



**УКРАИНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА**

Э.Д. ЧИХЛАДЗЕ

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебник

Харьков 2011

УДК 539.3/8(075)

ББК 30.121

Ч 713

Рецензенты:

профессор А.Ф. Яременко (Одесская государственная академия строительства и архитектуры);

профессор В.А. Гришин (Одесский национальный морской университет)

Издание второе, переработанное и дополненное

Чихладзе Э.Д.

Ч 713 Соппротивление материалов: Учебник. – Харьков: УкрГАЖТ, 2011. – 366 с., рис. 227, табл. 18.
ISBN 978-966-2033-66-3

Данная книга, написанная в соответствии с программой курсов для транспортных вузов, отличается более углубленным рассмотрением вопросов расчета и расширением круга задач, относящихся ранее к теории упругости. Учебник содержит большое число подробных примеров расчета, способствующих лучшему усвоению учебного материала.

При подготовке второго издания в текст внесены некоторые дополнения, относящиеся к динамическим характеристикам строительных материалов, устранены недочеты в предыдущем издании.

Предназначен для студентов строительных специальностей транспортных вузов.

УДК 539.3/8(075)
ББК 30.121

ISBN 978-966-2033-66-3

©Украинская государственная академия железнодорожного транспорта, 2011

Учебник

Чихладзе Элгуджа Давидович

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Ответственный за выпуск Ватуля Г.Л.

Редактор Ибрагимова Н.В.

Підписано до друку 23.12.10 р.

Формат паперу 60x84 1/8 . Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 11,0. Тираж 100. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту

61050, Харків - 50, майдан Фейєрбаха, 7
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Представленный учебник “Соппротивление материалов” написан на основе многолетнего опыта преподавания курса на строительном факультете Харьковской государственной академии железнодорожного транспорта.

Вопросы прочности, жесткости и устойчивости конструкций интересуют инженеров любой специальности. Особо важное значение они приобретают для инженеров путей сообщения в силу того, что на железнодорожном транспорте функционируют уникальные инженерные сооружения: мосты, акведуки, виадуки, путепроводы, тоннели, трубы, метрополитены и т. п., требующие постоянного и пристального внимания ученых и инженеров.

Развитие дисциплины “сопротивление материалов” идет по пути совершенствования методов расчета и расширения круга задач, относящихся ранее к теории упругости. Эта тенденция нашла отражение в предлагаемой книге.

Укажем наиболее существенные особенности настоящего учебного издания. В первом разделе “Общие положения”, помимо традиционных вопросов, дано представление о тензорах напряжений и деформаций, выведены зависимости между деформациями и перемещениями, получены уравнения обобщенного закона Гука, в том числе и при сдвиге.

Во втором разделе, помимо геометрических, рассматриваются и секториальные характеристики поперечных сечений стержней.

Третий раздел – “Растяжение и сжатие”. Здесь определение перемещений при известных значениях напряжений осуществлено интегрированием системы дифференциальных зависимостей между перемещениями и деформациями.

В четвертом разделе изложены основы теории напряженного состояния в двух и трех измерениях.

Пятый раздел – “Теория прочности” – традиционный. В шестом разделе – “Теория изгиба” – уделено значительное внимание методам определения перемещений. Здесь рассмотрены метод непосредственного интегрирования; метод начальных параметров; метод фиктивной нагрузки; метод Мора. В этом же разделе отдельным подразделом выделен сдвиг как частный случай изгиба и рассмотрены вопросы расчета соединений.

Седьмой раздел – “Расчет статически неопределимых балок” – содержит расчет неразрезных балок на абсолютно жестких опорах и балок на упругом основании. В раздел 8 – “Кручение” – включен расчет стержней с круглым и прямоугольным поперечным сечением, а также тонкостенных стержней с незамкнутым сечением. В девятом разделе – “Сложное сопротивление и устойчивость” – приведены методы расчета на

косой изгиб, изгиб и кручение; внецентренное растяжение или сжатие, устойчивость, продольно-поперечный изгиб. Десятый раздел – “Расчет некоторых конструкций, испытывающих плоское напряженное состояние”. Здесь изложено решение для толстой трубы, находящейся под действием равномерного давления; растянутой пластинки с малым круглым отверстием; бесконечно большой пластинки, нагруженной сосредоточенной силой, действующей на горизонтальный прямолинейный край; консольной балки, нагруженной на конце касательными усилиями и др. В одиннадцатом разделе рассмотрены вопросы прочности и характеристики материалов при динамических воздействиях.

