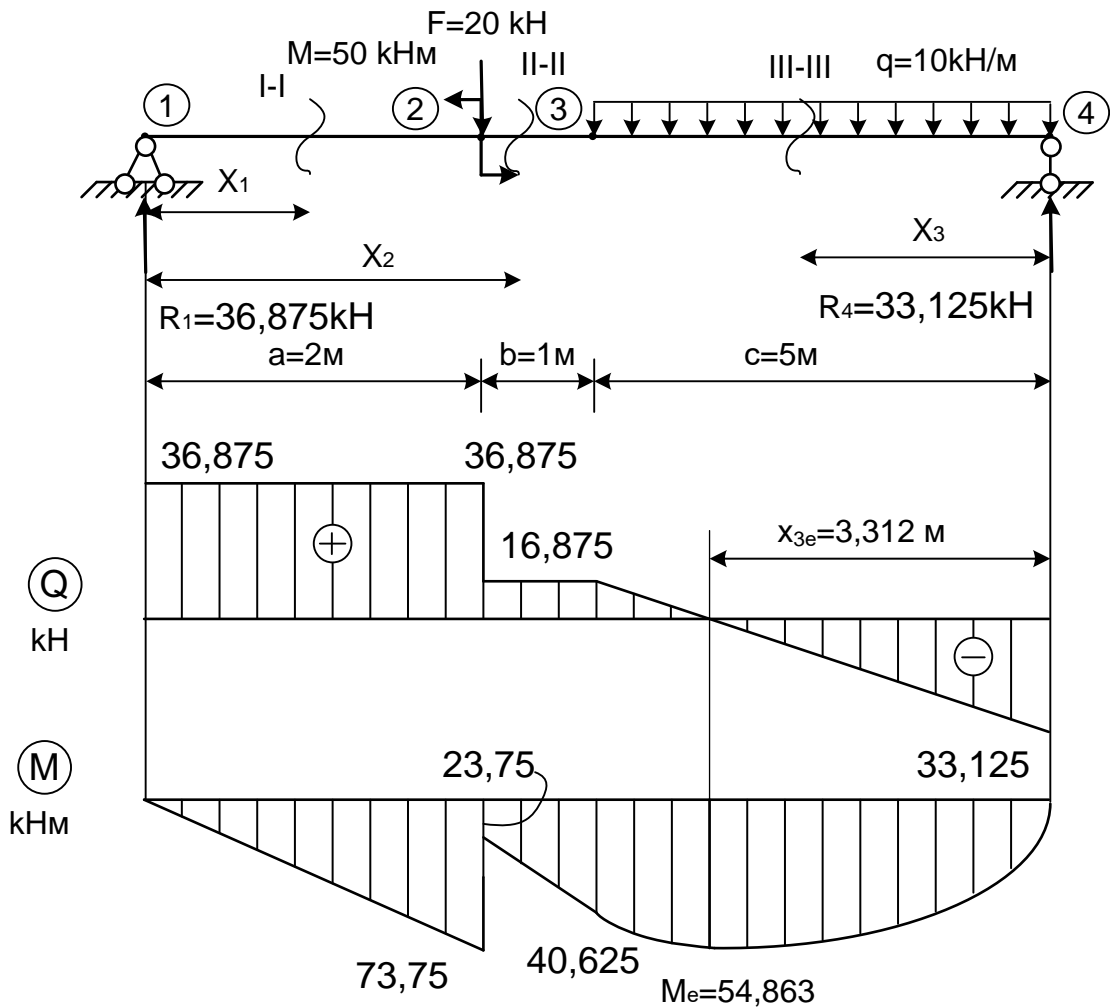


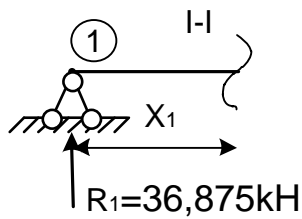
Рис. 1.16. Епюри внутрішніх зусиль у двохопорній балці

Перевіряємо правильність визначення реакцій. Для цього використовуємо рівняння

$\sum Y = 0, R_1 - F - q \cdot c + R_4 = 36,875 - 20 - 10 \cdot 5 + 33,125 = 0$, це означає, що реакції знайдено правильно.

Після того, як перевірена правильність визначення реакцій, можна приступати до побудови епюр. Для цього на балці

помічаємо характерні точки (1, 2, 3, 4) і по черзі ділимо балку між характерними точками (рис. 1.16).



Переріз 1-1 проводимо між точками 1 і 2. Розглядаємо ліву частину тому, що ліворуч знаходиться менше навантажень. Визначаємо межі зміни x_1 .

$$0 \leq x_1 \leq a = 2\text{ м.}$$

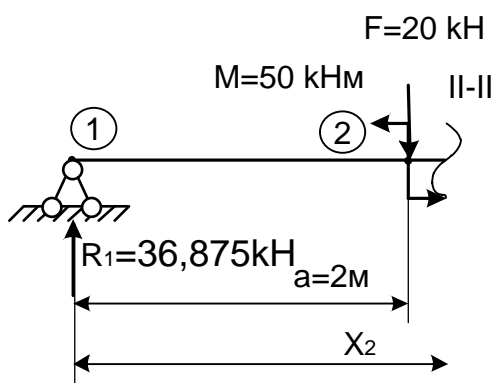
$$Q_1 = R_1 = 36,875 \text{ кН.}$$

$$M_1 = R_1 \cdot x_1 = 36,875 \cdot x_1.$$

Підставляємо межі зміни x_1 :

при $x_1 = 0$, $M_1 = 0$;

при $x_1 = 2\text{ м}$, $M_1 = 36,875 \cdot 2 = 73,750 \text{ кНм}$.



Переріз II-II проводимо між точками 2 і 3. Розглядати також будемо ліву частину. Визначаємо межі зміни x_2 :

$$a = 2\text{ м} \leq x_2 \leq a + b = 2 + 1 = 3\text{ м.}$$

Визначаємо внутрішні зусилля в цьому перерізі:

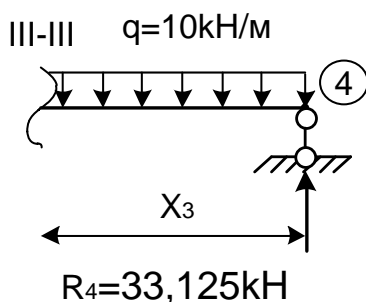
$$Q_2 = R_1 - F = 36,875 - 20 = 16,875 \text{ кН};$$

$$M_2 = R_1 \cdot x_2 - M - F \cdot (x_2 - a) = 36,875 \cdot x_2 - 50 - 20 \cdot (x_2 - 2).$$

Підставляємо межі зміни x_2 :

при $x_2 = 2\text{ м}$, $M_2 = 36,875 \cdot 2 - 50 - 20 \cdot (2 - 2) = 23,75\text{ кНм}$;

при $x_2 = 3\text{ м}$, $M_2 = 36,875 \cdot 3 - 50 - 20 \cdot (3 - 2) = 40,625\text{ кНм}$.



Переріз III-III проводимо між точками 3 і 4 і розглядаємо праву частину. Межі зміни x_3 :

$$0 \leq x_3 \leq c = 5\text{ м.}$$

Визначаємо внутрішні зусилля в перерізі:

$$Q_3 = -R_4 + q \cdot x_3 = -33,125 + 10 \cdot x_3;$$

$$M_3 = R_4 \cdot x_3 - q \cdot x_3 \frac{x_3}{2} = 33,125 \cdot x_3 - 10 \frac{x_3^2}{2}.$$

Підставляємо межі змін x_3 :

при $x_3 = 0$, $Q_3 = -33,125 \text{ kH}$, $M_3 = 0$;

при $x_3 = 5 \text{ м}$, $Q_3 = -33,125 + 10 \cdot 5 = 16,875 \text{ kH}$;

$M_3 = 33,125 \cdot 5 - 10 \frac{5^2}{2} = 40,625 \text{ kHм}$.

На цій ділянці поперечна сила міняє знак, тому на епюрі моментів має бути екстремум, знайдемо його. Екстремальний момент знаходиться у точці, де поперечна сила дорівнює нулю. Визначимо відстані x_{3e} , для цього прирівняємо Q_3 нулю:
 $Q_3 = -33,125 + 10 \cdot x_{3e} = 0$, звідси

$$x_{3e} = \frac{33,125}{10} = 3,312 \text{ м.}$$

Підставляємо знайдене значення у рівняння для моментів:

$$M_{3e} = 33,125 \cdot 3,312 - 10 \frac{3,312^2}{2} = 54,863 \text{ kHм.}$$

Задача 1.2.4. Приклад розрахунку двохопорної балки з консоллю

Для заданої двохопорної одноконсольної балки (рис. 1.17) побудувати епюри внутрішніх зусиль.

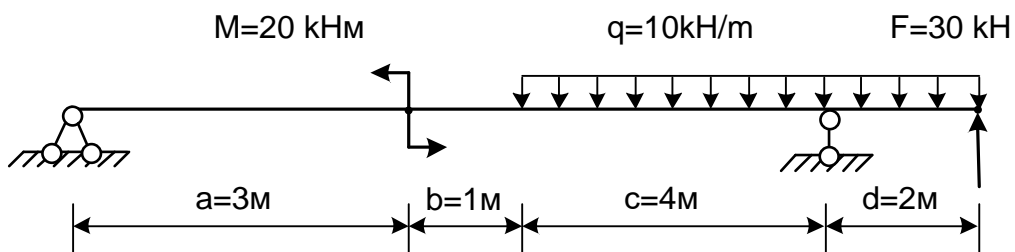


Рис. 1.17. Схема двохопорної одноконсольної балки

Розв'язання

Як і у попередній задачі, спочатку необхідно, за допомогою рівнянь рівноваги, визначити опорні реакції (рис. 1.18).

$$\sum M_1 = 0, M - q \cdot 6 \cdot 7 + R_4 \cdot 8 + F \cdot 10 = 0, \text{ звідси}$$

$$R_4 = \frac{-M + q \cdot 6 \cdot 7 - F \cdot 10}{8} = \frac{-20 + 10 \cdot 6 \cdot 7 - 30 \cdot 10}{8} = 12,5 \text{ kH};$$

$$\sum M_4 = 0, M + q \cdot 6 \cdot 1 - R_1 \cdot 8 + F \cdot 2 = 0, \text{ звідси}$$

$$R_1 = \frac{M + q \cdot 6 \cdot 1 + F \cdot 2}{8} = \frac{20 + 10 \cdot 6 \cdot 1 + 30 \cdot 2}{8} = 17,5 \text{ kH}.$$

Перевіряємо правильність визначення реакцій, для цього спроекуємо всі сили на вісь Y.

$$\sum Y = 0, R_1 - q \cdot 6 + R_4 + F = 17,5 - 10 \cdot 6 + 12,5 + 30 = 0,$$

це означає, що реакції визначено правильно. Тепер можна починати будувати епюри внутрішніх зусиль, а саме поперечної сили Q та згинального моменту M. Для цього помічаємо характерні точки (1, 2, 3, 4, 5), розрізаємо балку між характерними точками та знаходимо внутрішні зусилля на кожній ділянці (рис. 1.18).

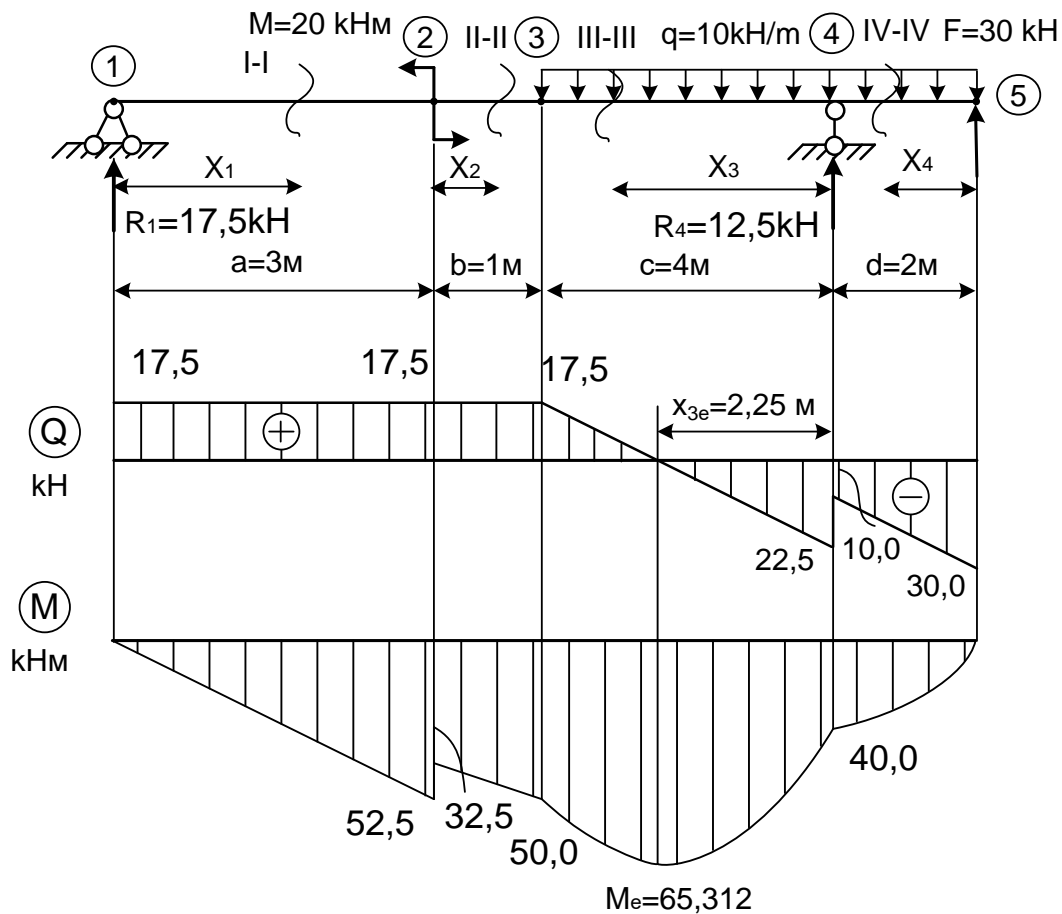
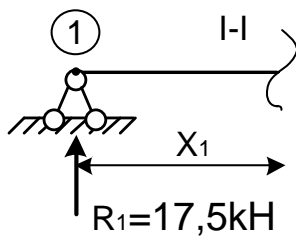


Рис. 1.18. Епюри внутрішніх зусиль у двохопірній консольній балці



Переріз I-I проводимо між точками 1 і 2 та розглядаємо ліву частину тому, що зліва знаходиться менше сил. Визначаємо межі зміни x_1 : $0 \leq x_1 \leq a = 3\text{ м}$.

Внутрішні зусилля знаходимо за допомогою рівнянь статки.

$$Q_1 = R_1 = 17,5 \text{ кН};$$

$$M_1 = R_1 \cdot x_1 = 17,5 \cdot x_1.$$

Підставляємо граничні значення x_1 :

$$\text{при } x_1 = 0, M_1 = 0;$$

$$\text{при } x_1 = 3\text{ м}, M_1 = 17,5 \cdot 3 = 52,5 \text{ кН}.$$



Переріз II-II проводимо між точками 2 і 3 і також розглядаємо ліву частину. x_2 змінюється у межах $0 \leq x_2 \leq b = 1\text{ м}$.

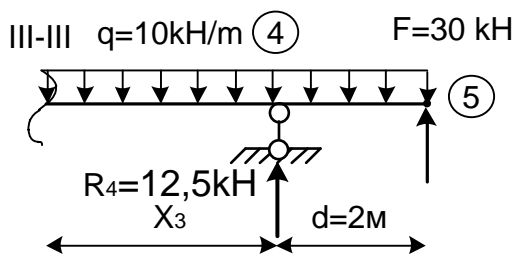
$$Q_2 = R_1 = 17,5 \text{ кН};$$

$$M_2 = R_1(a + x_2) - M = 17,5(3 + x_2) - 20.$$

Підставляємо межі зміни x_2 :

$$\text{при } x_2 = 0, M_2 = 17,5 \cdot 3 - 20 = 32,5 \text{ кНм};$$

$$\text{при } x_2 = 1, M_2 = 17,5 \cdot 4 - 20 = 50 \text{ кНм}.$$



Переріз III-III проводимо між точками 3 і 4 та розглядаємо праву частину. Визначаємо межі зміни x_3 :

$$0 \leq x_3 \leq c = 4\text{ м}.$$

Визначаємо внутрішні зусилля:

$$Q_3 = -R_4 - F + q(d + x_3) = -12,5 - 30 + 10(2 + x_3);$$

$$M_3 = R_4 \cdot x_3 + F(d + x_3) - q(d + x_3) \frac{(d + x_3)}{2} =$$

$$= 12,5 \cdot x_3 + 30(2 + x_3) - 10 \frac{(2 + x_3)^2}{2}.$$

Підставляємо межі зміни x_3 :

$$\text{при } x_3 = 0,$$

$$Q_3 = -12,5 - 30 + 10 \cdot 2 = -22,5 \text{ кН};$$

$$M_3 = 30 \cdot 2 - 10 \frac{2^2}{2} = 40 \text{ кНм};$$

при $x_3 = 4 \text{ м}$

$$Q_3 = -12,5 - 30 + 10(2 + 4) = 17,5 \text{ кН};$$

$$M_3 = 12,5 \cdot 4 + 30(2 + 4) - 10 \frac{(2+4)^2}{2} = 50 \text{ кНм}.$$

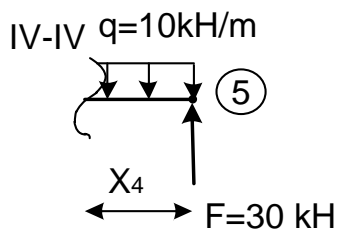
На цій ділянці епюра поперечних сил змінює знак, тому на епюрі моментів є екстремум. Знайдемо його. Для цього знайдемо x_{3e} , прирівнявши Q_3 до нуля.

$$Q_3 = -12,5 - 30 + 10(2 + x_{3e}),$$

$$\text{звідси } x_{3e} = \frac{12,5+30-20}{10} = 2,25 \text{ м}.$$

Підставляємо знайдене значення x_{3e} у рівняння моменту

$$M_e = 12,5 \cdot 2,25 + 30(2 + 2,25) - 10 \frac{(2 + 2,25)^2}{2} = 65,312 \text{ кНм}.$$



Переріз IV-IV проводимо між точками 4 і 5 та розглядаємо праву частину. Визначаємо межі зміни x_4 : $0 \leq x_4 \leq d = 2 \text{ м}$.

Визначаємо внутрішні зусилля:

$$Q_4 = -F + q \cdot x_4 = -30 + 10 \cdot x_4;$$

$$M_4 = F \cdot x_4 - q \cdot x_4 \cdot \frac{x_4}{2} = 30 \cdot x_4 - 10 \frac{x_4^2}{2}.$$

Підставляємо значення x_4 :

$$\text{при } x_4 = 0, Q_4 = -30 \text{ кН}; M_4 = 0.$$

$$\text{при } x_4 = 2 \text{ м}, Q_4 = -30 + 10 \cdot 2 = -10 \text{ кН};$$

$$M_4 = 30 \cdot 2 - 10 \frac{2^2}{2} = 40 \text{ кНм}.$$

Задача 1.2.5. Приклад розрахунку бруса

Для заданої розрахункової схеми (рис. 1.19) побудувати епюри внутрішніх зусиль.

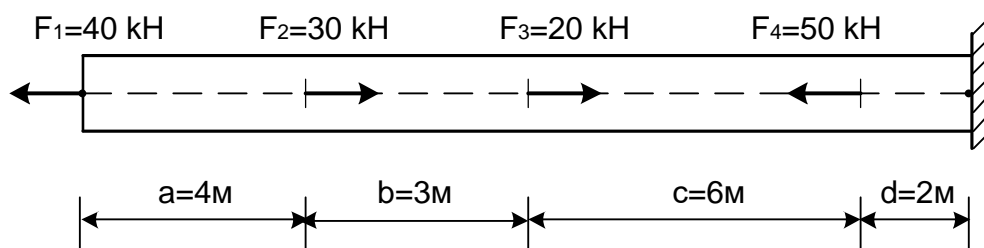


Рис. 1.19. Схема консольного стрижня

Розв'язання

Задана система – це брус, до якого центрально прикладені сили, тому брус зазнає деформації – розтягання-стискання. З усіх видів внутрішніх зусиль у брусі виникають тільки поздовжні сили, тому необхідно побудувати епюру поздовжніх сил N .

Ділимо брус перерізами I-I, II-II, III-III, IV-IV і визначаємо у кожному перерізі поздовжню силу (рис. 1.20).

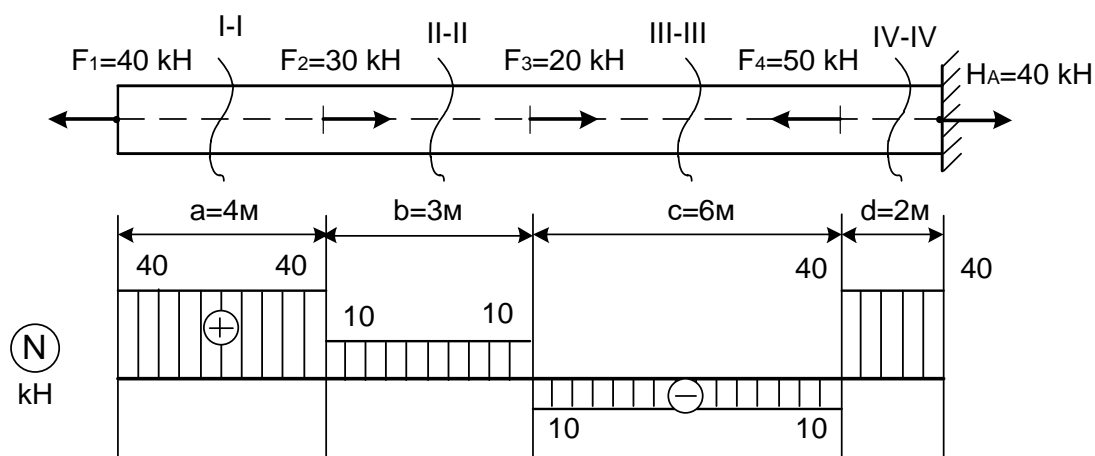
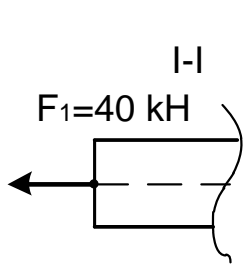
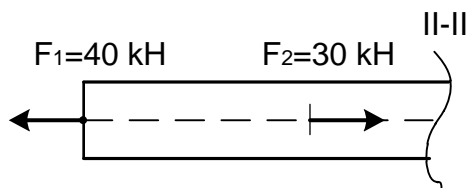


Рис. 1.20. Епюри у консольному стрижні



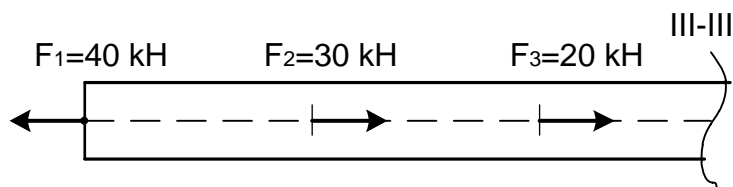
Переріз I-I. Будемо розглядати ліву частину, тому що до неї прикладено менше сил. Поздовжня сила в перерізі – це сума всіх поздовжніх сил, що діють з одного боку перерізу.

$$N_1 = F_1 = 40 \text{ kN} \quad (\text{правило знаків поздовжньої сили, рис. 1.7}).$$



Переріз II-II. Знову розглядаємо ліву частину, тому, що до неї прикладено менше сил.

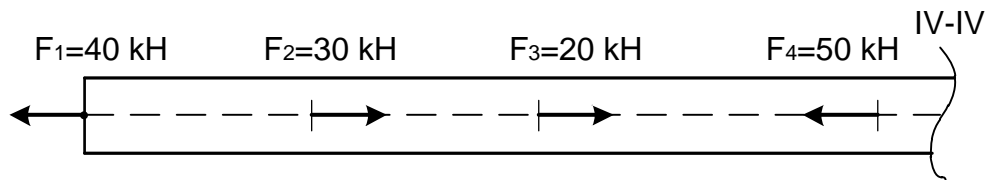
$$N_2 = F_1 - F_2 = 40 - 30 = 10 \text{ kN}.$$



Переріз III-III.
Знову розглядаємо ліву частину, тому що праворуч знаходиться защемлення, реакцію у

якому ми не визначали.

$$N_3 = F_1 - F_2 - F_3 = 40 - 30 - 20 = -10 \text{ kH}.$$



Переріз IV-IV. Знову розглядаємо ліву частину, тому що праворуч знаходиться защемлення, реакцію у якому ми не визначали.

$$N_4 = F_1 - F_2 - F_3 + F_4 = 40 - 30 - 20 + 50 = 40 \text{ kH}.$$

Епюри внутрішніх зусиль подано на рис. 1.20.

Поздовжня сила на останній ділянці одночасно є реакцією у защемленні. Перевіримо правильність визначення реакції. Для цього спроектуємо всі сили на горизонтальну вісь.

$$\sum x = -F_1 + F_2 + F_3 - F_4 + N_A = -40 + 30 + 20 - 50 + 40 = 0,$$

це означає, що реакцію знайдено правильно.

Задача 1.2.6. Приклад розрахунку вала

Для заданої розрахункової схеми (рис. 1.21) побудувати епюри внутрішніх зусиль.

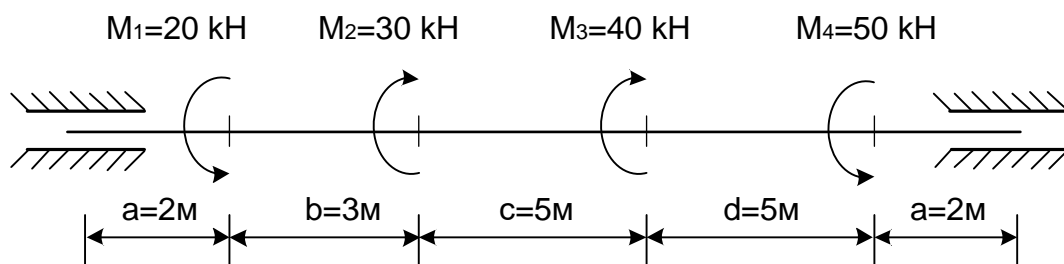


Рис. 1.21. Схема вала

Розв'язання

Задана розрахункова схема – це вал, який є самоурівноважена система. Тому реакції у защемленнях дорівнюють нулю. До вала прикладені крутні моменти, тому і будувати необхідно епюру крутних моментів. Епюри, як і в попередніх прикладах, будемо методом перерізів. Для цього розділяємо вал перерізами I-I, II-II, III-III, IV-IV на ділянки (рис. 1.22).

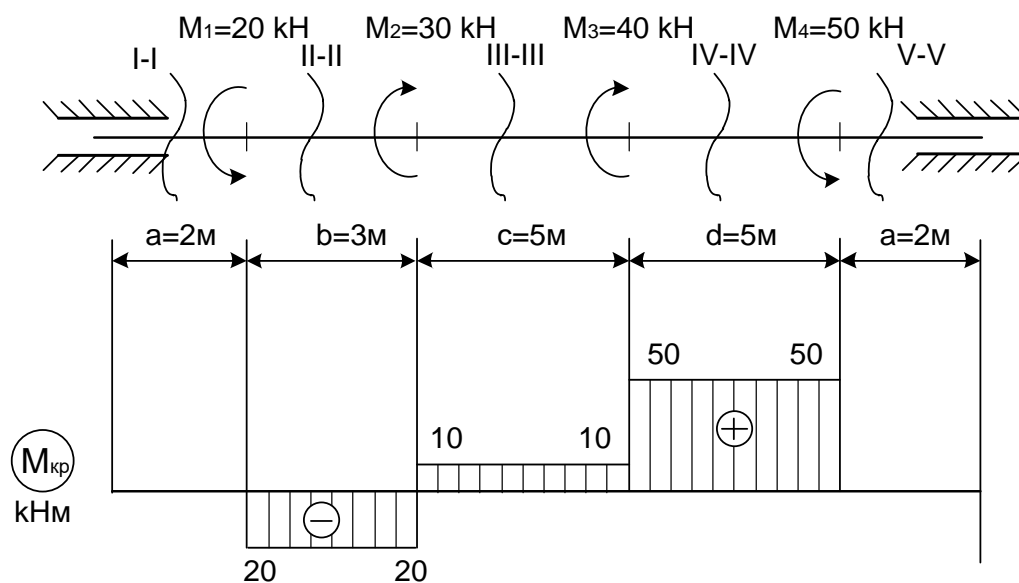
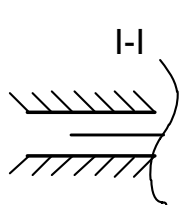
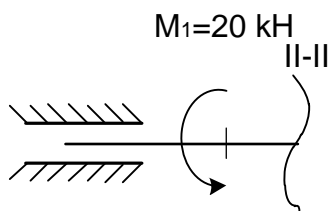


Рис. 1.22. Епюри у валі

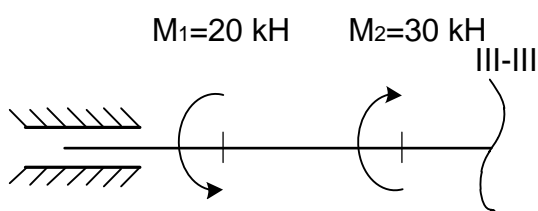


Переріз I-I. Розглядаємо ліву частину тому, що ліворуч прикладено менше навантажень, а саме ніяких навантажень немає, тому крутний момент на цій ділянці дорівнює нулю.



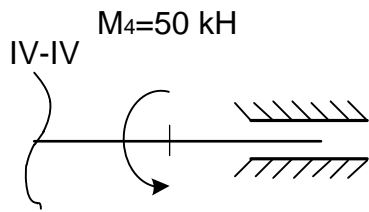
Переріз II-II. Розглядаємо ліву частину тому, що ліворуч прикладено менше навантажень,

$M_{кр 2} = -M_1 = -20 \text{ кНм.}$ (правило знаків крутного моменту, рис. 1.10).



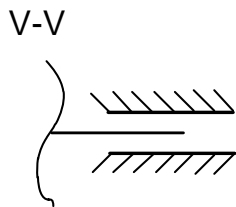
Переріз III-III. Для цього перерізу немає значення, яку частину (ліву чи праву) розглядати, тому що з обох сторін діє по два моменти. Будемо розглядати ліву частину.

$$M_{кр3} = -M_1 + M_2 = -20 + 10 = 10 \text{ кНм}.$$



Переріз IV-IV. Для цього перерізу зручніше розглядати праву частину, тому що на ній розташовано лише один момент

$$M_{кр4} = M_4 = 50 \text{ кНм}.$$



Переріз V-V. Для цього перерізу також зручніше розглядати праву частину, тому що до неї ніякого навантаження не прикладене. Звідси і отримуємо, що крутний момент на цій ділянці дорівнює нулю.

Епюри внутрішніх зусиль подано на рис. 1.22.

Задача 1.2.7. Приклад розрахунку консольної рами

Для заданої консольної рами (рис. 1.23) побудувати епюри внутрішніх зусиль.

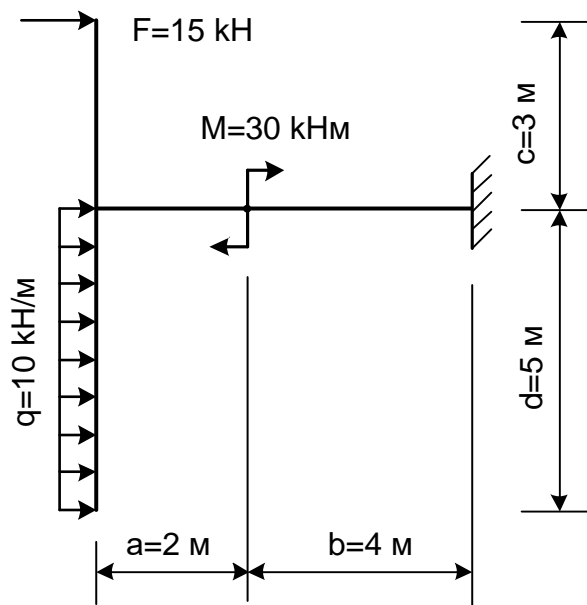


Рис. 1.23. Схема консольної рами

Розв'язання

Консольну раму, як і всі консольні системи, можна розраховувати, не визначаючи реакції, при цьому завжди необхідно

розглядати консольну частину. Помічаємо на рамі характерні точки (1, 2, 3, 4, 5) та проводимо перерізи між характерними точками (рис. 1.24). В рамках виникають три види внутрішніх зусиль: N – поздовжня сила, Q – поперечна сила, M – згинальний момент.

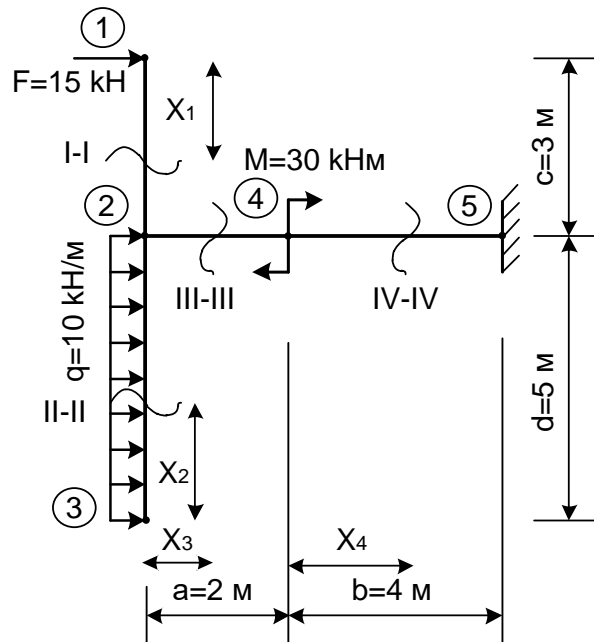
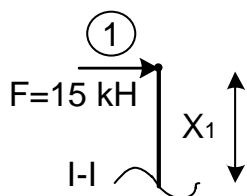


Рис. 1.24. Розрахункова схема консольної рами



Переріз I-I проводимо між точками 1 і 2.
Межі зміни x_1 :

$0 \leq x_1 \leq c = 3\text{ м}$. Вісь x завжди повинна збігатися з віссю стрижня, тому

$$\sum X = 0, N_1 = 0.$$

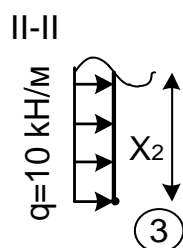
$$\sum Y = 0, Q_1 = F = 15 \text{ кН},$$

$$M_1 = -F \cdot x_1 = -15 \cdot x_1.$$

Підставляємо граничні значення x_1 :

$$\text{при } x_1 = 0, M_1 = 0;$$

$$\text{при } x_1 = 3\text{ м}, M_1 = -15 \cdot 3 = -45 \text{ кНм}.$$



Переріз II-II проводимо між точками 2 і 3.
Межі зміни x_2 :

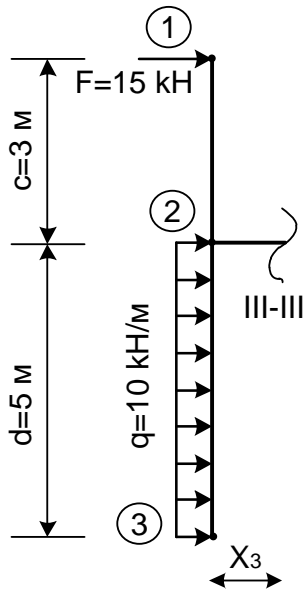
$$0 \leq x_2 \leq d = 5\text{ м}.$$

$$\sum X = 0, N_2 = 0.$$

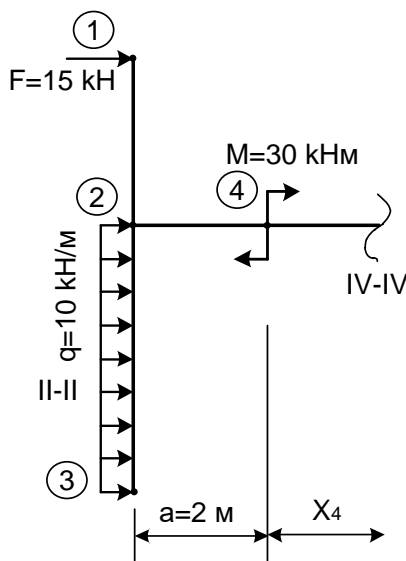
$$\sum Y = 0, Q_2 = -q \cdot x_2 = -10 \cdot x_2.$$

$$M_2 = -q \cdot x_2 \frac{x_2}{2} = -10 \frac{x_2^2}{2}.$$

Підставляємо граничні значення x_2 :
 при $x_2 = 0$, $Q_2 = 0$, $M_2 = 0$;
 при $x_2 = 5\text{м}$, $Q_2 = -10 \cdot 5 = -50 \text{кН}$;
 $M_2 = -10 \frac{5^2}{2} = -125 \text{кНм}$.



Переріз III-III проводимо між точками 2 і 4. Межі зміни x_3 : $0 \leq x_3 \leq a = 2\text{м}$.
 $\sum X = 0$, $N_3 = -F - q \cdot d = -15 - 10 \cdot 5 = -65 \text{кН}$.
 $\sum Y = 0$, $Q_3 = 0$,
 $M_3 = -q \cdot d \cdot \frac{d}{2} + F \cdot c = -10 \cdot 5 \frac{5}{2} + 15 \cdot 3 = -80 \text{кНм}$.



Переріз IV-IV проводимо між точками 4 і 5. Межі зміни x_4 :
 $0 \leq x_4 \leq b = 4\text{м}$.
 $\sum X = 0$, $N_4 = -F - q \cdot d = -15 - 10 \cdot 5 = -65 \text{кН}$.
 $\sum Y = 0$, $Q_3 = 0$,
 $M_4 = -q \cdot d \cdot \frac{d}{2} + F \cdot c + M = -10 \cdot 5 \frac{5}{2} + 15 \cdot 3 + 30 = -50 \text{кНм}$

За виконаними розрахунками будуюмо епюри внутрішніх зусиль (рис. 1.25).

Для перевірки правильності побудови епюр внутрішніх зусиль перевіряємо рівновагу у вузлах. Для цього вирізаємо вузол 2 і прикладаємо до нього внутрішні зусилля із побудованих епюр відповідно до правила знаків (рис. 1.26).

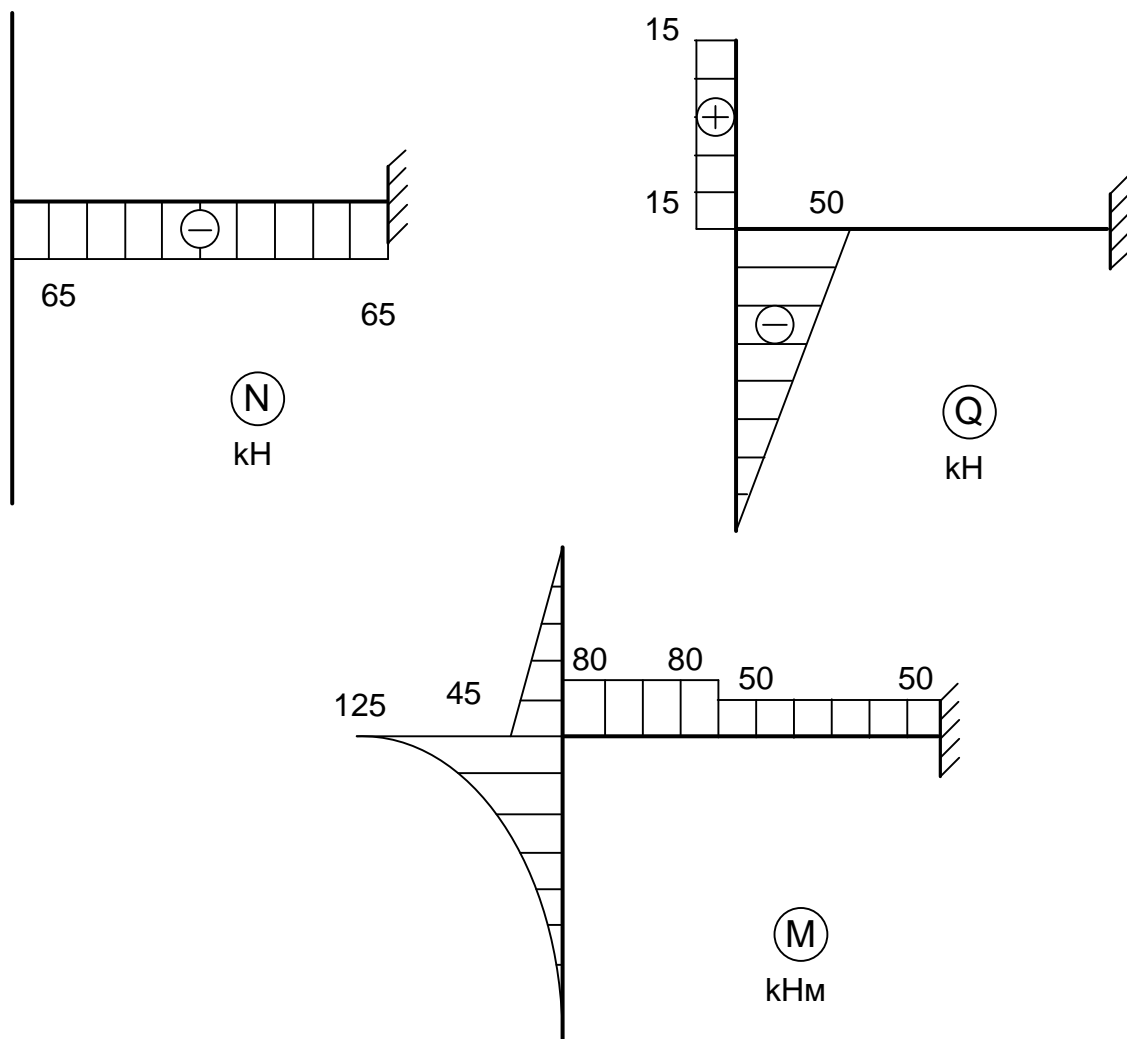


Рис. 1.25. Епюри внутрішніх зусиль в консольній рамі

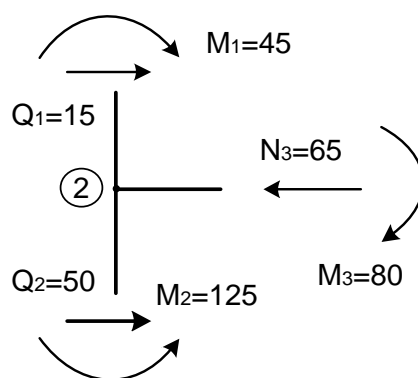


Рис. 1.26. Перевірка рівноваги у вузлі рами

$$\sum X = 0, Q_1 + Q_2 - N_3 = 45 + 50 - 65 = 0;$$

$$\sum M_2 = 0, M_1 + M_3 - M_2 = 45 + 80 - 125 = 0.$$

Крім того перевіряємо виконання рівнянь статки для всієї рами. Для цього з побудованих епюр знаходимо опорні реакції (рис. 1.27).

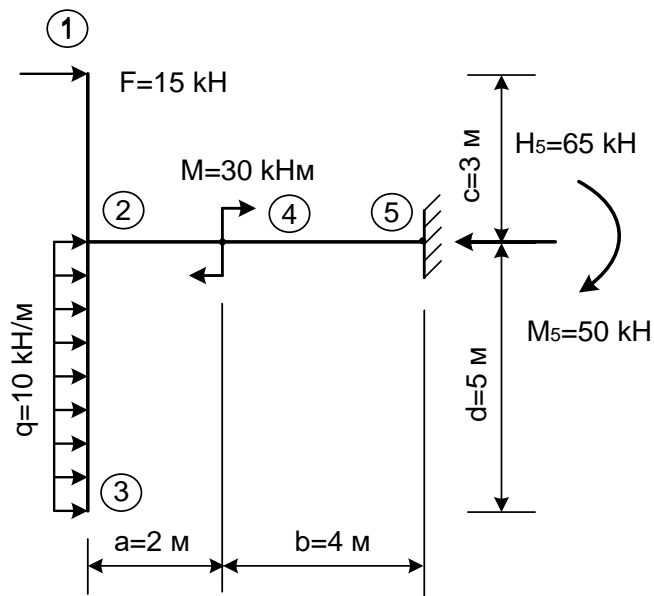


Рис. 1.27. Визначення реакцій в рамі

$$\sum X = 0, F + q \cdot 5 - H_5 = 15 + 50 - 65 = 0; \quad \sum Y = 0;$$

$$\sum M_1 = 0, q \cdot 5 \cdot 5,5 - M - H_5 \cdot 3 - M_5 = 275 - 30 - 65 \cdot 3 - 50 = 0.$$

Задача 1.2.8. Приклад розрахунку двохопорної рами

Для заданої двохопорної рами (рис. 1.28) побудувати епюри внутрішніх зусиль.