При подготовке второго издания в текст внесены дополнения, относящиеся к динамическим характеристикам материалов, которые представляются существенными для формирования у студентов инженерного мышления.

Автор выражает благодарность рецензентам д-ру техн. наук, проф. А.Ф. Яременко и д-ру техн. наук, проф. В.А. Гришину за ценные замечания, способствующие улучшению рукописи, а также глубокую признательность канд. техн. наук, доц. М.А. Веревичевой и инженеру Р.Г. Павленко за помощь при подготовке рукописи к изданию.

Все замечания и пожелания будут приняты автором с благодарностью. Письма просим направлять по адресу: 61050, Харьков, пл. Фейербаха, 7, УкрГАЗТ, ауд. 118, кафедра строительной механики.

Раздел 1

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Предмет и задачи сопротивления материалов

Любое инженерное сооружение должно быть прочным, жестким и устойчивым. Сооружение будет прочным, если оно способно не разрушаясь выдерживать действующие на него нагрузки в течение достаточно длительного времени. Сооружение жесткое, если перемещения в нем не мешают нормальной эксплуатации. Сооружение устойчиво, если оно не меняет форму, полученную при возведении. Для решения задачи обеспечения прочности, жесткости и устойчивости сооружения необходимо знать основные механические свойства материалов, из которых оно выполнено, кроме того, должны быть известны нагрузки, приложенные к сооружению. Затем следует определить внутренние силы, возникающие между отдельными элементарными частицами тела, по какому закону они распределяются и в каких местах достигают экстремальных значений. После этого выбирают такие размеры частей сооружений, при которых внутренние силы меньше предельных, регламентируемых нормами. При этом условии не произойдет разрушения.

Проблемами расчета занимается такая инженерная наука, как строительная механика. Сопротивление материалов является дисциплиной, в которой изучаются основные понятия и принципы, используемые в этих расчетах. Их применение в сопротивлении материалов обычно ограничивается лишь расчетами отдельных элементов конструкций, таких как, например, стержень, балка или простейшие составленные из них системы. Расчеты сложных многоэлементных конструкций изучаются в последующих курсах, таких как «Статика сооружений», «Динамика сооружений», «Устойчивость сооружений». Сопротивление материалов основывается на теоретических и экспериментальных данных. Теоретическим путем получают основные расчетные формулы, применяемые при решении конкретных задач, а экспериментальным – устанавливают основные механические характеристики материалов и проверяют выводы теории.

В сопротивлении материалов используются основные положения физики, математики и теоретической механики. Однако в постановке задач имеется существенная особенность. В то время как в теоретической механике тело считается абсолютно твердым, в сопротивлении материалов учитываются те небольшие изменения размеров и формы тела, которые происходят под действием нагрузок или других причин. Эти изменения называют *деформациями*. Деформации безразмерны и малы: для реальных строительных материалов они имеют порядок $\varepsilon = 10^{-3}$. Знание основ сопротивления материалов является важнейшим требованием и составной частью при подготовке инженера вообще и инженера путей сообщения в частности.

1.2. Схемы элементов конструкций

Любое инженерное сооружение – здание, мост, тоннель и др. – имеет несущие элементы, предназначенные для восприятия нагрузок и других воздействий. Рассмотрим эти элементы.

Геометрическую форму любого элемента можно в основном охарактеризовать тремя размерами: длиной, шириной и толщиной. Элементы призматической или цилиндрической формы, у которых один размер (длина ℓ) велик по сравнению с двумя другими b , h размерами, называются брусками (рис. 1.1). Геометрическое место точек, являющихся центрами тяжести поперечных сечений, будем называть осью бруса.