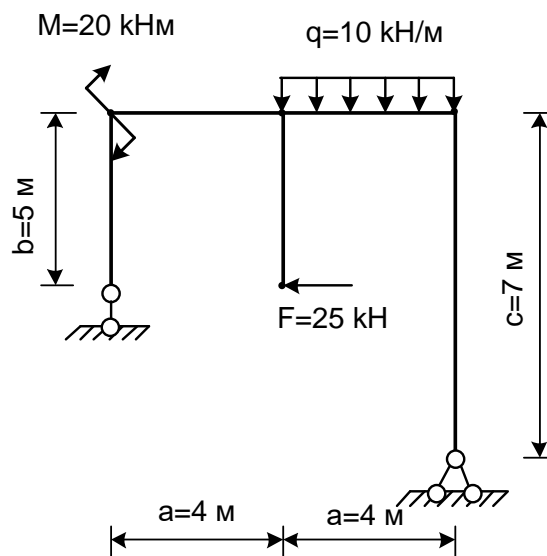


Рис. 1.28. Схема двохопорної рами

Розв'язання

Спочатку, за допомогою рівнянь статки, визначаємо всі опорні реакції (рис. 1.29):

$$\sum X = 0, H_6 - F = 0, H_6 = F = 25 \text{ кН};$$

$$\sum M_1 = 0, M + q \cdot a \cdot \left(a + \frac{a}{2}\right) - H_6 \cdot (c - b) - R_6 \cdot 2a = 0;$$

$$R_6 = \frac{M + q \cdot a \cdot \left(a + \frac{a}{2}\right) - H_6 \cdot (c - b)}{2a} =$$

$$= \frac{20 + 10 \cdot 4 \cdot (4 + 2) - 25 \cdot (7 - 5)}{2 \cdot 4} = 26,25 \text{ кН}.$$

$$\sum M_6 = 0, M - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - F \cdot (c - b) + R_1 \cdot 2a = 0;$$

$$R_1 = \frac{-M + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + F \cdot (c - b)}{2a} = \frac{-20 + 10 \cdot 4 \cdot 2 + 25 \cdot (7 - 5)}{2 \cdot 4} =$$

$$= 13,75 \text{ кН}.$$

Перевіряємо правильність визначення реакцій. Для цього спроектуємо всі сили на вісь Y:

$$\sum Y = 0, R_1 - q \cdot a + R_6 = 13,75 - 10 \cdot 4 + 26,25 = 0.$$

Це означає, що реакції знайдено правильно.

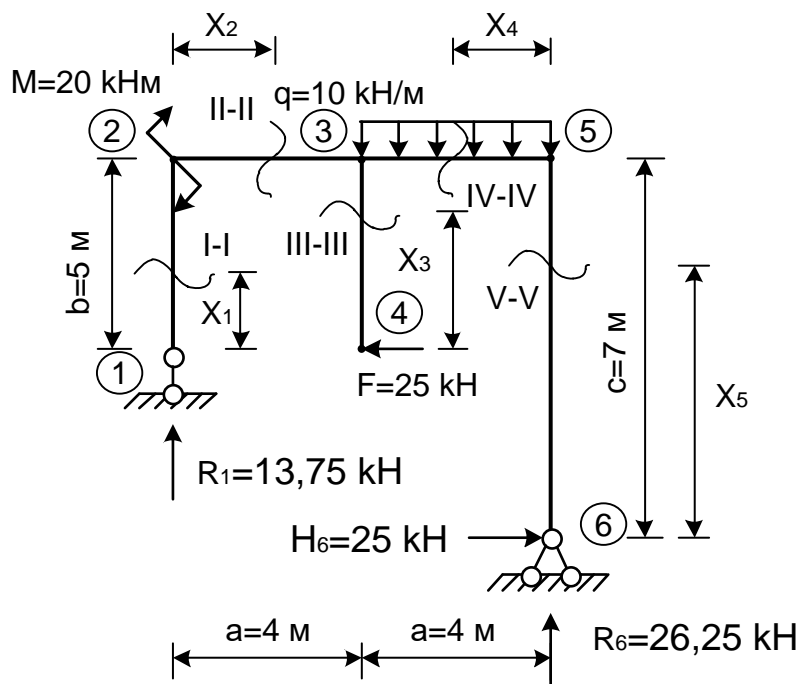
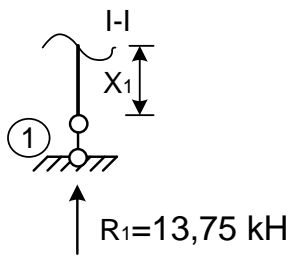


Рис. 1.29. Визначення опорних реакцій в рамі

Для побудови епюр помічаємо на рамі характерні точки (1, 2, 3, 4, 5, 6) та проводимо перерізи між характерними точками (рис. 1.29).



Переріз I-I проводимо між точками 1 і 2 та розглядаємо нижню частину. Межі зміни x_1 :

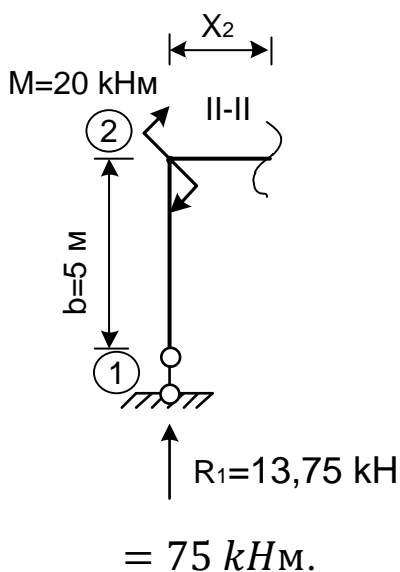
$0 \leq x_1 \leq b = 5$ м. Внутрішні зусилля

знаходимо за допомогою рівнянь статyki:

$$\sum X = 0, N_1 = -R_A = -13,75 \text{ kH};$$

$$\sum Y = 0, Q_1 = 0;$$

$$\sum M = 0, M_1 = 0.$$



Переріз II-II проводимо між точками 2 і 3 та розглядаємо ліву частину. Межі зміни x_2 :

$0 \leq x_2 \leq a = 4$ м:

$$\sum X = 0, N_2 = 0;$$

$$\sum Y = 0, Q_2 = R_1 = 13,75 \text{ kH};$$

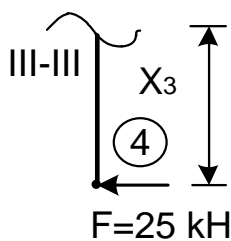
$$\sum M = 0, M_2 = R_1 \cdot x_2 + M = 13,75 \cdot x_2 + 20.$$

Підставляємо межі зміни x_2 :

при $x_2 = 0$, $M_2 = 20 \text{ kHm}$;

при $x_2 = 4$ м, $M_2 = 13,75 \cdot 4 + 20 =$

$= 75 \text{ kHm}$.



Переріз III-III проводимо між точками 3 і 4 та розглядаємо нижню частину. Межі зміни x_3 :

$0 \leq x_3 \leq b = 5$ м:

$$\sum X = 0, N_3 = 0;$$

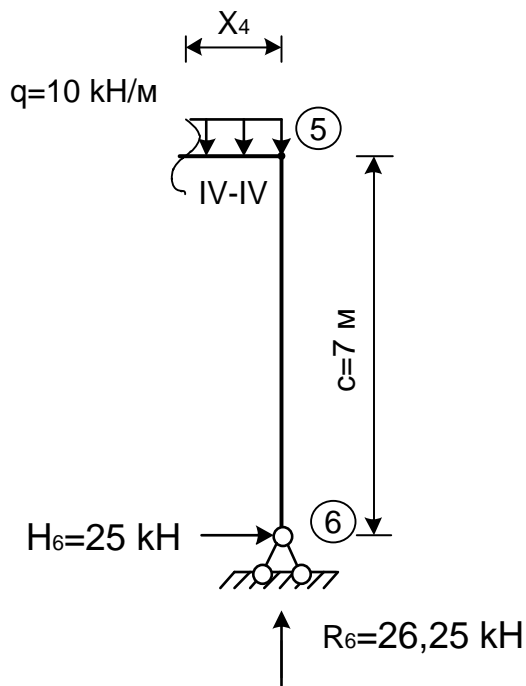
$$\sum Y = 0, Q_3 = F = 25,0 \text{ kH},$$

$$\sum M = 0, M_3 = F \cdot x_3 = 25 \cdot x_3.$$

Підставляємо межі зміни x_3 :

при $x_3 = 0$, $M_3 = 0 \text{ kHm}$;

при $x_3 = 5$ м, $M_3 = 25 \cdot 5 = 125 \text{ kHm}$.



Переріз IV-IV проводимо між точками 3 і 5 та розглядаємо праву частину. Межі зміни x_4 :

$$0 \leq x_4 \leq a = 4 \text{ м};$$

$$\sum X = 0, N_4 = H_6 = 25 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0, Q_4 = q \cdot x_4 - R_6 =$$

$$= 10 \cdot x_4 - 26,25;$$

$$\sum M = 0;$$

$$M_4 = R_6 \cdot x_4 + H_6 \cdot c - q \cdot x_4 \frac{x_4}{2} =$$

$$= 26,25 \cdot x_4 + 25 \cdot 7 - 10 \frac{x_4^2}{2}.$$

Підставляємо межі зміни x_4 :

$$\text{при } x_4 = 0, Q_4 = -26,25 \text{ кН};$$

$$M_4 = 25 \cdot 7 = 175 \text{ кНм}.$$

Детальніше при $x_4 = 4$ м;

$$Q_4 = 10 \cdot 4 - 26,25 = 13,75 \text{ кН};$$

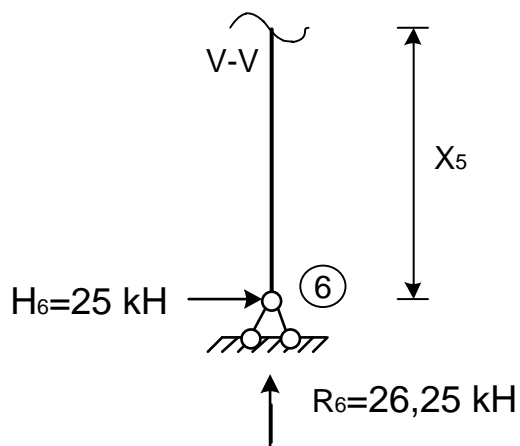
$$M_4 = 26,25 \cdot 4 + 25 \cdot 7 - 10 \frac{4^2}{2} = 200 \text{ кНм}.$$

На цій ділянці поперечна сила змінює знак, тому на епюрі моментів буде екстремум, знайдемо його. Для цього знайдемо відстань x_{4e} , при якій поперечна сила дорівнює нулю.

$$Q_4 = 10 \cdot x_{4e} - 26,25 = 0, \text{ звідси } x_{4e} = \frac{26,25}{10} = 2,625 \text{ м}.$$

Підставляємо знайдене значення у рівняння для моментів:

$$M_{4e} = 26,25 \cdot 2,625 + 25 \cdot 7 - 10 \frac{2,625^2}{2} = 209,453 \text{ кНм}.$$



Переріз V-V проводимо між точками 5 і 6 та розглядаємо нижню частину. Межі зміни x_5 :

$$0 \leq x_5 \leq c = 7 \text{ м};$$

$$\sum X = 0, N_5 = -R_6 = -26,25 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0, Q_5 = -H_6 = -25 \text{ кН};$$

$$\sum M = 0;$$

$$M_5 = -H_6 \cdot x_4 = -25 \cdot x_4.$$

Підставляємо межі зміни x_5 :

при $x_5 = 0$, $M_5 = 0$;

при $x_5 = 7$ м, $M_5 = -25 \cdot 7 = -175$ кНм .

За виконаними розрахунками будуємо епюри N , Q , і M (рис. 1.30).

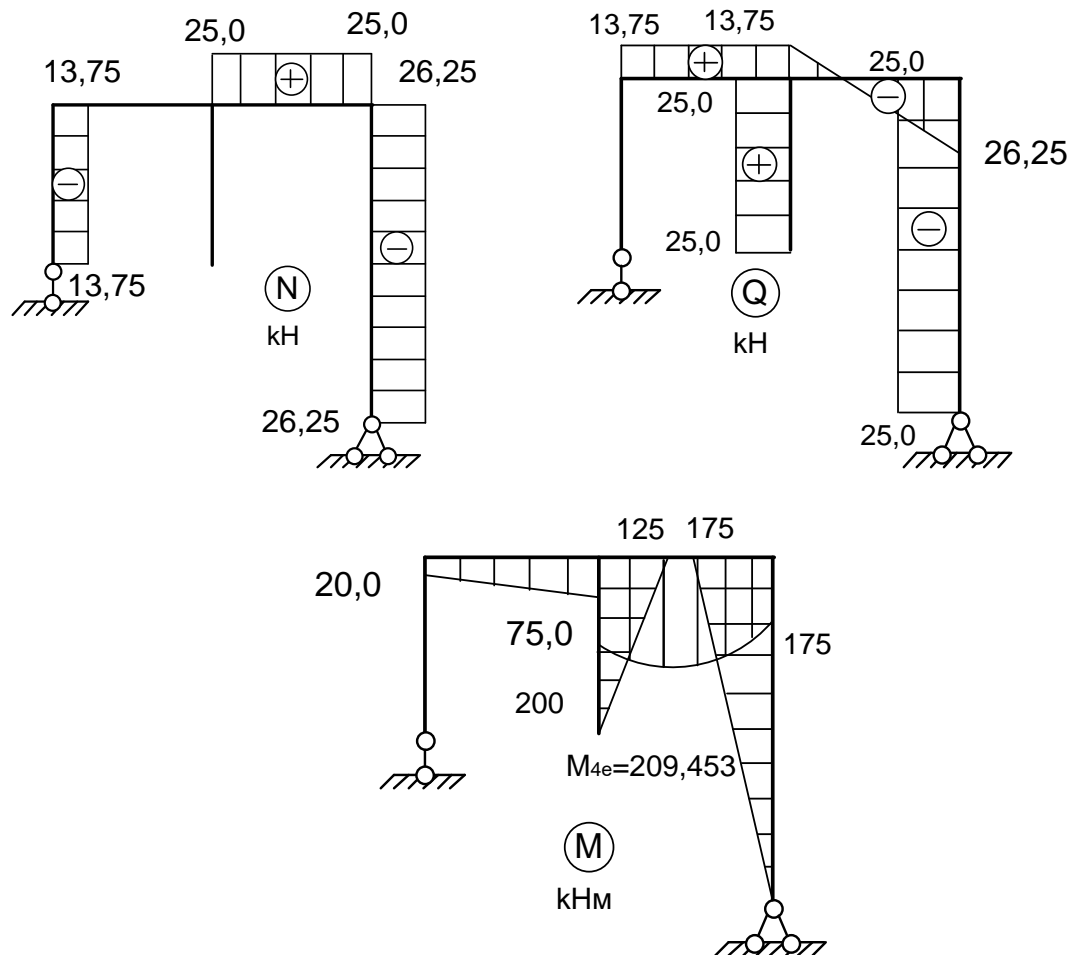


Рис. 1.30. Епюри внутрішніх зусиль у двохопорній рамі

Перевіряємо правильність побудови епюр за допомогою вирізання вузлів. Для цього вирізаємо вузли рами та прикладаємо внутрішні зусилля із побудованих епюр (рис. 1.31).

Вирізаємо вузол 2 (рис 1.31, а):

$$\sum Y = 0, N_1 - Q_2 = 13,75 - 13,75 = 0;$$

$$\sum M_2 = 0, M_2 - M = 20,0 - 20,0 = 0.$$

Вирізаємо вузол 3 (рис 1.31, б):

$$\sum X = 0, N_4 - Q_3 = 25,0 - 25,0 = 0;$$

$$\sum Y = 0, Q_2 - Q_4 = 13,75 - 13,75 = 0;$$

$$\sum M_3 = 0, M_2 + M_3 - M_4 = 75,0 + 125,0 - 200,0 = 0.$$

Вирізаємо вузол 5 (рис 1.31, в):

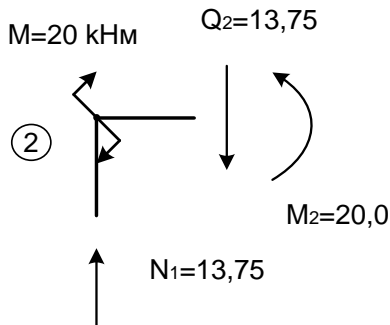
$$\sum X = 0, Q_5 - N_4 = 25,0 - 25,0 = 0;$$

$$\sum Y = 0, N_5 - Q_4 = 26,25 - 26,25 = 0;$$

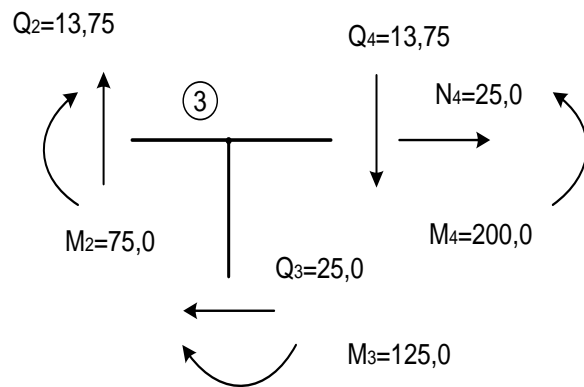
$$\sum M_3 = 0, M_5 - M_4 = 175,0 - 175,0 = 0.$$

Всі вузли знаходяться у рівновазі, тому епюри побудовані правильно.

а



б



в

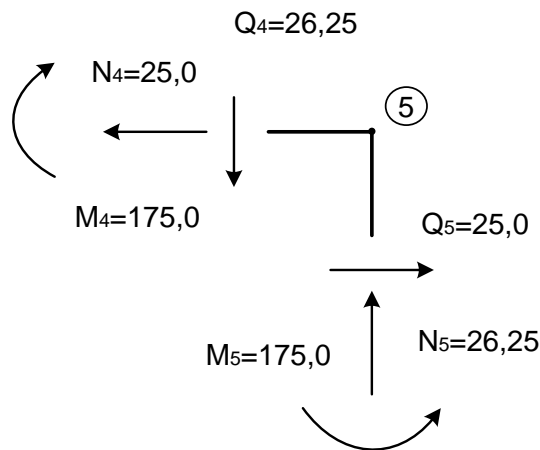


Рис. 1.31. Перевірка рівноваги вузлів

Контрольні запитання

1. Що називають зосередженою силою, моментом або розподіленим навантаженням, їх розмірності?
2. Що називають напруженням в деформованому тілі, які види напружень бувають?
3. Які внутрішні зусилля виникають у перерізі елемента?
4. Що називається епюрою внутрішнього зусилля?
5. Дайте характеристику шарнірно-рухомої опори, шарнірно-нерухомої та защемлення.
6. Які рівняння рівноваги застосовуються для визначення опорних реакцій в балках?
7. Яке правило знаків прийняте для поздовжньої, поперечної сили та згинального моменту?
8. Як змінюється згинальний момент та поперечна сила на ділянці балки, де немає розподіленого навантаження?
9. Як змінюється згинальний момент та поперечна сила на ділянці балки, де прикладене розподілене навантаження?
10. Що буде на епюрі Q в перерізі, де прикладена зосереджена сила F ?
11. Що буде на епюрі M в перерізі, де прикладений зосереджений згинальний момент?

2. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ РОЗТЯГАННІ, СТИСКАННІ

2.1. Короткі теоретичні відомості

Центральним розтяганням або стисканням називається деформація стрижня під дією двох рівних і протилежно спрямованих сил, лінія яких збігається з віссю стрижня (рис. 2.1).



Рис. 2.1. Деформація розтягання-стискання

При розтяганні-стисканні в поперечних перерізах стрижня виникає тільки поздовжня N сила, а решта внутрішніх зусиль дорівнюють нулю. Від дії поздовжньої сили виникають нормальні напруження, які визначаються

$$\sigma = \frac{N}{A} . \quad (2.1)$$

При розтяганні або стисканні нормальні напруження в поперечному перерізі дорівнюють діючому внутрішньому зусиллю N , віднесеному до площі поперечного перерізу A .

Відносна поздовжня і поперечна деформації визначаються

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} ; \quad \varepsilon' = \frac{\Delta a}{a} . \quad (2.2)$$

Дослідами встановлено зв'язок між відносною поздовжньою і відносною поперечною деформаціями:

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| , \quad (2.3)$$

де ν – коефіцієнт Пуассона, який визначається експериментальним шляхом і залежить від матеріалу, величина безрозмірна. Так, для сталі $\nu = 0,25 - 0,3$ в залежності від марки сталі.

Згідно з передумовою, що матеріал ідеально пружний, англійський вчений Роберт Гук припустив, що напруження (в певних межах) прямо пропорційні відносному подовженню.

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.4)$$

де E – коефіцієнт пропорційності, або модуль пружності 1-го роду, має розмірність напруження паскаль (Па).

Це припущення носить назву закону Гука.

Напруження прямо пропорційні відносному подовженню.

Абсолютне подовження при розтяганні або стисканні прямо пропорційно внутрішньому зусиллю, довжині стрижня і обернено пропорційно модулю пружності і площі поперечного перерізу елемента.

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{EA}. \quad (2.5)$$

Добуток EA – жорсткість стрижня при розтяганні (стисканні).

Переміщення від власної ваги визначаються

$$\Delta l_G = \frac{G \cdot l}{2EA}. \quad (2.6)$$

Якщо власна вага становить невелику частину від зовнішнього навантаження, то нею можна знехтувати. Але бувають випадки, коли власна вага є основним навантаженням (троси, ланцюги, стіни будівель, бурові штанги і т. д.). Вага елементів конструкції вважається зовнішнім навантаженням, прикладеним до елемента або споруди.

Статично невизначеними називають задачі, які неможливо вирішити, використовуючи тільки рівняння статички (рівноваги). У статично невизначених системах не всі реакції або внутрішні зусилля в стрижнях можна визначити за допомогою рівнянь статички. Для вирішення таких задач необхідно скласти додаткові рівняння, розглядаючи деформацію стрижнів в системі або системи в цілому. Ці рівняння називають рівняннями суцільності або нерозривності деформацій.

Ступінь статичної невизначеності системи визначається як різниця між кількістю реакцій в опорах і кількістю незалежних рівнянь статички.

Статично невизначені завдання бувають трьох типів в залежності від виду зовнішніх впливів. Тобто розрахунок статично невизначених задач проводиться:

- 1) на дію зовнішнього навантаження;
- 2) температурний вплив;
- 3) неточність складання.

При розрахунках методом допустимих напружень потрібно, щоб максимальні напруження в стрижні не перевищували так зване допустиме напруження. Умова міцності має вигляд

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma], \quad (2.7)$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження, тобто напруження, при якому конструкція витримує тривалий час навантаження, що діють на неї, не руйнуючись, і визначається так:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_o}{n}, \quad (2.8)$$

де σ_o – небезпечне напруження, для пластичних матеріалів $\sigma_o = \sigma_T$, для крихких – $\sigma_o = \sigma_\sigma$;

n – коефіцієнт запасу.

При розрахунку конструкцій зустрічаються три типи задач:

1. Перевірка міцності полягає у визначенні розрахункових напружень σ , у характерних перерізах при відомій площі поперечного перерізу A і поздовжній силі N . Отримане при цьому найбільше розрахункове напруження σ_{\max} порівнюють з допустимим

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]. \quad (2.9)$$

2. Підбір перерізу полягає у визначенні площі поперечного перерізу за відомими N і $[\sigma]$. Прийнята площа повинна задовольняти умову

$$A \geq [A] = \frac{N}{[\sigma]}. \quad (2.10)$$

3. Визначення вантажопідйомності. За відомими значеннями A і $[\sigma]$ визначають $[N]$ і допустиме зовнішнє навантаження

$$F \leq [F]; [N] = [F]; [N] = [\sigma]A. \quad (2.11)$$

2.2. Приклади розв'язання задач

Задача 2.2.1. Приклад розрахунку шарнірно-стрижневої системи

Для заданої розрахункової схеми (рис. 2.2), виходячи з умов міцності при розтяганні-стисканні, визначити розміри поперечних перерізів сталевих стрижнів.

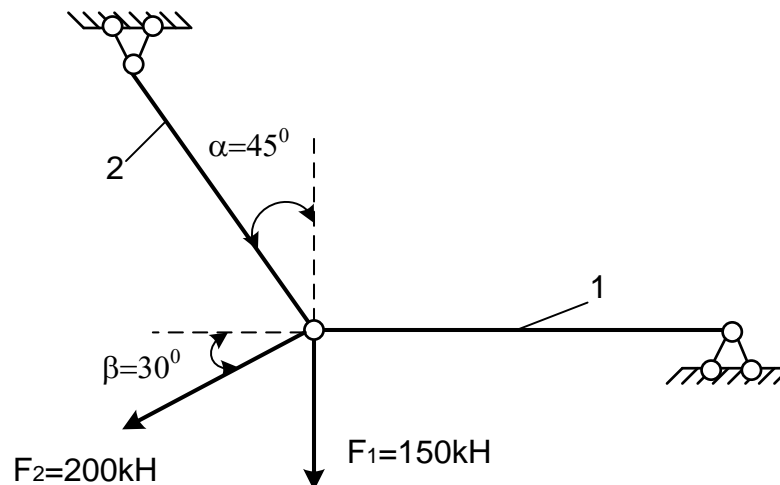


Рис. 2.2. Схема шарнірно-стрижневої системи

Розв'язання

Вирізаємо вузол А, як показано на рис. 2.3.

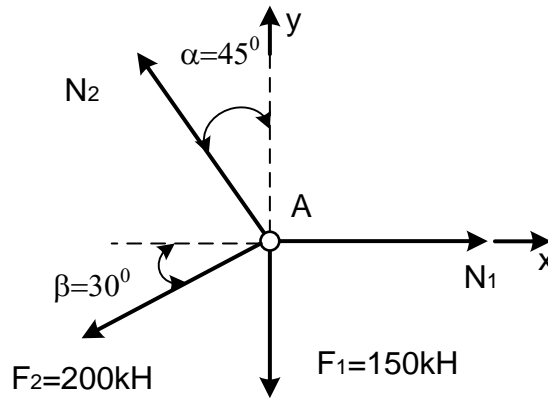


Рис. 2.3. Визначення внутрішніх зусиль у стрижнях шарнірно-стрижневої системи

Внутрішні зусилля визначаємо за допомогою рівнянь статички.

$$\sum Y = 0, N_2 \cdot \cos\alpha - F_1 - F_2 \cdot \sin\beta = 0,$$

звідси

$$N_2 = \frac{F_1 + F_2 \cdot \sin\beta}{\cos\alpha} = \frac{150 + 200 \cdot 0,5}{0,707} = 353,607 \text{ kH}.$$

$$\sum X = 0, N_1 - N_2 \cdot \sin\alpha - F_2 \cdot \cos\beta = 0,$$

звідси

$$N_1 = N_2 \cdot \sin\alpha + F_2 \cdot \cos\beta = 353,607 \cdot 0,707 + 200 \cdot 0,866 = 423,200 \text{ kH}.$$

Виходячи з умови міцності при розтяганні-стисканні (2.7)

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

знайдемо площу поперечного перерізу стрижнів:

$$A_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{423,200 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 2,645 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 0,265 \text{ см}^2 ;$$

$$A_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{353,607 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 2,210 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 0,221 \text{ см}^2 .$$

Задача 2.2.2. Приклад розрахунку східчастого бруса з урахуванням власної ваги

Для заданої розрахункової схеми східчастого бруса (рис. 2.4) з урахуванням власної ваги і діючих навантажень побудувати епюри внутрішніх зусиль і нормальних напружень, виконати перевірку міцності та обчислити переміщення вільного кінця стрижня. Об'ємна вага стрижня дорівнює $\gamma = 80 \text{ кН/м}^3$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

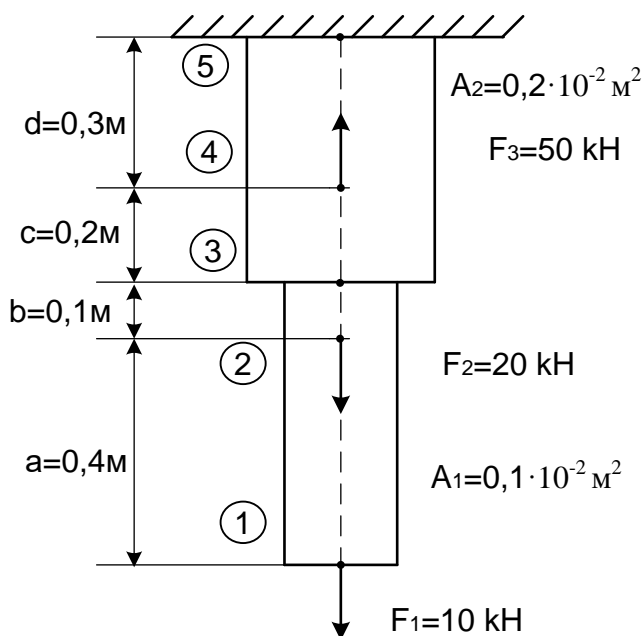
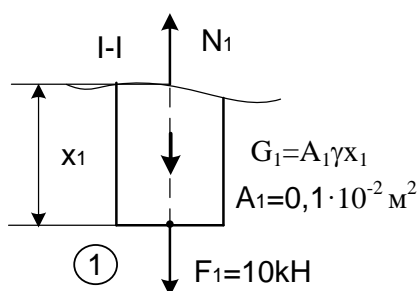


Рис. 2.4. Розрахункова схема східчастого бруса

Розв'язання

Помічаємо характерні точки 1, 2, 3, 4, 5 та проводимо перерізи між характерними точками, розглядаючи кожен раз консольну частину тому, що ми не визначали реакції в брусі. Внутрішні зусилля на ділянках бруса знаходимо з урахуванням власної ваги і заданого навантаження за допомогою рівнянь рівноваги.



Переріз I-I проводимо між точками 1 і 2. Межі зміни x_1 , $0 \leq x_1 \leq a = 0,4 \text{ м}$.

Власна вага на цій ділянці

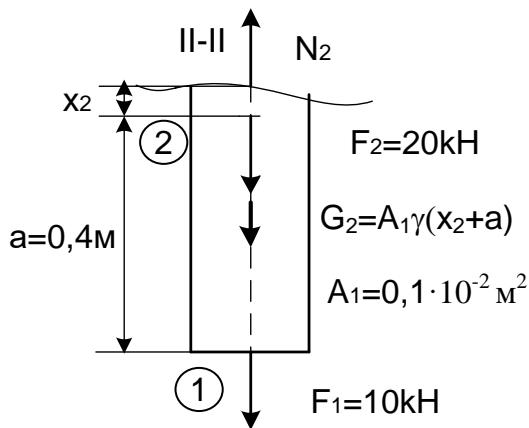
$$G_1 = A_1 \cdot \gamma \cdot x_1;$$

$$\sum X = 0, N_1 = F_1 + G_1 = 10 + 0,1 \cdot 10^{-2} \cdot 80 \cdot x_1.$$

Підставляємо межі зміни x_1 :

при $x_1 = 0$, $N_1 = 10 \text{ kH}$;

при $x_1 = 0,4 \text{ м}$, $N_1 = 10 + 0,1 \cdot 10^{-2} \cdot 80 \cdot 0,4 = 10,03 \text{ kH}$.



Переріз II-II проводимо між точками 2 і 3. Межі зміни x_2 , $0 \leq x_2 \leq b = 0,1 \text{ м}$.

Власна вага на цій ділянці

$$G_2 = A_1 \cdot \gamma \cdot (x_2 + a);$$

$$\sum X = 0;$$

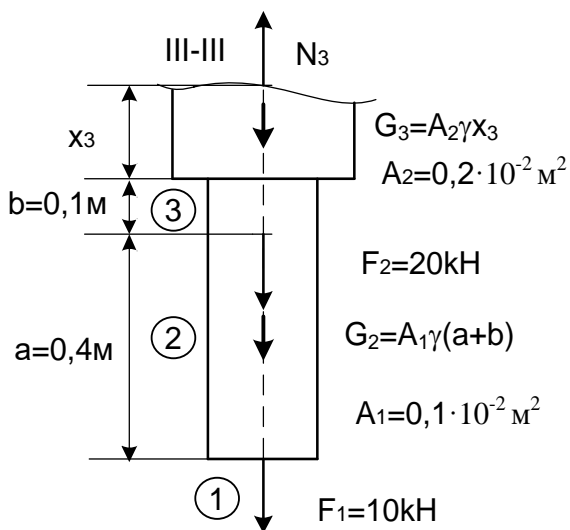
$$N_2 = F_1 + F_2 + G_2 = 10 + 20 + 0,1 \cdot 10^{-2} \cdot 80 \cdot (x_2 + 0,4).$$

Підставляємо межі зміни x_2 :

при $x_2 = 0$, $N_2 = 10 + 20 + 0,1 \cdot 10^{-2} \cdot 80 \cdot 0,4 = 30,03 \text{ kH}$;

при $x_2 = 0,1 \text{ м}$,

$$N_2 = 10 + 20 + 0,1 \cdot 10^{-2} \cdot 80 \cdot (0,1 + 0,4) = 30,04 \text{ kH}.$$



Переріз III-III проводимо між точками 3 і 4. Межі зміни x_3 , $0 \leq x_3 \leq c = 0,2 \text{ м}$.

Власна вага на цій ділянці

$$G_3 = A_2 \cdot \gamma \cdot x_3;$$

$$\sum X = 0;$$

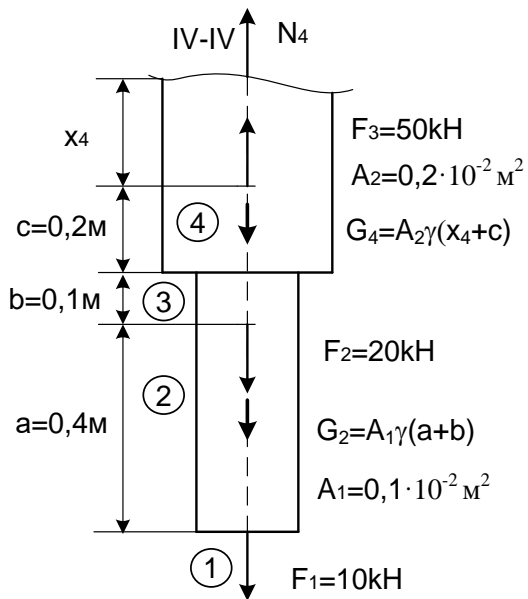
$$N_3 = F_1 + F_2 + G_2 + G_3 = 10 + 20 + 0,1 \cdot 10^{-2} \cdot 80 \cdot (0,4 + 0,1) + 0,2 \cdot 10^{-2} \cdot 80 \cdot x_3.$$

Підставляємо межі зміни x_3 :

при $x_3 = 0$, $N_3 = 10 + 20 + 0,1 \cdot 10^{-2} \cdot 80 \cdot 0,5 = 30,04 \text{ kH}$;

при $x_3 = 0,2 \text{ м}$,

$$N_3 = 10 + 20 + 0,1 \cdot 10^{-2} \cdot 80 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 10^{-2} \cdot 80 \cdot 0,2 = 30,07 \text{ kH}.$$



Переріз IV-IV проводимо між точками 4 і 5. Межі зміни x_4 , $0 \leq x_4 \leq d = 0,3$ м.

Власна вага на цій ділянці

$$G_4 = A_2 \cdot \gamma \cdot (x_4 + c);$$

$$\sum X = 0;$$

$$N_4 = F_1 + F_2 - F_3 + G_2 + G_4 = 10 + 20 - 50 + 0,1 \cdot 10^{-2} \cdot 80 \cdot (0,4 + 0,1) + 0,2 \cdot 10^{-2} \cdot 80 \cdot (x_4 + 0,2).$$

Підставляємо межі зміни x_4 :

$$\text{при } x_4 = 0, N_4 = 10 + 20 - 50 + 0,1 \cdot 10^{-2} \cdot 80 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 10^{-2} \cdot 80 \cdot 0,2 = -19,93 \text{ kH},$$

при $x_4 = 0,3$ м,

$$N_4 = 10 + 20 - 50 + 0,1 \cdot 10^{-2} \cdot 80 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 10^{-2} \cdot 80 \cdot (0,2 + 0,3) = -19,88 \text{ kH}.$$

За отриманими розрахунками будуюмо епюру поздовжніх сил (рис. 2.5, а)

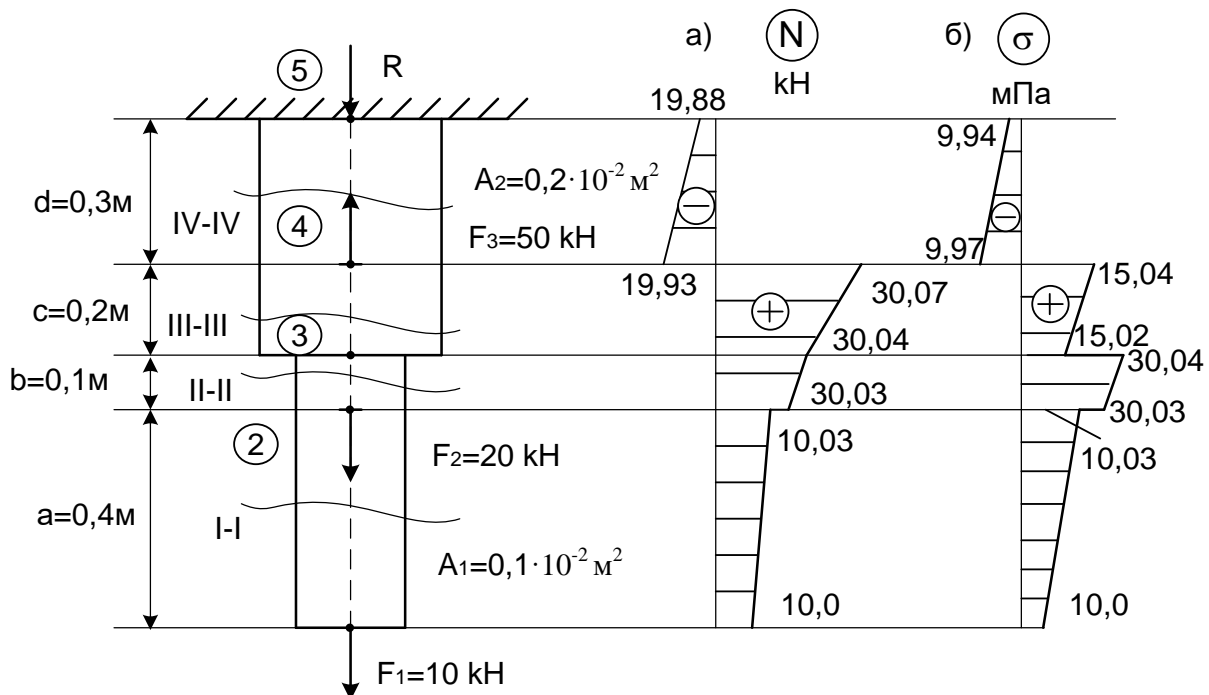


Рис. 2.5. Епюри поздовжніх сил та нормальних напружень східчастого бруса

Знаючи поздовжні сили, будуємо епюру нормальних напружень за залежністю (2.1):

ділянка I-I:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{10,0 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 10^{-2}} 10^{-6} = 10,0 \text{ МПа};$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{10,03 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 10^{-2}} 10^{-6} = 10,03 \text{ МПа};$$

ділянка II-II:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{30,03 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 10^{-2}} 10^{-6} = 30,03 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{30,04 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 10^{-2}} 10^{-6} = 30,04 \text{ МПа};$$

ділянка III-III:

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{30,04 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 10^{-2}} 10^{-6} = 15,02 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{30,07 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 10^{-2}} 10^{-6} = 15,04 \text{ МПа};$$

ділянка IV-IV:

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_2} = \frac{-19,93 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 10^{-2}} 10^{-6} = -9,97 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_2} = \frac{19,88 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 10^{-2}} 10^{-6} = -9,94 \text{ МПа}.$$

За цими розрахунками будуємо епюру нормальних напружень (рис. 2.4, б)

Перевірка міцності виконується на підставі умови міцності при розтяганні-стисканні (2.7):

$$\sigma_{max} = 30,07 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Умова міцності виконується, тому міцність забезпечена.

Переміщення вільного кінця стрижня виконується на підставі закону Гука при силовому впливі та від власної ваги (2.5) та (2.6):

$$\Delta l_F = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}; \quad \Delta l_G = \frac{G \cdot l}{2 \cdot E \cdot A}.$$

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{F_1 \cdot (a + b)}{E \cdot A_1} + \frac{F_1 \cdot (c + d)}{E \cdot A_2} + \frac{F_2 \cdot b}{E \cdot A_1} + \frac{F_2 \cdot (c + d)}{E \cdot A_2} - \frac{F_3 \cdot d}{E \cdot A_2} + \\ &+ \frac{G_2 \cdot (a + b)}{2 \cdot E \cdot A_1} + \frac{G_4 \cdot (c + d)}{2 \cdot E \cdot A_2} + \frac{G_2 \cdot (c + d)}{E \cdot A_2} = \\ &= \frac{10 \cdot 10^3 \cdot (0,4 + 0,1)}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 10^{-2}} + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot (0,2 + 0,3)}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot 10^{-2}} + \\ &+ \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0,1}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 10^{-2}} + \frac{20 \cdot 10^3 \cdot (0,2 + 0,3)}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot 10^{-2}} - \\ &- \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot 10^{-2}} + \frac{0,04 \cdot 10^3 \cdot (0,4 + 0,1)}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 10^{-2}} + \\ &+ \frac{0,08 \cdot 10^3 \cdot (0,2 + 0,3)}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot 10^{-2}} + \frac{0,04 \cdot 10^3 \cdot (0,2 + 0,3)}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot 10^{-2}} = \\ &= 0,3515 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,035 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Тобто вільний кінець стрижня пересувається вниз на 0,035 мм.

Задача 2.2.3. Приклад розрахунку статично невизначених систем на температурний вплив

Для заданої розрахункової схеми статично невизначеного східчастого бруса (рис. 2.6) перевірити міцність усіх частин бруса, якщо $[\sigma_p] = 60 \text{ МПа}$, $[\sigma_{ст}] = 120 \text{ МПа}$. Температурний коефіцієнт лінійного розширення матеріалу бруса $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$, модуль пружності матеріалу $E = 1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. $A = 20 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

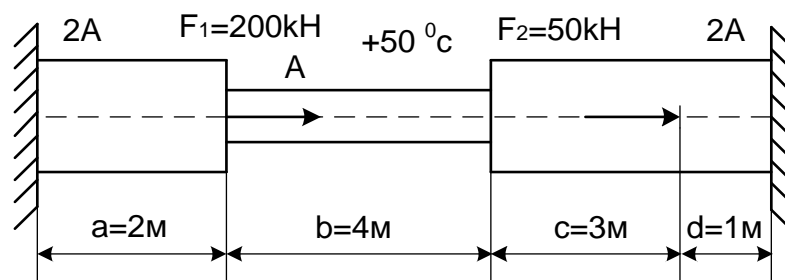


Рис. 2.6. Розрахункова схема статично невизначеного східчастого бруса

Розв'язання

Складаємо рівняння рівноваги: $\sum X = 0$, $R_A + F_1 + F_2 - R_B = 0$ (рис. 2.6). Для цієї системи можна скласти одне рівняння рівноваги, а невідомих у цьому рівнянні два: R_A та R_B . Одного рівняння рівноваги недостатньо для знаходження реакцій, тому ця система є статично невизначеною. Для розв'язання такої системи необхідно скласти додаткове рівняння, яке називають рівнянням сумісності деформацій. При складанні цього рівняння розглядають деформацію системи. Для того щоб система мала можливість деформуватися, відкинемо одну із опор, наприклад праву (рис. 2.7, а).