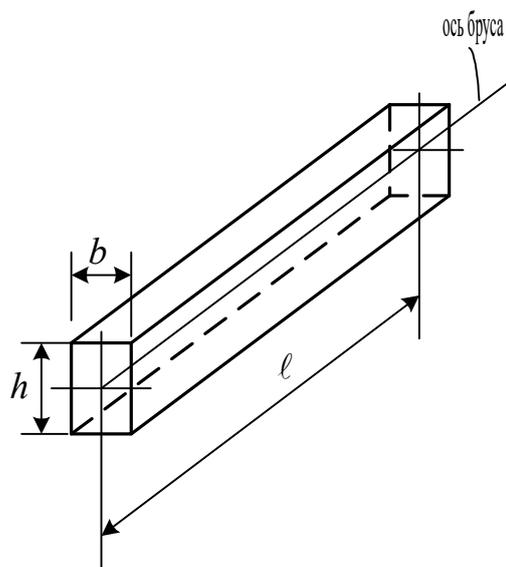


Рис. 1.1. Элемент конструкции – брус

В зависимости от соотношения размеров бруса и характера действующих сил бруска подразделяются на стержни и балки. Стержень – тонкий и длинный брус, работающий, главным образом, на растяжение или сжатие (одноосное напряженное состояние).

Балка – горизонтально расположенный сравнительно толстый брус, работающий в основном на изгиб.

Элементы, у которых два размера a , b велики по сравнению с третьим (толщиной), называются плитами, пластинами или мембранами (в зависимости от толщины) (рис. 1.2). Искривленная пластина (криволинейная до нагружения) называется оболочкой. Материал пластин и оболочек работает в более сложных условиях, чем у стержня, а именно на растяжение-сжатие в двух взаимно перпендикулярных направлениях (двухосное напряженное состояние).

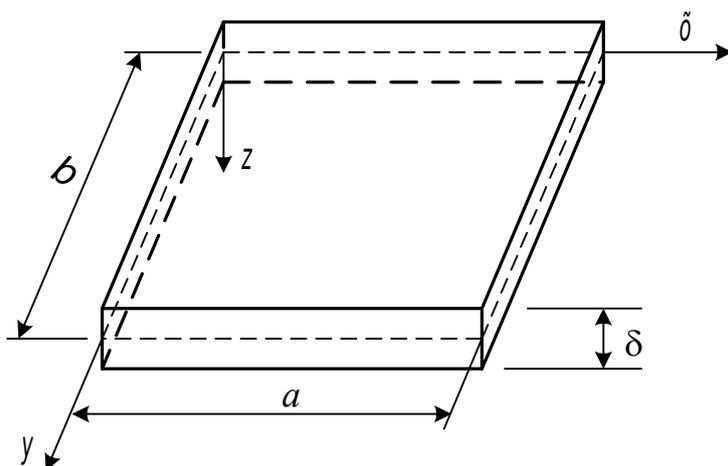


Рис. 1.2. Элемент конструкции – пластина

Элементы, у которых все три размера a , b , c являются величинами одного порядка, называются массивами (рис. 1.3). Напряженное состояние материала здесь трехосное.

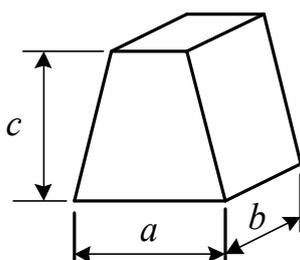


Рис. 1.3. Элемент конструкции – массив

1.3. Основные типы опорных устройств

В курсе сопротивления материалов изучаются, главным образом, стержневые элементы. Применительно к ним и рассмотрим опорные устройства. Конструктивные формы опор весьма разнообразны. Чаще всего в инженерной практике применяют следующие типы опор.

Шарнирно-подвижная опора (рис. 1.4) представляет собой устройство, допускающее перемещение опорного сечения по горизонтали и поворот его в вертикальной плоскости относительно оси цилиндрического шарнира А и не дающее возможности перемещения по вертикали. Реакция такой опоры направлена вдоль опорной связи.

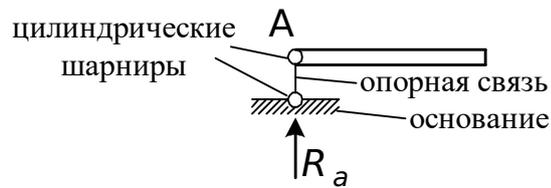


Рис. 1.4. Шарнирно-подвижная опора

Шарнирно-неподвижная опора (рис. 1.5) не допускает смещений опорного сечения ни в продольном, ни в поперечном направлениях, но допускает поворот этого сечения относительно шарнира. Следовательно, шарнирно-неподвижная опора – опора с двумя связями, которые удобно прикладывать по направлению оси стержня и перпендикулярно оси. В такой опоре возникают две составляющие опорной реакции R_a и H_a .

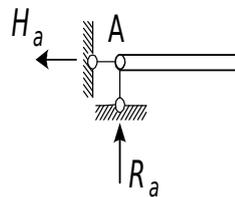


Рис. 1.5. Шарнирно-неподвижная опора

Жесткое закрепление или заделка (рис. 1.6) не допускает поворота опорного сечения и перемещения его ни в каком направлении, т. е. на это сечение наложено три связи. В такой опоре возникает вертикальная R_a и горизонтальная H_a составляющие опорной реакции и изгибающий момент M_a .

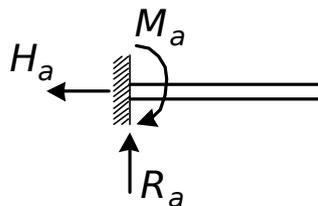


Рис. 1.6. Жесткое закрепление (заделка)

1.4. Внешние силы и их классификация

Внешние силы или нагрузки, действующие на тела, делят на поверхностные и объемные. *Поверхностными* называются такие силы, которые прикладываются к телу путем соприкосновения с ним других тел по некоторой части или по всей поверхности, например нагрузка, лежащая на балке или плите. *Объемными* называют такие силы, которые распределены

по всему объему тела и приложены к его внутренним точкам, например, собственный вес или силы инерции. Размерность объемных сил – $\text{Н}/\text{м}^3$, $\text{кН}/\text{м}^3$.

Поверхностные силы делят на сосредоточенные и распределенные. Сосредоточенными называют такие силы, которые передаются телу по поверхности, весьма малой в сравнении с его размерами. Для упрощения расчетов эти силы считают приложенными в точках.

Сосредоточенные силы измеряют в ньютонах (Н), килоньютонах (кН) или меганьютонах ($1 \text{ Н} = 0,102 \text{ кгс}$, $1 \text{ МН} = 10^6 \text{ Н}$). Реально через точку, т. е. объект, не имеющий размеров, невозможно передать воздействия конечного значения. Поэтому сосредоточенная сила или момент – это типичная схематизация реальности, позволяющая построить физико-математическую расчетную модель.

Распределенными называют нагрузки, приложенные по некоторой площади или линии на поверхности тела. Например, давление снега на крышу здания. Распределенная нагрузка характеризуется ее интенсивностью, т. е. величиной нагрузки, приходящейся на единицу площади или длины ($\text{Н}/\text{м}^2$ или $\text{кН}/\text{м}^2$, $\text{Н}/\text{м}$ или $\text{кН}/\text{м}$). Если нагрузка имеет одинаковую интенсивность по всей площади или длине, то ее называют *равномерно распределенной*.

Для расчета интенсивности нагрузки применимо следующее правило знаков: компонента вектора интенсивности положительна, если она совпадает с направлением соответствующей оси координат.

По продолжительности действия нагрузки делят на *постоянные*, действующие непрерывно, и *временные*, действующие лишь в некоторые промежутки времени. По характеру действия нагрузки делят на статические и динамические. Нагрузка, постоянная или очень медленно изменяющаяся во времени, когда скоростями и ускорениями возникающего движения можно пренебречь, называется *статической*.

Быстро изменяющуюся нагрузку называют *динамической*, а расчет с учетом возникающего колебательного движения – динамическим расчетом.

1.5. Понятие расчетной схемы сооружения

В курсе сопротивления материалов закладывается фундамент для грамотного проектирования конструкций. Наряду с введением соответствующих понятий, изложенных в предыдущих подразделах, необходимо уметь представить работу элемента конструкции с помощью расчетной схемы и соответствующих аналитических зависимостей.

Расчетной схемой называют идеализированную упрощенную схему действительного сооружения или его части, в которой отражаются только его (ее) основные свойства.

С помощью расчетной схемы решаются важные инженерные вопросы: дается оценка прочности существующей конструкции; определяются предельно допустимые нагрузки; подбираются необходимые размеры элементов и выбираются подходящие материалы; проводится оптимизация параметров конструкции, т. е. находятся параметры, обеспечивающие наилучшие свойства этой конструкции.

Примеры некоторых расчетных схем, рассматриваемых в курсе сопротивления материалов, приведены на рис. 1.7.