Тепер точка В має можливість пересуватися вправо на величину Δl . Знайдемо це подовження на підставі закону Гука (2.5) та подовження від дії температури:

$$\Delta l_F = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}$$

$$\Delta l_t = \alpha \cdot (a + b + c + d) \cdot t = \alpha \cdot l \cdot t,$$

$$\Delta l = \frac{F_1 \cdot a}{E \cdot 2A} + \frac{F_2 \cdot (a + c)}{E \cdot 2A} + \frac{F_2 \cdot b}{E \cdot A} + \alpha \cdot l \cdot t.$$

Але у заданій системі точка В пересуватися не може, тому що у цій точці стоїть опора. Тому у точку В прикладемо таку реакцію R_B , щоб вернути цю точку на місце. Подовження від реакції R_B також знайдемо на підставі закону Гука

$$\Delta l_{R_b} = \frac{R_b \cdot (a + c + d)}{E \cdot 2A} + \frac{R_b \cdot b}{E \cdot A}.$$

Тоді $\Delta l = \Delta l_{R_b}$,

$$\frac{F_1 \cdot a}{E \cdot 2A} + \frac{F_2 \cdot (a + c)}{E \cdot 2A} + \frac{F_2 \cdot b}{E \cdot A} + \alpha \cdot l \cdot t = \frac{R_b \cdot (a + c + d)}{E \cdot 2A} + \frac{R_b \cdot b}{E \cdot A}.$$

Це рівняння є рівнянням сумісності деформацій. У цьому рівнянні невідомою є реакція R_B . Розв'язавши це рівняння, знайдемо реакцію R_B :

$$R_b = \frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot (a + c) + 2 \cdot F_2 \cdot b + 2 \cdot \alpha \cdot l \cdot t \cdot E \cdot A}{(a + c + d) + 2b} =$$

$$= \frac{(200 \cdot 2 + 50 \cdot (2 + 3) + 2 \cdot 50 \cdot 4) \cdot 10^3 + 2 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 50 \cdot 1,2 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4}}{(2 + 3 + 1) + 2 \cdot 4}$$

$$= 280714 \text{ H} = 280,714 \text{ kH}.$$

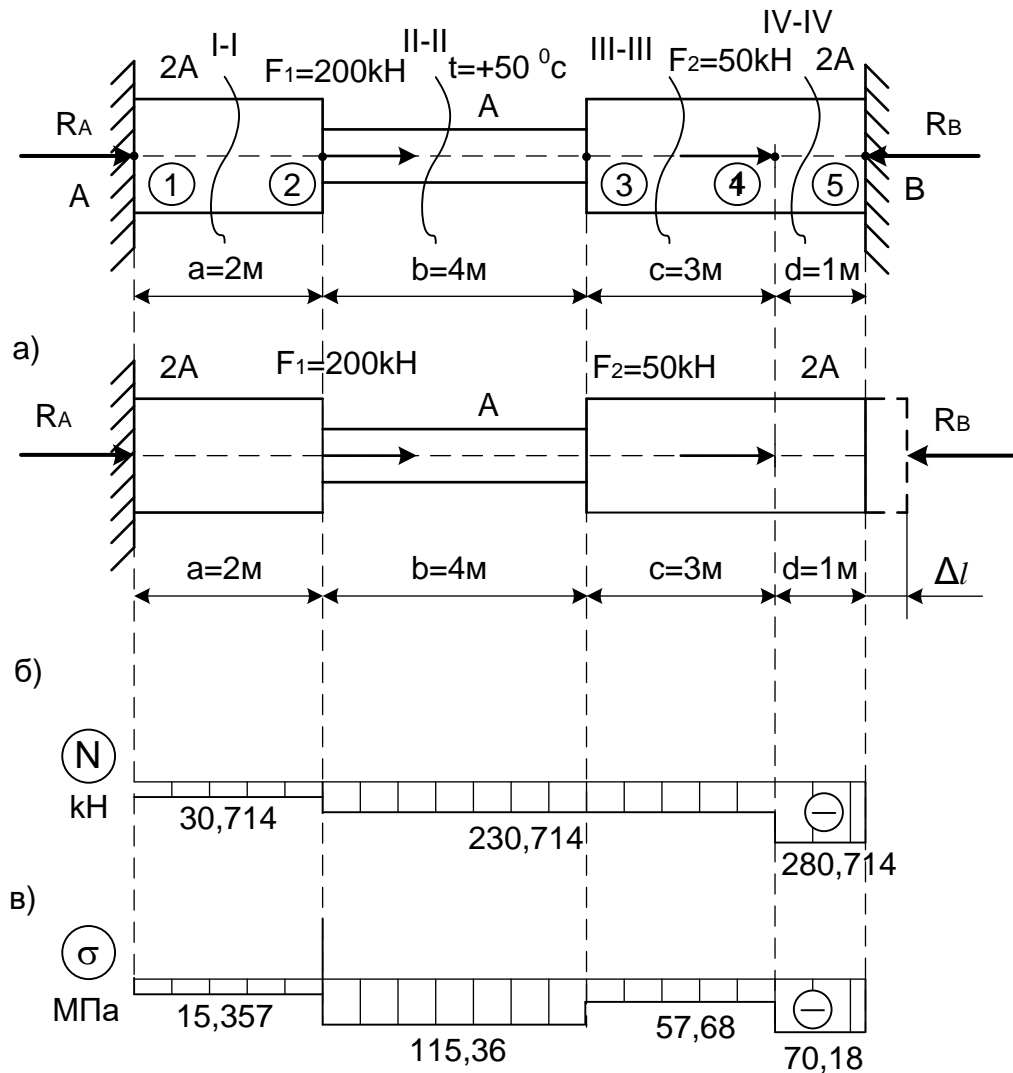


Рис. 2.7. Побудова епюр поздовжніх сил та нормальних напружень

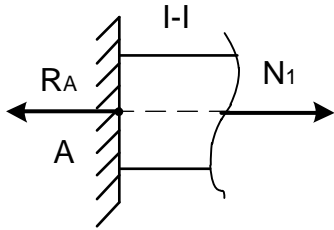
Тепер з рівняння рівноваги можна знайти реакцію R_A :

$$R_A = -F_1 - F_2 + R_B = -200 - 50 + 95,571 = -154,429 \text{ kH}.$$

Реакція R_A за результатами розрахунків від'ємна, це означає, що вона спрямована в інший бік.

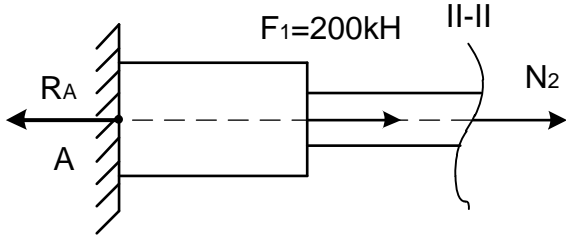
Будуємо епюру поздовжніх сил методом перерізів, як у задачі 5, та визначаємо нормальні напруження за формулою (2.1).

Переріз I-I проводимо між точками 1 і 2.



$$\sum X = 0, N_1 - R_A = 0, N_1 = R_A = 154,429 \text{ kH}.$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{2A} = \frac{154,429 \cdot 10^3}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} 10^{-6} = 38,607 \text{ МПа}.$$

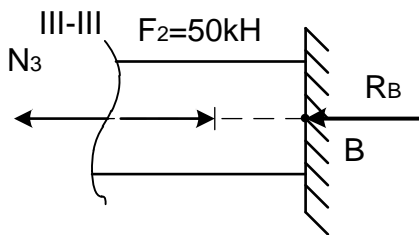


Переріз II-II проводимо між точками 2 і 3. $\sum X = 0;$

$$N_2 + F_1 - R_A = 0;$$

$$N_2 = R_A - F_1 = 154,429 - 200 = -45,571 \text{ kH}.$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{-45,571 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} 10^{-6} = -22,785 \text{ МПа}.$$



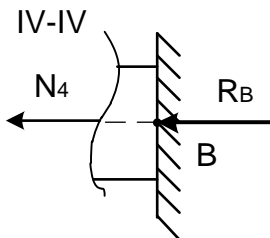
Переріз III-III проводимо між точками 3 і 4.

$$\sum X = 0;$$

$$-N_3 + F_2 - R_B = 0;$$

$$N_3 = -R_B + F_2 = -95,571 + 50 = -45,571 \text{ kH}.$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{2A} = \frac{-45,571 \cdot 10^3}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} 10^{-6} = -11,393 \text{ МПа}.$$



Переріз IV-IV проводимо між точками 4 і 5.

$$\sum X = 0;$$

$$-N_4 - R_B = 0;$$

$$N_4 = -R_B = -95,571 \text{ kH}.$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{2A} = \frac{-95,571 \cdot 10^3}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} 10^{-6} = -23,892 \text{ МПа}.$$

За цими розрахунками будемо епюри поздовжніх сил (рис. 2.7, б) та нормальних напружень (рис. 2.7, в).

Перевіряємо міцність сходинок бруса. На підставі умови міцності

$$\sigma_{max}^p = 36,607 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 60 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{max}^{сж} = 23,892 \text{ МПа} < [\sigma_{сж}] = 120 \text{ МПа}.$$

Умови міцності виконуються, тому міцність забезпечена.

Задача 2.2.4. Приклад розрахунку статично невизначених систем на зміщення опорних зв'язків

Для заданої розрахункової схеми статично невизначеного східчастого бруса (рис. 2.8) перевірити міцність усіх частин бруса, якщо $[\sigma_p] = 60 \text{ МПа}$, $[\sigma_{ст}] = 120 \text{ МПа}$. Зазор $\Delta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}$, модуль пружності матеріалу $E = 1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. $A = 20 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

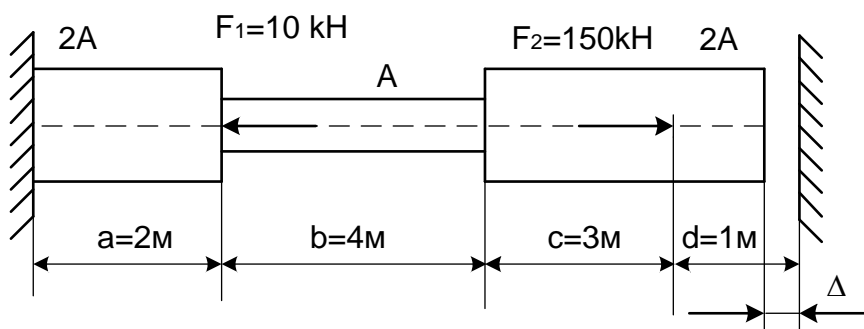
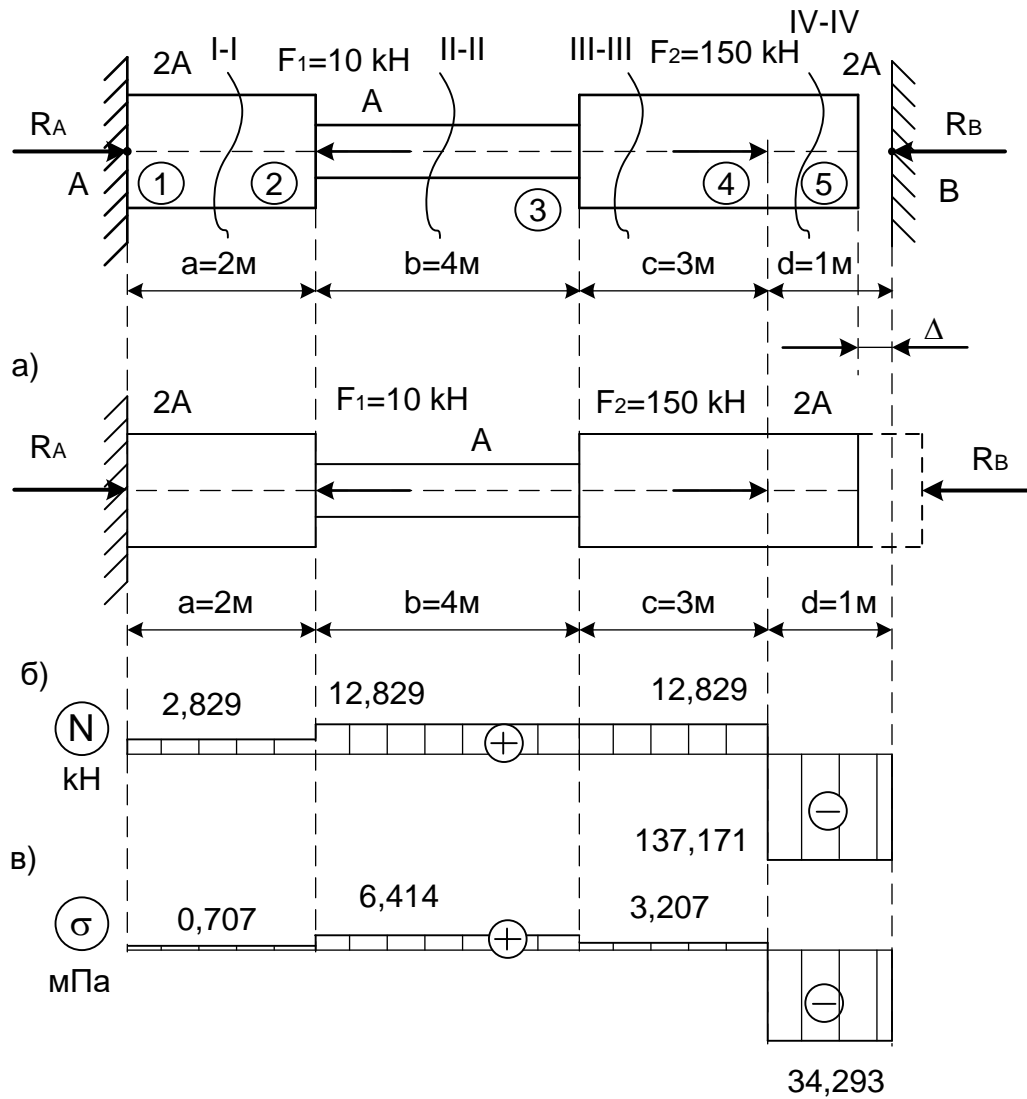


Рис. 2.8. Розрахункова схема статично невизначеного східчастого бруса

Розв'язання

Складаємо рівняння рівноваги: $\sum X = 0$, $R_A - F_1 + F_2 - R_B = 0$ (рис. 2.8). Як і у попередньому прикладі, для цієї системи можна скласти одне рівняння рівноваги, а невідомих у цьому рівнянні два: R_A та R_B , тому ця система є статично невизначеною. Для розв'язання цієї задачі також треба скласти рівняння сумісності деформацій, для чого відкидаємо одну із опор (зручніше відкидати опору, де є зазор) (рис. 2.9, а).



Рису. 2.9. Побудова епюр поздовжніх сил та нормальних напружень

Тепер точка В має можливість пересуватися. Знайдемо переміщення точки В на підставі закону Гука (2.5):

$$\Delta l_F = \frac{F \cdot l}{E \cdot A};$$

$$\Delta l_F = -\frac{F_1 \cdot a}{E \cdot 2A} + \frac{F_2 \cdot (a + c)}{E \cdot 2A} + \frac{F_2 \cdot b}{E \cdot A}.$$

Але у заданій системі точка В не може пересуватися тому, що в цій точці стоїть опора. Прикладемо до точки В таку реакцію R_B , щоб точка В залишилась на місці з урахуванням зазора:

$$\Delta l_F - \Delta = \Delta l_{R_B}.$$

Для заданої системи це рівняння є рівнянням сумісності деформацій. Подовження від R_B знайдемо на підставі закону Гука

$$\Delta l_{R_b} = \frac{R_b \cdot (a + c + d)}{E \cdot 2A} + \frac{R_b \cdot b}{E \cdot A}.$$

Тоді

$$-\frac{F_1 \cdot a}{E \cdot 2A} + \frac{F_2 \cdot (a + c)}{E \cdot 2A} + \frac{F_2 \cdot b}{E \cdot A} - \Delta = \frac{R_b \cdot (a + c + d)}{E \cdot 2A} + \frac{R_b \cdot b}{E \cdot A}.$$

Звідси

$$R_b = \frac{-F_1 \cdot a + F_2 \cdot (a + c) + 2 \cdot F_2 \cdot b - 2 \cdot E \cdot A \cdot \Delta}{a + 2 \cdot b + c + d}$$

$$= \frac{(-10 \cdot 2 + 150 \cdot (2 + 3) + 2 \cdot 150 \cdot 4) \cdot 10^3 - 2 \cdot 1,2 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-5}}{2 + 2 \cdot 4 + 3 + 1}$$

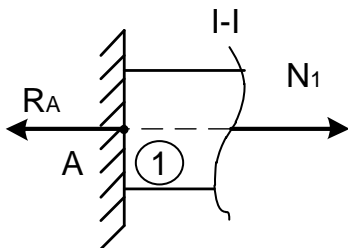
$$= 137,171 \cdot 10^3 \text{ H} = 137,171 \text{ kH}$$

Тепер з рівняння рівноваги можна знайти реакцію R_A :

$$R_A = F_1 - F_2 + R_B = 10 - 150 + 137,171 = -2,829 \text{ kH}.$$

За результатами розрахунків реакція R_A від'ємна, тому спрямовуємо її в інший бік.

Знаючи реакції, будуємо епюру поздовжніх сил (рис. 2.9,б) та нормальних напружень (рис. 2.9,в) за формулою (2.1).

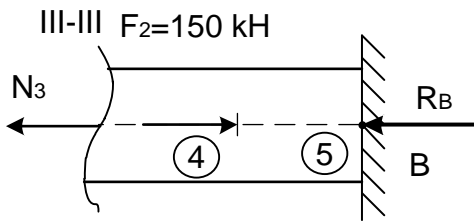


Переріз I-I проводимо між точками 1 і 2 та з рівняння рівноваги знаходимо поздовжню силу N_1 .

$$\sum X = 0, -R_A + N_1 = 0, \text{ звідси}$$

$$N_1 = R_A = 2,829 \text{ kH}.$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{2 \cdot A} = \frac{2,829 \cdot 10^3}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} 10^{-6} = 0,707 \text{ МПа}.$$



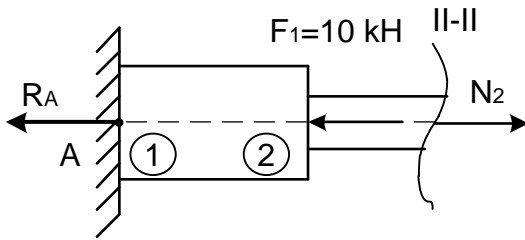
Переріз II-II проводимо між точками 2 і 3.

$$\sum X = 0, -R_A - F_1 + N_2 = 0,$$

звідси

$$N_2 = R_A + F_1 = 2,829 + 10 = 12,829 \text{ kH.}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{12,829 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} 10^{-6} = 6,414 \text{ МПа.}$$



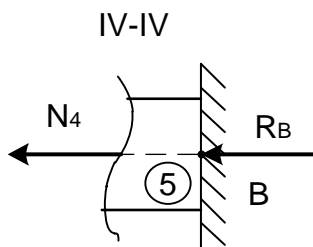
Переріз III-III проводимо між точками 3 і 4.

$$\sum X = 0, -N_3 + F_2 - R_B = 0,$$

звідси

$$N_3 = F_2 - R_B = 150 - 137,171 = 12,829 \text{ kH.}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{2 \cdot A} = \frac{12,829 \cdot 10^3}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} 10^{-6} = 3,207 \text{ МПа.}$$



Переріз IV-IV проводимо між точками 4 і 5.

$$\sum X = 0, -N_4 - R_B = 0, \text{ звідси}$$

$$N_4 = -R_B = -137,171 \text{ kH.}$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{2 \cdot A} = \frac{-137,171 \cdot 10^3}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} 10^{-6} = -34,293 \text{ МПа.}$$

Перевіряємо міцність сходинок бруса. На підставі умови міцності

$$\sigma_{max}^p = 6,414 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 60 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{max}^{ст} = 34,293 \text{ МПа} < [\sigma_{ст}] = 120 \text{ МПа.}$$

Умови міцності виконуються, тому міцність забезпечена.

Якщо $\Delta l_F < \Delta$, то правий кінець стрижня не переміщується до точки В. Таким чином, в т. В не виникає опорна реакція і стрижень можна розраховувати як статично визначений.

Контрольні запитання

1. Яка деформація називається “розтяганням-стисканням”? Які виникають внутрішні зусилля та напруження?
2. Як обчислюються нормальні напруження в поперечному перерізі розтягнутого стержня?
3. Що називається відносною повздовжньою та поперечною деформаціями та їх розмірності?
4. Що називається коефіцієнтом Пуассона?
5. Сформулюйте закон Гука при розтяганні-стисканні і запишіть його математичне вираження.
6. Які задачі називаються статично невизначеними та які види цих задач бувають?
7. Які додаткові рівняння необхідно скласти для розв’язання статично невизначених задач?
8. Як записується умова міцності розтягнутого стержня за методом допустимих напружень?
9. Що таке $[\sigma]$ та як воно визначається для пластичних та крихких матеріалів?

3. ВИЗНАЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

3.1. Короткі теоретичні відомості

При розрахунках на міцність, жорсткість і стійкість в опорі матеріалів необхідно знати та вміти визначати різні геометричні характеристики плоских перерізів.

Статичним моментом площі називають добуток площі на відстань від центру ваги перерізу до відповідної осі (3.1), рис. 3.1.

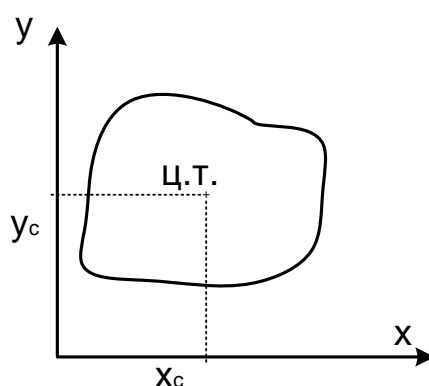


Рис. 3.1. Визначення статичного моменту площі

$$S_x = A \cdot y_c, \quad S_y = A \cdot x_c . \quad (3.1)$$

Розмірність статичного моменту площі визначають в метрах кубічних (m^3) або сантиметрах кубічних (cm^3).

Статичний момент площі може бути додатним, від'ємним або дорівнювати нулю.

На підставі (3.1) отримуємо координати центру ваги плоского перерізу (3.2).

$$x_c = \frac{\sum S_y}{\sum A}, \quad y_c = \frac{\sum S_x}{\sum A} . \quad (3.2)$$

Для того щоб знайти центр ваги плоского перерізу, необхідно взяти суму статичних моментів площі щодо довільних осей і розділити їх на площу перерізу.

Якщо переріз має одну вісь симетрії, то центр ваги лежить на цій осі. Якщо переріз має дві осі симетрії, то центр ваги лежить на перетині цих осей.

Осьовим моментом інерції плоского перерізу відносно будь-якої осі називають суму добутків елементарних площадок dA на квадрат відстані від центру ваги цих площадок до відповідної осі (3.3) (рис. 3.2).

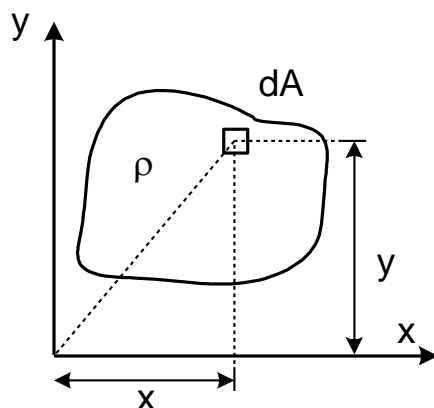


Рис. 3.2. Визначення моментів інерції

$$J_x = \int_A y^2 dA, \quad J_y = \int_A x^2 dA . \quad (3.3)$$

Полярним моментом інерції називають суму добутків елементарних площадок на квадрат відстані від центру ваги цих площадок до певної точки – полюса (3.4)

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA . \quad (3.4)$$

З прямокутного трикутника $\rho = x^2 + y^2$, тоді

$$J_\rho = J_x + J_y . \quad (3.5)$$

Полярний момент інерції дорівнює сумі осьових моментів інерції.

Осьові і полярний моменти інерції завжди додатні.

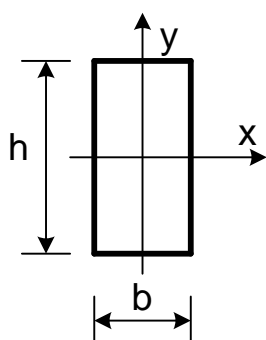
Відцентровим моментом інерції щодо двох взаємно перпендикулярних осей називається сума добутків елементарних площадок dA на координати від центру ваги цих площадок до відповідних осей (3.6)

$$J_{xy} = \int_a xy dA . \quad (3.6)$$

Він може бути додатним, від'ємним або дорівнювати нулю.

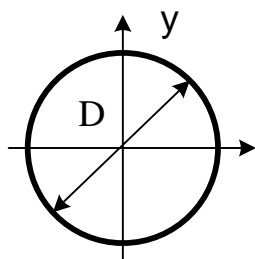
Одиниці виміру всіх моментів інерції – метр у четвертому ступені (m^4) або сантиметр у четвертому ступені (cm^4).

Момент інерції прямокутника дорівнює



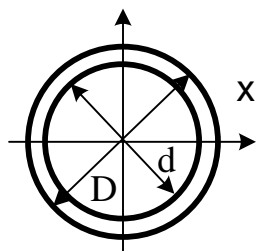
$$J_x = \frac{bh^3}{12} \quad J_y = \frac{hb^3}{12} . \quad (3.7)$$

Момент інерції кола



$$J_x = J_y = \frac{J_\rho}{2} = \frac{\pi \cdot D^4}{64} . \quad (3.8)$$

Момент інерції кільця



$$J_x = J_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64} (1 - k^4), \quad (3.10)$$

де $k = \frac{d}{D}$.

Якщо необхідно визначити моменти інерції щодо осей, паралельних заданим, то користуються формулою паралельного перенесення (рис. 3.3).

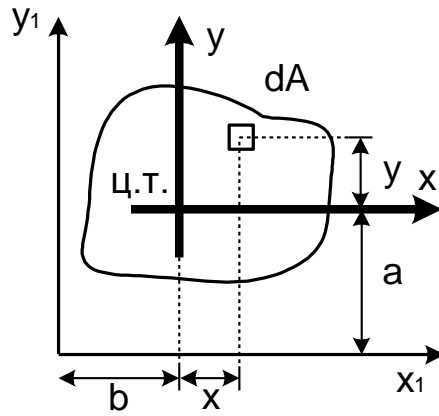


Рис. 3.3. Визначення моментів інерції щодо осей, паралельних заданим

$$J_{x_1} = J_x + a^2 A, \quad J_{y_1} = J_y + b^2 A, \quad (3.10)$$

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} + a \cdot b \cdot A.$$

Якщо необхідно визначити моменти інерції щодо повернутих осей, то користуються такими формулами (рис. 3.4):

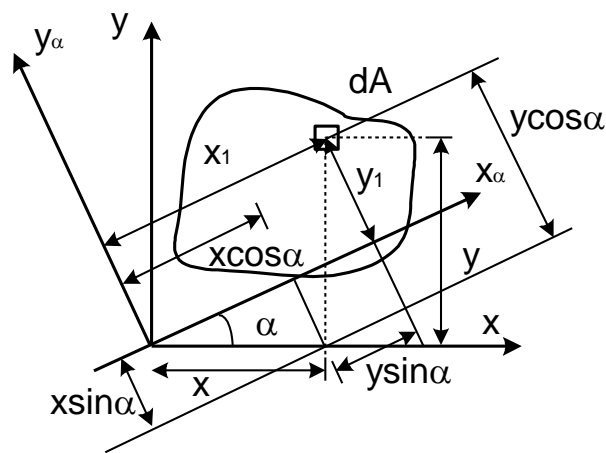


Рис. 3.4. Визначення моментів інерції щодо повернутих осей

$$\begin{aligned} J_{y_\alpha} &= \cos^2 \alpha \cdot J_y + \sin^2 \alpha \cdot J_x + \sin 2\alpha \cdot J_{xy}; \\ J_{x_\alpha} &= \cos^2 \alpha \cdot J_x + \sin^2 \alpha \cdot J_y - \sin 2\alpha \cdot J_{xy}; \\ J_{x_\alpha y_\alpha} &= \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Сума осьових моментів інерції, повернених на кут α , дорівнює сумі осьових моментів інерції щодо основних осей.

$$J_x + J_y = J_{x_\alpha} + J_{y_\alpha} . \quad (3.12)$$

Головними осями інерції називають осі, щодо яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю, а осьові моменти інерції набувають *max* і *min* значення.

Головними моментами інерції називаються моменти інерції щодо головних осей.

Головні осі інерції, початок координат яких знаходиться у центрі ваги перерізу, називають головними центральними осями інерції.

Положення головних центральних осей інерції визначають за формулою

$$tg2\alpha = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} . \quad (3.13)$$

Додатний кут α відкладають проти годинникової стрілки.

Величини головних моментів інерції визначають за формулою

$$J_{u, v} = J_{\max, \min} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} . \quad (3.14)$$

Величини моментів інерції не зміняться, якщо в підінтегральний вираз замість змінних розмірів ввести їх середнє значення i_x та i_y .

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} ; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} , \quad (3.15)$$

i_x і i_y – радіуси інерції.

Радіуси інерції, відповідні головним осям, називаються головними радіусами інерції, їх визначають за формулами

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{J_{\max}}{A}} , \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} , \quad (3.16)$$

Одиниці виміру радіусів інерції – метри (m) або сантиметри (cm).

Моментом опору перерізу відносно будь-якої головної осі називають абсолютне відношення осьового моменту інерції відносно цієї осі до координати, найбільш віддаленої точки перерізу від цієї осі (рис. 3.5).

Проводимо дотичні, паралельні осі U , і отримуємо точки 1 і 2. Вони найбільш віддалені від осі U . Позначимо їх координати через V_1, V_2 . Проводимо дотичні, паралельні осі V , і отримуємо точки 3 і 4. Вони найбільш віддалені від осі V . Позначимо їх координати через U_1, U_2 . Причому U_2 і V_2 від'ємні. Тоді

$$\begin{aligned} W_{U_1} &= \frac{J_U}{V_1}; & W_{U_2} &= \frac{J_U}{V_2}; & (3.17) \\ W_{V_1} &= \frac{J_V}{U_1}, & W_{V_2} &= \frac{J_V}{U_2}. \end{aligned}$$

Одиниці виміру моментів опору – метри кубічні (m^3) або сантиметри кубічні (cm^3).

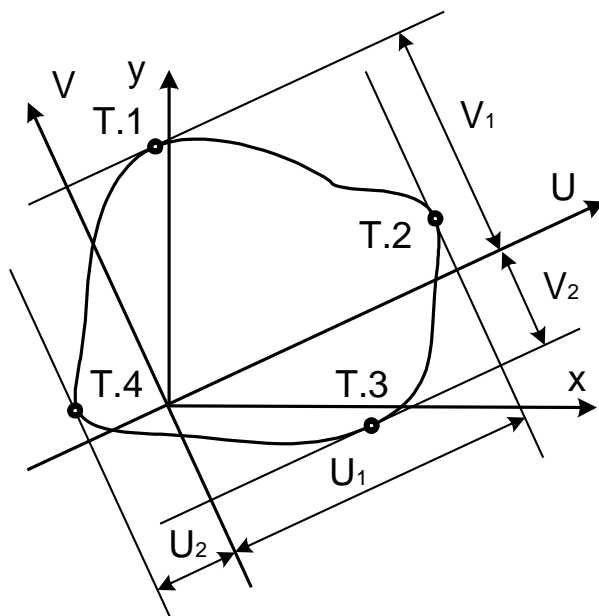


Рис. 3.5. Визначення моментів опору

3.2. Приклади розв'язання задач

Задача 3.2.1. Визначення геометричних характеристик плоских перерізів

Для заданого поперечного перерізу (рис. 3.6) визначити положення головних центральних осей перерізу і знайти величини головних моментів інерції (двотавр № 30, швелер № 22, кутник 125x80x10, смуга 400x16).

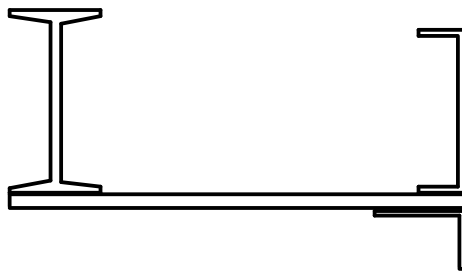
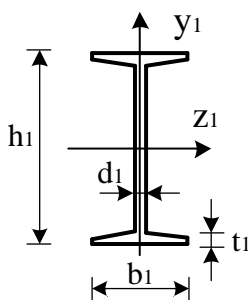


Рис. 3.6. Схема поперечного перерізу

Розв'язання

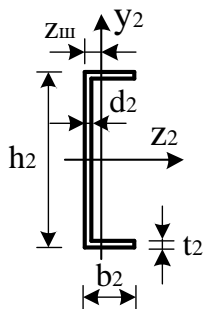
Для розв'язання задачі спочатку необхідно із сортаменту виписати необхідні дані для елементів перерізу.



$$h_1 = 30,0 \text{ см}, b_1 = 13,5 \text{ см}, d_1 = 0,65 \text{ см},$$

$$t_1 = 1,02 \text{ см},$$

$$A_1 = 46,5 \text{ см}^2, J_{z_1} = 7080 \text{ см}^4, J_{y_1} = 337 \text{ см}^4.$$

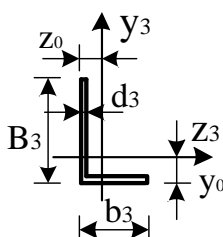


$$h_2 = 22,0 \text{ см}, b_2 = 8,0 \text{ см}, d_2 = 0,54 \text{ см},$$

$$t_2 = 0,95 \text{ см},$$

$$A_2 = 26,7 \text{ см}^2, J_{z_2} = 2110 \text{ см}^4, J_{y_2} = 151 \text{ см}^4,$$

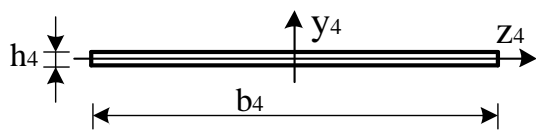
$$z_{III} = 2,21 \text{ см}.$$



$$B_3 = 12,5 \text{ см}, b_3 = 8,0 \text{ см}, d_3 = 1,0 \text{ см},$$

$$A_3 = 19,7 \text{ см}^2, J_{z_3} = 312 \text{ см}^4, J_{y_3} = 100 \text{ см}^4,$$

$$z_0 = 1,92 \text{ см}, y_0 = 4,13 \text{ см}, t_{\alpha} = 0,404.$$



$$h_4 = 1,6 \text{ см}, b_4 = 40,0 \text{ см},$$

$$A_4 = h_4 \cdot b_4 = 40,0 \cdot 1,6 = 64,0 \text{ см}^2,$$

$$J_{z_4} = \frac{b_4 \cdot h_4^3}{12} = \frac{40,0 \cdot 1,6^3}{12} = 13,653 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_4} = \frac{h_4 \cdot b_4^3}{12} = \frac{1,6 \cdot 40,0^3}{12} = 8533,333 \text{ см}^4.$$

Спочатку визначаємо центр ваги перерізу. Для цього проводимо допоміжні осі z, y по низу перерізу та по лівій грані перерізу (рис. 3.7). Визначимо відстані між цими осями та центрами ваги кожного із елементів перерізу (осі z, y вибираються довільно):

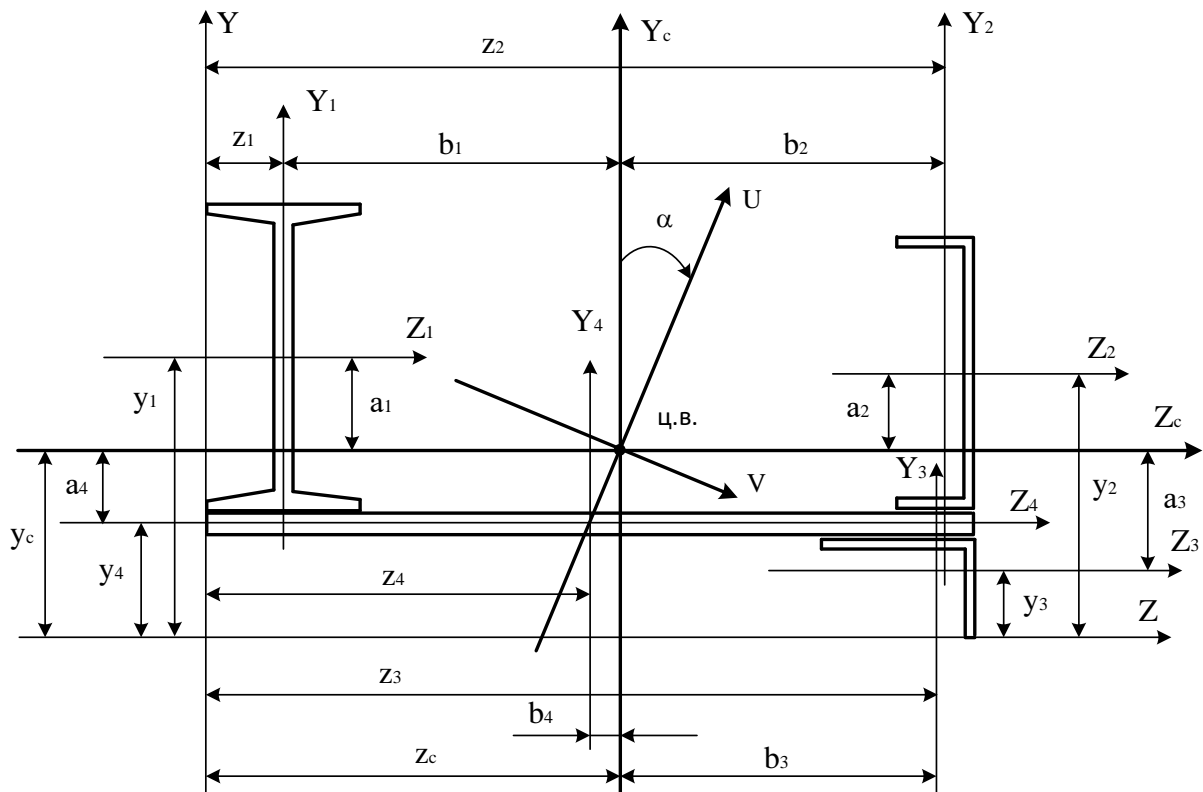


Рис. 3.7. Визначення геометричних характеристик плоского перерізу

$$z_1 = \frac{b_1}{2} = \frac{13,5}{2} = 6,75 \text{ см}, \quad y_1 = \frac{h_1}{2} + h_4 + b_3 = \frac{30,0}{2} + 1,6 + 8,0 = 24,6 \text{ см};$$

$$z_2 = b_4 - z_{III} = 40,0 - 2,21 = 37,79 \text{ см}, \quad y_2 = \frac{h_2}{2} + h_4 + b_3 = \\ = \frac{22,0}{2} + 1,6 + 8,0 = 20,6 \text{ см};$$

$$z_3 = b_4 - y_0 = 40,0 - 4,13 = 35,87 \text{ см}, \quad y_3 = b_3 - z_0 = 8,0 - \\ - 1,92 = 6,08 \text{ см};$$

$$z_4 = \frac{b_4}{2} = \frac{40,0}{2} = 20,0 \text{ см}, \quad y_4 = b_3 + \frac{h_4}{2} = 8,0 + \frac{1,6}{2} = 8,8 \text{ см}.$$

Координати центру ваги складного перерізу визначаємо за формулами (3.2):

$$z_c = \frac{\sum S y_i}{\sum A_i} = \frac{\sum A_i \cdot z_i}{\sum A_i} = \frac{46,5 \cdot 6,75 + 26,7 \cdot 37,79 + 19,7 \cdot 35,87 + 64,0 \cdot 20,0}{46,5 + 26,7 + 19,7 + 64,0} = 21,093 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{\sum S z_i}{\sum A_i} = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i} = \frac{46,5 \cdot 24,6 + 26,7 \cdot 20,6 + 19,7 \cdot 6,08 + 64,0 \cdot 8,8}{46,5 + 26,7 + 19,7 + 64,0} = 15,149 \text{ см}.$$

Відкладаємо ці значення від початку координат, та проводимо центральні осі z_c та y_c . Центр ваги перерізу знаходиться на перетині цих осей (рис. 3.7).

Обчислимо осьові та відцентровий моменти інерції відносно центральних осей. Для цього спочатку знайдемо відстані між центром ваги перерізу та центрами ваги кожного із елементів:

$$a_1 = y_1 - y = 24,6 - 15,149 = 9,451 \text{ см};$$

$$b_1 = z_1 - z_c = 6,75 - 21,093 = -14,343 \text{ см};$$

$$a_2 = y_2 - y = 20,6 - 15,149 = 5,451 \text{ см};$$

$$b_2 = z_2 - z_c = 37,79 - 21,093 = 16,697 \text{ см};$$

$$a_3 = y_3 - y = 6,08 - 15,149 = -9,069 \text{ см};$$

$$b_3 = z_3 - z_c = 35,87 - 21,093 = 14,777 \text{ см};$$

$$a_4 = y_4 - y_c = 8,8 - 15,149 = -6,349 \text{ см};$$

$$b_4 = z_4 - z_c = 20,0 - 21,093 = -1,093 \text{ см}.$$

Осьові моменти інерції усього перерізу визначаємо за формулами (3.11):

$$J_{z_c} = \sum(J_{z_i} + a_i^2 \cdot A_i) = 7080 + 9,451^2 \cdot 46,5 + 2110 + 5,451^2 \cdot 26,7 + 100 + (-9,069)^2 \cdot 19,7 + 13,653 + (-6,349)^2 \cdot 64,0 = 18450,053 \text{ см}^4.$$

$$J_{y_c} = \sum(J_{y_i} + b_i^2 \cdot A_i) = 337 + (-14,343)^2 \cdot 46,5 + 151 + 16,697^2 \cdot 26,7 + 312 + 14,777^2 \cdot 19,7 + 8533,333 + (-1,093)^2 \cdot 64,0 = 30721,222 \text{ см}^4.$$

Моменти інерції J_{z_3} та J_{y_3} поміняно місцями тому, що кутник повернуто на 90° у порівнянні з сортаментом. Відцентрові моменти інерції двотавра, швелера та смуги відносно власних осей дорівнюють нулю, тому що їх осі є осями симетрії. Відцентровий момент кутника визначаємо за формулою

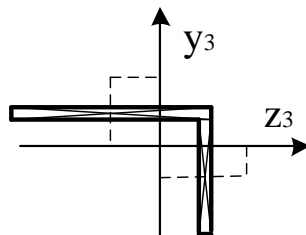
$$\alpha_3 = \arctg(0,404) = 22^\circ;$$

$$2 \alpha_3 = 22 \cdot 2 = 44^\circ;$$

$$\text{tg} 2 \alpha_3 = 0,9660;$$

$$J_{z_3 y_3} = \left| \frac{J_{z_3} - J_{y_3}}{2} \cdot \text{tg} 2 \alpha_3 \right| = \left| \frac{312 - 100}{2} \right| \cdot 0,96560 = 102,354 \text{ см}^4.$$

Знак відцентрового моменту кутника визначаємо за його розташуванням в заданому перерізі. Цей кутник є від'ємний, тому що відстань до центра ваги складових величин при добутку є від'ємною:



$$J_{z_c y_c} = \sum(J_{z_i y_i} + a_i \cdot b_i \cdot A_i) = 0 + 9,451 \cdot (-14,343) \cdot 46,5 + 0 + 5,451 \cdot 16,697 \cdot 26,7 - 102,354 + (-9,069) \cdot 14,777 \cdot 19,7 + 0 + (-6,349) \cdot (-1,093) \cdot 64,0 = -6171,507 \text{ см}^4.$$

Визначаємо положення головних центральних осей інерції
(3.14):

$$tg2\alpha = -\frac{2J_{z_c y_c}}{J_{z_c} - J_{y_c}} = -\frac{2 \cdot (-6171,507)}{18450,053 - 30721,222} = -1,0059;$$

$$2\alpha = -45,167^\circ, \alpha = -22,584^\circ.$$

Кут α від'ємний, тому головні осі повертаємо за годинниковою стрілкою.

Величини головних моментів інерції визначаємо за формулою (3.15):

$$J_{max,min} = \frac{J_{z_c} + J_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{z_c} - J_{y_c})^2 + 4J_{z_c y_c}^2} =$$

$$= \frac{18450,053 + 30721,222}{2} \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{(18450,053 - 30721,222)^2 + 4(-6171,507)^2}$$

$$= 24585,638 \pm 8702,465 ;$$

$$J_u = J_{max} = 24585,638 + 8702,465 = 33288,102 \text{ см}^4;$$

$$J_v = J_{min} = 24585,638 - 8702,465 = 15883,173 \text{ см}^4.$$

$J_u \in \text{max}$, тому що $J_{y_c} > J_{z_c}$, а вісь U створена поворотом осі Y_c .

Перевіряємо правильність визначення головних моментів інерції:

$$J_{z_c} + J_{y_c} = J_{max} + J_{min};$$

$$18450,053 + 30721,222 = 33288,102 + 15883,173;$$

$$49171,275 = 49171,275.$$

Це означає, що розрахунки зроблено правильно.

Контрольні запитання

1. Що називається статичним моментом площі перерізу щодо будь-якої осі, яка його розмірність?
2. Як визначаються координати центра ваги перерізу?
3. Що називається осьовим моментом інерції, відцентровим моментом інерції, полярним моментом інерції перерізу, які їх одиниці виміру?
4. Що називають моментом опору перерізу, яка його розмірність?
5. За якими формулами визначаються радіуси інерції, які їх розмірності?
6. Чому дорівнюють осьовий момент інерції прямокутника, кола, кільця щодо центральних осей?
7. Які осі називаються головними центральними?
8. Укажіть залежності для осьового і відцентрового моментів інерції при паралельному перенесенні осей.
9. За якими формулами визначаються осьові і відцентрові моменти інерції при повороті осей?
10. Як визначається положення головних центральних осей та за якими формулами знаходяться головні центральні моменти інерції?

4. РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ І ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ В БАЛКАХ ПРИ ЗГИНІ

4.1. Короткі теоретичні відомості

Якщо в поперечних перерізах бруса діють два силових фактори – M_y, Q_z або M_z, Q_y (рис. 4.1), то такий вид деформації називають плоским згином. При цьому всі сили, реакції лежать в одній з головних площин інерції. Головною площиною інерції називається площина, що проходить через головні осі інерції окремих перерізів.

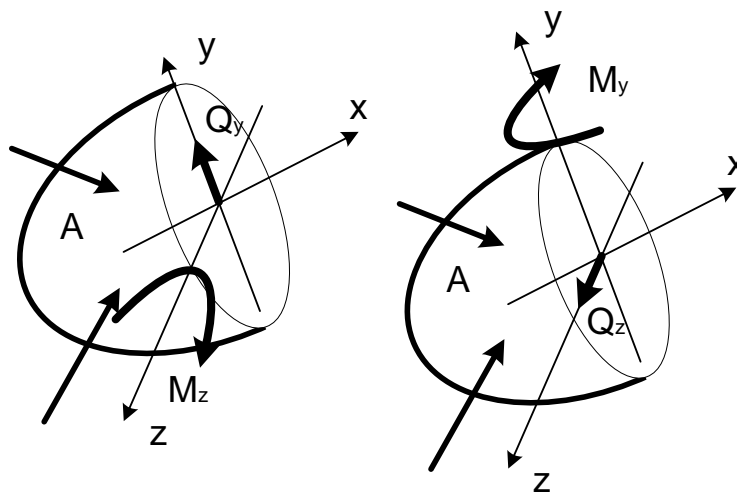


Рис. 4.1. Деформація згину

Чистим згином називають вид деформації, при якому в перерізі балки діє тільки згинальний момент, а поперечна сила відсутня (рис. 4.2).