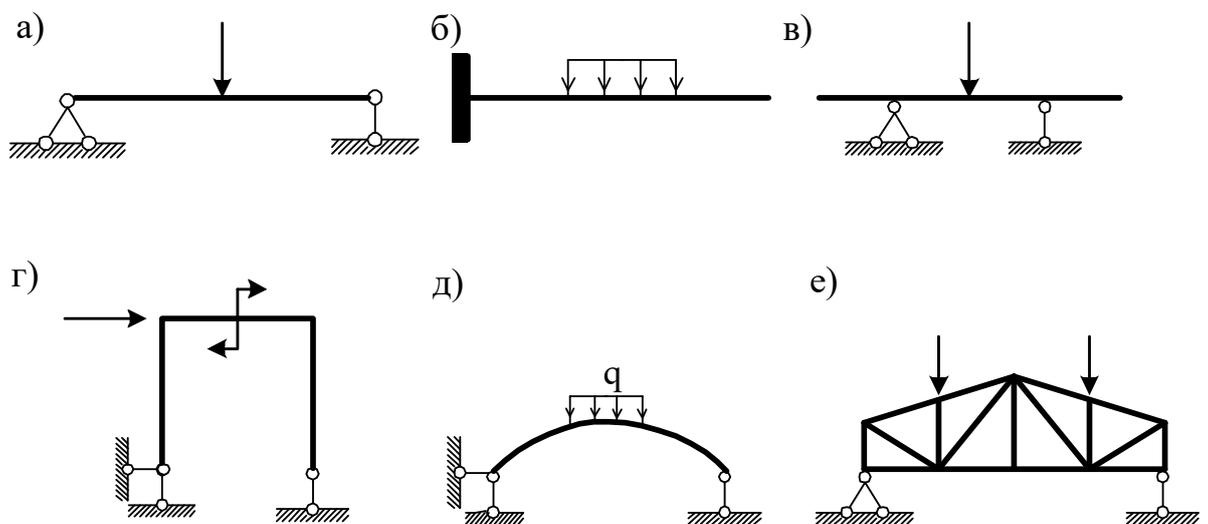


Рис. 1.7. Расчетные схемы стержневых конструкций

На рис. 1.7, а, б, в изображены балки, представляющие собой прямолинейный брус, работающий на изгиб. Рама (рис. 1.7, г) – стержневая система преимущественно с жесткими соединениями в узлах. Стержни рамы работают одновременно на изгиб и осевое действие сил, причем изгибная деформация в раме преобладает.

Криволинейный брус, показанный на рис. 1.7, д, работает на сжатие и изгиб.

Стержневая система, показанная на рис. 1.7, е, называется фермой. При наличии идеального шарнирного соединения в узлах все стержни фермы при узловой нагрузке работают только на осевое действие сил.

Отметим, что для неподвижного соединения конструкции с основанием необходимы три связи. Это условие является необходимым, но не достаточным. *Недопустимо* соединение с основанием при помощи трех шарнирно-подвижных опор, направления которых параллельны друг другу или направления которых пересекаются в одной точке.

1.6. Гипотезы и допущения

Инженерные сооружения изготавливаются из различных материалов: металлов, бетона, дерева, полимеров и др. Их структура и физические свойства могут быть весьма разнообразны. В сопротивлении материалов оперируют материалом, наделенным идеализированными свойствами. Материал считается сплошным, однородным, изотропным и линейно-упругим.

1.6.1. Свойство *сплошности* говорит о том, что не учитывается конкретная структура материала (зернистая, кристаллическая и др.) и считается, что материал непрерывно заполняет весь объем элемента конструкции.

1.6.2. Свойство *однородности* означает, что весь объем материала обладает одинаковыми механическими свойствами.

1.6.3. *Изотропным* называется материал, у которого механические свойства во всех направлениях одинаковы. В противном случае его называют *анизотропным*.

1.6.4. *Идеально-упругим* является такой материал, в котором возникают только упругие деформации. Диаграмма деформирования этого материала показана на рис. 1.8. При нагрузке и разгрузке образца графики совпадают, т. е. остаточных деформаций нет.