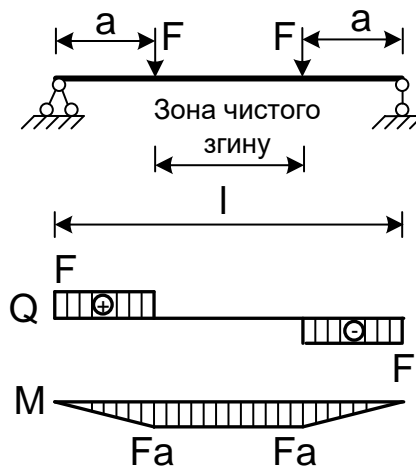


Рис. 4.2. Деформація чистого згину

При згині в перерізі балки виникають розтягнута та стисла зони. Шар балки, в якому волокна не розтягуються і не стискаються, називається нейтральним шаром, а слід цього шару на площині поперечного перерізу балки залишає нейтральну вісь.

При чистому згині нормальні напруження визначають за формулою

$$\sigma = \frac{y \cdot M}{J_z}, \quad (4.1)$$

де M – згинальний момент в перерізі балки,

y – відстань від нейтральної осі до розглянутого волокна,

J_z – момент інерції відносно нейтральної осі.

При згині нормальні напруження прямо пропорційні згинальному моменту, відстані до нейтральної осі і обернено пропорційні осьовому моменту інерції.

Найбільші нормальні напруження виникають в крайніх волокнах та визначаються за формулою

$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot h/2}{J_z}. \quad (4.2)$$

З геометричних характеристик відомо, що $\frac{J_z}{h/2} = W_z$ – осьовий момент опору, тоді

$$\sigma_{max, min} = \pm \frac{M}{W_z}. \quad (4.3)$$

Якщо матеріал однаково опирається розтягання та стискання, то при розрахунку за допустимими напруженнями $\sigma_{max} \leq [\sigma]$, тоді при згині

$$\sigma_{max, min} = \frac{M}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (4.4)$$

Формули (4.1) і (4.4) отримані з припущення, що в перерізі балки поперечна сила відсутня. При поперечному згині в перерізі балки, крім згинального моменту, діє поперечна сила. При

наявності діючого навантаження відбувається тиск волокон одного на одне. Таким чином, при наявності плоского поперечного згину нормальні напруження, отримані для чистого згину, будуть давати наближені значення.

Як показують більш точні розрахунки теорії пружності, при $h/l \leq 1/20$ ця похибка дуже мала. Тому зазвичай нормальні напруження при поперечному згині визначають так само, як і для чистого згину, тобто за формулою (4.1).

Дотичні напруження при поперечному згині визначають за формулою Д. І. Журавського

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z^{vidc}}{b \cdot J_z}, \quad (4.5)$$

де S_z^{vidc} – статичний момент відсіченої частини площі відносно нейтральної осі;

b – ширина перерізу на рівні нейтральної осі;

J_z – момент інерції відносно нейтральної осі.

Оскільки S_z^{vidc} завжди додатний, то знак дотичних напружень визначається знаком поперечної сили.

При вирішенні задач на підбір перерізів рекомендується такий алгоритм розрахунку:

1. Будуються епюри M і Q .
2. Виходячи з умови міцності за нормальними напруженням (4.4), проводиться підбір перерізу

$$W \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}.$$

3. Проводиться перевірка міцності за дотичними напруженнями

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_z^{vidc}}{b \cdot J_z} \leq [\tau]. \quad (4.6)$$

4. Намічаємо небезпечні перерізи балки:
 - небезпечним за нормальними напруженнями буде переріз, де згинальний момент max з усіх моментів епюри;

- небезпечним за дотичними напруженнями буде той переріз, де поперечна сила досягає max з усіх поперечних сил епюри;
- небезпечним вважається і той переріз, в якому одночасно M і Q досягають значень, близьких до max .

5. Для визначення найбільш небезпечного перерізу необхідно визначити головне напруження σ_1 за формулою (4.7). Для цього у намічених перерізах знаходимо величини σ і τ за формулами (4.3) та (4.5).

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (4.7)$$

6. Визначаємо небезпечні точки в поперечному перерізі балки. Небезпечною точкою за нормальними напруженнями буде точка, найбільш віддалена від нейтральної осі (т. 1 рис. 4.3, а, б) $\sigma_{max} \leq [\sigma]$. Небезпечною точкою за дотичними напруженнями буде точка, розташована на нейтральній осі (т. 3 рис. 4.3, а, б) $\tau_{max} \leq [\tau]$.

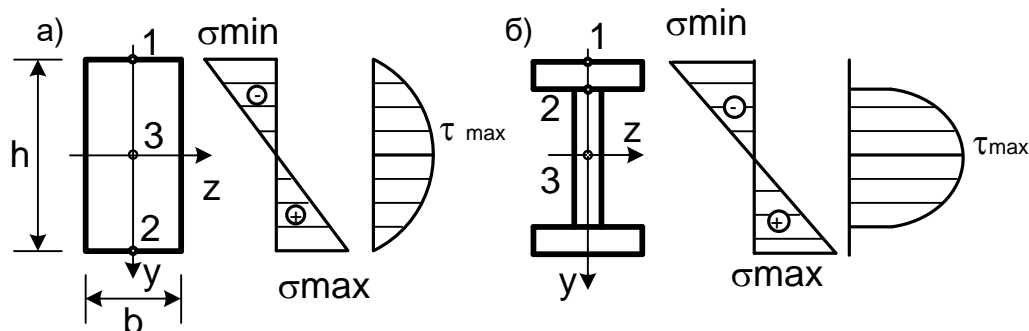


Рис. 4.3. Епюри нормальних і дотичних напружень:
а – у прямокутному перерізі; б – у двотавровому перерізі

7. У двотаврі в т. 2 одночасно виникають σ , які близькі до максимальних, і досить великі τ , тому в цій точці необхідно зробити перевірку міцності за головними напруженнями. Напружений стан в т. 2 відповідає плоскому напруженому стану, тому перевірку міцності необхідно проводити за теоріями міцності:

- за 1-ю теорією $\frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$;
- за 2-ю теорією $\sigma_1 - \nu\sigma_2 \leq [\sigma]$;

- за 3-ю теорією $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\tau]$;
- за 4-ю теорією $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$.

Якщо перевірка міцності не задовольняється, то збільшуємо номер двотавра і робимо перерахунок σ і τ і перевірки міцності.

8. Будуємо епюри головних напружень σ_1, σ_2 за формулою (4.8)

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} . \quad (4.8)$$

Окрім розрахунків на міцність, необхідно виконувати розрахунки на жорсткість. Для цього потрібно визначати прогини балки.

Пружною лінією балки називається крива, отримана в процесі деформування балки.

Диференціальне рівняння зігнутої осі балки має вигляд

$$EJy'' = \pm M . \quad (4.9)$$

При напрямку осі y вниз, як показано на рис. 4.4, знак у рівнянні (4.9) від'ємний.

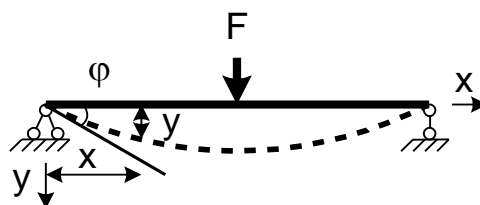


Рис. 4.4. Пружна лінія балки

Використовуючи диференціальне рівняння зігнутої осі, визначаються переміщення для розрахунків балок на жорсткість та статично невизначених балок.

Для визначення прогинів і кутів повороту існує кілька методів:

- 1) метод безпосереднього інтегрування диференціального рівняння;
- 2) метод початкових параметрів;
- 3) графоаналітичний метод або метод фіктивного навантаження.

Метод безпосереднього інтегрування є громіздким і вимагає розв'язання $2n$ (n – кількість ділянок інтегрування) алгебраїчних рівнянь для визначення постійних інтегрування. Для того щоб позбутися недоліків цього методу, англійський учений Клебш запропонував ввести такі правила інтегрування, які носять назву «умови Клебша»:

- 1) початок координат приймається в крайній лівій точці;
- 2) складаючи рівняння згинальних моментів у функції від x , слід розглядати завжди тільки ліву частину;
- 3) інтегрування робити без розкриття дужок;
- 4) розподілене навантаження, розташоване на частині балки, поширюється до правого кінця з додаванням на незавантаженій ділянці такого ж навантаження з протилежним знаком (протилежного напрямку);
- 5) зосереджений згинальний момент вводиться в диференціальне рівняння з плечем в нульовому ступені.

Для балки, завантаженої, як показано на рис. 4.5, система рівнянь для y , φ , M , Q має вигляд

$$y(x) = y_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ} \Big|_1 + \frac{q(x-a)^4}{4! EJ} \Big|_2 - \frac{q(x-b)^4}{4! EJ} \Big|_3 + \frac{F(x-c)^3}{3! EJ} \Big|_4 - \frac{M(x-d)^2}{2! EJ} \Big|_5$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 x - \frac{M_0 x}{EJ} - \frac{Q_0 x^2}{2! EJ} \Big|_1 + \frac{q(x-a)^3}{3! EJ} \Big|_2 - \frac{q(x-b)^3}{3! EJ} \Big|_3 + \frac{F(x-c)^2}{2! EJ} \Big|_4 - \frac{M(x-d)}{EJ} \Big|_5 ;$$

$$M(x) = M_0 + Q_0 x \Big|_1 - \frac{q(x-a)^2}{2!} \Big|_2 + \frac{q(x-b)^2}{2!} \Big|_3 - F(x-c) \Big|_4 + M \Big|_5, \quad (4.10)$$

$$Q(x) = Q_0 x \Big|_1 - q(x-a) \Big|_2 + q(x-b) \Big|_3 - F \Big|_4.$$

Ці рівняння повністю описують напружено-деформований стан балки, в будь-якому перерізі. Знаки перед кожним членом рівняння відповідають напрямку навантажень, показаних на рис. 4.5. Якщо напрямок навантажень, що діють на балку, відрізняється від рисунка, то перед відповідним доданком рівняння знак змінюється на протилежний.

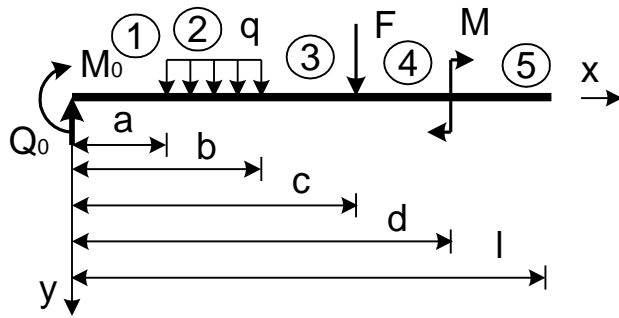


Рис. 4.5. Схема навантажень для складання рівнянь методу початкових параметрів

У ці рівняння входять чотири початкових параметри:

- y_0 – прогин,
- φ_0 – кут повороту,
- M_0 – згинальний момент,
- Q_0 – поперечна сила.

Ці параметри визначаються з умов закріплення балки (рис. 4.6).

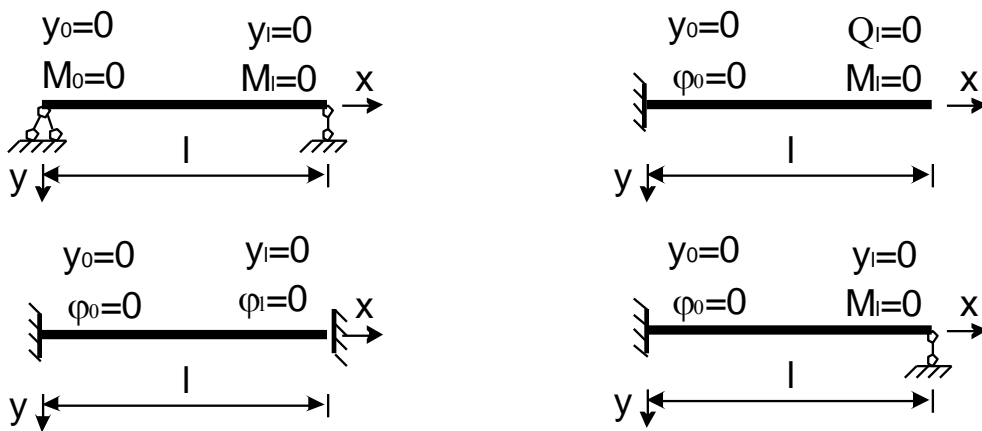


Рис. 4.6. Схеми для визначення початкових параметрів

Порядок визначення переміщень і зусиль методом початкових параметрів:

1) з умов закріплення балки визначаються початкові параметри;

2) з рівнянь (4.10) знаходяться всі необхідні компоненти напружено-деформованого стану.

Отримані рівняння методу початкових параметрів дозволяють побудувати пружну лінію балки. На практиці часто не потрібно знати рівняння зігнутої осі, а необхідно визначити переміщення в якійсь точці споруди. В цьому випадку є зручним метод фіктивного навантаження. Рівняння для прогинів і кутів поворотів мають вигляд

$$y' = -\frac{Q^\phi}{EJ}, \quad y = -\frac{M^\phi}{EJ}. \quad (4.11)$$

Порядок визначення переміщень методом фіктивного навантаження:

- 1) в заданій балці від заданого навантаження будується епюра згинальних моментів;
- 2) вибирається фіктивна балка (рис. 4.7);
- 3) фіктивна балка завантажується фіктивним навантаженням, яке являє собою епюру згинальних моментів в заданій балці від заданого навантаження. Дію фіктивного навантаження спрямовують до осі балки;
- 4) у фіктивній балці від фіктивного навантаження в заданому перерізі визначають згинальний момент і поперечну силу;
- 5) за залежностями (4.11) визначають прогин і кут повороту.

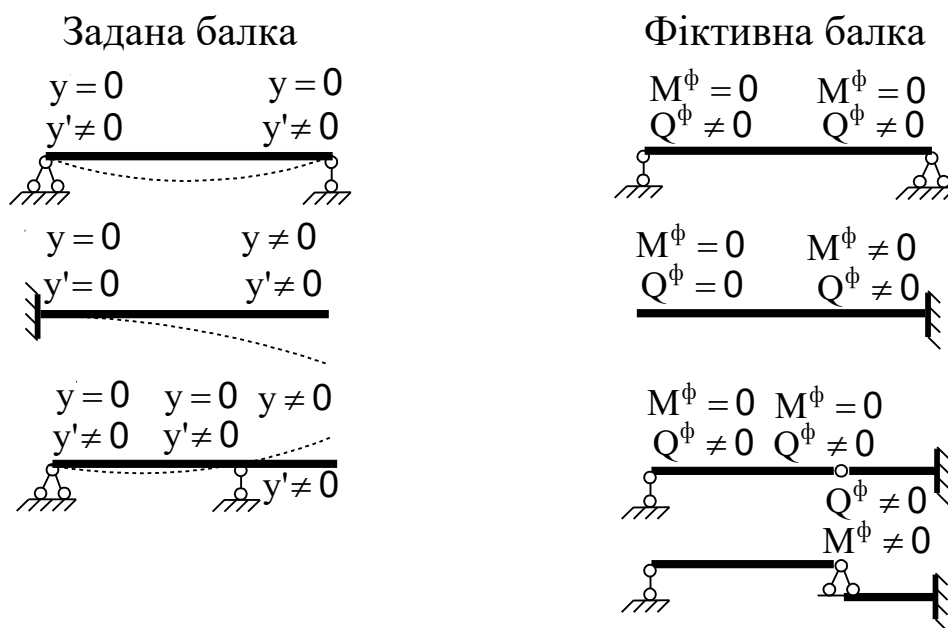


Рис. 4.7. Схеми обрання фіктивних балок

4.2. Приклади розв'язання задач

Задача 4.2.1. Розрахунок на міцність двохопорної балки

Для заданої розрахункової схеми сталеві балки (рис. 4.8) необхідно підібрати поперечний переріз двотаврового, прямокутного (при $\frac{h}{b} = 2$ і $\frac{h}{b} = 0,5$), круглого і кільцевого (при $k = \frac{d}{D} = 0,7$) профілю і дати порівняльну оцінку по їх площах. Для балки двотаврового поперечного перерізу побудувати епюри нормальних, дотичних та головних напружень і зробити перевірку міцності у небезпечному перерізі за IV теорією міцності.

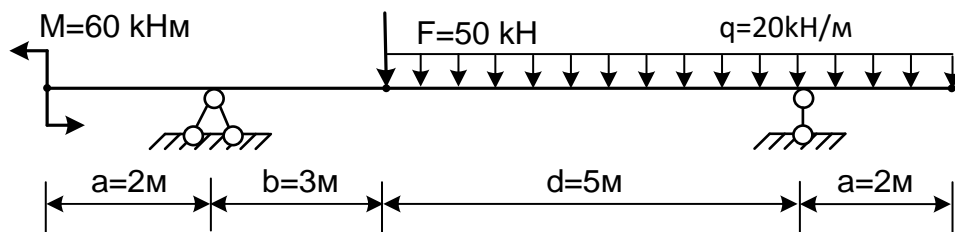


Рис. 4.8. Розрахункова схема сталеві балки

Розв'язання

Спочатку за допомогою рівнянь статки визначаємо опорні реакції (рис. 4.9):

$$\sum M_2 = 0, -M + F \cdot b + q \cdot (d + a) \left(\frac{d+a}{2} + b \right) - R_4 \cdot (b + d) = 0;$$

$$\begin{aligned} R_4 &= \frac{-M + F \cdot b + q \cdot (d + a) \left(\frac{d+a}{2} + b \right)}{(b + d)} = \\ &= \frac{-60 + 50 \cdot 3 + 20(5 + 2) \left(\frac{5+2}{2} + 3 \right)}{3 + 5} = 125,00 \text{ kH}; \end{aligned}$$

$$\sum M_4 = 0, M - R_2 \cdot (b + d) + F \cdot d + q \cdot (d + a) \left(d - \frac{d+a}{2} \right) = 0;$$

$$R_2 = \frac{M + F \cdot d + q \cdot (d + a) \left(d - \frac{d+a}{2} \right)}{(b + d)}$$

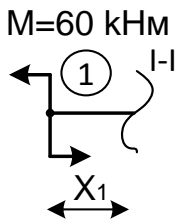
$$= \frac{60 + 50 \cdot 5 + 20(5 + 2) \left(5 - \frac{5 + 2}{2}\right)}{3 + 5} = 65,00 \text{ kH}.$$

Перевіряємо правильність визначення реакцій, для цього споектуємо всі сили на вісь Y .

$$\sum Y = 0; R_2 - F - q \cdot (d + a) + R_4 = 65,00 - 50 - 20 \cdot (5 + 2) - 125,00 = 0.$$

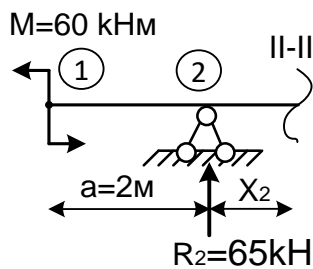
Значить, реакції визначено правильно.

Будуємо епюри внутрішніх зусиль. Для цього помічаємо характерні точки і проводимо перерізи між характерними точками (рис. 4.9).



Переріз I-I проводимо між точками 1 і 2 та розглядаємо ліву частину. $0 \leq x_1 \leq a = 2\text{ м}$.

$$\sum Y = 0, Q_1 = 0; M_1 = -M = -60 \text{ kHм}.$$



Переріз II-II проводимо між точками 2 і 3 та розглядаємо ліву частину.

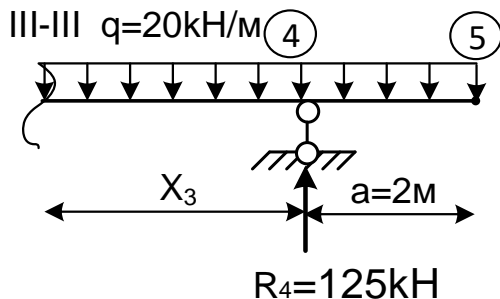
$$0 \leq x_2 \leq b = 3\text{ м}.$$

$$\sum Y = 0, Q_2 = R_2 = 65,00 \text{ kH},$$

$$M_2 = -M + R_2 \cdot x_2 = -60 + 65,00 \cdot x_2.$$

$$\text{При } x_2 = 0, M_2 = -60 \text{ kHм};$$

$$\text{при } x_2 = 3 \text{ м}, M_2 = -60 + 65,00 \cdot 3 = 135,00 \text{ kHм}.$$



Переріз III-III проводимо між точками 3 і 4 та розглядаємо праву частину. $0 \leq x_3 \leq d = 5\text{ м}$.

$$\sum Y = 0, Q_3 = -R_4 + q(x_3 + a) = -125,00 + 20(x_3 + 2);$$

$$M_3 = R_4 \cdot x_3 - q \frac{(x_3 + a)^2}{2} = 125,00 \cdot x_3 - 20 \frac{(x_3 + 2)^2}{2}.$$

$$\text{При } x_3 = 0, Q_3 = -125,00 + 20 \cdot 2 = -85,00 \text{ кН}, M_3 = -20 \frac{2^2}{2} = -40,0 \text{ кНм};$$

$$\text{при } x_3 = 5 \text{ м}, Q_3 = -125,00 + 20(5 + 2) = 15,00 \text{ кН};$$

$$M_3 = 125,00 \cdot 5 - 20 \frac{(5+2)^2}{2} = 135,00 \text{ кНм}.$$

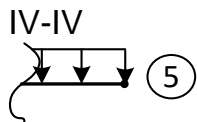
На цій ділянці поперечна сила змінює знак з $Q_3 = 15,00 \text{ кН}$ на $Q_3 = -85,00 \text{ кН}$. Тому на епюрі моментів буде екстремум. Знайдемо його. На підставі диференційних залежностей екстремальне значення згинального моменту буде в точці, де поперечна сила дорівнює нулю. Прирівняємо вираз для поперечної сили нулю:

$$Q_3 = -R_4 + q(x_e + a) = -125,00 + 20(x_e + 2) = 0, \text{ звідси}$$

$$x_e = \frac{125,00}{20} - 2 = 4,25 \text{ м}.$$

Підставляємо значення x_e у вираз для згинального моменту на цій ділянці:

$$M_e = R_4 \cdot x_e - q \frac{(x_e+a)^2}{2} = 125,00 \cdot x_e - 20 \frac{(x_e+2)^2}{2} = 125,00 \cdot 4,25 - 20 \frac{(4,25+2)^2}{2} = 140,625 \text{ кНм}.$$



Переріз IV-IV проводимо між точками 4 і 5 та розглядаємо праву частину. $0 \leq x_4 \leq a = 2 \text{ м}$.

$$\sum Y = 0, Q_4 = q \cdot x_4 = 20 \cdot x_4;$$

$$M_4 = -q \frac{x_4^2}{2} = -20 \frac{x_4^2}{2}.$$

$$\text{При } x_4 = 0, Q_4 = 0, M_4 = 0;$$

$$\text{при } x_4 = 2 \text{ м}, Q_4 = 20 \cdot 2 = 40,0 \text{ кН}, M_4 = -20 \frac{2^2}{2} = -40,0 \text{ кНм}.$$

За цими розрахунками будемо епюри поперечної сили та згинального моменту (рис. 4.9).

Підбір розмірів поперечного перерізу виконується на підставі умови міцності за нормальними напруженнями

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_z} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

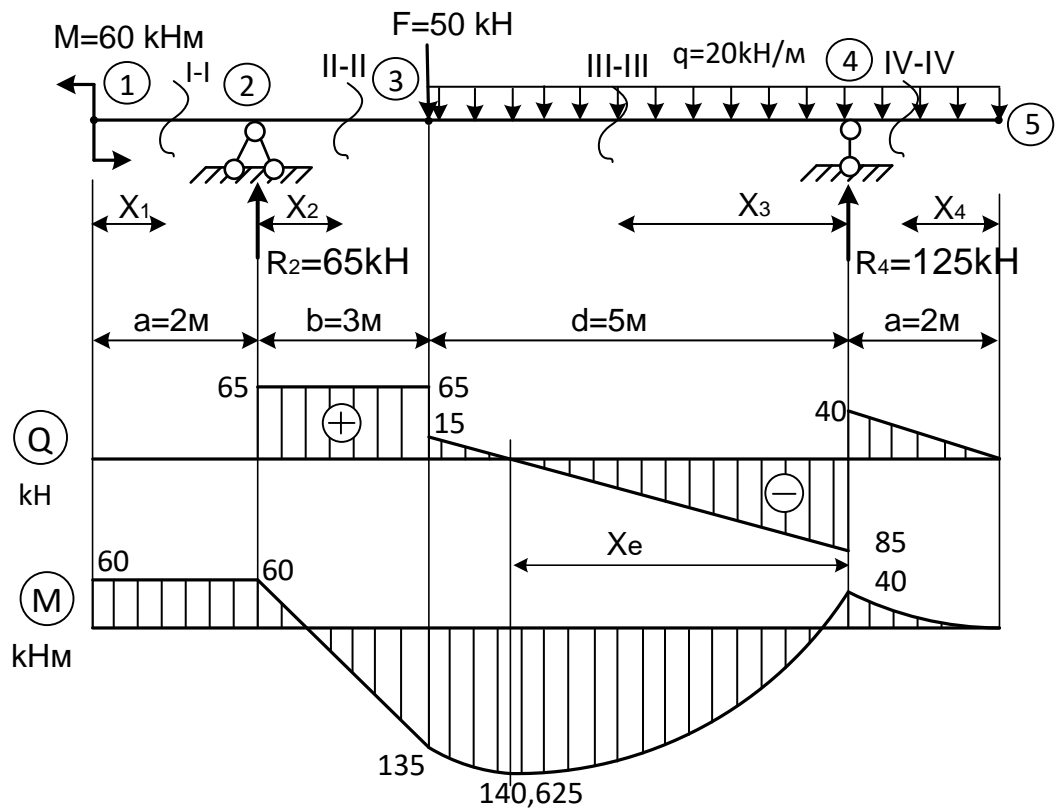


Рис. 4.9. Епюри внутрішніх зусиль

Звідси момент опору, який повинна мати балка, дорівнює

$$W_z \leq \frac{|M_{max}|}{[\sigma]} = \frac{140,625 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 878,906 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 878,906 \text{ см}^3.$$

Визначимо момент опору для прямокутної балки з відношенням $\frac{h}{b} = 2$, тобто $h = 2b$.

$$W_z = \frac{J_z}{h/2} = \frac{b \cdot h^3 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (2 \cdot b)^2}{6} = \frac{2 \cdot b^3}{3}.$$

Тоді, виходячи з умови міцності, можна знайти розміри поперечного перерізу

$$W_z = \frac{2 \cdot b^3}{3} \geq 878,906 \text{ см}^3,$$

звідси

$$b_1 \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 878,906}{2}} = 10,965 \text{ см} \approx 11,00 \text{ см};$$

$$h_1 = 2 \cdot b = 2 \cdot 10,965 = 21,930 \text{ см} \approx 22,00 \text{ см}.$$

Площа перерізу дорівнює $A_1 = b_1 \cdot h_1 = 11,00 \cdot 22,00 = 242,00 \text{ см}^2$.

Визначимо момент опору для прямокутної балки з відношенням $\frac{h}{b} = 0,5$, тобто $h = 0,5b$.

$$W_z = \frac{J_z}{h/2} = \frac{b \cdot h^3 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (0,5 \cdot b)^2}{6} = \frac{0,25 \cdot b^3}{6}.$$

Тоді, виходячи з умови міцності, можна знайти розміри поперечного перерізу

$$W_z = \frac{0,25 \cdot b^3}{6} \geq 878,906 \text{ см}^3,$$

звідси

$$b_2 \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 878,906}{0,25}} = 27,630 \text{ см} \approx 27,50 \text{ см}$$

$$h_2 = 0,5 \cdot b = 0,5 \cdot 27,630 = 13,815 \text{ см} \approx 14,00 \text{ см}.$$

Площа перерізу дорівнює $A_2 = b_2 \cdot h_2 = 27,50 \cdot 14,00 = 385,00 \text{ см}^2$.

Визначимо момент опору для балки круглого поперечного перерізу

$$W_z = \frac{J_z}{D/2} = \frac{\pi \cdot D^4 \cdot 2}{64 \cdot D} = \frac{\pi \cdot D^3}{32}.$$

Тоді, виходячи з умови міцності, можна знайти розміри поперечного перерізу

$$W_z = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \geq 878,906 \text{ см}^3,$$

звідси

$$D_3 \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 878,906}{\pi}} = 20,764 \text{ см} \approx 21,00.$$

Площа перерізу дорівнює $A_3 = \frac{\pi \cdot D_3^2}{4} = \frac{\pi \cdot 21,00^2}{4} = 346,361 \text{ см}^2$.

Визначимо момент опору для балки кільцевого поперечного перерізу

$$W_z = \frac{\pi \cdot D_4^3}{32} (1 - k^4).$$

Тоді, виходячи з умови міцності, можна знайти розміри поперечного перерізу

$$W_z = \frac{\pi \cdot D_4^3}{32} (1 - k^4) \geq 878,906 \text{ см}^3,$$

звідси при $k = \frac{d}{D} = 0,7$ знайдемо зовнішній діаметр

$$D_4 \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 878,906}{\pi(1 - 0,7^4)}} = 22,754 \text{ см} \approx 23,00 \text{ см},$$

тоді $d_4 = 0,7 \cdot D_4 = 0,7 \cdot 23,00 = 16,10 \text{ см} \approx 16,0 \text{ см}$.

Площа перерізу дорівнює

$$A_4 = \frac{\pi \cdot (D_4^2 - d_4^2)}{4} = \frac{\pi \cdot (23,00^2 - 16,0^2)}{4} = 214,414 \text{ см}^2.$$

Двотавровий переріз обираємо за сортаментом, для двотавра № 40 $W_z = 953 \text{ см}^2$. Це більше, ніж потрібний момент опору $W_z = 878,906 \text{ см}^3$. Площа поперечного перерізу обраного двотавра: $A_5 = 72,60 \text{ см}^2$.

Порівняємо площі обраних перерізів (рис. 4.10). Площа двотавра є найменшою $A_5 = 72,60 \text{ см}^2$, тому двотавровий переріз є економічним. Переріз при співвідношенні $\frac{h}{b} = 0,5$ є найменш вигідним, його площа найбільша $A_2 = 385,00 \text{ см}^2$.

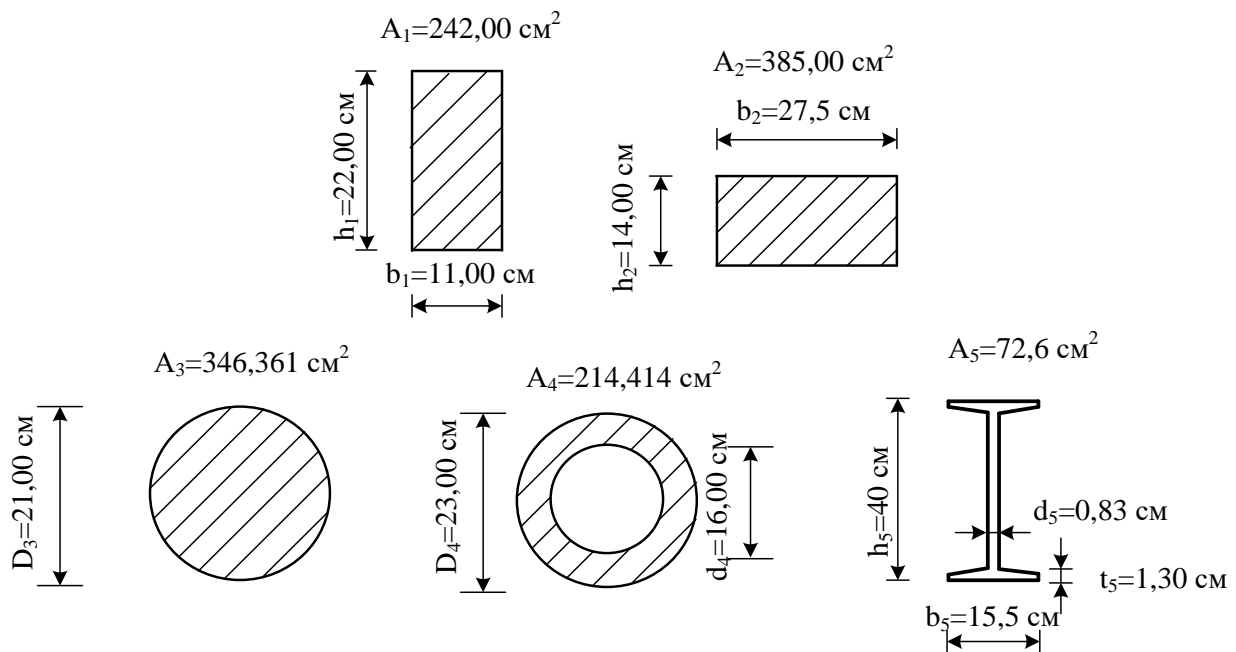


Рис. 4.10. Порівняльна характеристика перерізів

Зробимо повну перевірку міцності двотавра у небезпечному перерізі. Для цього із сортаменту для обраного двотавра № 40 випишемо необхідні дані:

$$h = 40 \text{ см}, b = 15,5 \text{ см}, d = 0,83 \text{ см}, t = 1,30 \text{ см},$$

$$A = 72,6 \text{ см}^2, J_z = 19062 \text{ см}^4, W_z = 953 \text{ см}^3, S_z = 545 \text{ см}^3.$$

Виконаємо перевірку за дотичними напруженнями. Умова міцності за дотичними напруженнями має вигляд

$$\tau_{max} = \frac{|Q_{max}| \cdot S_z}{d \cdot J_z} \leq [\tau] = 100 \text{ МПа}.$$

Максимальне значення поперечної сили $|Q_{max}|$ визначаємо з епюри (рис. 4.9) $|Q_{max}| = 85,00 \text{ кН}$. Тоді

$$\begin{aligned} \tau_{max} &= \frac{85,00 \cdot 10^3 \cdot 545 \cdot 10^{-6}}{0,83 \cdot 10^{-2} \cdot 19062 \cdot 10^{-8}} 10^{-6} = 29,280 \text{ МПа} \leq [\tau] = \\ &= 100 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Умова міцності за дотичними напруженнями виконується.

На основі аналізу епюр M і Q (рис. 4.9) визначаємо небезпечний переріз. Це переріз у точці 3 зліва, де $M = 135,00 \text{ кНм}$,

$Q = 65,00 \text{ kH}$. У цьому перерізі побудуємо епюри нормальних, дотичних та головних напружень.

Нормальні напруження при згині визначаються за формулою

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{J_z}$$

Визначаємо ці напруження у кожній точці перерізу (рис. 4.11).

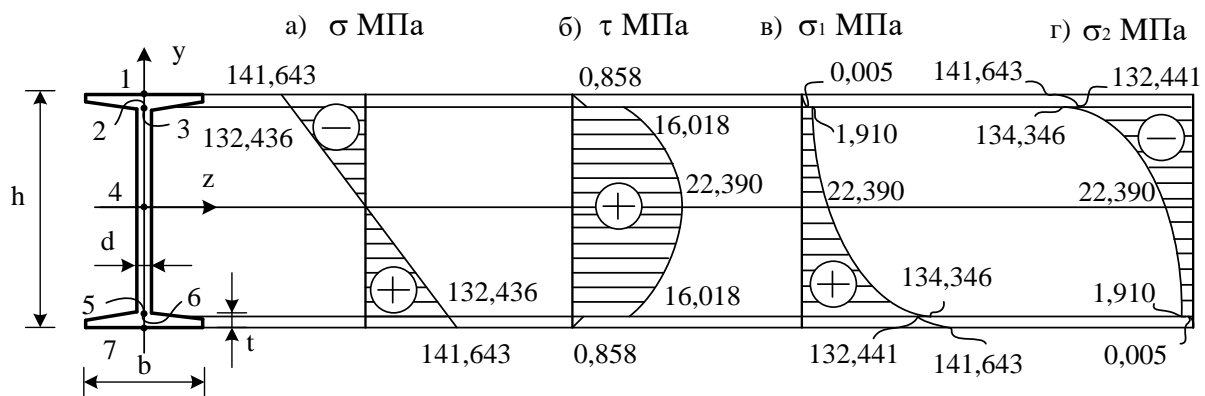


Рис. 4.11. Епюри нормальних, дотичних і головних напружень в перерізі балки:

- а – нормальні напруження; б – дотичні напруження;
- в – головні напруження σ_1 ; г – головні напруження σ_2

У точках 1 і 7:

$$y = \pm \frac{h}{2} = \pm \frac{40}{2} = \pm 20,00 \text{ см.}$$

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{J_z} = \frac{135,00 \cdot 10^3 \cdot 20,00 \cdot 10^{-2}}{19062 \cdot 10^{-8}} 10^{-6} = 141,643 \text{ МПа.}$$

У точках 2, 3 і 5, 6:

$$y = \pm \left(\frac{h}{2} - t \right) = \pm \left(\frac{40}{2} - 1,30 \right) = \pm 18,70 \text{ см.}$$

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{J_z} = \frac{135,00 \cdot 10^3 \cdot 18,70 \cdot 10^{-2}}{19062 \cdot 10^{-8}} 10^{-6} = 132,436 \text{ МПа.}$$

У точці 4: $y = 0$, тому $\sigma = 0$. Епюру нормальних напружень показано на рис. 4.11, а. Знаки на епюрі нормальних напружень визначаємо за епюрою згинальних моментів. Будуємо епюру дотичних напружень за формулою Журавського

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z^{\text{від}}}{d \cdot J_z}.$$

При розрахунках вважаємо товщину полиці постійною та галтелі відсутніми.

У точках 1 і 7. $S_z^{\text{від}} = 0$, тому $\tau = 0$.

$$\begin{aligned} \text{У точках 2 і 6, що належать полиці, } S_z^{\text{від}} &= b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = \\ &= 15,5 \cdot 1,30 \cdot \left(\frac{40}{2} - \frac{1,30}{2} \right) = 389,902 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z^{\text{від}}}{b \cdot J_z} = \frac{65,00 \cdot 10^3 \cdot 389,902 \cdot 10^{-6}}{15,5 \cdot 10^{-2} \cdot 19062 \cdot 10^{-8}} 10^{-6} = 0,858 \text{ МПа.}$$

$$\begin{aligned} \text{У точках 3 і 5, що належать стінці } S_z^{\text{від}} &= b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = \\ &= 15,5 \cdot 1,30 \cdot \left(\frac{40}{2} - \frac{1,30}{2} \right) = 389,902 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z^{\text{від}}}{d \cdot J_z} = \frac{65,00 \cdot 10^3 \cdot 389,902 \cdot 10^{-6}}{0,83 \cdot 10^{-2} \cdot 19062 \cdot 10^{-8}} 10^{-6} = 16,018 \text{ МПа.}$$

У точці 4, $S_z^{\text{від}} = 545,00 \text{ см}^3$.

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z^{\text{від}}}{d \cdot J_z} = \frac{65,00 \cdot 10^3 \cdot 545,00 \cdot 10^{-6}}{0,83 \cdot 10^{-2} \cdot 19062 \cdot 10^{-8}} 10^{-6} = 22,390 \text{ МПа.}$$

Епюра дотичних напружень показана на рис. 4.4, б. Знак дотичних напружень відповідає знаку поперечної сили.

Побудуємо епюру головних напружень. Головні напруження при згині балки визначаються за залежністю

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

$$\text{У точці 1: } \sigma_1 = \frac{-141,643}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{141,643^2} = 0 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_2 = \frac{-141,643}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{141,643^2} = -141,643 \text{ МПа.}$$

У точці 2:

$$\sigma_1 = \frac{-132,436}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{132,436^2 + 4 \cdot 0,858^2} = 0,005 \text{ МПа};$$

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \frac{-132,436}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{132,436^2 + 4 \cdot 0,858^2} = \\ &= -132,441 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

У точці 3:

$$\sigma_1 = \frac{-132,436}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{132,436^2 + 4 \cdot 16,018^2} = 1,910 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{-132,436}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{132,436^2 + 4 \cdot 16,018^2} = -134,346 \text{ МПа}.$$

У точці 4:

$$\sigma_1 = 0 + \frac{1}{2}\sqrt{0 + 4 \cdot 22,390^2} = 22,390 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = 0 - \frac{1}{2}\sqrt{0 + 4 \cdot 22,390^2} = -22,390 \text{ МПа}.$$

У точці 5:

$$\sigma_1 = \frac{132,436}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{132,436^2 + 4 \cdot 16,018^2} = 134,346 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{132,436}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{132,436^2 + 4 \cdot 16,018^2} = -1,910 \text{ МПа}.$$

У точці 6:

$$\sigma_1 = \frac{132,436}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{132,436^2 + 4 \cdot 0,858^2} = 132,441 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{132,436}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{132,436^2 + 4 \cdot 0,858^2} = -0,005 \text{ МПа};$$

У точці 7:

$$\sigma_1 = \frac{141,643}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{141,643^2} = 141,643 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{141,643}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{141,643^2} = 0 \text{ МПа}.$$

За цими розрахунками будуюмо епюри головних напружень (рис. 4.11, в, г). Перевіряємо умову міцності в точках двотаврового перерізу за головними напруженнями.

У точках 1 і 7 виникають найбільші головні напруження

$$\sigma = 141,643 < [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Умова міцності виконується.

У точках 3 і 5 виникають напруження σ і τ , наближені до максимальних, тому перевіримо цю точку за четвертою теорією міцності:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{132,436^2 + 3 \cdot 16,018^2} = 135,311 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Умови міцності у всіх точках виконуються, тому номер двотавра підбрано правильно.

Задача 4.2.2. Визначення переміщень у консольній балці методом початкових параметрів

Для заданої розрахункової схеми (рис. 4.12) визначити прогин і кут повороту в точці k методом початкових параметрів. Вважати $EJ = \text{const}$.

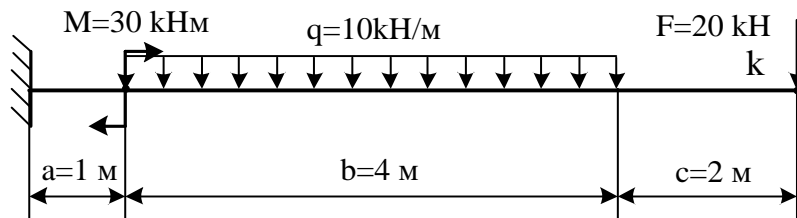


Рис. 4.12. Розрахункова схема консольної балки

Спочатку визначаємо реакції у защемленні (рис. 4.13).

$$\sum Y = 0, R_A - q \cdot b - F = 0, R_A = q \cdot b + F = 10 \cdot 4 + 20 = 60 \text{ kH.}$$

$$\sum M_A = 0, -M_A + M + q \cdot b \cdot \left(\frac{b}{2} + a\right) + F \cdot 7 = 0;$$

$$M_A = M + q \cdot 4 \cdot 3 + F \cdot 7 = 30 + 10 \cdot 4 \cdot 3 + 20 \cdot 7 = 290 \text{ kHm.}$$

Проводимо систему координат. При розрахунках методом початкових параметрів початок координат необхідно обирати в крайній лівій точці балки (рис. 4.13). Для виконання умов Клебша розподілене навантаження продовжуємо до правого кінця балки, а на незавантаженій ділянці прикладаємо це навантаження у протилежному напрямку.

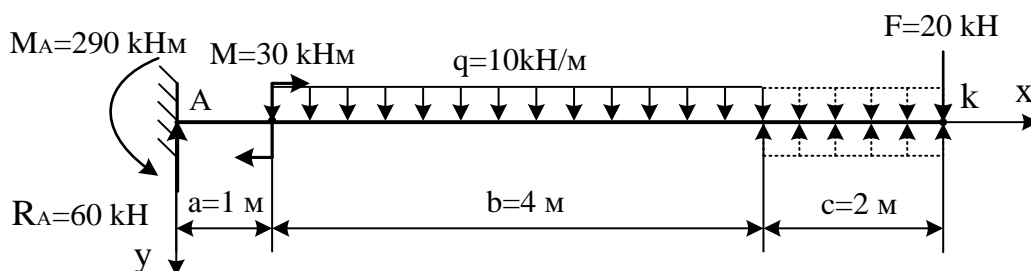


Рис. 4.13. Схема розрахунку методом початкових параметрів

Початкові параметри знаходяться в крайній лівій точці балки (у точці А). Визначимо їх:

$y_0 = 0$ тому, що в цій точці є опора (защемлення), тому ця точка прогинатися не може;

$\varphi_0 = 0$ тому, що в защемлення переріз повертатися не може.

$M_0 = M_A$.

$Q_0 = R_A$.

Прогин і кут повороту дорівнюють нулю тому, що в початковій точці стоїть защемлення, в якому балка не може прогинатися або повертатися.

Запишемо універсальне рівняння для прогинів та кутів повороту методу початкових параметрів:

$$y(x) = \frac{M_A(x-0)^2}{2 \cdot EJ} - \frac{R_A(x-0)^3}{6 \cdot EJ} - \frac{M(x-a)^2}{2 \cdot EJ} + \frac{q(x-a)^4}{24 \cdot EJ} - \frac{q(x-(a+b))^4}{24 \cdot EJ};$$

$$\varphi(x) = \frac{M_A(x-0)}{EJ} - \frac{R_A(x-0)^2}{2 \cdot EJ} - \frac{M(x-a)}{EJ} + \frac{q(x-a)^3}{6 \cdot EJ} -$$

$$-\frac{q(x - (a + b))^3}{6 \cdot EJ}.$$

Визначимо прогин і кут повороту в точці k , тобто при $x = 7$ м.

$$y(7) = \frac{290 \cdot 7^2}{2 \cdot EJ} - \frac{60 \cdot 7^3}{6 \cdot EJ} + \frac{30(7 - 1)^2}{2 \cdot EJ} + \frac{10(7 - 1)^4}{24 \cdot EJ} - \frac{10(7 - 5)^4}{24 \cdot EJ} = \frac{4748,333}{EJ}.$$

$$\varphi(7) = \frac{290 \cdot 7}{EJ} - \frac{60 \cdot 7^2}{2 \cdot EJ} + \frac{30(7 - 1)}{EJ} + \frac{10(7 - 1)^3}{6 \cdot EJ} - \frac{10(7 - 5)^3}{6 \cdot EJ} = \frac{1086,667}{EJ}.$$

Прогин y_0 додатний. Це означає, що напрямок прогину співпадає з напрямком осі. Кут повороту також додатний. Це означає, що переріз повертається за годинниковою стрілкою.

Задача 4.2.3. Визначення переміщень у двохопірній балці методом початкових параметрів

Для заданої розрахункової схеми (рис. 4.14) визначити прогин і кут повороту в точці k методом початкових параметрів. Вважати $EJ = const$.

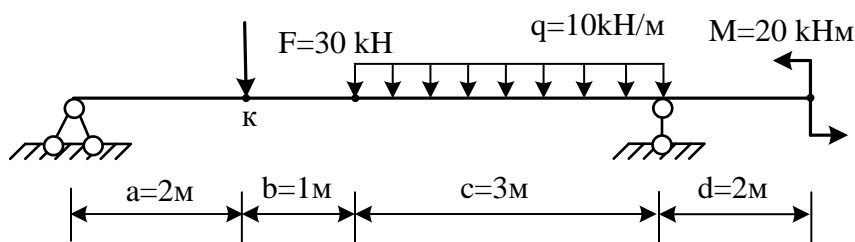


Рис. 4.14. Розрахункова схема консольної балки

Спочатку визначимо реакції (рис. 4.8).

$$\sum M_B = 0, R_A \cdot (a + b + c) - F \cdot (b + c) - q \cdot c \cdot \frac{c}{2} - M = 0;$$

$$R_A = \frac{F \cdot (b + c) + q \cdot c \cdot \frac{c}{2} + M}{a + b + c} = \frac{30 \cdot 4 + 10 \cdot 3 \cdot 1,5 + 20}{6} = 30,833 \text{ kH.}$$

$$\sum M_A = 0. F \cdot a + q \cdot c \cdot \left(\frac{c}{2} + b + a\right) - R_B \cdot (a + b + c) - M = 0.$$

$$R_B = \frac{F \cdot a + q \cdot c \cdot \left(\frac{c}{2} + b + a\right) - M}{a + b + c} = \frac{30 \cdot 2 + 10 \cdot 3 \cdot 4,5 - 20}{6} = 29,167 \text{ kH.}$$

Перевіряємо правильність визначення реакцій:

$$\sum Y = 0, R_A - F - q \cdot c + R_B = 30,833 - 30 - 10 \cdot 3 + 29,167 = 0.$$

Проводимо систему координат з початком в точці А (рис. 4.15). Розподілене навантаження продовжуємо до правого кінця балки, а на незавантаженій ділянці прикладаємо його з протилежним знаком.

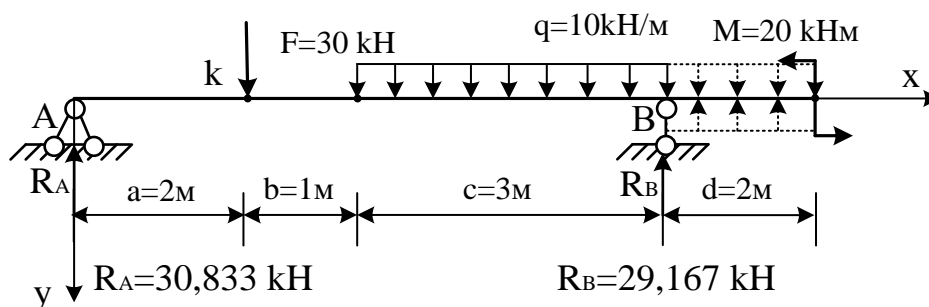


Рис. 4.15. Схема розрахунку методом початкових параметрів

Визначаємо початкові параметри, які знаходяться у крайній лівій точці балки:

$y_0 = 0$ тому, що в цій точці є опора (шарнірно-нерухома опора), отже, ця точка прогинатися не може;

$\varphi_0 \neq 0$, так як на опорі переріз може повертатися. Цей кут повороту необхідно визначити;

$M_0 = 0$ тому, що в шарнірі момент виникати не може;

$$Q_0 = R_A.$$

Запишемо рівняння прогинів та кутів повороту для заданої балки:

$$y(x) = \varphi_0 \cdot x - \frac{R_A(x-0)^3}{6 \cdot EJ} + \frac{F(x-a)^3}{6 \cdot EJ} + \frac{q(x-(a+b))^4}{24 \cdot EJ} - \frac{q(x-(a+b+c))^4}{24 \cdot EJ} - \frac{R_B(x-(a+b+c))^3}{6 \cdot EJ}.$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 - \frac{R_A(x-0)^2}{2 \cdot EJ} + \frac{F(x-a)^2}{2 \cdot EJ} + \frac{q(x-(a+b))^3}{6 \cdot EJ} - \frac{q(x-(a+b+c))^3}{6 \cdot EJ} - \frac{R_B(x-(a+b+c))^2}{2 \cdot EJ}.$$

Для того щоб визначити прогин і кут повороту в перерізі k , необхідно знайти початковий кут повороту. Для його знаходження записуємо додаткове рівняння. При $x = a + b + c = 6$ м (на опорі В) прогин повинен дорівнювати нулю тому, що на опорі балка прогинатися не може.

$$\begin{aligned} y(6) &= \varphi_0 \cdot 6 - \frac{30,833(6-0)^3}{6 \cdot EJ} + \frac{30(6-2)^3}{6 \cdot EJ} + \frac{10(6-3)^4}{24 \cdot EJ} = \\ &= \varphi_0 \cdot 6 - \frac{756,25}{EJ} = 0; \\ \varphi_0 &= \frac{756,25}{6 \cdot EJ} = \frac{126,04}{EJ} \end{aligned}$$

Тепер можна визначити прогин і кут повороту в точці k , при $x = a = 2$ м. На підставі умов Клебша, при складанні рівнянь необхідно розглядати тільки ліву частину балки, тобто

$$\begin{aligned} y(2) &= \frac{126,04}{EJ} \cdot 2 - \frac{30,833 \cdot 2^3}{6 \cdot EJ} = \frac{210,969}{EJ}; \\ \varphi(2) &= \frac{126,040}{EJ} - \frac{30,833 \cdot 2^2}{2 \cdot EJ} = \frac{64,373}{EJ}. \end{aligned}$$

Прогин додатний, це означає, що точка k переміщується за напрямком осі y . Кут повороту додатний, це означає, що переріз повертається за годинниковою стрілкою.

Контрольні запитання

1. Що дає використання гіпотези плоских перерізів при виведенні формул нормальних напружень при згині?
2. Що дає використання гіпотези про ненависнення волокон при виведенні формул нормальних напружень при згині?
3. Яка деформація називається плоским згином та чистим згином? Які виникають внутрішні зусилля?
4. Які геометричні характеристики перерізу входять у формулу нормальних та дотичних напружень при згині?
5. При якому співвідношенні $\frac{h}{l}$ (h – висота перерізу балки, l – прогін балки) можна користуватися формулою $\sigma = \frac{My}{J}$ без помітної похибки?
6. Як розподілені дотичні напруження за висотою прямокутного перерізу?
7. Як розподілені дотичні напруження за висотою тонкостінного двотавра?
8. Вкажіть формули для визначення нормальних та дотичних напружень при згині балки.
9. Як у балках при згині визначити головні напруження?
10. Вкажіть умову міцності за енергетичною теорією міцності.
11. Яке диференціальне рівняння використовується для визначення прогинів балки?
12. Вкажіть алгоритм методу початкових параметрів.
13. Запишіть рівняння для прогинів та кутів повороту методу початкових параметрів.
14. Як визначаються початкові параметри?

5. РОЗРАХУНКИ КОНСТРУКЦІЙ У ПК ЛІРА-САПР

5.1. Загальні дані про ПК ЛІРА-САПР

Програмний комплекс ЛІРА-САПР (ПК ЛІРА-САПР) – це багатофункціональний програмний комплекс для розрахунків, моделювання роботи, дослідження та проектування будівельних конструкцій різного призначення. Застосовується в розрахунках об'єктів будівництва (рис. 5.1), машинобудування, мостобудування та у багатьох інших сферах, де актуальні методи будівельної механіки.

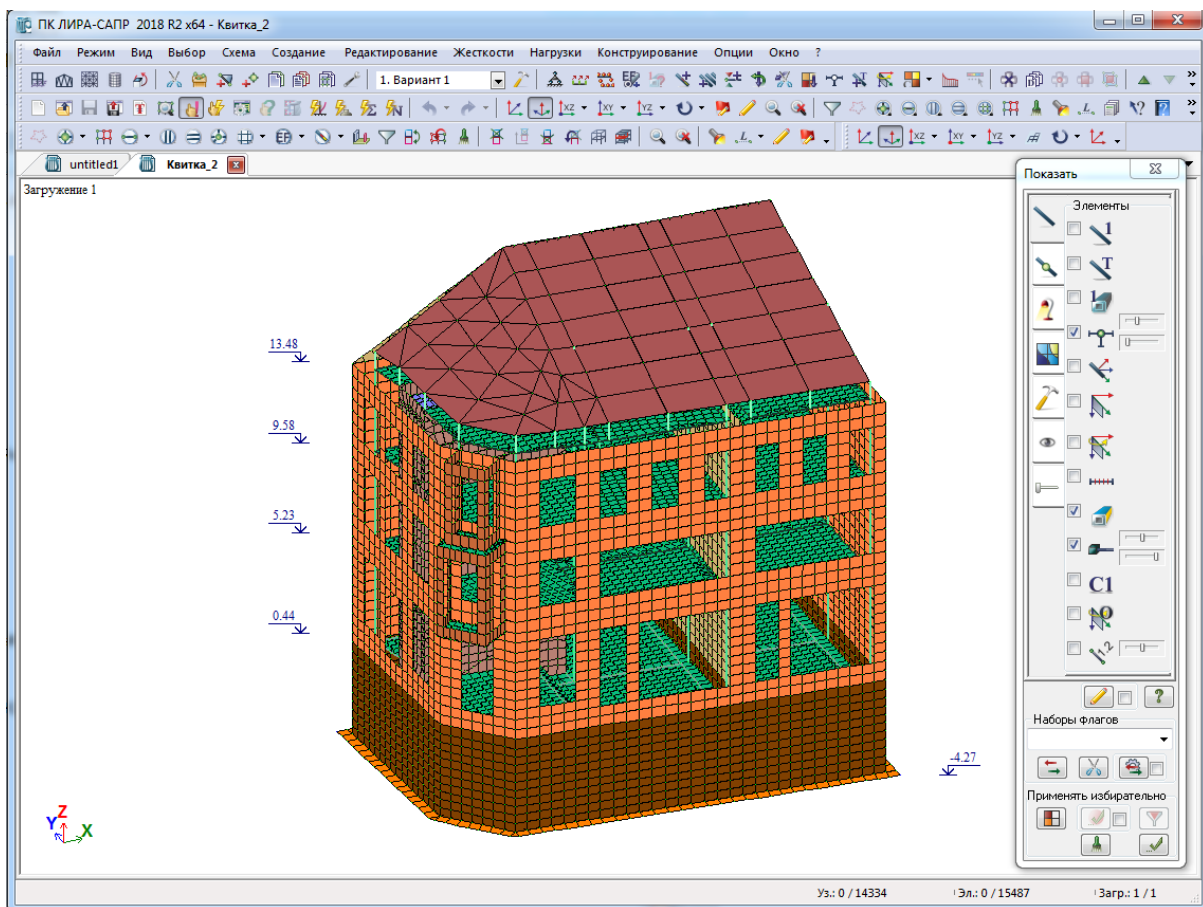


Рис. 5.1. Головне вікно ПК ЛІРА-САПР

У ПК ЛІРА-САПР включено багато типів скінченних елементів: стрижні, чотирикутні та трикутні оболонки, балки-стілки, просторові елементи та ін.

Розрахунки виконуються на статичні, динамічні та температурні навантаження. Статичні навантаження моделюють

силові впливи від зосереджених або розподілених сил або моментів, температурного нагрівання та переміщень. Динамічні навантаження моделюють впливи від землетрусу, пульсації вітру, вібрацій або удару від технологічного обладнання тощо.

ПК ЛІРА-САПР автоматизує ряд процесів проектування: визначення розрахункових комбінацій навантажень і зусиль, підбір і перевірка перерізів сталевих і залізобетонних конструкцій, формування ескізів робочих креслень конструктивних елементів.


ПК ЛІРА-САПР дозволяє досліджувати загальну стійкість моделі, перевіряти міцність перерізів елементів, надає можливість здійснювати розрахунки об'єктів з урахуванням фізичної та геометричної нелінійності, моделювати процес зведення споруд з урахуванням монтажу та демонтажу елементів.


5.2. Інтерфейс ПК ЛІРА-САПР


Інтерфейс ПК ЛІРА-САПР стандартний для Windows-програм. У самому верху вікна розташовується головне меню у вигляді текстових панелей інструментів. Під ними – панелі інструментів з ярликами для швидкого використання необхідної функції.

Надамо пояснення до найбільш часто використовуваних з них.

Меню «Файл»


 (Файл → Новый) – створення нового завдання, для якого потрібно ввести ім'я та ознаку схеми.


 (Файл → Сохранить) – збереження поточного завдання під вихідним іменем, а також проміжне збереження даних.


 (Файл → Открыть) – завантаження створеного раніше файлу з вихідними даними.

Меню «Режим»

ПК ЛІРА-САПР може перебувати в режимі формування розрахункової схеми або режимі візуалізації результатів розрахунків.

 (Режим → Выполнить расчет) – виконати розрахунки завдання.


 (Режим → Результаты расчета) – перемкнути на режим візуалізації результатів розрахунків.


 (Режим → Расчетная схема) – перемкнути на режим формування розрахункової схеми конструкції (цей режим увімкнено за замовчуванням).


Меню «Вид»


У ПК ЛІРА-САПР на рівні завдання, обробки та аналізу прийнято три системи координат: глобальна, місцева і локальна. Глобальна система координат XYZ (права декартова) служить для опису координат вузлів усієї схеми, для визначення напрямку ступенів свободи, ідентифікації переміщень вузлів, призначення навантажень.

У меню «Вид» є можливість зобразити модель в одній із проєкцій:


 (Вид → Изометрия) – зобразити схему в ізометричній проєкції.


 (Вид → Проекция на плоскость XOZ) – показати проєкцію на площину XOZ.

 (Вид → Проекция на плоскость XOY) – показати проєкцію на площину XOY.


 (Вид → Проекция на плоскость YOZ) – показати проєкцію на площину YOZ.


Для зручності відображення розрахункової схеми використовуються інструменти:


 (Вид → Увеличить) – детальне зображення фрагмента розрахункової схеми.

 (Вид → Показать все) – розміщення розрахункової схеми з найбільш раціональним використанням площі робочого вікна.


Для відображення окремого конструктивного елемента поза схемою використовуються такі функції:


 «Фрагментация» (Вид → Фрагментация) – відображення на екрані тільки заздалегідь відмічених вузлів і елементів схеми (одним зі способів, зазначених нижче).


 «Инверсная фрагментация» (Вид → Инверсная фрагментация) – відображення на екрані тільки невідмічених вузлів і елементів схеми.


 «Восстановление конструкции» (Вид → Восстановление конструкции) – відновлення розрахункової схеми конструкції в первісному вигляді після операцій «Фрагментація» або «Інверсна фрагментація».


Меню «Выбор»


 (Выбор → Отметка узлов) – оцінка вузлів на схемі одиночною вказівкою курсора або розтягуванням рамки навколо потрібних вузлів.

 (Выбор → Отметка элементов) – оцінка елементів на схемі одиночною вказівкою курсора або розтягуванням рамки виділення навколо потрібних елементів.

 (Выбор → Отмена выделения) – скасування зробленої раніше оцінки вузлів і елементів.

 (Выбор → Информация об узле или элементе) – виведення на екран діалогового вікна з інформацією про вузол або елемент схеми (рис. 5.2).

 (Выбор → Информация о размерах) – виведення на екран діалогового вікна (рис. 5.3), призначеного для обчислення геометричних параметрів схеми (відстаней між двома вузлами, кутів, площ плоских фігур).

 (Выбор → Полифильтр) – виведення на екран діалогового вікна, що управляє відображенням розрахункової схеми і її атрибутів.

Вікно «Полифильтр» має такі закладки (рис. 5.4):

1. Фільтр для вузлів. Оцінка вузлів може здійснюватися за такими параметрами: номерами; зв'язками; групами об'єднання переміщень; координатами із заданого середовища; наявністю локальних систем координат; супервузлами.

2. Фільтр для елементів. Оцінка елементів може виконуватися за такими параметрами: номерами; видом (двовузловий, тривузловий і т. п.); типом КЕ; типом жорсткості; орієнтацією в глобальній системі координат (паралельність головним осям або площинам); кутом узгодження місцевих осей пластин; для стрижнів за наявністю шарнірів, жорстких вставок і кутів повороту місцевих осей.

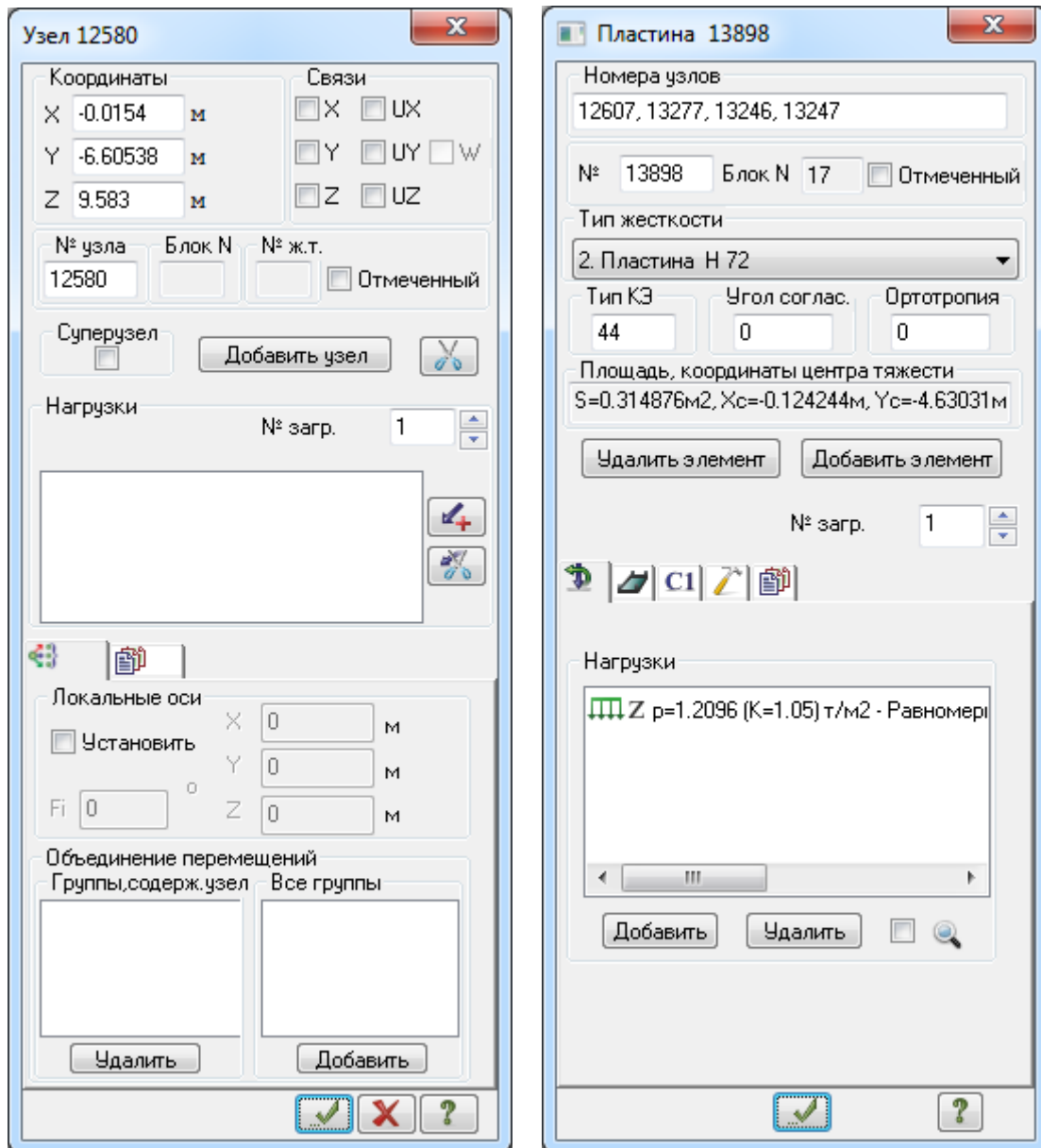


Рис. 5.2. Варіанти вікна інформації про вузол або елемент

3. Фільтр по геометрії КЕ. Оцінка елементів може бути зроблена по таких параметрах: довжина стрижня; довжина ребра пластини; кут між ребрами пластини; площа пластини; площа грані просторового КЕ.

4. Фільтр для навантажень. Оцінка навантажень здійснюється відповідно до загального списку навантажень поточного завантаження.

5. Фільтр для зусиль і переміщень. Оцінка здійснюється за діапазоном значень в інтервалі або дискретно.

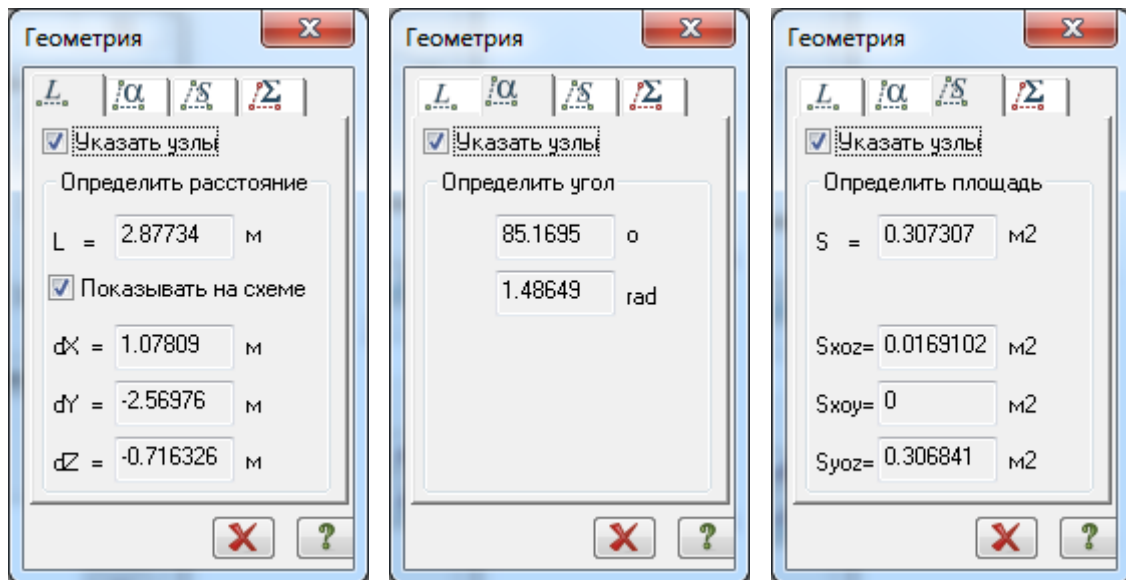


Рис. 5.3. Варианты вѐкна геометрических параметров

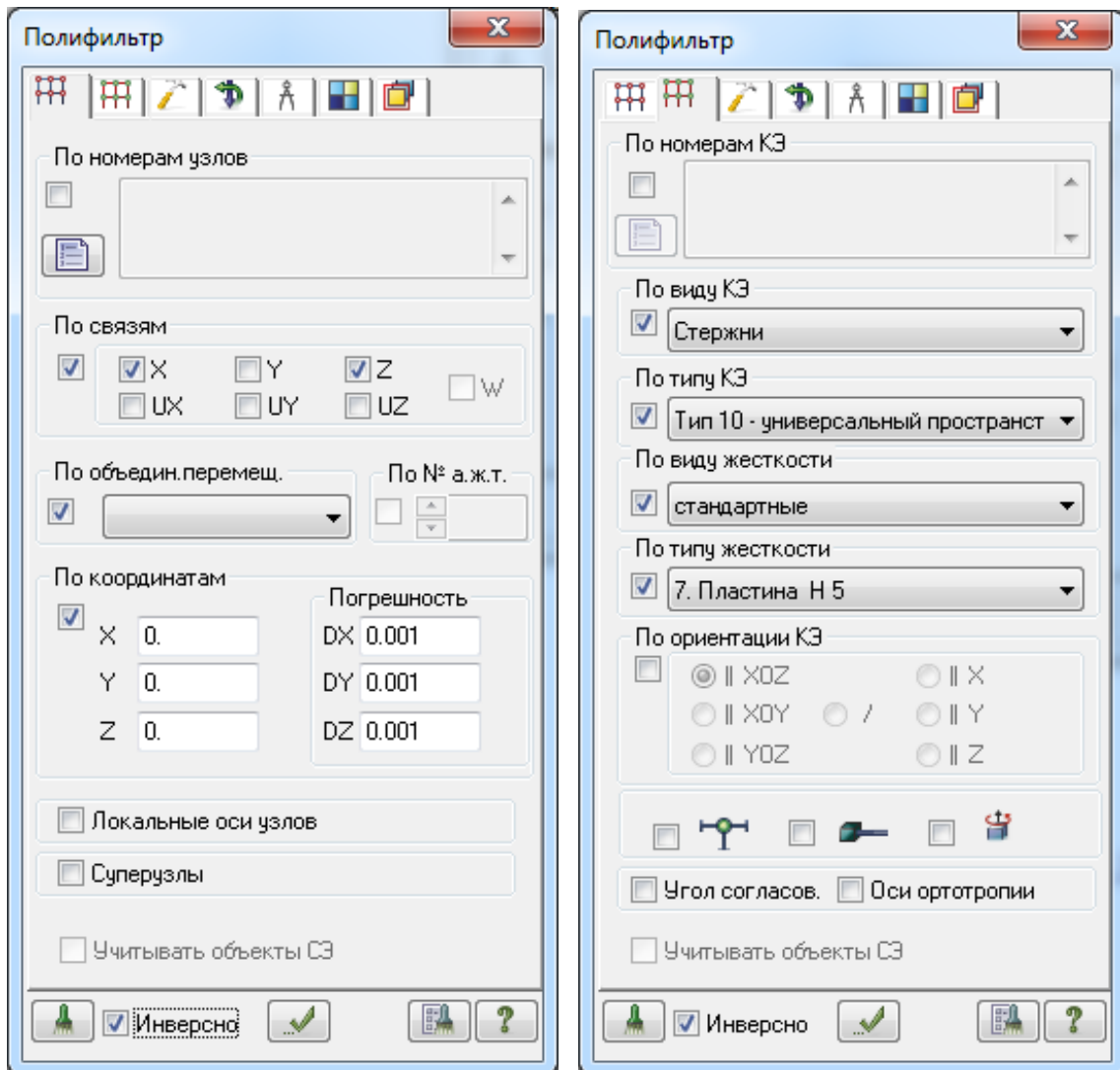


Рис. 5.4. Варианты вѐкна «Полифильтр»

Меню «Схема»



(Схема → Признак схемы) – зміна ознаки схеми. Викликається відповідне діалогове вікно, у якому користувач може змінити ім'я завдання, ознаку схеми та опис завдання.

Для розрахункових схем, у яких кількість ступенів свободи у вузлі свідомо менше 6 (плоскі ферми, плоскі рами та т.п.), застосовується так звана ознака схеми.

У ПК ЛІРА-САПР задіяно п'ять ознак схеми:

ознака 1 – схеми, розташовувані в площині XOZ ; кожний вузол має два ступені свободи – лінійні переміщення уздовж осей X , Z або $X2$, $Z2$. У цій ознаці схеми розраховуються, наприклад, плоскі ферми та балки-стілки;

ознака 2 – схеми, розташовувані в площині XOZ ; кожний вузол має три ступені свободи – лінійні переміщення уздовж осей X , Z або $X2$, $Z2$ і поворот навколо осі Y або $Y2$. У цій ознаці схеми розраховуються плоскі рами та допускається включення елементів ферм і балок-стінок;


ознака 3 – схеми, розташовувані в площині XOY ; кожний вузол має три ступені свободи – лінійне переміщення уздовж осей Z або $Z2$ і повороти навколо осей X , Y або $X2$, $Y2$. У цій ознаці розраховуються балкові ростверки та плити; допускається облік пружної основи;

ознака 4 – просторові схеми, кожний вузол яких має три ступені свободи – лінійні переміщення уздовж осей X , Y , Z або $X2$, $Y2$, $Z2$. У цій ознаці розраховуються просторові ферми та об'ємні тіла;

ознака 5 – просторові схеми загального вигляду з шістьма ступенями свободи у вузлі. У цій ознаці схеми розраховуються просторові каркаси, оболонки та допускається включення об'ємних тіл, облік пружної основи та т. п.



(Схема → Упаковка схемы) – у діалоговому вікні «Упаковка» (рис. 5.5) можна замовити впакування даних і перенумерацію вузлів і елементів схеми з обліком вилучених, а також «зшивку» співпадаючих вузлів і елементів, що утворювалися після виконання операцій «Сборка», «Копирование» і інших операцій з геометрією розрахункової схеми.

 (Создание → Добавить узел) – викликає діалогове вікно для додавання вузлів у розрахункову схему та містить шість закладок, які надають такі можливості задання вузлів: за координатами; на мережі; за окружністю; за формулою; розподілом на N рівних частин; розподілом на дві частини по пропорції.

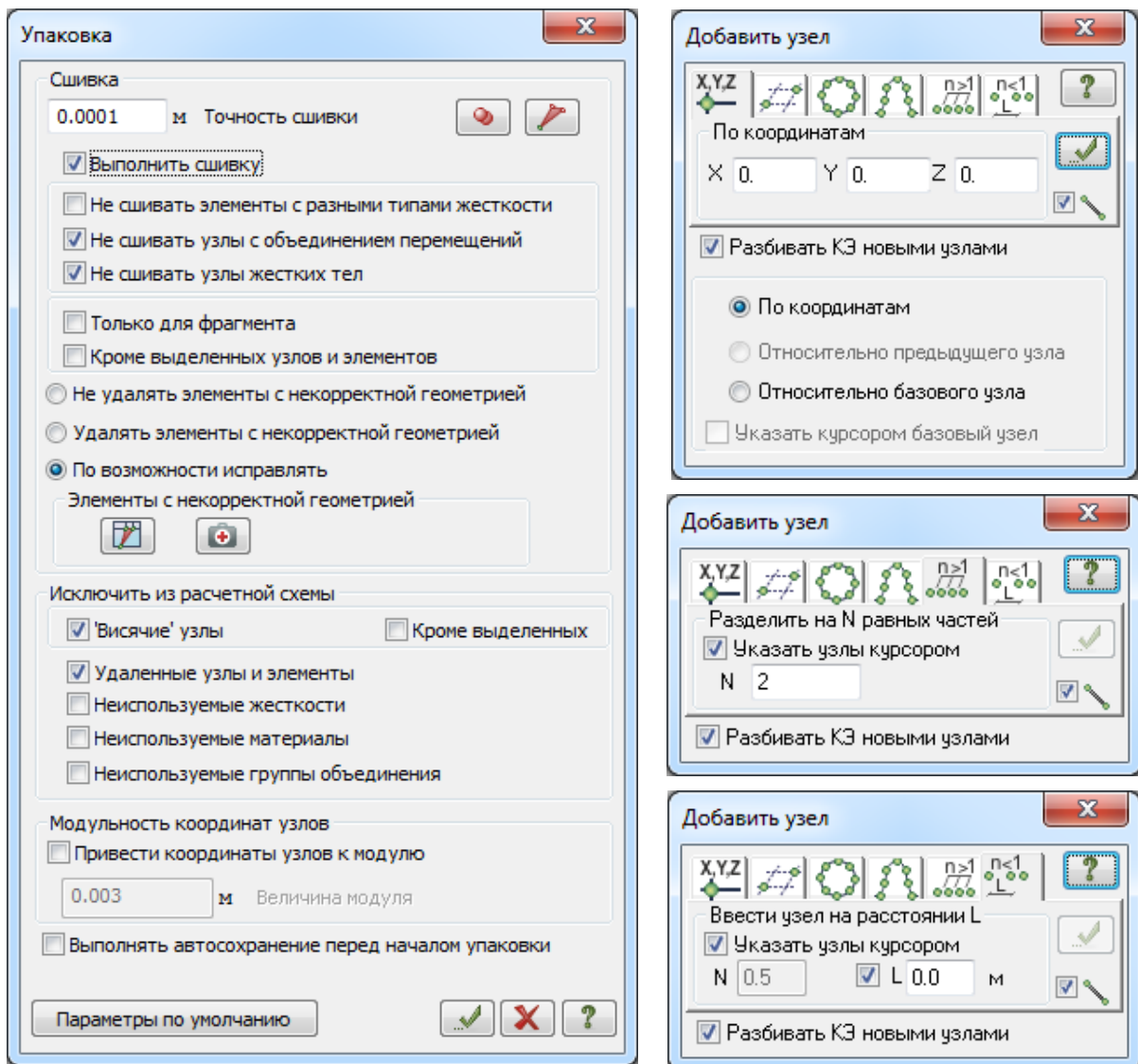





Рис. 5.5. Діалогове вікно «Упаковка» і «Добавить узел»

Меню «Создание»

 (Создание → Добавить элемент) – викликає діалогове вікно для додавання елементів у розрахункову схему та містить шість закладок, які надають можливості задання таких елементів:

додати стрижень; додати тривузлову пластину; додати чотиривузлову пластину; додати одновузлові елементи; додати стрижень розподілом на N рівних частин; додати стрижень розподілом на дві частини за пропорцією.

 (Создание → Регулярные фрагменты и сети) – генерація регулярних фрагментів. Діалогове вікно містить п'ять закладок для задання регулярних фрагментів за параметрами – рам, ростверків, балок-стінок, плит і плоских оболонок, сіток (рис. 5.6).

 (Схема → Связи) – установлення зв'язків для відзначених вузлів. У діалоговому вікні вказуються напрямки, за якими потрібно заборонити переміщення – X, Y, Z, UX, UY, UZ.

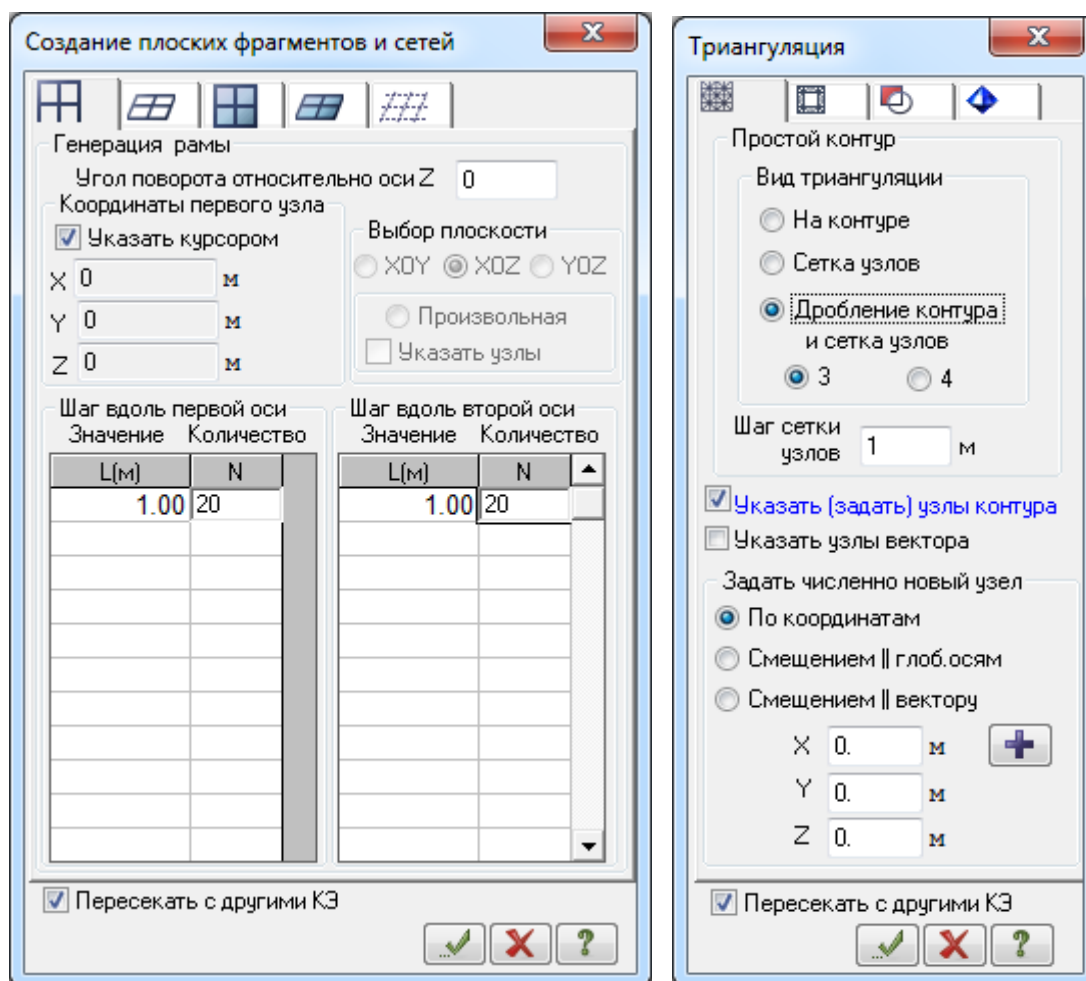





Рис. 5.6. Діалогове вікно «Фрагменты и сети» і «Триангуляция»

 (Создание → Фермы) – генерація ферми за обрисом пояса, за обрисом решітки і задання чисельними параметрами.

 (Создание → Перемещение образующей) – призначено для

створення просторової розрахункової схеми із плоского фрагмента (твірної). Діалогове вікно містить закладки «Перемещение образующей» і «Вращение образующей» (рис. 5.7). Копії послідовно з'єднуються за таким принципом: вузли перетворюються в стрижні; стрижні перетворюються в пластини; пластини перетворюються в об'ємні елементи. Виконання операції здійснюється з попередньою відміткою відповідних вузлів і елементів.

 (Создание → Создание и триангуляция контуров) – Створення плоского фрагмента з автоматичним нанесенням скінченноелементної мережі. Діалогове вікно містить чотири закладки, що відповідають чотирьом різним способам створення плоских фрагментів схем і триангуляції цих фрагментів: простий контур, контур з отворами, редактор контурів, побудова фрагмента схеми в програмі САПФІР.

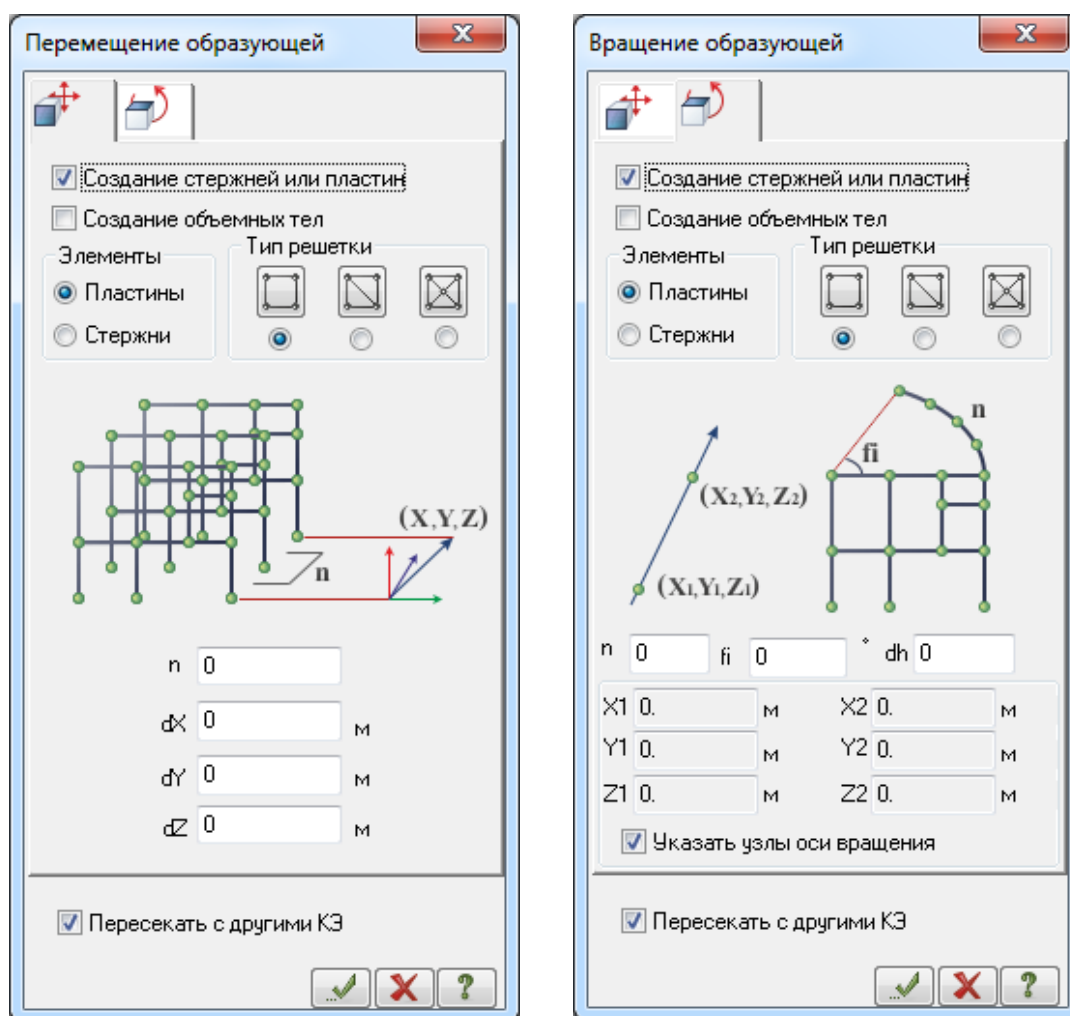





Рис. 5.7. Діалогове вікно «Перемещение и вращение образующей»

Меню «Редактирование»

 (Редактирование → Переместить выбранные объекты) – викликає діалогове вікно переміщення обраних об'єктів. Діалогове вікно містить п'ять закладок: переміщення за параметрами; переміщення за одним вузлом; переміщення за двома вузлами; переміщення поворотом; переміщення симетричне.

 (Редактирование → Копировать выбранные объекты) – викликає діалогове вікно копіювання обраних об'єктів. Діалогове вікно містить ті самі п'ять закладок, що й в діалоговому вікні при переміщенні обраних об'єктів (рис. 5.8).

 (Редактирование → Смена типа конечного элемента) – викликає діалогове вікно для зміни типу заданих за замовчуванням типів скінченних елементів відповідно до нумерації типів у Бібліотеці скінченних елементів. Слід ураховувати, що при побудові схеми та заданні скінченних елементів їм автоматично присвоюється тип, визначений за замовчуванням.

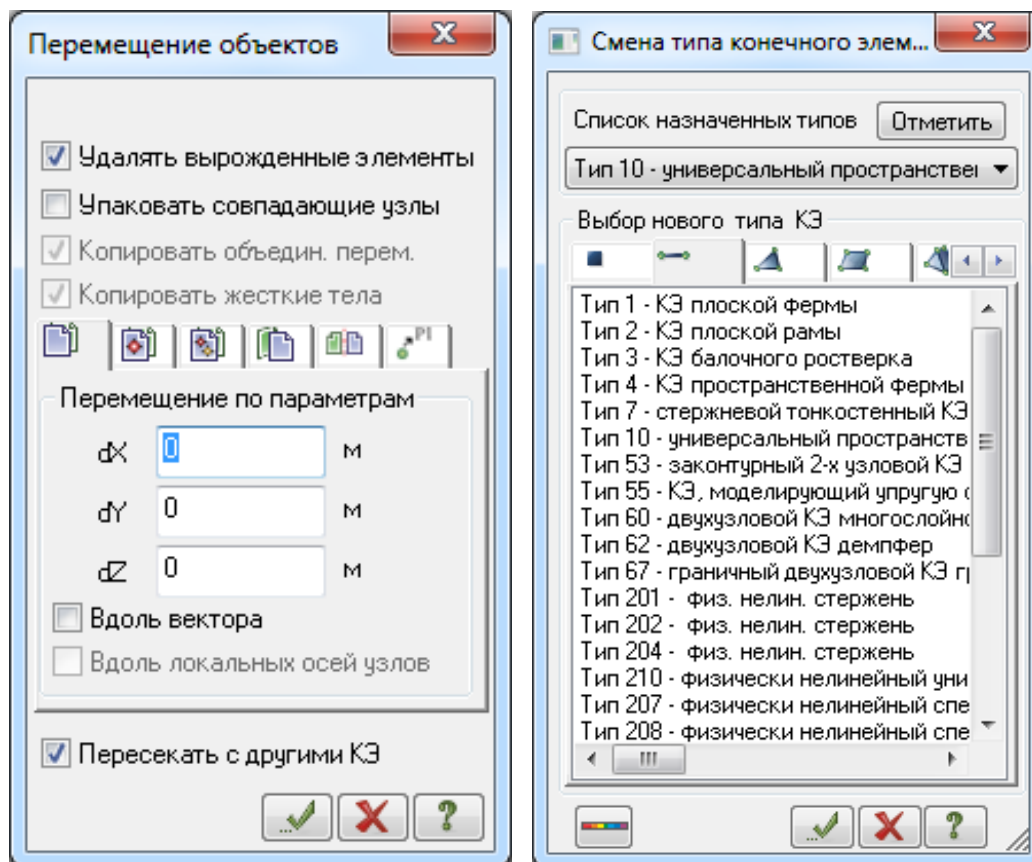




Рис. 5.8. Діалогове вікно «Перемещение объектов» і «Смена типа КЭ»


Меню «Жесткости»

 (Жесткости → Жесткости и материалы) – викликає діалогове вікно задання та призначення жорсткості для вибору необхідних типів (параметрів) жорсткості з бібліотеки характеристик (рис. 5.9). Вкладки «ЖБ», «Сталь» і «Кладка» призначені для задання властивостей матеріалів прийнятих жорсткостей. Задані жорсткості та матеріали призначаються скінченим елементам схеми. Після натискання кнопки «Добавить» відкривається додаткове діалогове вікно «Добавить жесткость», що складається із трьох закладок з бібліотеками типів перерізів: стандартні типи перерізів (металеві, дерев'яні, кам'яні, ЖБ), база сталевих перерізів (типові перерізи сталевого прокату та складені), моделі пластин і об'ємних елементів, а також числових параметрів.