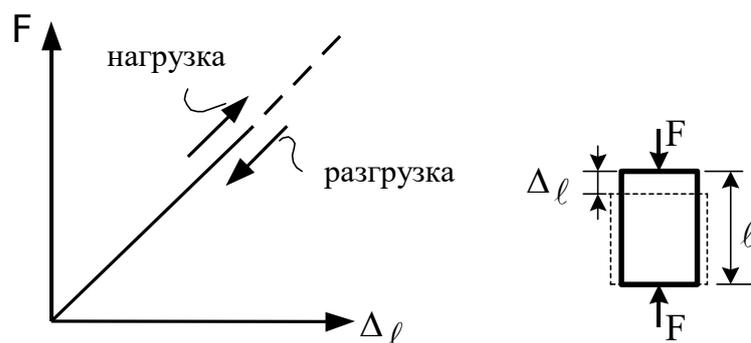


Рис. 1.8. Диаграмма деформирования линейно-упругого материала

1.6.5. В сопротивлении материалов используется гипотеза о малости деформаций (изменение размеров и формы тела под действием нагрузки называют деформацией тела). Предполагается, что деформации малы по сравнению с размерами тела. Это позволяет в большинстве случаев пренебречь изменениями в расположении внешних сил относительно отдельных частей тела.

1.6.6. Для линейных систем, рассматриваемых в курсе сопротивления материалов, справедлив принцип суперпозиции: результат действия группы сил равен сумме (алгебраической или геометрической) результатов, полученных от действия каждой силы в отдельности.

1.7. Внутренние усилия в поперечных сечениях стержня

Между соседними частицами тела (кристаллами, молекулами, атомами) всегда имеются определенные силы взаимодействия, иначе – внутренние силы. Эти силы во всех случаях стремятся сохранить его как единое целое, противодействуют всякой попытке изменить взаимное расположение частиц, т. е. деформировать тело. Внешние силы, наоборот, всегда стремятся вызвать деформацию тела, изменить взаимное расположение частиц. Для выявления, а затем и вычисления внутренних сил широко применяют метод сечений.

Рассмотрим произвольное тело, нагруженное самоуравновешенной системой сил (рис. 1.9).

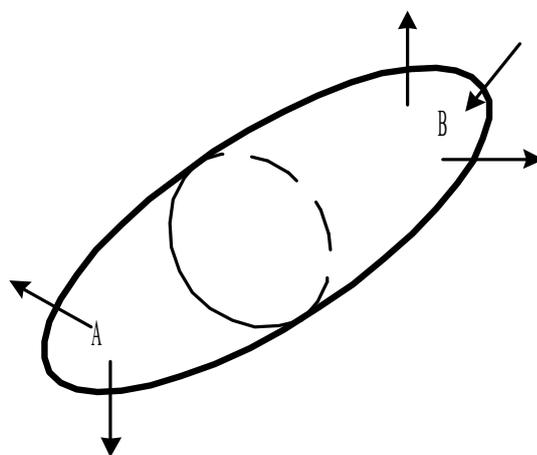


Рис. 1.9. К определению внутренних сил методом сечений

В интересующем нас месте мысленно рассечем тело плоскостью на две части А и В. В каждой точке обеих сторон сечения будут действовать силы взаимодействия. Исходя из гипотезы о сплошности материала следует считать, что внутренние силы действуют во всех точках проведенного сечения и, следовательно, представляют собой распределенную нагрузку (рис. 1.10).

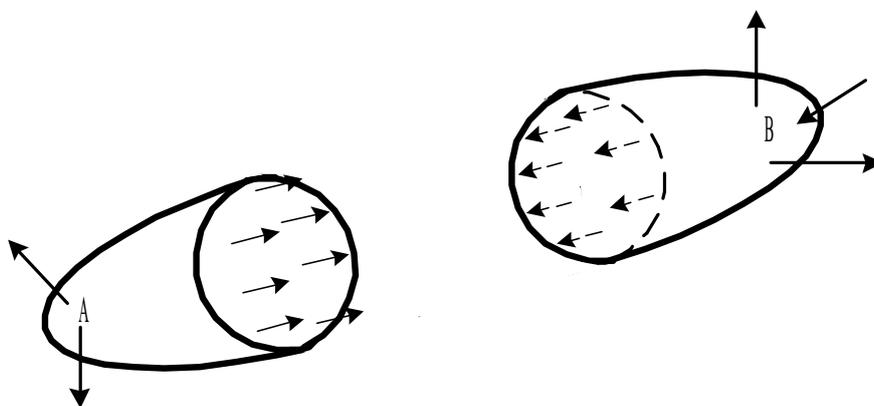


Рис. 1.10. К определению внутренних сил методом сечений

Следует подчеркнуть, что внутренние силы, действующие по сечению, принадлежащему части А, в соответствии с третьим законом Ньютона равны по величине и противоположны по направлению внутренним силам, действующим по сечению, принадлежащему части В. Как всякую систему сил, их можно привести к одной точке (обычно к центру тяжести сечения). В результате на каждой стороне сечения получим главный вектор и главный момент внутренних сил. Если главный вектор и главный момент внутренних сил спроектировать на ось стержня X и главные центральные оси сечения Y и Z , то на каждой стороне сечения получим шесть внутренних силовых факторов: три силы N , Q_y , Q_z и три момента M_x , M_y , M_z (рис. 1.11).