 (Жесткости → Шарниры) – викликає діалогове вікно задання шарнірів на початку (1-го вузла) та/або наприкінці (2-го вузла) у місцевій системі координат стрижня. Видалення шарнірів виконується аналогічно.

Для моделювання ґрунтової основи призначене діалогове вікно «Коэффициенты постели С1 и С2» (Жесткости → Коэффициенты постели С1 и С2) для задання коефіцієнтів постелі С1 і С2 на відзначений елемент або групу елементів.

Меню «Нагрузки»

 (Нагрузки → Нагрузка на узлы и элементы) – викликає діалогове вікно задання навантажень на вузли, стрижні, пластини, об'ємні елементи та суперелементи (рис. 5.10). У вікні є радіокнопки для задання систем координат – глобальної, місцевої (для елемента), локальної (для вузла) і напрямку впливу – X, Y, Z, кнопки для задання статичного навантаження (коричневий колір), заданого зсуву (жовтий колір) і динамічного впливу (рожевий колір) – меню цих кнопок змінюється залежно від типу кінцевого елемента, що завантажується. При натисканні даних кнопок викликається діалогове вікно для задання параметрів навантаження.

Навантаження, прикладене в місцевій системі координат об'єкта, буде переорієнтовуватися відповідно до нового положення місцевих осей.

Керування навантаженнями та формування груп здійснюється у вікні «Редактор загрузений», яке викликається одноіменною кнопкою.

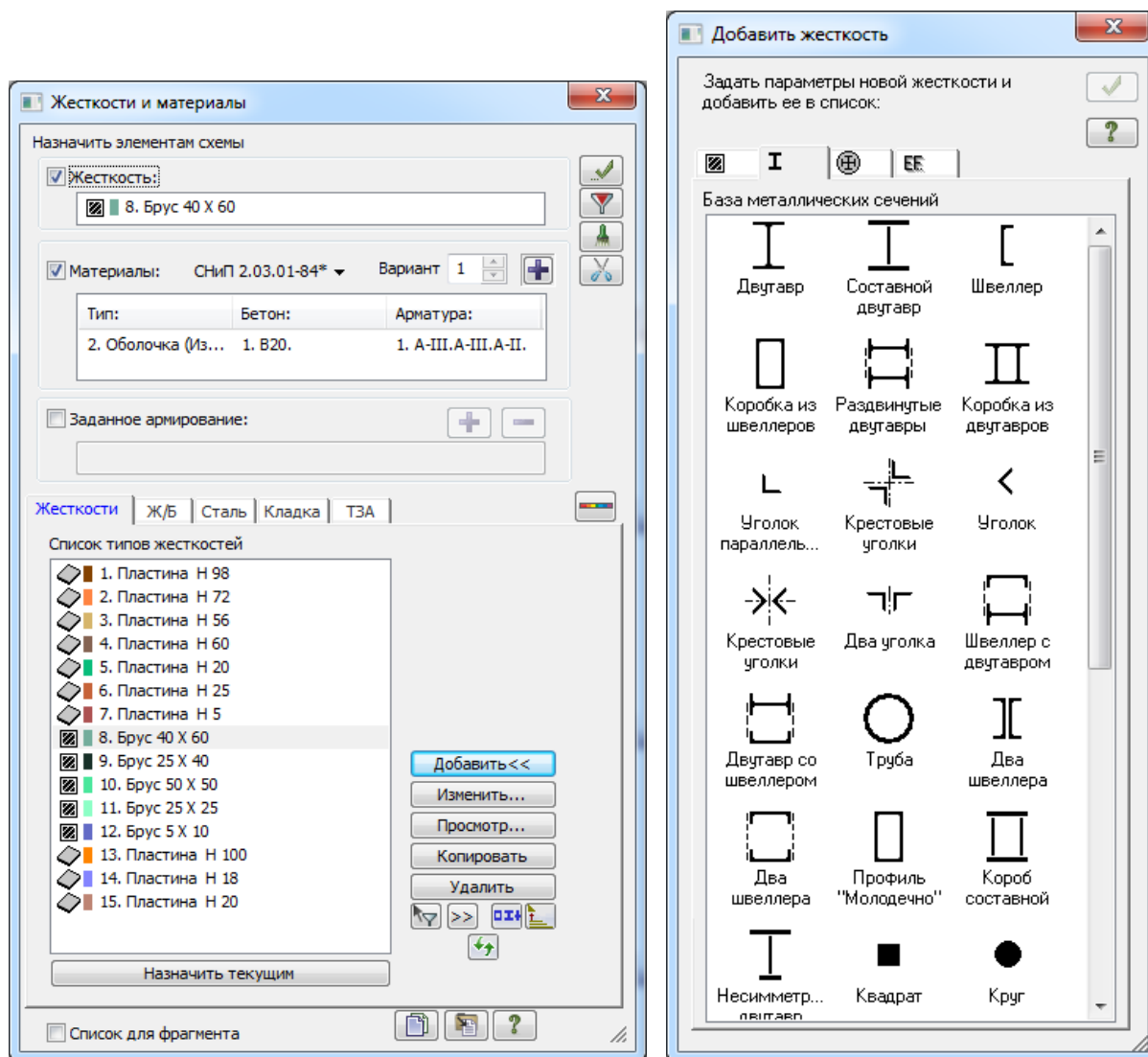



Рис. 5.9. Діалогове вікно «Жесткости и материалы»

Меню «Опции»

 (Опции → Флаги рисования) – вікно призначено для установлення опцій відображення розрахункової схеми. Викликається діалогове вікно «Показать», яке призначено для установлення прапорів рисування, тобто інформації, зображуваної безпосередньо на схемі, а також опцій відображення схеми (рис. 5.11).

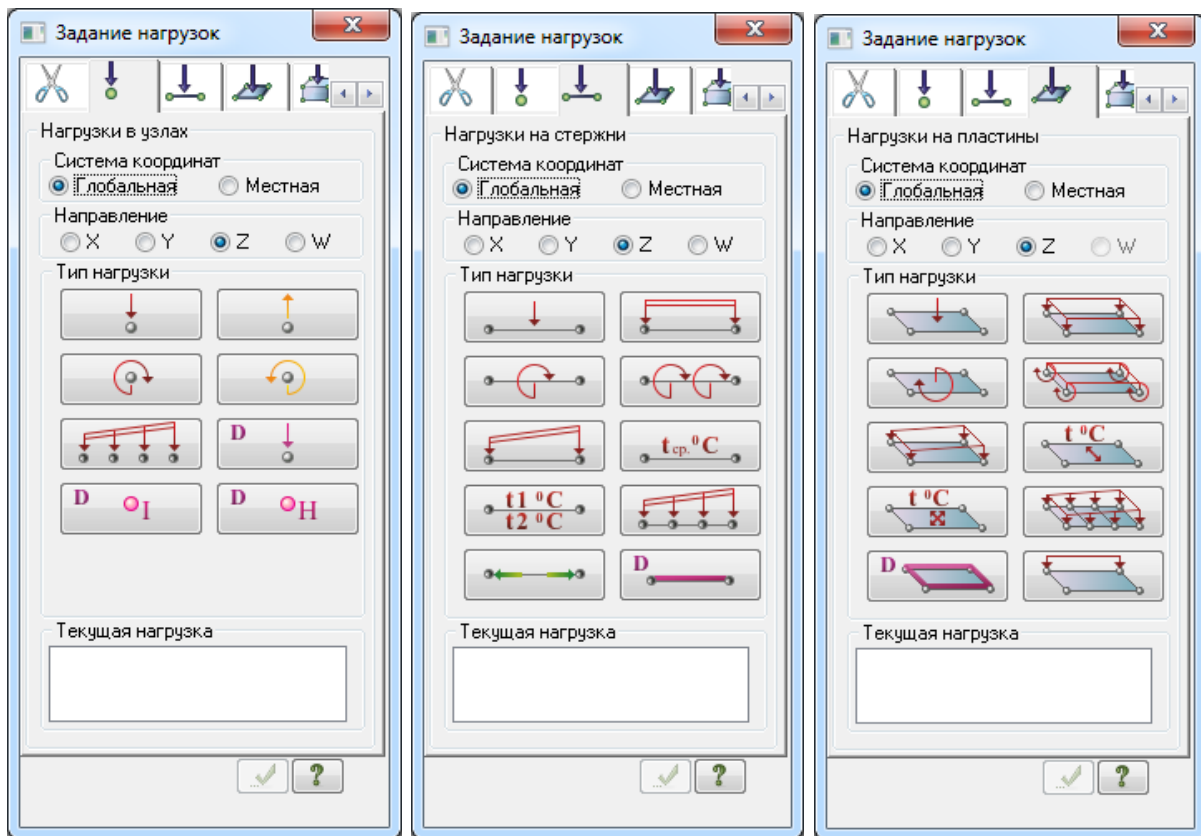



Рис. 5.10. Діалогове вікно «Задание нагрузок»

Діалогове вікно містить сім закладок: елементи, вузли, загальні, значення, матеріали, показати та візуалізація. Також важливо відзначити наявність таких пунктів цього меню:

- установлення одиниць виміру (Опции → Единицы измерения). У діалоговому вікні налаштовується робота системи на зручні для користувача одиниці виміру при описі розрахункової схеми конструкції та для читання результатів розрахунків;
- параметри розрахунків (Опции → Параметры расчета) припускають налаштування таких властивостей математичного процесора програми: тип оптимізації профілю матриці жорсткості (без оптимізації, алгоритм Катхилла-Маки, алгоритм мінімального ступеня, алгоритм фактор-дерев); точність розкладання матриці (кількість знаків); точність стикування суперелементів; точність динамічних розрахунків (кількість знаків після десяткової крапки при динамічних розрахунках).

Меню «Окно»

 (Окно → Документатор) – відкриває систему «Документатор» для створення, компоновання та виведення на друк

креслень, призначених для документування поточного завдання. Графічними образами, що попадають на аркуш креслень системи «Документатор», можуть бути різні зафіксовані варіанти розрахункової схеми та результатів розрахунків (епюри зусиль, мозаїки переміщень вузлів і т. п.), інтерактивні таблиці та ін.

(Окно → Интерактивные таблицы) – створення та перегляд таблиць в інтерактивному режимі, що дозволяє компоувати та виводити на друк таблиці, необхідні для документування поточного завдання.




Рис. 5.11. Диалогове вікно «Показать»

5.3. Приклади використання ПК ЛІРА-САПР

Задача 5.3.1. Приклад розрахунку двохопорної балки з консоллю

Мета: для заданої двохопорної одноконсольної балки (рис. 1.17) побудувати епюри внутрішніх зусиль.

Для початку роботи з ПК ЛІРА-САПР виконайте таку команду Windows: «Пуск → Все програми → LIRA SAPR → ЛІРА-САПР → ЛІРА-САПР» або запустіть програму за допомогою ярлика .


Етап 1. Створення нового завдання

1. Для створення нової схеми з панелі меню оберіть «Файл → Новый».

2. У вікні, що з'явилося автоматично «Описание схемы» (рис. 5.12), задайте такі параметри:

- у списку «Признак схемы» оберіть рядок – «2-Три степени свободы в узле (перемещения X,Z,Uy) XOZ»;

- «Имя задачи» – «Приклад 1».

3. Натисніть кнопку «Подтвердить» .

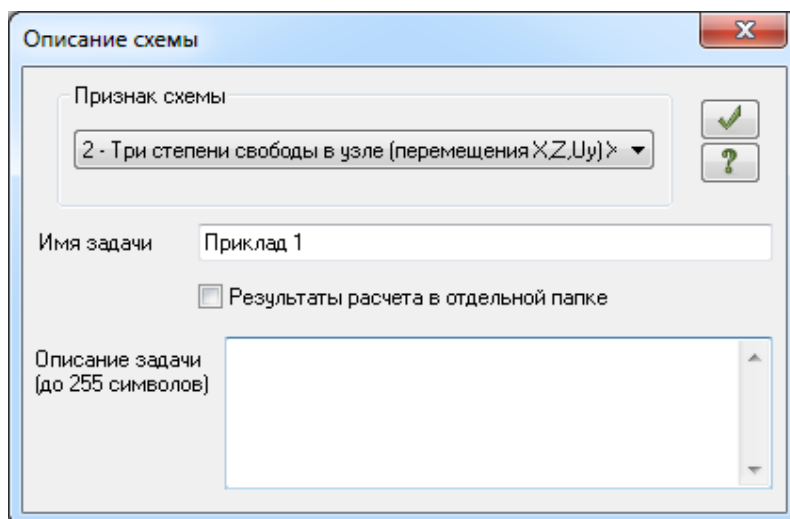





Рис. 5.12. Діалогове вікно «Описание схемы»

Етап 2. Створення геометричної схеми балки

1. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Флаги рисования», у діалоговому вікні «Показать» перейдіть на другу


вкладку «Узлы» та встановіть прапорець «Номера узлов» (рис. 5.13, а), натисніть кнопку .

2. Закрийте діалогове вікно «Показать», натиснувши .

3. Відкрийте діалогове вікно «Добавить узел», натиснувши кнопку  на панелі інструментів (рис. 5.13, б).


4. За допомогою діалогового вікна «Добавить узел» додамо усі відповідні вузли на схемі (вузли початку та кінця прогону балки, опорні вузли, вузли, в яких прикладаються зосереджені навантаження, вузли початку та кінця дії рівномірно розподілених навантажень тощо).

Змінюється тільки координата X «зліва направо»:


- перший вузол з координатами «X 0; Y 0; Z 0» натисніть кнопку .


- другий вузол з координатами «X 3; Y 0; Z 0» натисніть кнопку .

- третій вузол з координатами «X 4; Y 0; Z 0» натисніть кнопку .

- четвертий вузол з координатами «X 8; Y 0; Z 0» натисніть кнопку .


- п'ятий вузол з координатами «X 10; Y 0; Z 0» натисніть кнопку .

5. Закрийте діалогове вікно «Добавить узел», натиснувши .

6. Відкрийте діалогове вікно «Добавить элемент», натиснувши кнопку  на панелі інструментів.

7. У діалоговому вікні «Добавить элемент» на першій вкладці «Добавить стержень» встановіть прапорець «Указать узлы курсором» та «Учитывать промежуточные узлы» (рис. 5.13, в).

8. Оберіть курсором «миші» вузол № 1 (натисніть на ньому лівою кнопкою «миші») та потягніть курсор до вузла № 5 і також натисніть на ньому.

9. Закрийте діалогове вікно «Добавить элемент», натиснувши .

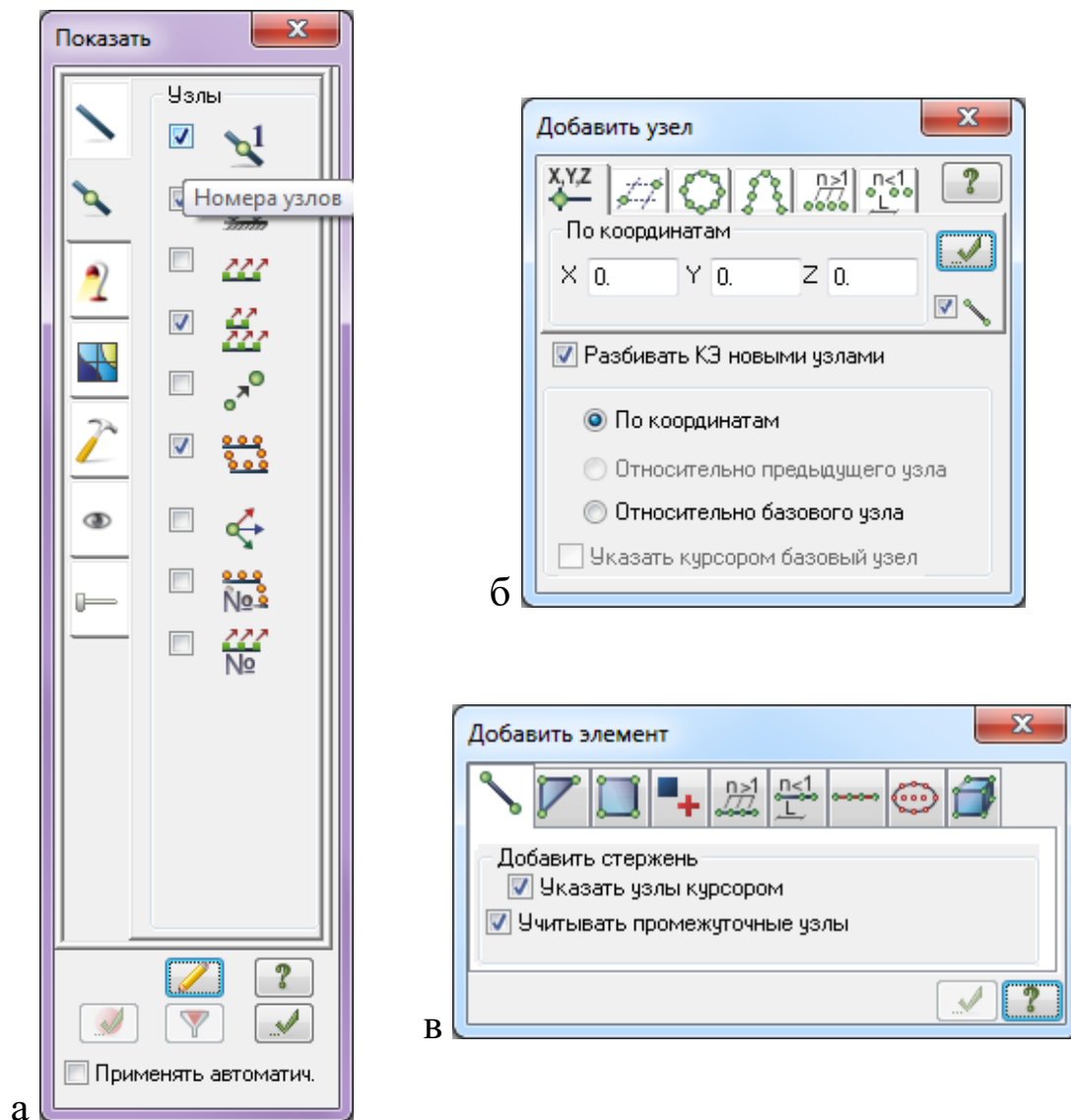




Рис. 5.13. Діалогові вікна етапу 2

Етап 3. Призначення опорних зв'язків (граничних умов)

Задавати опорні зв'язки (граничні умови) у вузлах можна двома способами, розглянемо перший спосіб на першій опорі (вузол № 1), а другий – на другій опорі (вузол № 4).


Спосіб 1


1. Перший опорний зв'язок знаходиться у вузлі № 1. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Отметка узлов». Натискаєте курсором на вузол № 1, він забарвиться в червоний колір.

2. Відкрийте діалогове вікно «Связи в узлах», натиснувши кнопку  на панелі інструментів.

3. У діалоговому вікні «Связи в узлах» на першій вкладці «Назначить связи» встановіть прапорець на X та Z, що відповідає шарнірно нерухомій опорі (рис. 5.14, а).

4. Натисніть кнопку , після чого вузол № 1 забарвиться в синій колір.

5. Закрийте діалогове вікно «Связи в узлах», натиснувши .

6. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Отметка узлов», щоб зняти активність з операції відмітки вузлів.

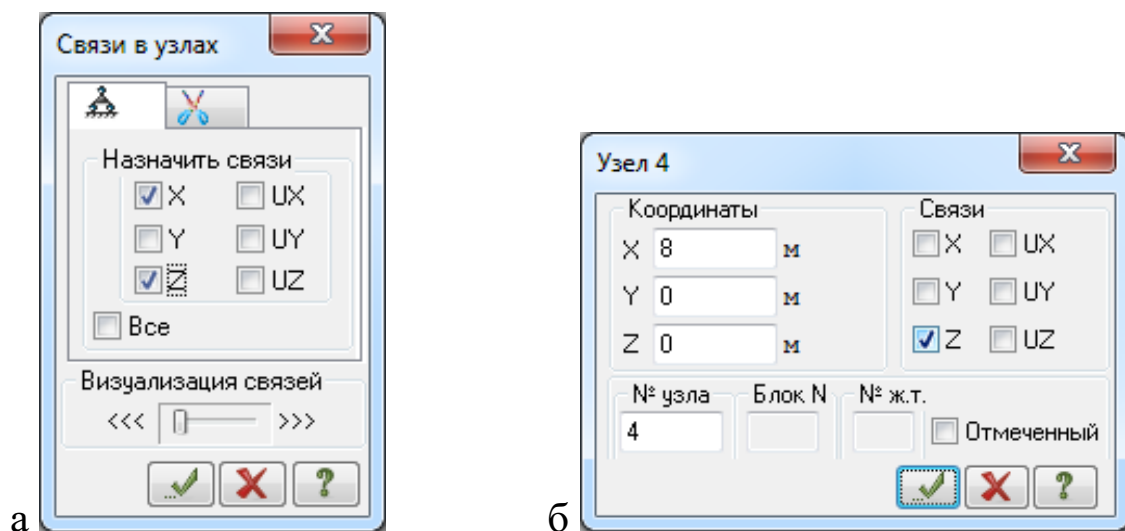





Рис. 5.14. Діалогове вікно «Связи в узлах»

Способ 2

1. Другий опорний зв'язок знаходиться у вузлі № 4. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Информация об узле или элементе».

2. Натисніть курсором на вузол № 4. Відкривається діалогове вікно «Узел 4» (рис. 5.14, б).

3. У діалоговому вікні «Узел 4» у відділі «Связи» встановіть прапорець на Z, що відповідає шарнірно-рухомій опорі.

4. Натисніть кнопку  та закрийте діалогове вікно «Узел 4», натиснувши .

Етап 4. Моделювання навантажень

Задавати навантаження на вузли та елементи можна двома способами, за аналогією з попереднім етапом.

Способ 1

1. Виконайте налаштування одиниць вимірювання. В головному меню натисніть «Опции → единицы измерения».

2. У діалоговому вікні «Единицы измерения» (рис. 5.15) у першій вкладці «Схема» оберіть «Нагрузки» – кілоньютон (кН), метр (м).

у другій вкладці «Результаты»: - «Усилия» – кН, м.

3. Натисніть кнопку «Подтвердить».

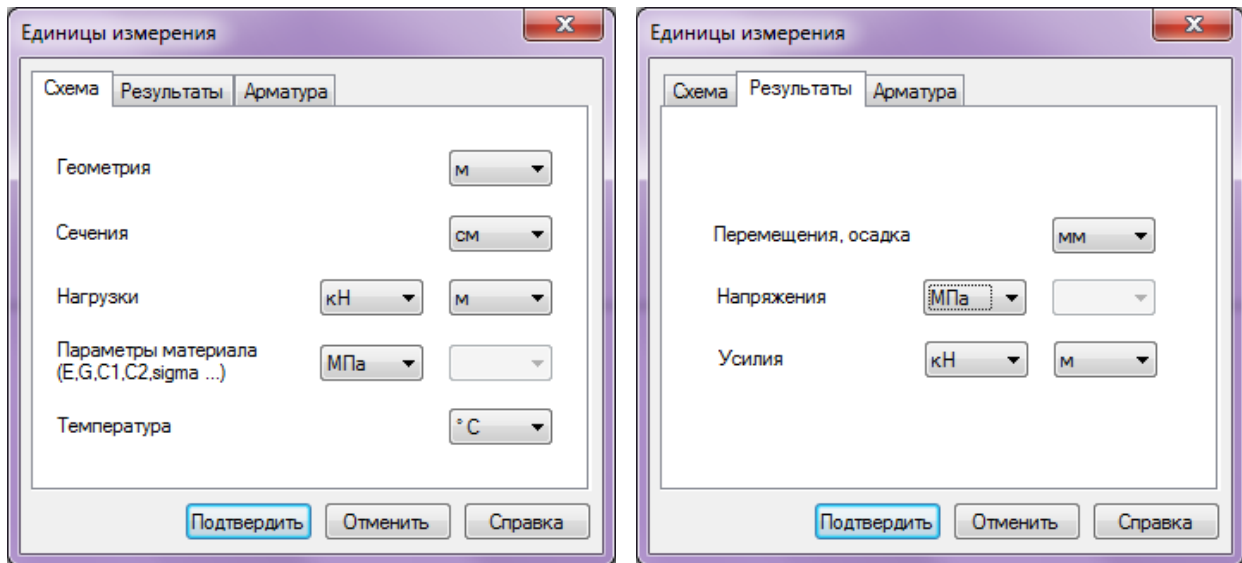






Рис. 5.15. Диалоговое окно «Единицы измерения»

4. Перше навантаження – зосереджений згинальний момент, прикладений до вузла № 2. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Отметка узлов». Натисніть курсором на вузол № 2, він забарвиться в червоний колір.

5. Відкрийте діалогове вікно «Задание нагрузок», натиснувши кнопку  «Нагрузки на узлы и элементы» на панелі інструментів.

6. Перейдіть на другу вкладку «Нагрузки в узлах», «Система координат», оберіть «Направление» Y та натисніть кнопку  «Сосредоточенный момент» (рис. 5.16, а).

7. У вікні «Параметры нагрузки» введіть значення згинального моменту 20 кН·м (рис. 5.16, б).

8. Натисніть кнопку , після чого у вузлі № 2 з'явиться зосереджений момент.

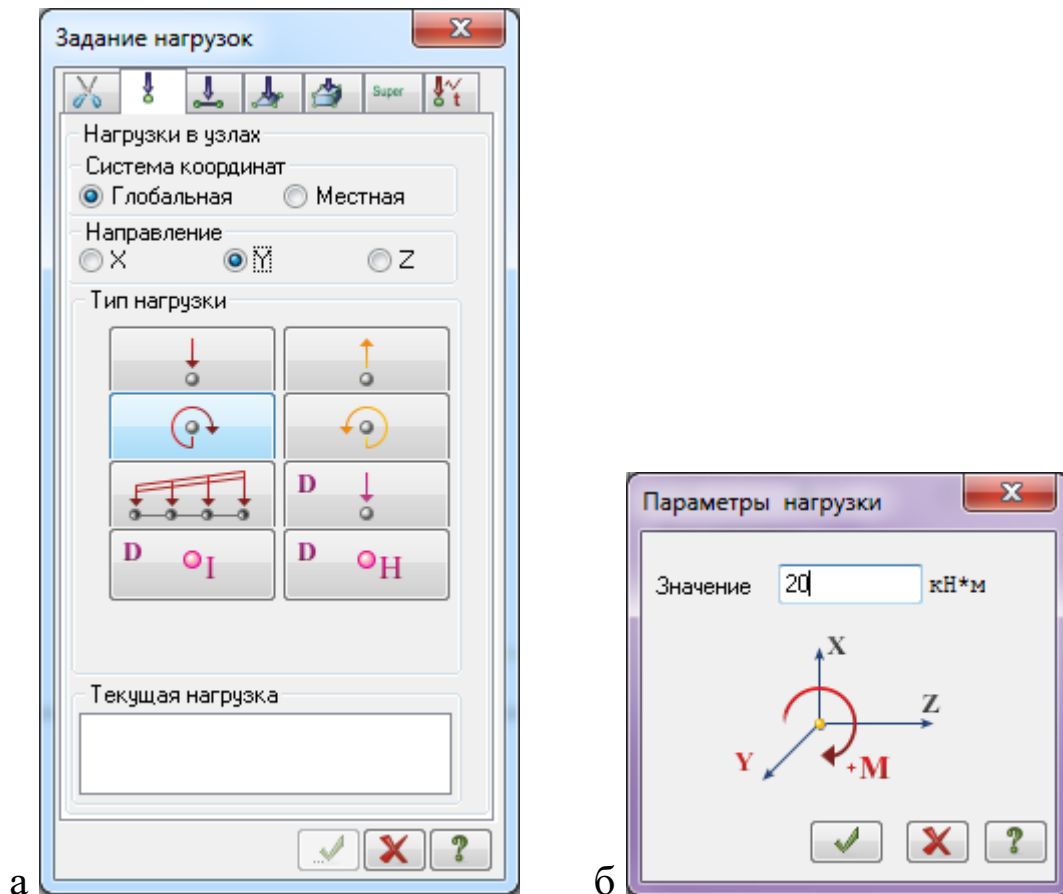





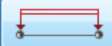
Рис. 5.16. Діалогове вікно «Задание нагрузок»

9. Закрийте діалогове вікно «Задание нагрузок».

10. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Отметка узлов», щоб зняти активність з операції відмітки вузлів.

11. Друге навантаження – рівномірно розподілене навантаження. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Отметка элементов». Натисніть курсором на стрижень між вузлами № 3 і № 4 та на стрижень між вузлами № 4 і № 5, вони забарвлюються в червоний колір.

12. Відкрийте діалогове вікно «Задание нагрузок», натиснувши кнопку  «Нагрузки на узлы и элементы» на панелі інструментів.

13. Перейдіть на третю вкладку «Нагрузки на стержни», оберіть «Направление» Z та натисніть кнопку  «Равномерно распределенная нагрузка» (рис. 5.17, а).

14. Введіть значення рівномірно розподіленого навантаження 10 кН/м у діалоговому вікні «Параметры» (рис. 5.17, б).

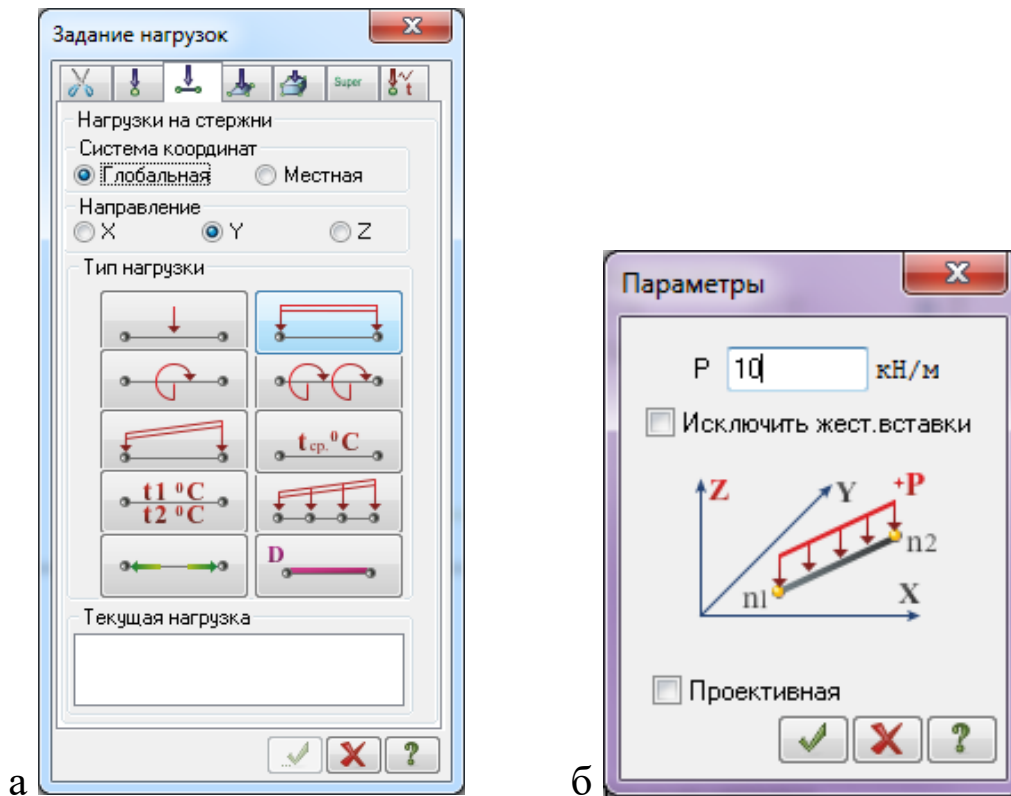





Рис. 5.17. Диалогове вікно «Задание нагрузок»


15. Натисніть кнопку , після чого на стрижнях з'явиться рівномірно розподілене навантаження.


16. Закрийте діалогове вікно «Задание нагрузок».


Спосіб 2

1. Третє навантаження – зосереджена сила, яка діє у вузлі № 5. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Информация об узле или элементе». Натисніть курсором на вузол № 5.

2. У діалоговому вікні «Узел 5» натисніть кнопку  «Добавить нагрузку в узел».

3. Перейдіть на першу вкладку «Нагрузки в узлах», оберіть «Направление» Z та натисніть кнопку  «Сосредоточенная сила».

4. Введіть значення зосередженої сили -30 кН/м у діалоговому вікні «Параметры нагрузки» та натисніть кнопку .

5. У діалоговому вікні «Узел 5» натисніть кнопку , після чого зосереджена сила з'явиться у вузлі № 5 (рис. 5.18).

6. Закрийте діалогове вікно «Узел 5».

Примітка. Користуватися першим способом доцільно, коли кількість вузлів або елементів, яким необхідно задати однакові параметри, становить два та більше. Другий спосіб раціонально використовувати, коли необхідно задати параметр одному елементу.

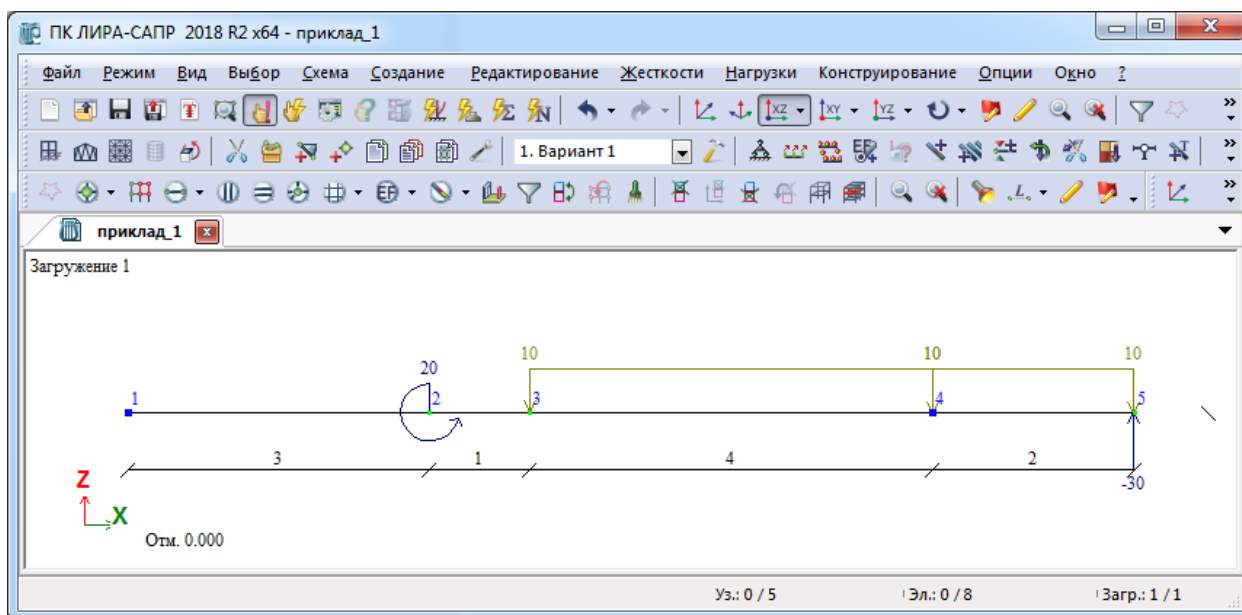




Рис. 5.18. Загальний вигляд схеми


Етап 5. Призначення жорсткості та матеріалів елементам

1. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Отметка элементов». Виділіть усі елементи балки. Натисніть на кожний стрижень окремо або, затиснувши ліву кнопку «миші», обведіть прямокутною рамкою всі елементи. Вони забарвлюються в червоний колір.


2. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Жесткости и материалы элементов».

3. У діалоговому вікні «Жесткости и материалы» натисніть кнопку

4. У діалоговому вікні «Добавить жесткость» перейдіть на третю вкладку «Пластинчатые, объемные, численные» та оберіть «КЭ 10 численное» подвійним натисканням (рис. 5.19, а).

5. У діалоговому вікні «Численное описание для КЭ 10» поставте одиниці у перших чотирьох рядках та натисніть  (рис. 5.19, б).

6. Закрийте діалогове вікно «Добавить жесткость».

7. У діалоговому вікні «Жесткости и материалы» з'явилася жорсткість EF 1. КЭ 10 численное, натисніть , після чого всі елементи балки забарвляться в чорний колір.

8. Закрийте діалогове вікно «Жесткости и материалы».

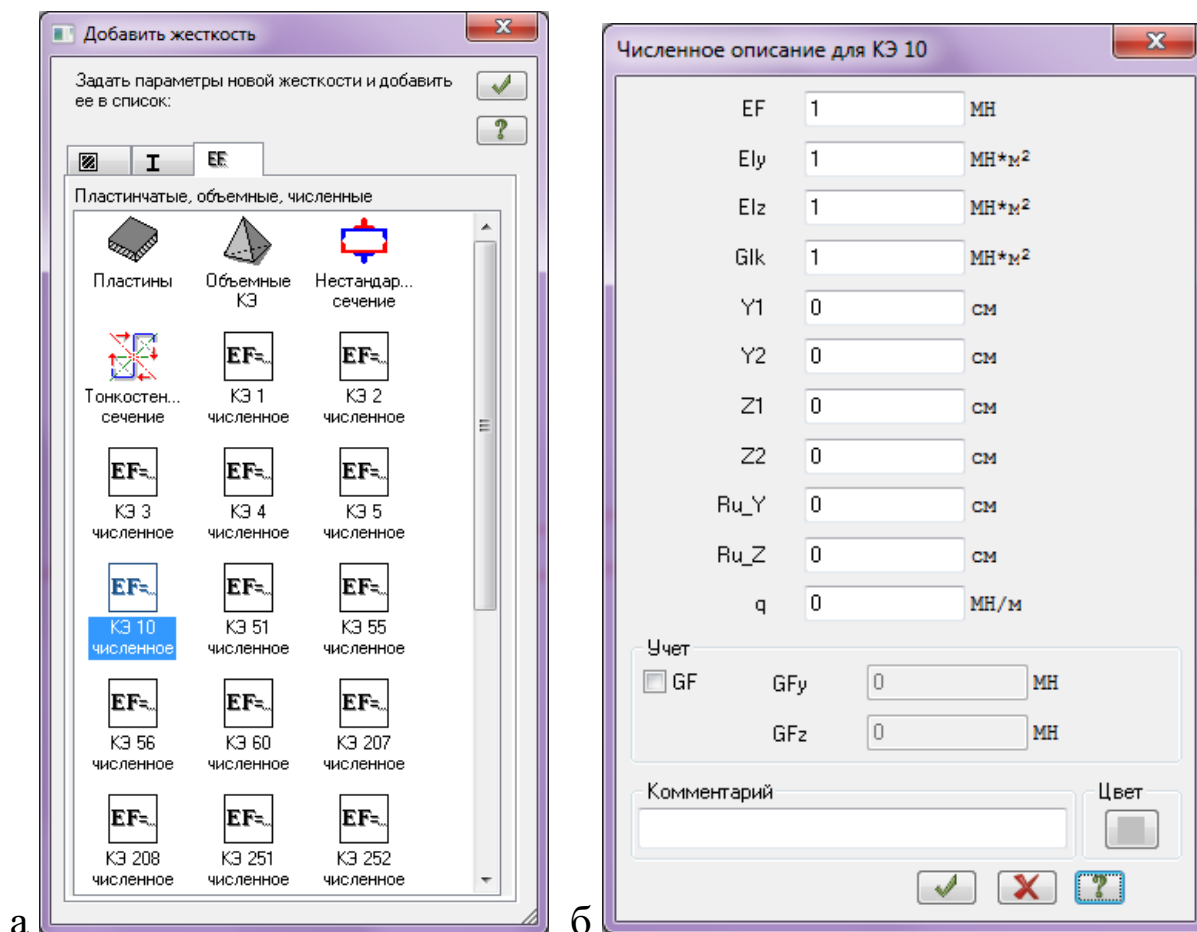



Рис. 5.19. Діалогові вікна «Добавить жесткость»

Етап 6. Повний розрахунок балки та результати розрахунку

1. В головному меню натисніть «Режим → Выполнить полный расчет».

2. Після проведення розрахунку в головному меню натисніть «Режим → Результаты расчета».

3. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Эпюры», у списку, що випадає, оберіть «Эпюры поперечных сил (Qz)» (рис. 5.20). Цю ж операцію можна зробити через головне меню «Усилия → Эпюры → Эпюры поперечных сил (Qz)».

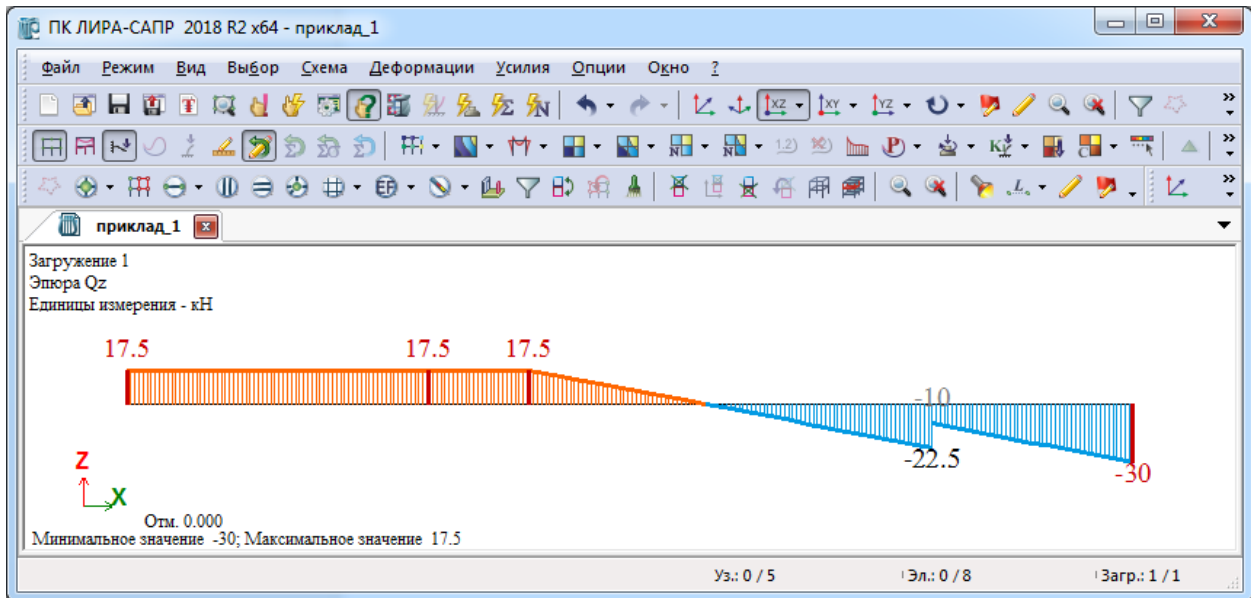



Рис. 5.20. Результати розрахунку. Поперечні сили

4. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Эпюры», у списку, що випадає, оберіть «Эпюры изгибающих моментов (Mu)» (рис. 5.21). Цю ж операцію можна зробити через головне меню «Усилия → Эпюры → Эпюры изгибающих моментов (Mu)».

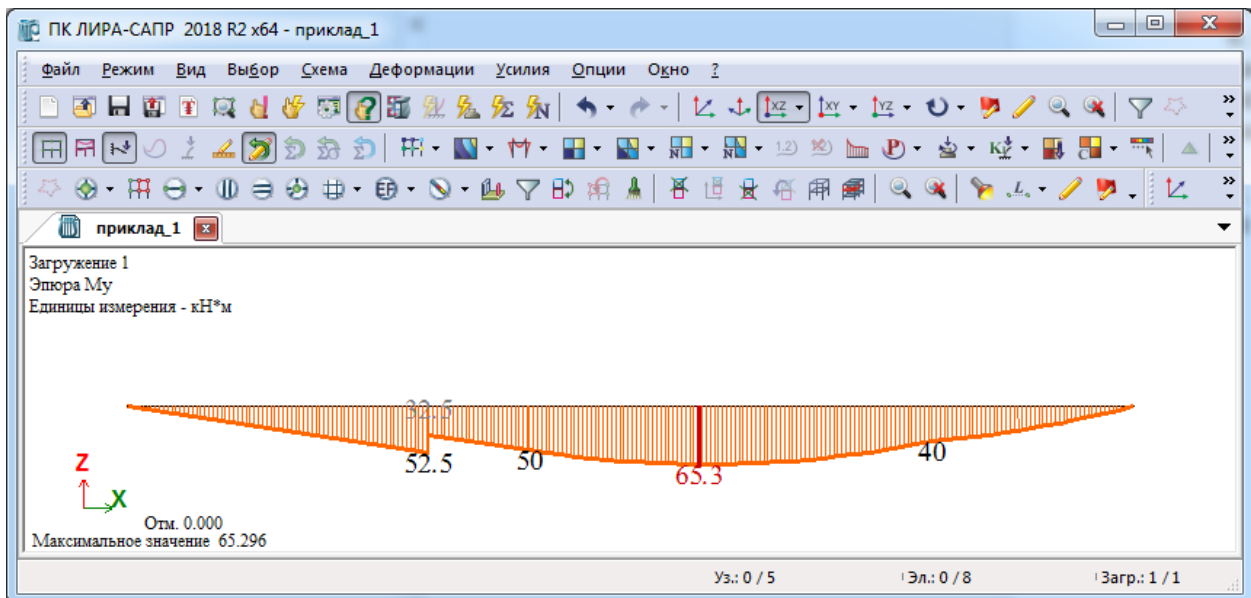



Рис. 5.21. Результати розрахунку. Згинальні моменти

Задача 5.3.2. Приклад розрахунку двохопорної рами


Мета: для заданої двохопорної рами (рис. 1.28) побудувати епюри внутрішніх зусиль.

Для початку роботи з ПК ЛІРА-САПР виконайте таку команду Windows: «Пуск → Все програми → LIRA SAPR → ЛІРА-САПР → ЛІРА-САПР» або запустіть програму за допомогою ярлика .







Етап 1. Створення нового завдання

1. Для створення нового завдання потрібно виконати послідовність аналогічно прикладу 5.3.1.


Етап 2. Створення геометричної схеми рами

1. Відкрийте діалогове вікно «Добавить узел», натиснувши кнопку  на панелі інструментів (рис. 5.13, б).

2. За допомогою діалогового вікна «Добавить узел» добавимо усі відповідні вузли на схемі (вузли початку та кінця прогонів рами, опорні вузли, вузли, в яких прикладаються зосереджені навантаження, вузли початку та кінця дії рівномірно розподілених навантажень тощо). Змінюється тільки координата X та Z «зліва направо»:


- перший вузол з координатами «X 0; Y 0; Z 0» натисніть кнопку .
- другий вузол з координатами «X 0; Y 0; Z 5» натисніть кнопку .
- третій вузол з координатами «X 4; Y 0; Z 5» натисніть кнопку .
- четвертий вузол з координатами «X 4; Y 0; Z 0» натисніть кнопку .
- п'ятий вузол з координатами «X 8; Y 0; Z 5» натисніть кнопку .
- шостий вузол з координатами «X 8; Y 0; Z -2» натисніть кнопку .

3. Закрийте діалогове вікно «Добавить узел», натиснувши .

4. Відкрийте діалогове вікно «Добавить элемент», натиснувши кнопку  на панелі інструментів.

5. У діалоговому вікні «Добавить элемент» на першій вкладці «Добавить стержень» встановіть прапорець «Указать узлы курсором» та «Учитывать промежуточные узлы» (рис. 5.13, в).


6. Оберіть курсором «миші» вузол № 1 (натисніть на ньому лівою кнопкою «миші») та потягніть курсор до вузла № 2 і також натисніть на ньому. Далі виберіть курсором «миші» вузол № 2 (натисніть на ньому лівою кнопкою «миші») та потягніть курсор до вузла № 5. З'єднайте всі відповідні вузли стрижнями.


7. Закрийте діалогове вікно «Добавить элемент», натиснувши .


Етап 3. Призначення опорних зв'язків (граничних умов)

Задавати опорні зв'язки (граничні умови) у вузлах можна двома способами, розглянемо перший спосіб на першій опорі (вузол № 1), а другий – на другій опорі (вузол № 6).


Спосіб 1

1. Для встановлення першого зв'язку на панелі інструментів натисніть  «Отметка узлов», після чого натисніть курсором на вузол № 1.


2. Відкрийте діалогове вікно «Связи в узлах», натиснувши кнопку  на панелі інструментів.

3. У діалоговому вікні «Связи в узлах» на першій вкладці «Назначить связи» встановіть прапорець на Z, що відповідає шарнірно-рухомій опорі, та натисніть кнопку , після чого вузол № 1 забарвиться в синій колір.

4. Закрийте діалогове вікно «Связи в узлах», натиснувши .


5. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Отметка узлов», щоб зняти активність з операції відмітки вузлів.


Спосіб 2

1. Другий опорний зв'язок знаходиться у вузлі № 6. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Информация об узле или элементе».

2. Натисніть курсором на вузол № 6.

3. У діалоговому вікні «Узел 6» у відділі «Связи» встановіть прапорець на X та Z, що відповідає шарнірно-нерухомій опорі.

4. Натисніть кнопку , після чого вузол № 6 забарвиться в синій колір.


5. Закрийте діалогове вікно «Узел 6», натиснувши .


Етап 4. Моделювання навантажень


Задавати навантаження на вузли та елементи можна двома способами, за аналогією з попереднім етапом.

Спосіб 1


1. Для налаштування одиниць вимірювання потрібно виконати послідовність, аналогічно прикладу 5.3.1 (рис. 5.15).

2. Перше навантаження – зосереджений згинальний момент, прикладений до вузла № 2. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Отметка узлов». Натисніть курсором на вузол № 2.


3. Відкрийте діалогове вікно «Задание нагрузок», натиснувши кнопку  «Нагрузки на узлы и элементы» на панелі інструментів.


4. Перейдіть на другу вкладку «Нагрузки в узлах», «Система координат», оберіть «Направление» Y та натисніть кнопку  «Сосредоточенный момент» (рис. 5.16, а).

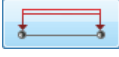
5. У вікні «Параметры нагрузки» введіть значення моменту - 20 кН·м.

6. Натисніть кнопку , після чого у вузлі № 2 з'явиться зосереджений момент.


7. Закрийте діалогове вікно «Задание нагрузок».

8. Друге навантаження – рівномірно розподілене навантаження. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Отметка элементов». Натисніть курсором на стрижень між вузлами № 3 і № 5.

9. Відкрийте діалогове вікно «Задание нагрузок», натиснувши кнопку  «Нагрузки на узлы и элементы» на панелі інструментів.


10. Перейдіть на третю вкладку «Нагрузки на стержни», оберіть «Направление» Z та натисніть кнопку  «Равномерно распределенная нагрузка» (рис. 5.17, а).


11. Введіть значення рівномірно розподіленого навантаження 10 кН/м у діалоговому вікні «Параметры».


12. Натисніть кнопку , після чого на стрижні з'явиться рівномірно розподілене навантаження.


13. Закрийте діалогове вікно «Задание нагрузок».

Способ 2

1. Третє навантаження – зосереджена сила, яка діє у вузлі № 4. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Информация об узле или элементе». Натисніть курсором на вузол № 4.

2. У діалоговому вікні «Узел 4» натисніть кнопку  «Добавить нагрузку в узел».

3. Перейдіть на першу вкладку «Нагрузки в узлах», оберіть «Направление» X та натисніть кнопку  «Сосредоточенная сила».

4. Введіть значення зосередженої сили 25 кН у діалоговому вікні «Параметры нагрузки», натисніть кнопку  та закрийте діалогове вікно. Загальний вигляд схеми після зазначеної послідовності зображено на рис. 5.22.

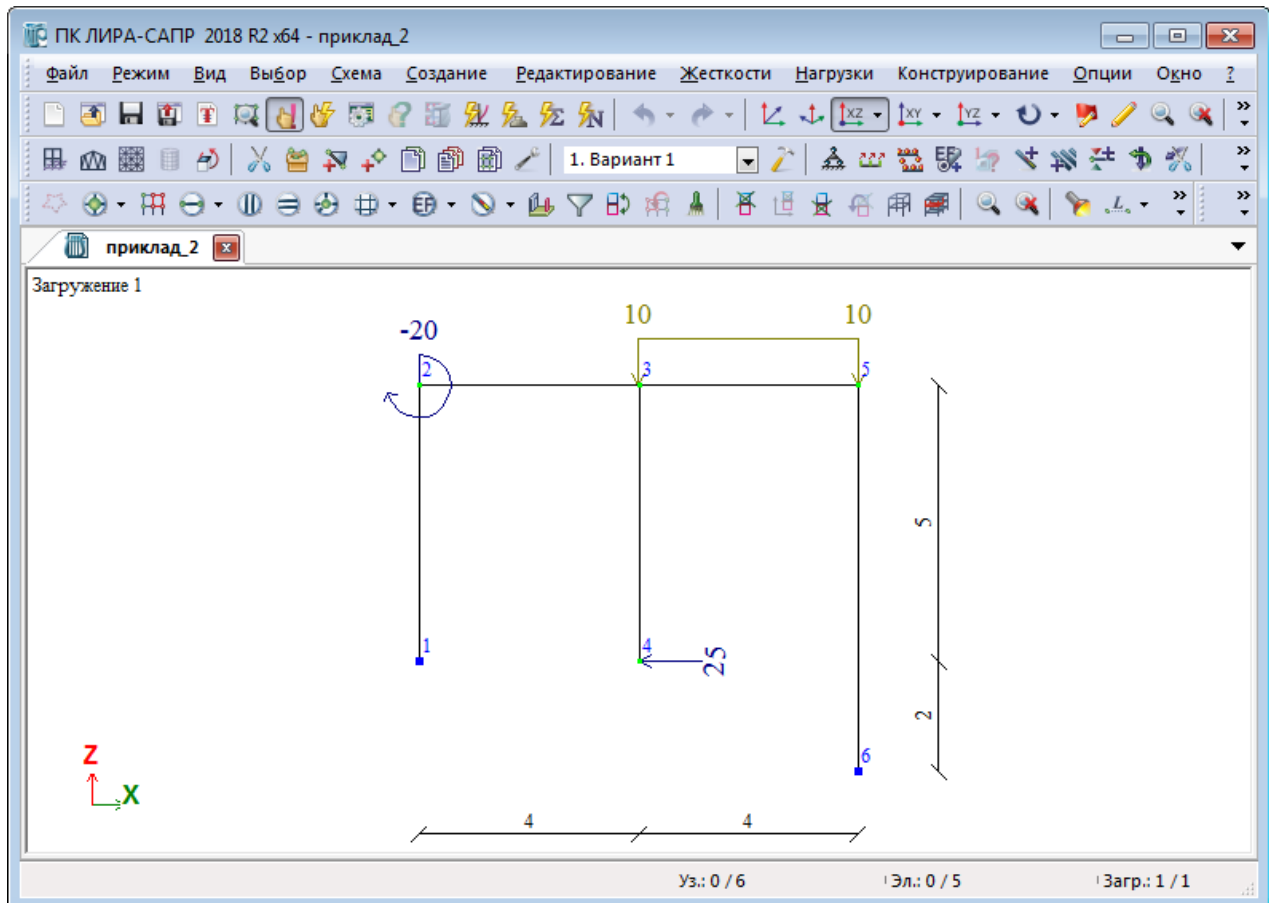






Рис. 5.22. Загальний вигляд схеми

Етап 5. Призначення жорсткості та матеріалів елементам



1. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Отметка элементов». Виділіть усі елементи балки. Натисніть на кожний стрижень окремо або, затиснувши ліву кнопку «миші», обведіть прямокутною рамкою всі елементи.

2. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Жесткости и материалы элементов», після чого у діалоговому вікні «Жесткости и материалы» потрібно натиснути кнопку .

3. У діалоговому вікні «Добавить жесткость» перейдіть на третю вкладку «Пластинчатые, объемные, численные» та оберіть «КЭ 10 численное» подвійним натисканням (рис. 5.19, а)

4. У діалоговому вікні «Численное описание для КЭ 10» поставте одиниці у перших чотирьох рядках та натисніть  (рис. 5.20, б).

5. Закрийте діалогове вікно «Добавить жесткость».


6. У діалоговому вікні «Жесткости и материалы» з'явилася жорсткість  1. КЭ 10 численное, натисніть .


7. Закрийте діалогове вікно «Жесткости и материалы».


Етап 6. Повний розрахунок рами та результати розрахунку

1. В головному меню натисніть «Режим → Выполнить полный расчет».

2. Після проведення розрахунку в головному меню натисніть «Режим → Результаты расчета».

3. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Эпюры», у списку, що випадає, оберіть «Эпюры поперечных сил (Qz)» (рис. 5.23). Цю ж операцію можна зробити через головне меню «Усилия → Эпюры → Эпюры поперечных сил (Qz)».

4. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Эпюры», у списку, що випадає, оберіть «Эпюры изгибающих моментов (My)» (рис. 5.24).

5. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Эпюры», у списку, що випадає, оберіть «Эпюры продольных сил (N)» (рис. 5.25).

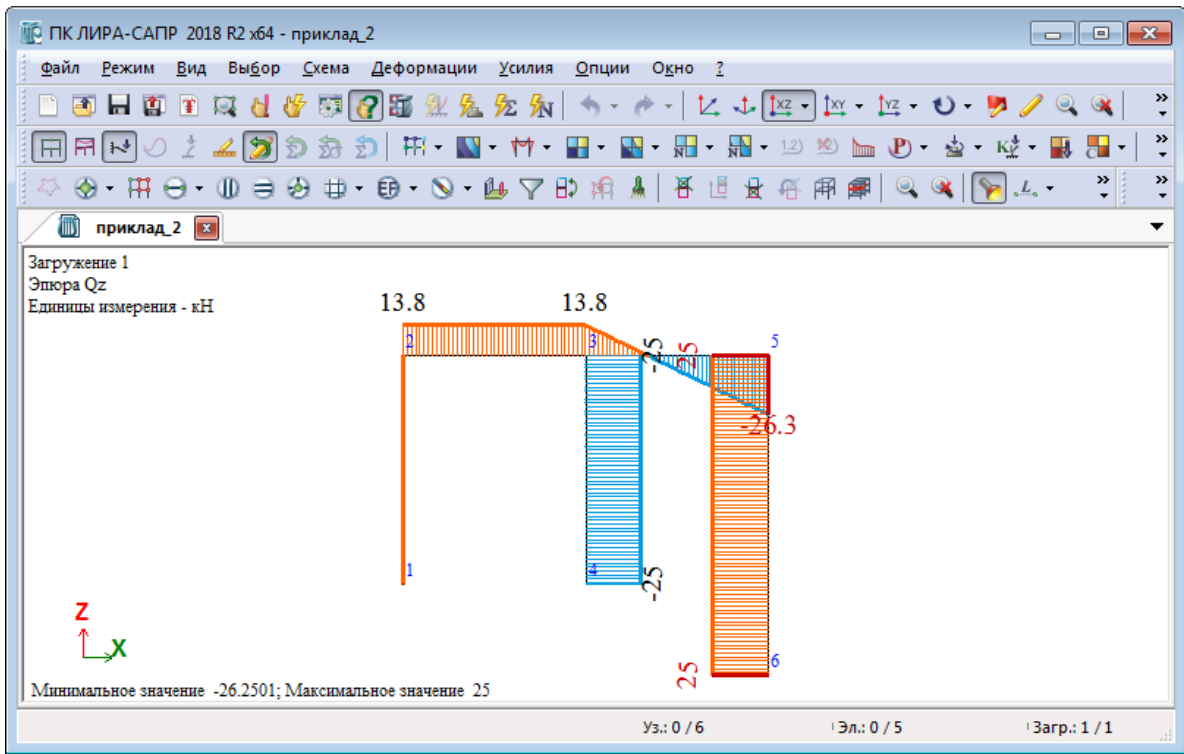


Рис. 5.23. Результаты розрахунку. Поперечні сили

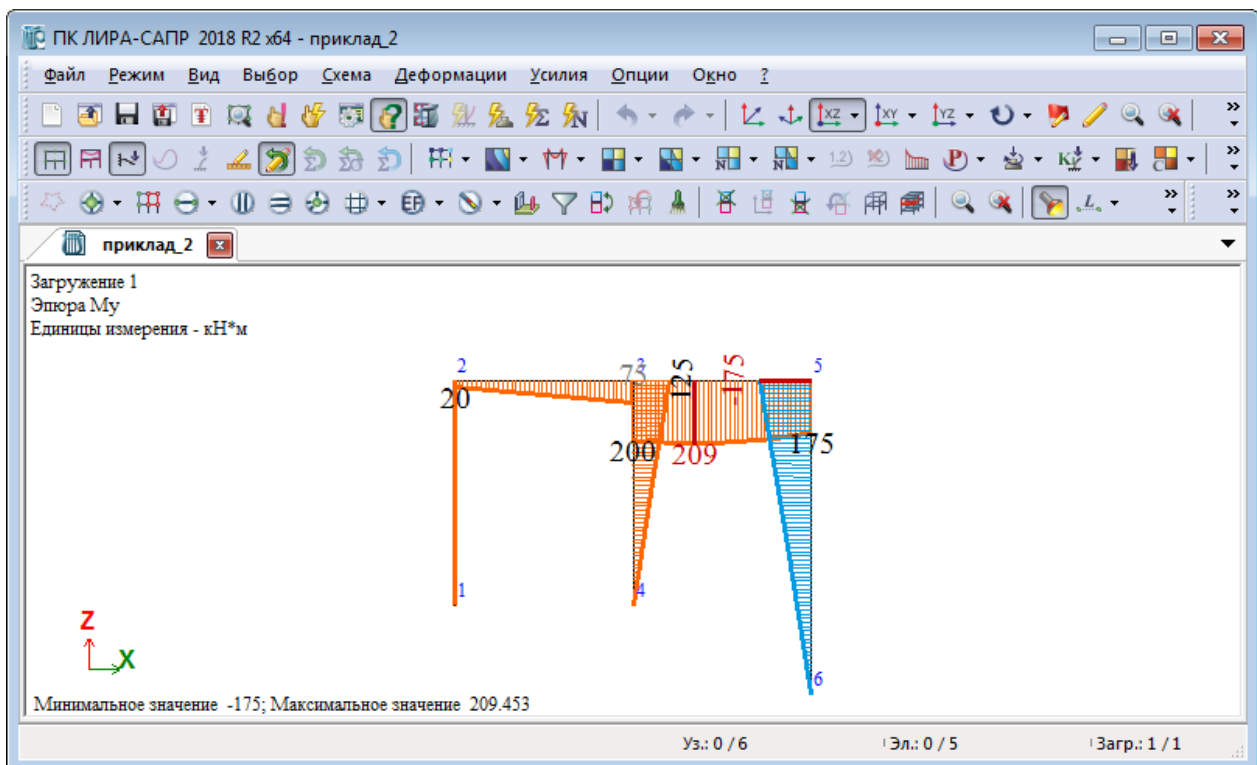


Рис. 5.24. Результаты розрахунку. Згинальні моменти

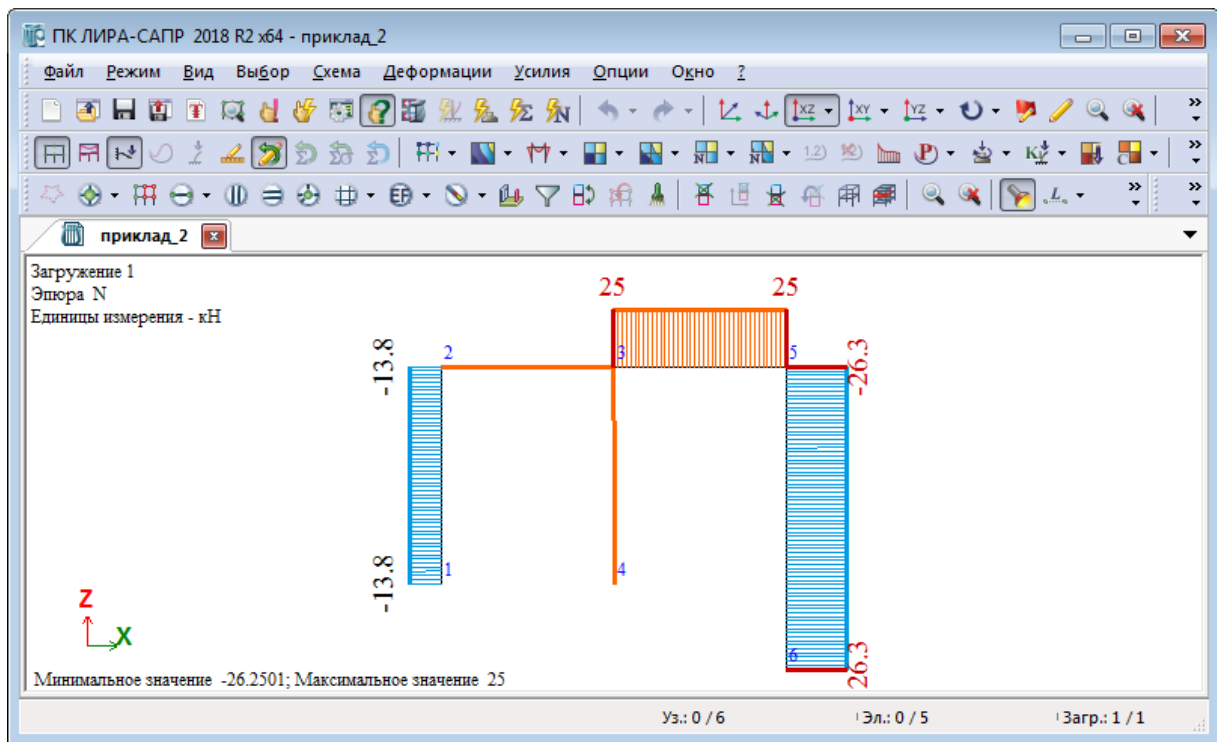



Рис. 5.25. Результати розрахунку. Поздовжні сили


Задача 5.3.3. Визначення геометричних характеристик плоских перерізів


Мета: для заданого складеного перерізу (рис. 3.6) необхідно визначити мас-інерційні характеристики.

Для початку роботи виконайте таку команду Windows: «Пуск → Все програми → LIRA SAPR → ЛИРА-САПР → КС-САПР. Відкриється головне вікно програми КС-САПР «Конструктор сечений» (рис. 5.26).


1. На панелі інструментів «Редактирование» обрати «База сечений»  і в діалоговому вікні «Стандартное сечение» (рис. 5.27, а) вказати «Брус».

2. У вікні «Брус» задайте розміри смуги 40 см і 1.6 см, після чого оберіть «Подтвердить» (рис. 5.27, б).

3. На панелі інструментів «Редактирование» оберіть «База металлических сечений»  і в діалоговому вікні «Стандартное сечение» вкажіть «Двутавр», після чого у вікні «Стальное сечение» вкажіть № 30.

4. На панелі інструментів «Редактирование» оберіть «Установочный репер» , після чого по черзі натисніть по вузлах фігур, які збігаються за координатами в складеному перерізі, у

вікні «Свойства» в полях «Проекция на координатную ось» введіть «0» та натисніть «Применить» (рис. 5.28).

5. Утримуючи кнопку «Ctrl», виділіть обидві фігури та на панелі інструментів «Редактирование» натисніть по кнопці «Объединение» . Після цієї операції фігури смуги і швелера об'єднуються в єдину фігуру.

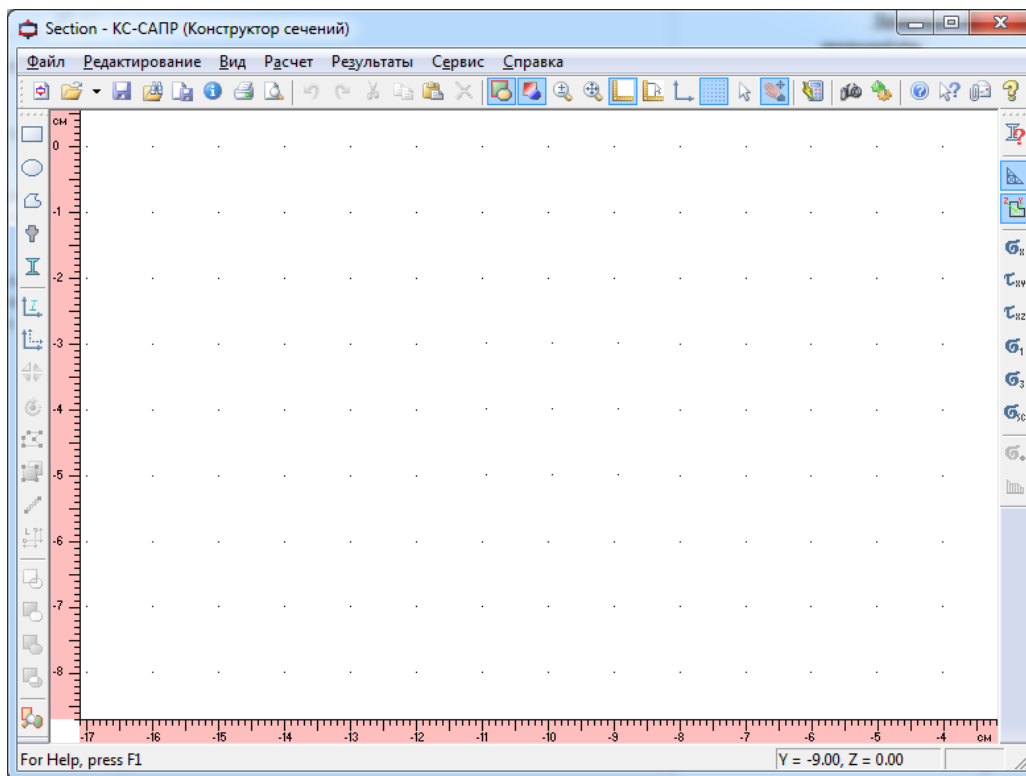


Рис. 5.26. Головне вікно програми КС-САПР «Конструктор сечений»

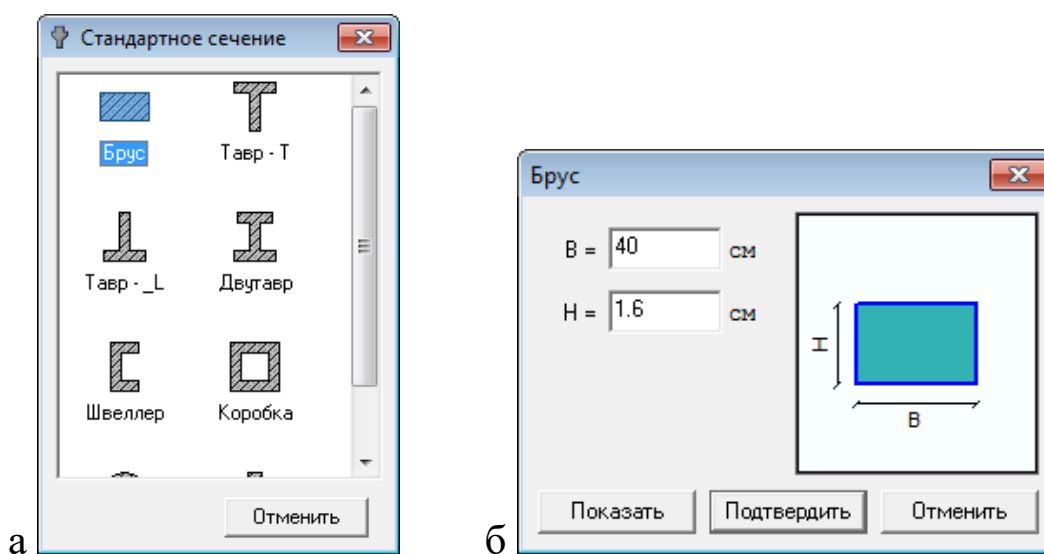


Рис. 5.27. Діалогові вікна обрання розмірів смуги

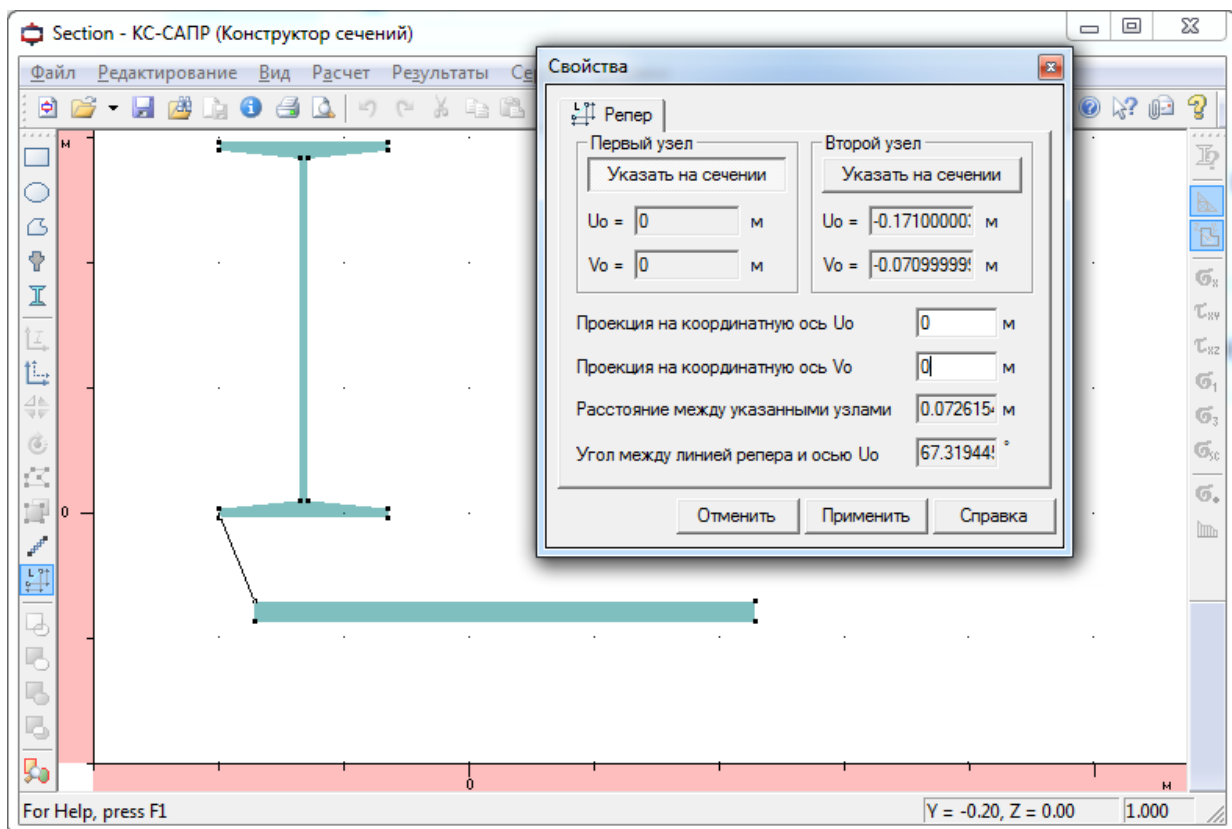





Рис. 5.28. Об'єднання фігур


6. На панелі інструментів «Редактирование» оберіть «База металлических сечений»  і в діалоговому вікні «Стандартное сечение» оберіть «Швеллер», після чого у вікні «Стальное сечение» вкажіть № 22.

7. Фігура буде додана на головний екран з орієнтацією полиць вправо. Для дзеркального відображення швелера необхідно виділити його курсором, після чого натиснути «Отразить» .



8. Для об'єднання фігури швелера з складеною фігурою смуги і двотавра необхідно виконати процедуру, аналогічно пунктам 4 та 5.


9. Знову обрати «База металлических сечений»  і в діалоговому вікні «Стандартное сечение» вказати «Уголок», після чого у вікні «Стальное сечение» обрати кутник 125x80x10.


10. Фігура буде додана на головний екран з орієнтацією полиць вгору та вправо. Для розвороту кутника необхідно виділити його курсором, після чого в контекстному меню (відкривається правою кнопкою миші) обрати команду «Поворот». У вікні «Преобразования» ввести в поле «Угол» -90 та натиснути «Применить».

11. Далі, для дзеркального відображення кутника, необхідно виділити його курсором, після чого натиснути кнопку «Отразить» .

12. Для об'єднання фігури кутника з складеною фігурою смуги, двотавра та швелера необхідно виконати процедуру, аналогічно пунктам 4 та 5.

13. На головній панелі інструментів натиснути «Координатные оси» , після чого на панелі інструментів «Редактирование» вибрати «Позиционирование сечения» .

14. На головній панелі інструментів натиснути «Расчет» , після чого у вікні «Запуск расчета» – «Подтвердить», залишивши характеристики матеріалів прийнятими за замовчуванням. Отриманий поперечний переріз після розрахунку буде відображено відповідно до рис. 5.29.

15. Для формування звіту необхідно на головній панелі інструментів обрати «Сохранить отчет» . Для нашого випадку звіт за результатами розрахунку показаний в табл. 5.1.

Примітка. Розбіжність у результатах розрахунків з використанням ПК ЛІРА-САПР та розрахунків вручну (у розд. 3.2) пов'язана з використанням різної нормативної документації на металопрокатні вироби.

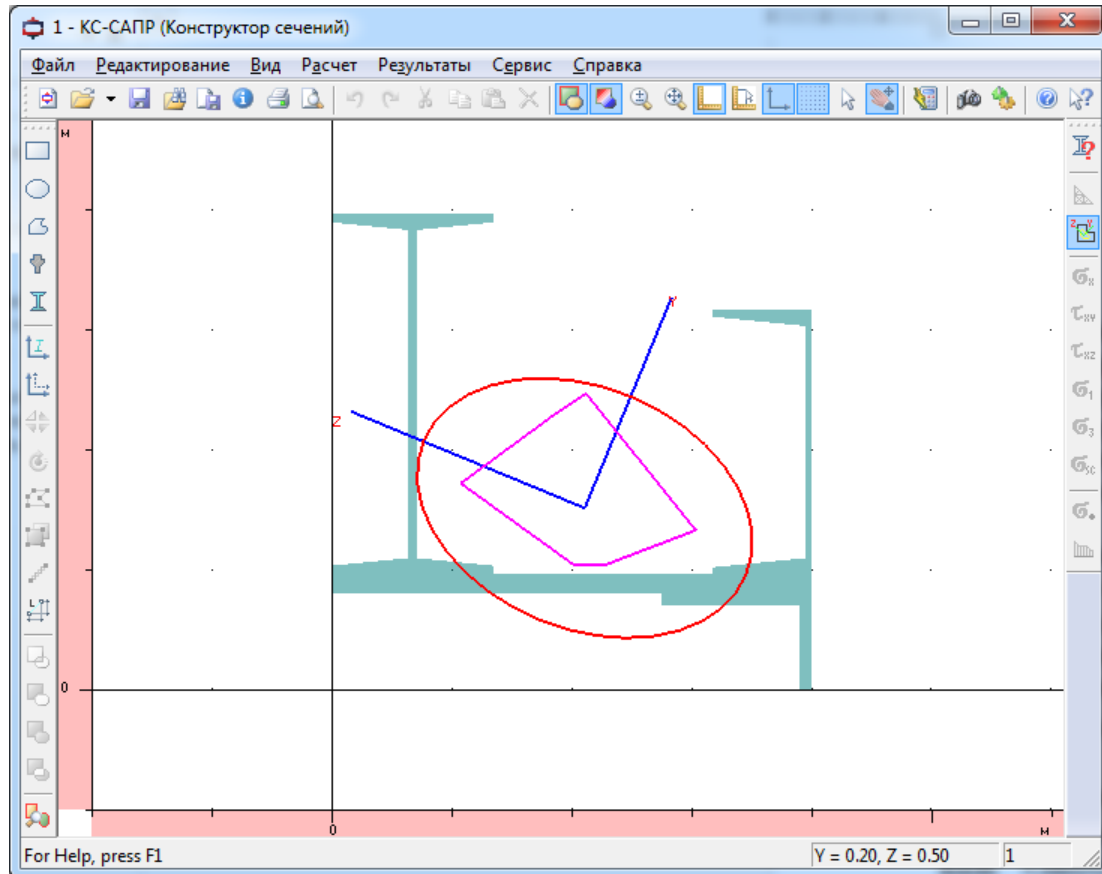


Рис. 5.29. Розрахунковий переріз

Результати розрахунку


ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЯ			
<i>Наименование</i>		<i>Значение</i>	<i>Ед.изм.</i>
ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ:			
Модуль упругости	E	2.1e+007	т/м ²
Коэффициент Пуассона	v	0.3	
Модуль сдвига	G	8.076e+006	т/м ²
Плотность материала	Ro	7.85	т/м ³
<i>Наименование</i>		<i>Значение</i>	<i>Ед.изм.</i>
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ:			
Координаты центра тяжести	Uoc	21.1053	см
	Voc	15.1017	см
Площадь	F	155.648	см ²
Момент инерции относительно оси U	Iu	18213.9	см ⁴
Момент инерции относительно оси V	Iv	30399.3	см ⁴
Центробежный момент инерции	Iuv	-6062.68	см ⁴
Габаритная ширина сечения	b	40	см
Габаритная высота сечения	h	39.6	см
Периметр внешнего контура	Pext	240.323	см
Периметр внутренних контуров	Pint	0	см
Угол поворота главных осей инерции	Fi	-67.5707	°
Главный момент инерции относительно оси Y	Iy	32901.8	см ⁴
Статический момент полусечения относительно оси Y	Sy	0	см ³
Момент сопротивления изгибу относительно оси Y (Z+)	Wy+	1140.21	см ³
Момент сопротивления изгибу относительно оси Y (Z-)	Wy-	1416.51	см ³
Главный радиус инерции относительно оси Y	Ry	14.5391	см
Интеграл по площади $integral [z \cdot (y^2 + z^2) / Iy \cdot dF]$	Yi	0	см
Максимальная абсцисса ядрового расстояния	Y+	6.90578	см
Минимальная абсцисса ядрового расстояния	Y-	4.49444	см
Главный момент инерции относительно оси Z	Iz	15711.5	см ⁴

Продовження табл. 5.1

Статический момент полусечения относительно оси Z	Sz	0	см ³
Момент сопротивления изгибу относительно оси Z (Y+)	Wz+	699.55	см ³
Момент сопротивления изгибу относительно оси Z (Y-)	Wz-	1074.87	см ³
Главный радиус инерции относительно оси Z	Rz	10.047	см
Интеграл по площади $\int [y \cdot (y^2+z^2)/Iz \cdot dF]$	Zi	0	см
Максимальная ордината ядрового расстояния	Z+	9.10073	см
Минимальная ордината ядрового расстояния	Z-	7.32559	см
ЖЕСТКОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ:			
Осевая жесткость	EF	326861	т
Изгибная жесткость относительно оси Y	EIy	6909.38	т·м ²
Изгибная жесткость относительно оси Z	EIz	3299.41	т·м ²
Жесткость на кручение	GI_t	0	т·м ²
Секториальная жесткость	EI_w	0	т·м ⁴
Сдвиговая жесткость относительно оси Y	GF_y	0	т
Сдвиговая жесткость относительно оси Z	GF_z	0	т
Погонная масса	g	0.122184	т/м

Задача 5.3.4. Розрахунок на міцність двохопорної балки


Мета: для заданої розрахункової схеми сталеві балки (задача 4.2.1) необхідно підібрати поперечний переріз двотаврового профілю.

Для початку роботи з ПК ЛІРА-САПР виконайте таку команду Windows: «Пуск → Все програми → LIRA SAPR → ЛІРА-САПР → ЛІРА-САПР » або запустіть програму за допомогою ярлика .


Етап 1. Створення нового завдання

Для створення нового завдання потрібно виконати послідовність, аналогічно прикладу 5.3.1.


Етап 2. Створення геометричної схеми балки


1. Відкрийте діалогове вікно «Добавить узел», натиснувши кнопку  на панелі інструментів (рис. 5.13, б).

2. За допомогою діалогового вікна «Добавить узел» добавимо усі відповідні вузли на схемі (вузли початку та кінця прогонів балки, опорні вузли, вузли, в яких прикладаються зосереджені навантаження, вузли початку та кінця дії рівномірно розподілених навантажень тощо). Змінюється тільки координата X «зліва направо»:


- перший вузол з координатами «X 0; Y 0; Z 0» – натисніть кнопку .


- другий вузол з координатами «X 2; Y 0; Z 0» – натисніть кнопку .

- третій вузол з координатами «X 5; Y 0; Z 0» – натисніть кнопку .

- четвертий вузол з координатами «X 10; Y 0; Z 0» – натисніть кнопку .

- п'ятий вузол з координатами «X 12; Y 0; Z 0» – натисніть кнопку .


3. Закрийте діалогове вікно «Добавить узел», натиснувши .








4. Відкрийте діалогове вікно «Добавить элемент», натиснувши кнопку  на панелі інструментів.

5. У діалоговому вікні «Добавить элемент» на першій вкладці «Добавить стержень» встановіть прапорець «Указать узлы курсором» та «Учитывать промежуточные узлы» (рис 5.13, в).





6. Оберіть курсором миші вузол № 1 (натисніть на ньому лівою кнопкою миші) та потягніть курсор до вузла № 5 і також натисніть на ньому.


Етап 3. Призначення опорних зв'язків (граничних умов)


1. Перший опорний зв'язок знаходиться у вузлі № 2. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Отметка узлов», після чого натисніть курсором на вузол № 2.

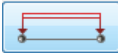
2. Відкрийте діалогове вікно «Связи в узлах», натиснувши кнопку  на панелі інструментів.
3. У діалоговому вікні «Связи в узлах» на вкладці «Назначить связи» встановіть прапорець на Z та X, що відповідає шарнірно-нерухомій опорі.
4. Натисніть кнопку , після чого вузол № 2 забарвиться в синій колір.
5. Закрийте діалогове вікно «Связи в узлах», натиснувши .
6. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Отметка узлов», щоб зняти активність з операції відмітки вузлів.
7. Другий опорний зв'язок знаходиться у вузлі № 4. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Информация об узле или элементе» та натисніть курсором на вузол № 4. Відкривається діалогове вікно «Узел 4».
8. У діалоговому вікні «Узел 4» у відділі «Связи» встановіть прапорець на Z, що відповідає шарнірно-рухомій опорі.
9. Натисніть кнопку , після чого вузол № 4 забарвиться в синій колір.
10. Закрийте діалогове вікно «Узел 4», натиснувши .

Етап 4. Моделювання навантажень


1. Для налаштування одиниць вимірювання потрібно виконати послідовність аналогічно прикладу 5.3.1 (рис. 5.15).
2. Перше навантаження – зосереджений згинальний момент, прикладений до вузла № 1. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Отметка узлов». Натисніть курсором на вузол № 1.
3. Відкрийте діалогове вікно «Задание нагрузок», натиснувши кнопку  «Нагрузки на узлы и элементы» на панелі інструментів.
4. Перейдіть на другу вкладку «Нагрузки в узлах», «Система координат», оберіть «Направление» Y та натисніть кнопку  «Сосредоточенный момент» (рис. 5.16, а).
5. У вікні «Параметры нагрузки» введіть значення моменту 60 кН·м.
6. Натисніть кнопку , після чого у вузлі № 1 з'явиться зосереджений момент.
7. Закрийте діалогове вікно «Задание нагрузок».

8. Друге навантаження – рівномірно розподілене навантаження. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Отметка элементов». Натисніть курсором на стрижні між вузлами № 3 і № 4 та вузлами № 4 і № 5, вони забарвляться в червоний колір.


9. Відкрийте діалогове вікно «Задание нагрузок», натиснувши кнопку  «Нагрузки на узлы и элементы» на панелі інструментів.


10. Перейдіть на третю вкладку «Нагрузки на стержни», оберіть «Направление» Z та натисніть кнопку  «Равномерно распределенная нагрузка» (рис. 5.17, а).


11. Введіть значення рівномірно розподіленого навантаження 20 кН/м у діалоговому вікні «Параметры».


12. Натисніть кнопку  , після чого на стрижнях з'явиться рівномірно розподілене навантаження.


13. Закрийте діалогове вікно «Задание нагрузок».

14. Третє навантаження – зосереджена сила, яка діє у вузлі № 3. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Информация об узле или элементе». Натисніть курсором на вузол № 3.


15. У діалоговому вікні «Узел 3» натисніть кнопку  «Добавить нагрузку в узел».

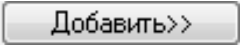
16. Перейдіть на першу вкладку «Нагрузки в узлах», оберіть «Направление» X та натисніть кнопку  «Сосредоточенная сила».

17. Введіть значення зосередженої сили 50 кН у діалоговому вікні «Параметры нагрузки», після чого натисніть кнопку  .

18. У діалоговому вікні «Узел 3» натисніть кнопку  , після чого зосереджена сила з'явиться у вузлі № 3. Загальний вигляд схеми після зазначеної послідовності зображено на рис. 5.30.

Етап 5. Призначення жорсткості та матеріалів елементам

1. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Жесткости и материалы элементов».

2. У діалоговому вікні «Жесткости и материалы» натисніть кнопку  (рис. 5.31).

3. У діалоговому вікні «Добавить жесткость» перейдіть на другу вкладку «База металлических сечений» та натисніть «Двутавр» (рис. 5.31).