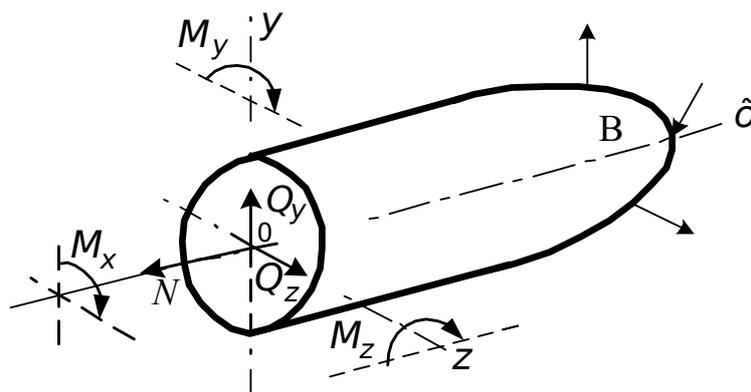


Рис. 1.11. Схема внутренних силовых факторов в сечении

Усилие N вызывает продольную деформацию стержня (растяжение или сжатие); Q_y и Q_z – сдвиг сторон сечения соответственно в направлении осей y и z ; M_x – кручение стержня; M_y и M_z – изгиб стержня в главных плоскостях (ZOX и YOX).

Таким образом, после приложения в сечении к части В усилий, заменяющих собой действие отброшенной части А, оставшаяся часть В, нагруженная приложенными к ней внешними силами, находится в равновесии. Поэтому для части В можно записать шесть уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0; \\ \sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Из первых трех уравнений равновесия (1.1) соответственно находим усилия N , Q_y , Q_z , а из трех последних – соответственно моменты M_x , M_y , M_z . Как видим, метод сечений дает возможность определить в сечении направления и значения равнодействующих внутренних усилий (или их компонент). При этом закон распределения этих усилий остается неизвестным. Для решения этого вопроса необходимо знать, как деформируется брус под действием внешних сил. Об этом речь пойдет ниже.

Для внутренних силовых факторов приняты следующие названия: N – продольная или осевая (направленная по оси стержня) сила; Q_y, Q_z – поперечные (реже – перерезывающие) силы; M_x – крутящий момент; M_y, M_z – изгибающие моменты.

Напомним основные правила составления уравнений равновесия. Проекция силы на ось равна произведению силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси. Если сила перпендикулярна оси, то ее проекция на ось равна нулю.

Момент силы относительно оси равен произведению проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, на плечо силы. Момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна оси, если линия действия силы пересекает ось. Усилия и моменты в различных сечениях одного и того же стержня различны. Графики (диаграммы), показывающие как изменяются внутренние усилия при переходе от сечения к сечению, называются эпюрами.

Правила построения эпюр:

1. Ось (базу), на которой строится эпюра, всегда выбирают так, чтобы она совпадала с осью стержня.
2. Ординаты эпюры в выбранном масштабе откладывают от оси по перпендикуляру.
3. Штриховать эпюры принято линиями, перпендикулярными базе (базисной линии).

1.7.1. Внутренние усилия при растяжении и сжатии

При действии на стержень внешних нагрузок, направленных вдоль продольной оси, в поперечных сечениях возникает только один силовой фактор – продольная сила. Такие нагрузки вызывают растяжение и сжатие стержня. Отметим, что продольная сила в поперечных сечениях стержня численно равна алгебраической сумме проекций внешних сил на ось стержня, приложенных к его оставшейся части.

Условимся продольную (осевую силу) считать положительной, если она вызывает растяжение (направлена от сечения), и отрицательной, если она вызывает сжатие (направлена к сечению).

Построим эпюру продольных сил для ступенчатого стержня (рис. 1.12) с учетом его собственного веса. Площадь верхней части – A_1 , нижней – A_2 , объемный вес материала, из которого выполнен стержень, – γ .