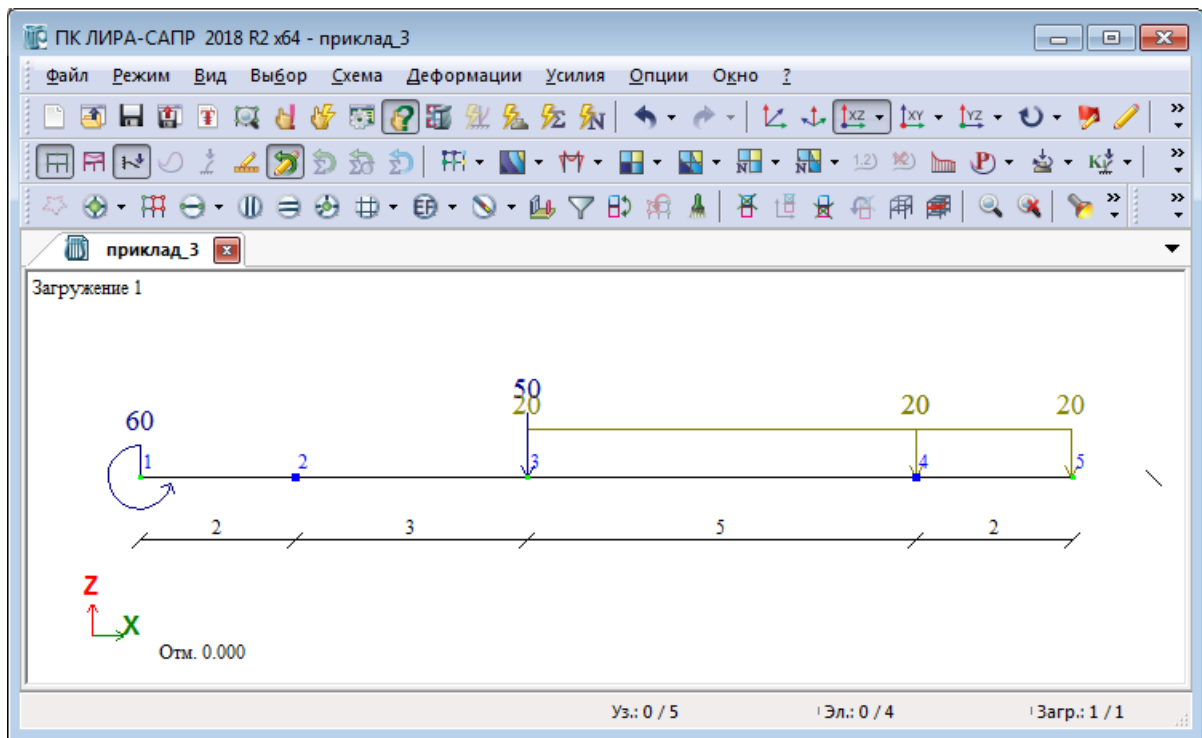


Рис. 5.30. Загальний вигляд схеми

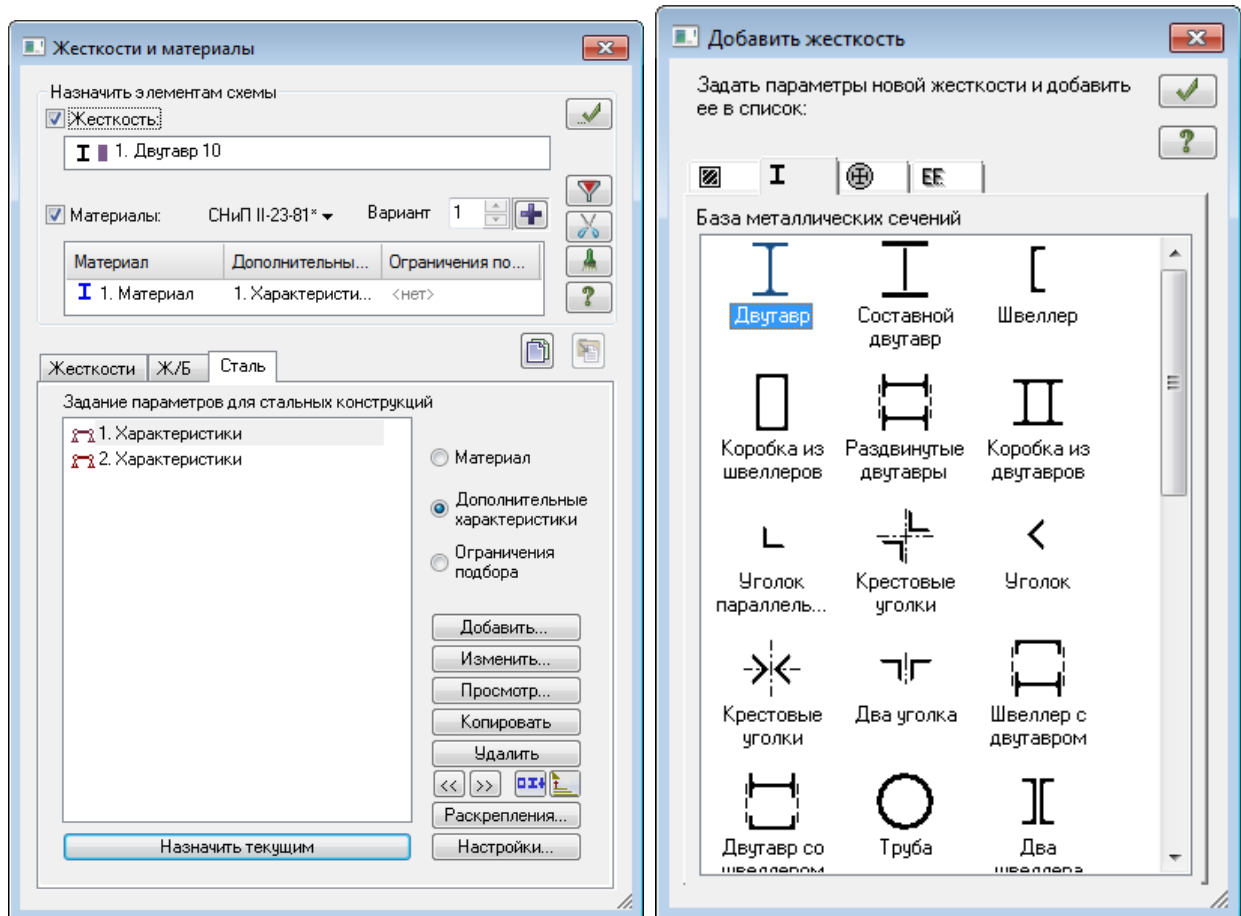

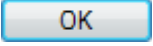



Рис. 5.31. Диалогове вікно «Добавить жесткость»

4. Встановить відмітку «Дополнительные характеристики». Далі натисніть «Добавить» та у вікні «Параметры» вибираєте «Балка». У розділі «Расчет по прогибу» навпроти «Максимально допустимый прогиб» встановити 1/200 (рис. 5.34).


5. У діалоговому вікні «Стальное сечение» у вкладці «Сортамент» оберіть «Двутавр с непараллельными гранями полок», далі у вкладці «Профіль» оберіть «10» та натисніть  (рис. 5.32).

6. У діалоговому вікні «Жесткости и материалы» перейдіть на третю вкладку «Сталь», встановить відмітку «Материал», далі у вікні «Параметры» оберіть «сталь 09Г2» та натисніть  (рис. 5.33).

7. Встановить відмітку «Дополнительные характеристики». Далі натисніть «Добавить» та у вікні «Параметры» оберіть «Балка». У розділі «Расчет по прогибу» навпроти «Максимально допустимый прогиб» встановить 1/200 (рис. 5.34).

8. У діалоговому вікні «Жесткости и материалы» перевірте наявність галочок в розділах «Жесткость» і «Материал» із встановленими параметрами (Матеріали – Тип 1; Дод. характеристики – Тип 1), після чого, не закриваючи вікно, виділіть елементи схеми між вузлами 2 і 4 та натисніть .

9. Повторно натисніть «Добавить» та у вікні «Параметры» оберіть «Балка». У розділі «Расчет по прогибу» навпроти «Максимально допустимый прогиб» встановить 1/100 (рис. 5.34) та галочку напроти «Консоль».

10. У діалоговому вікні «Жесткости и материалы» перевірити наявність галочок в розділах «Жесткость» та «Материал» із встановленими параметрами (Матеріали – Тип 1; Дод. характеристики – Тип 2), після чого, не закриваючи вікно, виділіть на схемі консолі та натисніть .

11. Закрийте діалогове вікно «Жесткости и материалы».

12. Виділіть елементи балки між вузлами 2 та 4. Натисніть на кожний стрижень окремо або, затиснувши ліву кнопку миші, обведіть елементи прямокутною рамкою. Вони забарвляться в червоний колір.

13. В головному меню натисніть «Редактирование → Конструктивные элементы».

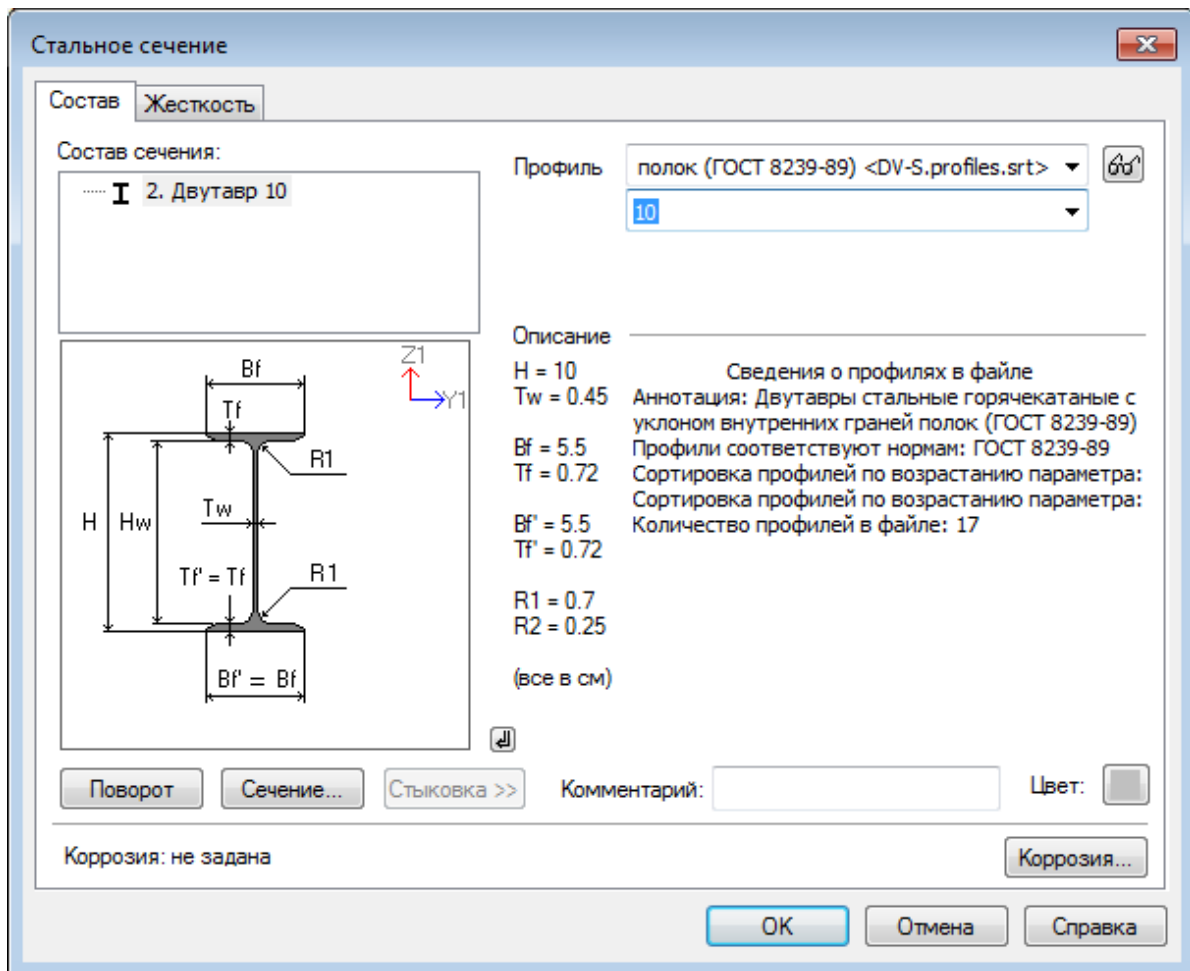


Рис. 5.32. Диалоговое окно «Стальное сечение»

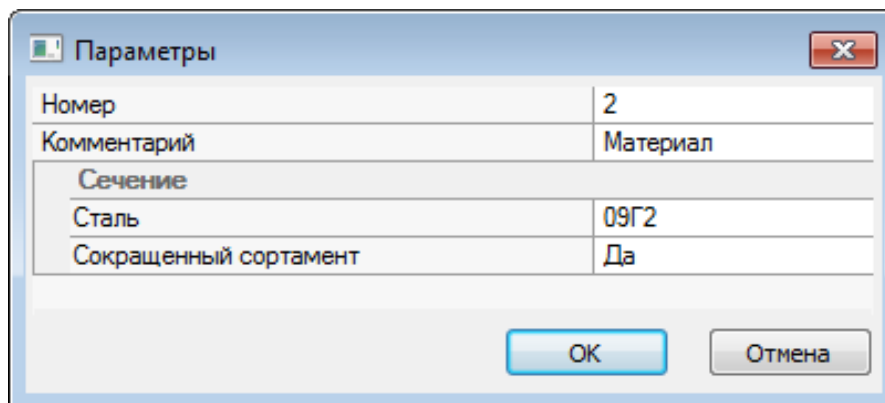


Рис. 5.33. Диалоговое окно «Жесткости и материалы»

14. У диалоговому вікні «Конструктивные элементы» натисніть **Создать** (рис. 5.35).

15. Закрийте діалогове вікно «Конструктивные элементы».

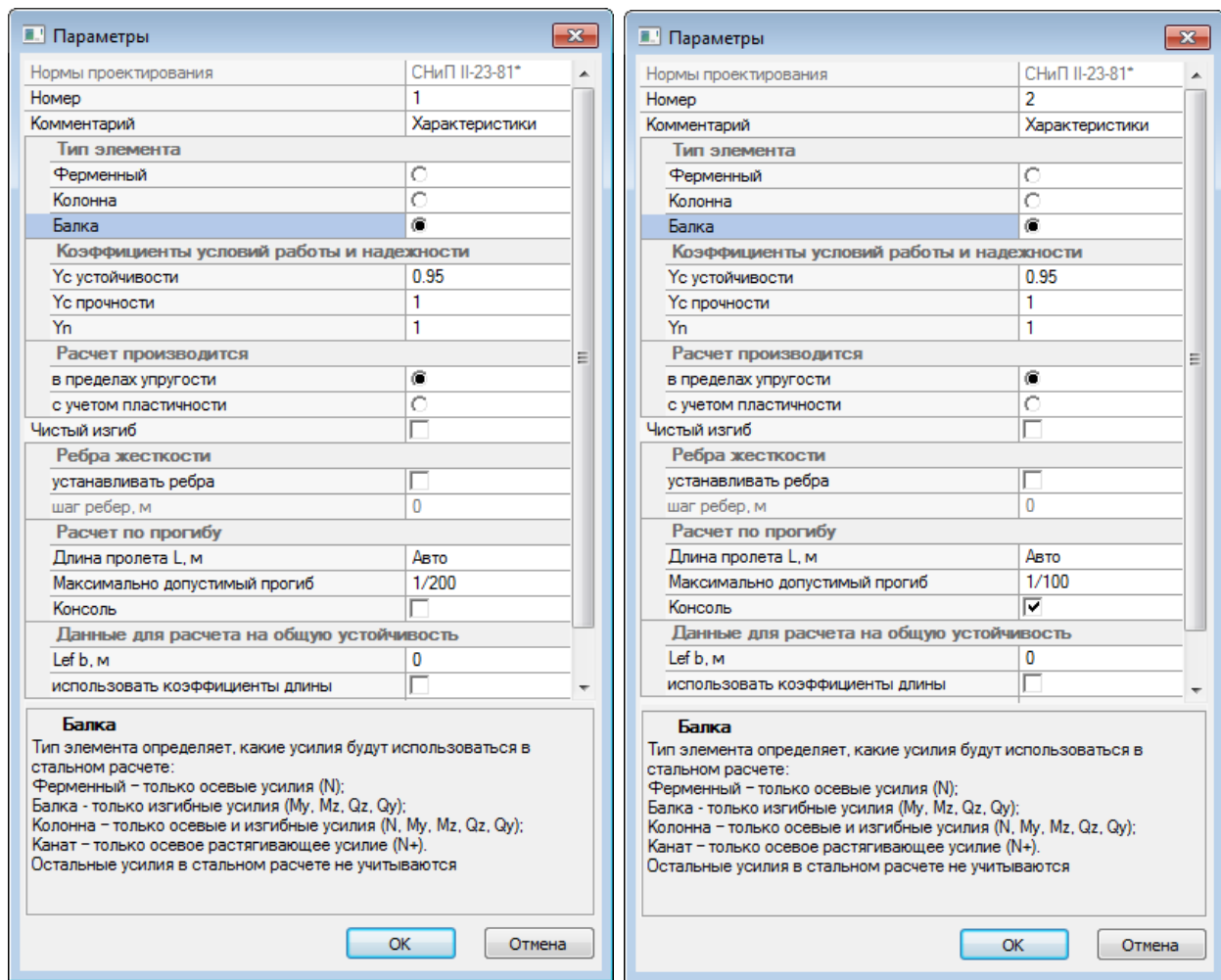


Рис. 5.34. Диалоговое окно «Жесткости и материалы»

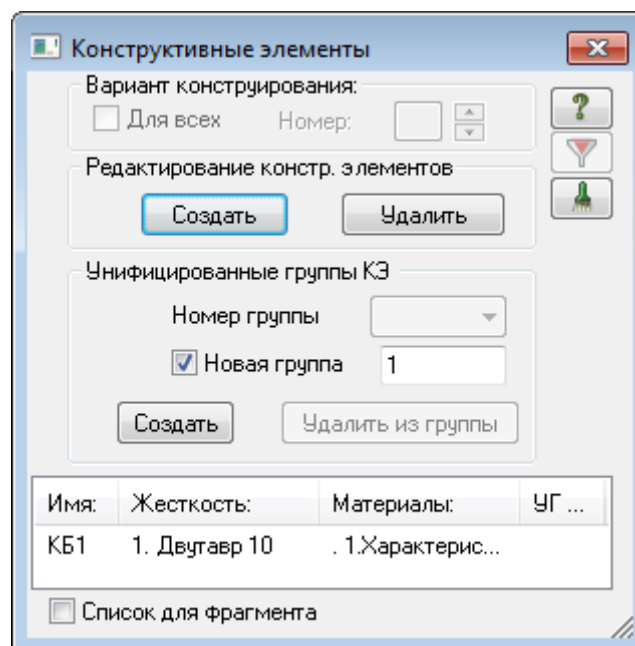




Рис. 5.35. Диалоговое окно «Конструктивные элементы»


Етап 6. Повний розрахунок балки та результати розрахунку

1. В головному меню натисніть «Режим → Выполнить полный расчет».


2. Після проведення розрахунку в головному меню натисніть «Режим → Результаты расчета».

3. Закрийте діалогове вікно «Показать», натиснувши .

4. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Эпюры», у списку, що випадає, оберіть «Эпюры поперечных сил (Qz)» (рис. 5.36). Цю ж операцію можна зробити через головне меню «Усилия → Эпюры → Эпюры поперечных сил (Qz)».

5. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Эпюры», у списку, що випадає, оберіть «Эпюры изгибающих моментов (My)» (рис. 5.37).

6. В головному меню натисніть «Режим → Железобетонные и стальные конструкции».

7. На панелі інструментів натисніть кнопку  «Стальной расчет». Цю ж операцію можна зробити через головне меню «Стальной расчет → Расчет всей схемы».

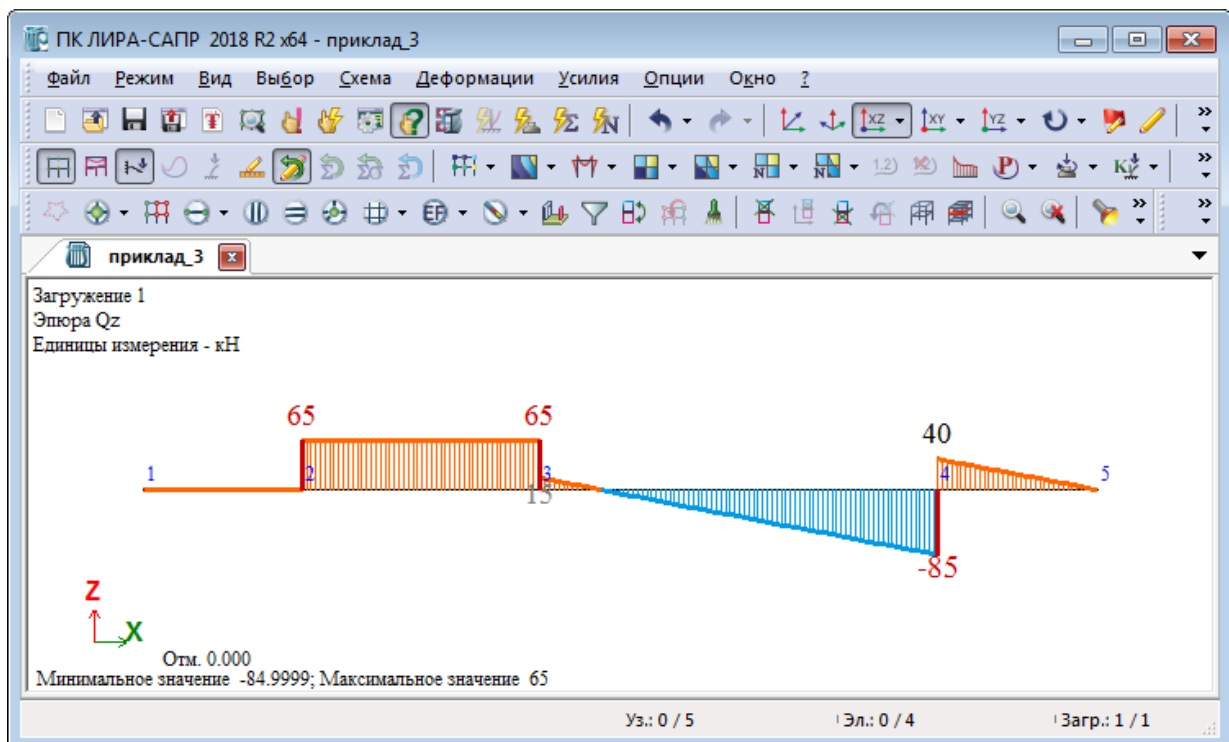


Рис. 5.36. Результати розрахунку. Поперечні сили

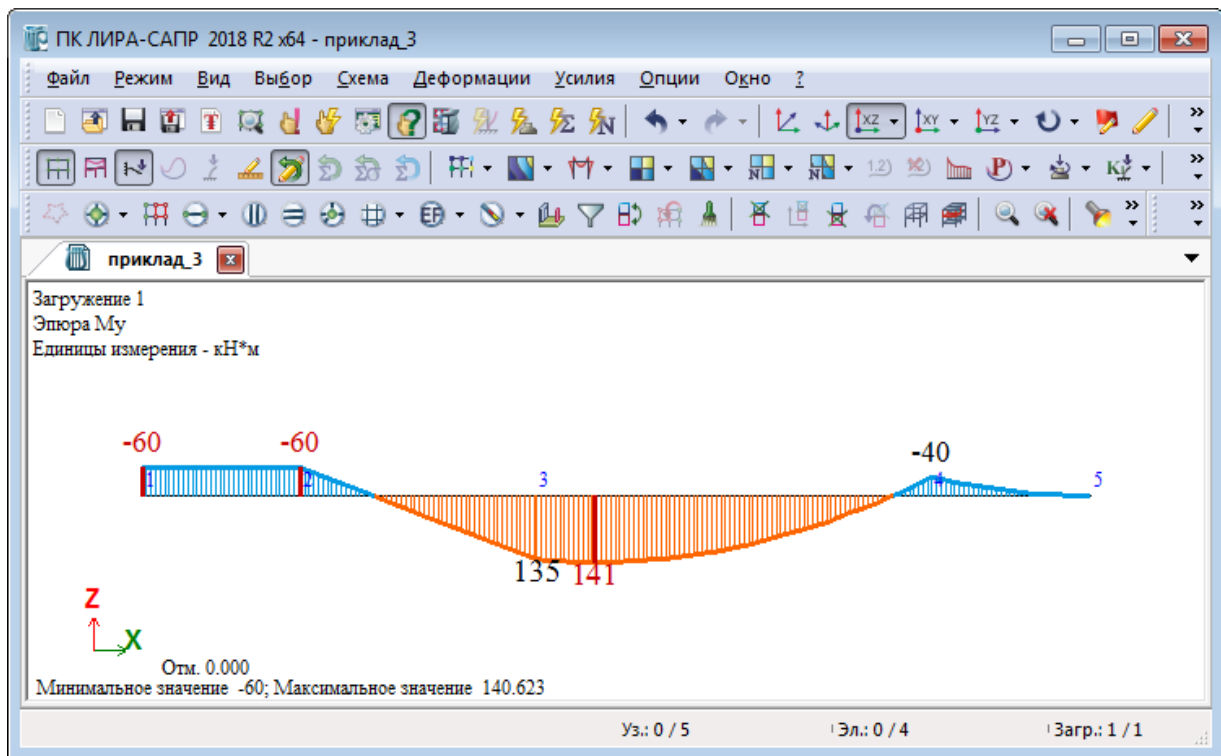


Рис. 5.37. Результаты розрахунку. Згинальні моменти

8. В головному меню натисніть «Результаты сталь → Подобранные сечения». Як видно, підібрано двотавр № 33 (рис. 5.38). При розрахунках у п. 4.2.1 на стор. 83 було підібрано двотавр № 40. Різниця у номерах двотавра виникла тому, що у п. 4.2.1 використано ст. 3 з $[\sigma] = 160$ МПа, а у розрахунках за допомогою ПК ЛИРА-САПР використано сталь 09Г2 з $[\sigma] = 305$ МПа.

9. Для виведення детальної інформації щодо перевірки несучої здатності балки за групами граничних станів необхідно викликати таблицю командою «Результаты сталь → Таблицы результаты → Подбор» (рис. 5.39).

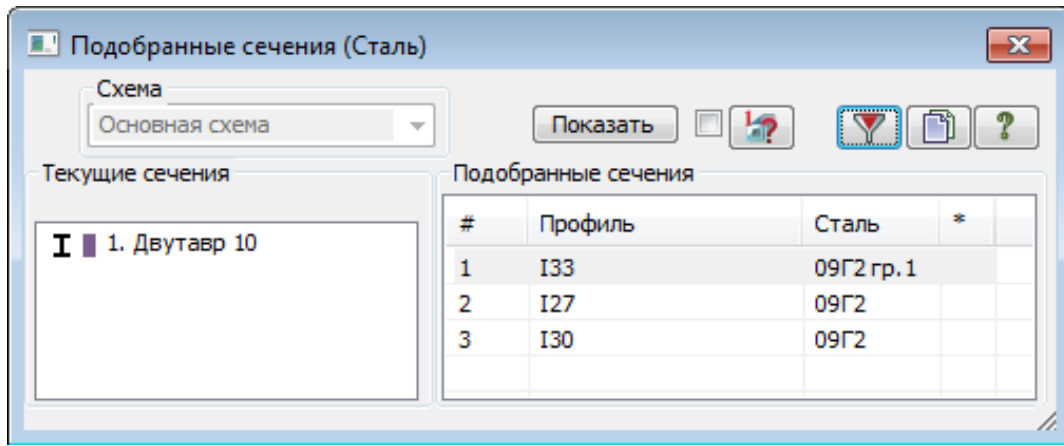


Рис. 5.38. Диалоговое вікно «Подобранные сечения (Сталь)»

ЛИРА-САПР - приклад_3.Подбор сечений всех элементов по загружениям

Файл Режим Вид Выбор Редактирование Расчет арматуры Результаты (ж/б) Стальнс расч Результаты

Файл Редактировать Данные Опции Окно ?

Балки

Элемент	НС	Группа	Шаг ребер (планок)	Фб min	Проценты исчерпания несущей способности балки по сечениям, %										Длина элемента
					нор	тау	с1	УБ	Прг	УС	УП	1ПС	2ПС	М.У	
Сечение: 1..1. Двутавр 10															
Профиль: 10; ГОСТ 8239-72*															
Сталь: ;															
Сортамент: Сталь горячекатанная. Балки двутавровые с уклоном внутренних граней полок (ГОСТ 8239-72*)															
		КБ1	Подобрано: 1..1. Двутавр 33												
			Профиль: 33; ГОСТ 8239-72*												
			Сталь: 09Г2 гр.1; ТУ 14-1-3023-80												
2	1	КБ1	0.00	1.000	34	18	28	0	93	48	29	34	93	48	
2	2	КБ1	0.00	1.000	75	18	57	0	93	48	32	75	93	48	
3	1	КБ1	0.00	1.000	75	4	56	0	93	48	32	75	93	48	
3	2	КБ1	0.00	1.000	22	24	24	0	93	48	29	24	93	48	
Сечение: 1.1.2. Двутавр 10															
Профиль: 10; ГОСТ 8239-72*															
Сталь: 09Г2; ГОСТ 19281-73*															
Сортамент: Сталь горячекатанная. Балки двутавровые с уклоном внутренних граней полок (ГОСТ 8239-72*)															
1			Подобрано: 1.1.2. Двутавр 27												
			Профиль: 27; ГОСТ 8239-72*												
			Сталь: 09Г2; ГОСТ 19281-73*												
1	1		0.00	1.000	56	0	41	0	96	45	30	56	96	45	
1	2		0.00	1.000	56	0	41	0	96	45	30	56	96	45	
4			Подобрано: 1.1.2. Двутавр 30												
			Профиль: 30; ГОСТ 8239-72*												
			Сталь: 09Г2; ГОСТ 19281-73*												
4	1		0.00	1.000	29	14	24	0	96	46	31	29	96	46	
4	2		0.00	1.000	0	0	0	0	96	46	0	0	96	46	

← Ferma / Kolonna / Skvoznyje / Balka / Kanat / ! / →

Рис. 5.39. Таблица перевірки несучої здатності

Бібліографічний список

1. Чихладзе Е. Д. Опір матеріалів. Харків: УкрДАЗТ, 2011. 362 с.
2. Чихладзе Е. Д., Кітов Ю. П. Вибрані задачі з опору матеріалів з розв'язаннями. Харків: УкрДАЗТ, 2002. 194 с.
3. Ватуля Г. Л. Розрахунково-проектувальні завдання з опору матеріалів та будівельної механіки. Харків: ХарДАЗТ, 2001. 35 с.
4. Кітов Ю. П., Чихладзе Е. Д. Побудова епюр внутрішніх сил в рамах з використанням ПЕОМ. Харків: ХарДАЗТ, 1998. 130 с.
5. Чихладзе Е. Д., Кітов Ю. П., Веревічева М. А. Визначення геометричних характеристик складних плоских перерізів з контролем рішення на комп'ютері. Харків: УкрДАЗТ, 2008. 100 с.
6. Кітов Ю. П., Чихладзе Е. Д., Гайдук О. М. Розрахунок на міцність і визначення переміщень в балках при згині з контролем рішення на ПЕОМ. Харків: ХарДАЗТ, 2001. 85 с.
7. Чихладзе Е. Д., Кіслов О. Г., Кітов Ю. П. Лабораторний практикум з опору матеріалів та будівельної механіки. Харків: ХНАДУ, 2008. 50 с.
8. Веревічева М. А., Петренко Д. Г. Приклади розв'язання розрахунково-проектувальних завдань з дисципліни «Опір матеріалів». Харків: УкрДАЗТ, 2015. 128 с.
9. Лабораторний практикум з опору матеріалів і будівельної механіки: Навч. посіб. Харків: ХНАДУ, 2008. 228 с.
10. Кітов Ю. П., Веревічева М. А., Чуменко С. М. Навчальний програмний комплекс з опору матеріалів. Харків: ХарДАЗТ, 2002. 62 с.
11. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. Москва, 1986. 544 с.

Продовження дод. 1

Продовження табл. Д.1.1

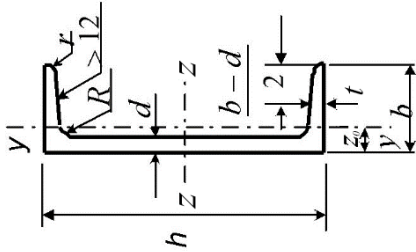
Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, см^2	I_z , см^4	W_z , см^3	i_z , см	S_z , см^3	I_y , см^4	W_y , см^3	i_y , см	Маса M , кг
	h	b	d	t									
24	240	115	5.6	9.5	34.8	3460	289	9.97	163	198	34.5	2.37	27.3
24a	240	125	5.6	9.8	37.5	3800	317	10.1	178	260	41.6	2.63	29.4
27	270	125	6.0	9.8	40.2	5010	371	11.2	210	260	41.5	2.54	31.5
27a	270	135	6.0	10.2	43.2	5500	407	11.3	229	337	50.0	2.80	33.9
30	300	135	6.5	10.2	46.5	7080	472	12.3	268	337	49.9	2.69	36.5
30a	300	145	6.5	10.7	49.9	7780	518	12.5	292	436	60.1	2.95	39.2
33	330	140	7.0	11.2	53.8	9840	597	13.5	339	419	59.9	2.79	42.2
36	360	145	7.5	12.3	61.9	13380	743	14.7	423	516	71.1	2.89	48.6
40	400	155	8.3	13.0	72.6	19062	953	16.2	545	667	86.1	3.03	57.0
45	450	160	9	14.2	84.7	27696	1231	18.1	708	808	101	3.09	66.5
50	500	170	10	15.2	100	39727	1589	19.9	919	1043	123	3.23	78.5
55	550	180	11	16.5	118	55962	2035	21.8	1181	1356	151	3.39	92.6
60	600	190	12	17.8	138	76806	2560	23.6	1491	1725	182	3.54	108

Швелери (за ГОСТ 8240-72)

Позначення:

- h - висота швелера;
- b - ширина полиці;
- d - товщина стінки;
- t - середня товщина полиці;

- I - момент інерції;
- W - момент опору;
- i - радіус інерції;
- S - статичний момент півперерізу;
- z_0 - відстань від осі y до зовнішньої грані стінки



Таблиця Д.1.2

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, cm^2	I_z , cm^4	W_z , cm^3	i_z , см	S_z , cm^3	I_y , cm^4	W_y , cm^3	i_y , см	z_0 , см	Маса 1 м , кг
	h	b	d	t										
5	5	32	4.4	7.0	6.16	22.8	9.1	1.92	5.59	5.61	2.75	0.954	1.16	4.84
6.5	65	36	4.4	7.2	7.51	48.6	15.0	2.54	9.0	8.7	3.68	1.08	1.24	5.90
8	80	40	4.5	7.4	8.98	89.4	22.4	3.16	13.3	12.8	4.75	1.19	1.31	7.05
10	100	46	4.5	7.6	10.9	174	34.8	3.99	20.4	20.4	6.46	1.37	1.44	8.59
12	120	52	4.8	7.8	13.3	304	50.6	4.78	29.6	31.2	8.52	1.53	1.54	10.4
14	140	58	4.9	8.1	15.6	491	70.2	5.60	40.8	45.4	11.0	1.70	1.67	12.3
14a	140	62	4.9	8.7	17.0	545	77.8	5.66	45.1	57.5	13.3	1.84	1.87	13.3
16	160	64	5.0	8.4	18.1	747	93.4	6.42	54.1	63.6	13.8	1.87	1.80	14.2
16a	160	68	5.0	9.0	19.5	823	103	6.49	59.4	78.8	16.4	2.01	2.00	15.3
18	180	70	5.1	8.7	20.7	1090	121	7.24	69.8	86	17.0	2.04	1.94	16.3

Продовження дод. 1

Продовження табл. Д.1.2

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, см^2	I_z , см^4	W_z , см^3	i_z , см	S_z , см^3	I_y , см^4	W_y , см^3	i_y , см	z_0 , см	Маса 1м, кг
	h	b	d	t										
18a	180	74	5.1	9.3	22.2	1190	132	7.32	76.1	105	20.0	2.18	2.13	17.4
20	200	76	5.2	9.0	23.4	1520	152	8.07	87.8	113	20.5	2.20	2.07	18.4
20a	200	80	5.2	9.7	25.2	1670	167	8.15	95.9	139	24.2	2.35	2.28	19.8
22	220	80	5.4	9.5	26.7	2110	192	8.89	110	151	25.1	2.37	2.21	21.0
22a	220	87	5.4	10.2	28.8	2330	212	8.99	121	187	30.0	2.55	2.46	22.6
24	240	90	5.6	10.0	30.6	2900	242	9.73	139	208	31.6	2.60	2.42	24.0
24a	240	95	5.6	10.7	32.9	3180	265	9.84	151	254	37.2	2.78	2.67	25.8
27	270	95	6.0	10.5	35.2	4160	308	10.9	178	262	37.3	2.73	2.47	27.7
30	300	100	6.5	11.0	40.5	5810	387	12.0	224	327	43.6	2.84	2.52	31.8
33	330	105	7.0	11.7	46.5	7980	484	13.1	281	410	51.8	2.97	2.59	36.5
36	360	110	7.5	12.6	53.4	10820	601	14.2	350	513	61.7	3.10	2.68	41.9
40	400	115	8.0	13.5	61.5	15220	761	15.7	444	642	73.4	3.23	2.75	48.3

Кутники нерівнобічні (за ГОСТ 8510-72)

Позначення:

B - ширина більшої полиці;

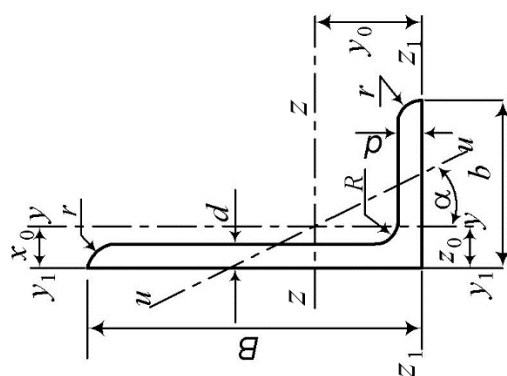
b - ширина меншої полиці;

d - товщина стінки;

I - момент інерції;

i - радіус інерції;

*Z*₀, *y*₀ - відстань від центру ваги до зовнішніх граней
полиць



Таблиця Д.1.3

Номер профілю	Розміри, мм		Площа перерізу, см ²	<i>I</i> _z , см ⁴	<i>i</i> _z , см	<i>I</i> _y , см ⁴	<i>i</i> _y , см	<i>I</i> _{u min} , см ⁴	<i>i</i> _{u min} , см ⁴	Кут нахилу осі <i>u</i> <i>tg α</i>	<i>I</i> _{z1} , см ⁴	<i>I</i> _{y1} , см ⁴	<i>Z</i> ₀ , см	<i>y</i> ₀ , см	Маса 1 м, кг
	<i>B</i>	<i>b</i>													
5.6/3.6	56	36	3.58	11.4	1.78	3.7	1.02	2.19	0.78	0.406	23.2	6.25	0.84	1.82	2.81
			4.41	13.8	1.77	4.48	1.01	2.66	0.78	0.404	29.2	7.91	0.88	1.86	3.46
6.3/4	63	40	4.04	16.3	2.01	5.16	1.13	3.07	0.87	0.397	33.0	8.51	0.91	2.03	3.17
			4.98	19.9	2.00	6.26	1.12	3.72	0.86	0.396	41.4	10.8	0.95	2.08	3.91
			5.90	23.3	1.99	7.28	1.11	4.36	0.86	0.393	49.9	13.1	0.99	2.12	4.63
			7.68	29.6	1.96	9.15	1.09	5.58	0.85	0.386	66.9	17.9	1.07	2.20	6.03

Продовження дод. 1

Продовження табл. Д.1.3

Номер про-філю	Розміри, мм			Площа пере-різу, см^2	I_z , см^4	i_z , см	I_y , см^4	i_y , см	$I_{u\ min}$, см^4	$i_{u\ min}$, см^4	Кут нахилу осі u $tg\ \alpha$	I_{z1} , см^4	I_{y1} , см^4	Z_o , см	Y_o , см	Маса 1м , кг
	B	b	d													
7/4.5	70	45	5	5.59	27.8	2.23	9.05	1.27	5.34	0.98	0.406	56.7	15.2	1.05	2.28	4.39
7.5/5	75	50	5	6.11	34.8	2.39	12.5	1.43	7.24	1.09	0.436	69.7	20.8	1.17	2.39	4.79
			6	7.25	40.9	2.38	14.6	1.42	8.48	1.08	0.435	83.9	25.2	1.21	2.44	5.69
8/5	80	50	8	9.47	52.4	2.35	18.5	1.40	10.9	1.07	0.430	112	34.2	1.29	2.52	7.43
			5	6.36	41.6	2.56	12.7	1.41	7.58	1.09	0.387	84.6	20.8	1.13	2.60	4.99
9/5.6	90	56	6	7.55	49.0	2.55	14.8	1.40	8.88	1.08	0.386	102	25.2	1.17	2.65	5.92
			5.5	7.86	65.3	2.88	19.7	1.58	11.8	1.22	0.384	132	32.2	1.26	2.92	6.17
10/6.3	100	63	6	8.54	70.6	2.88	21.2	1.58	12.7	1.22	0.384	145	35.2	1.28	2.95	6.70
			8	11.18	90.9	2.85	27.1	1.56	16.3	1.21	0.380	194	47.8	1.36	3.04	8.77
10/6.3	100	63	6	9.59	98.3	3.20	30.6	1.79	18.2	1.38	0.393	198	49.9	1.42	3.23	7.53
			7	11.1	113	3.19	35.0	1.78	20.8	1.37	0.392	232	58.7	1.46	3.28	8.70
			8	12.6	127	3.18	39.2	1.77	23.4	1.36	0.391	266	67.6	1.50	3.32	9.87
			10	15.5	154	3.15	47.1	1.75	28.3	1.35	0.387	333	85.8	1.58	3.40	12.10

Продовження дод. 1

Продовження табл. Д.1.3

Номер про-філю	Розміри, мм			Площа пере-різу, cm^2	I_z , cm^4	i_z , см	I_y , cm^4	i_y , см	I_{um} , cm^4	i_{um} , cm^4	Кут нахилу осі u $tg \alpha$	I_{z1} cm^4	I_{y1} cm^4	Z_o , см	Y_o , см	Маса 1 м , кг
	B	b	d													
11/7	110	70	6.5	11.4	142	3.53	45.6	2.00	26.9	1.53	0.402	286	74.3	1.58	3.55	8.98
12.5/8	125	80	14.1	172	227	4.01	73.7	2.29	43.4	1.76	0.407	452	119	1.80	4.01	11.0
				13.9	256	4.00	83	2.28	48.8	1.75	0.406	518	137	1.84	4.05	12.5
				19.7	312	3.98	100	2.26	59.3	1.74	0.404	649	173	1.92	4.14	15.5
				23.4	365	3.95	117	2.24	69.5	1.72	0.400	781	210	2.00	4.22	18.3
14/9	140	90	18.0	444	364	4.49	120	2.58	70.3	1.98	0.411	727	104	2.03	4.49	14.1
				22.2	444	4.47	146	2.56	85.5	1.96	0.409	911	245	2.12	4.58	17.5
16/10	160	100	22.9	606	606	5.15	186	2.85	110	2.20	0.391	1221	300	2.23	5.19	18.0
				25.3	667	5.13	204	2.84	121	2.19	0.390	1359	335	2.28	5.23	19.8
				30.0	784	5.11	239	2.82	142	2.18	0.388	1634	405	2.36	5.32	23.6
				34.7	897	5.08	272	2.80	162	2.16	0.385	1910	477	2.43	5.40	27.3
18/11	180	110	28.3	1123	952	5.80	276	3.12	165	2.42	0.375	1933	444	2.44	5.88	22.2
				33.7	1123	5.77	324	3.10	194	2.40	0.374	2324	537	2.52	5.97	26.4

Продовження дод. 1

Продовження табл. Д.1.3

Номер про-філю	Розміри, мм			Площа пере-різу, cm^2	I_z , cm^4	i_z , см	I_y , cm^4	i_y , см	$I_{u\ min}$, cm^4	$i_{u\ min}$, cm^4	Кут нахилу осі u $tg\ \alpha$	$I_{z\ l}$ cm^4	$I_{y\ l}$ cm^4	z_o , см	y_o , см	Маса $1\ \text{м}$, кг
	B	b	d													
20/12.5	200	125	11	34.9	1449	6.45	446	3.58	264	2.75	0.392	2920	718	2.79	6.50	27.4
			12	37.9	1568	6.43	482	3.57	285	2.74	0.392	3189	786	2.83	6.54	29.7
			14	43.9	1801	6.41	551	3.54	327	2.73	0.390	3726	922	2.91	6.62	34.4
			16	49.8	2026	6.38	617	3.52	367	2.72	0.388	4264	1061	2.99	6.71	39.1
25/16	250	160	12	48.3	3147	8.07	1032	4.62	604	3.54	0.410	6212	1634	3.53	7.97	37.9
			16	63.6	4091	8.02	1333	4.58	781	3.5	0.408	8308	2200	3.69	8.14	49.9
			18	71.1	4545	7.99	1475	4.56	896	3.49	0.407	9358	2487	3.77	8.23	55.8
			20	78.5	4987	7.97	1613	4.53	949	3.48	0.405	10410	2776	3.85	8.31	61.7

Зразок оформлення титульної сторінки пояснювальної записки

Міністерство освіти та науки України

Український державний університет залізничного транспорту

Кафедра будівельної механіки та гідравліки

Розрахунково-графічна робота №__

Схема №__
Варіант №__

Виконав студент групи _____

Перевірив _____

Харків 20__