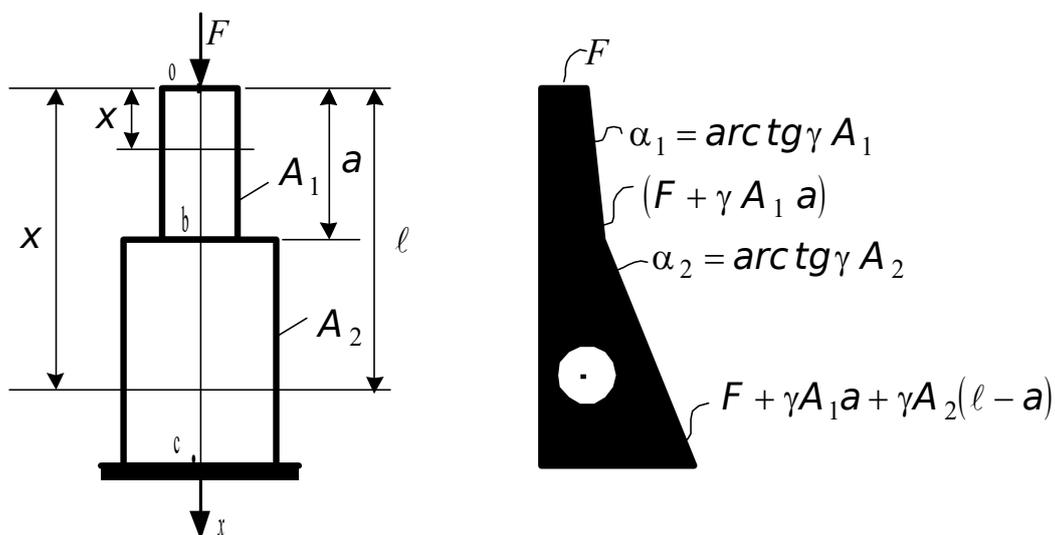


Рис. 1.12. К построению эпюры продольных сил в стержне

Начало координат выбираем в точке O .

Участок ob :

$$N_x = -F - \gamma A_1 x \quad (0 \leq x \leq a).$$

Участок bc :

$$N_x = -F - \gamma A_1 a - \gamma A_2 (x - a) \quad (a \leq x \leq \ell).$$

Полученные уравнения являются уравнениями наклонных прямых, так что эпюра N трапециевидна. Поскольку площади поперечных сечений A_1 и A_2 на участках ob и bc различны, то наклон эпюр на участках ob и bc неодинаков.

Продольная сила N и распределенная нагрузка t_x , например, вес тела ($t = \gamma A$), связаны некоторой дифференциальной зависимостью. Рассмотрим стержень, нагруженный продольной распределенной нагрузкой t_x (рис. 1.13). Выделим из стержня элемент длиной dx .

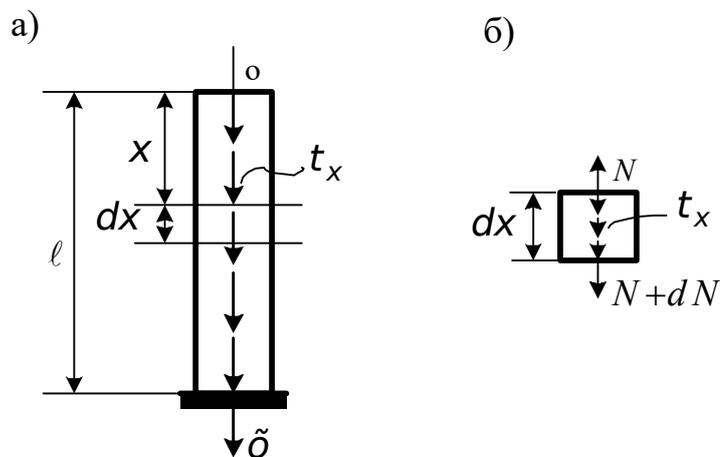


Рис. 1.13. К выводу дифференциальной зависимости между t_x и N

На него будет действовать нагрузка t_x , которую можно считать равномерно распределенной ввиду малости dx , и уравновешивающие продольные силы (положительные): в верхнем сечении $-N$, в нижнем $-N + dN$, где dN – приращение продольной силы на участке длиной dx .

Составим уравнение равновесия – сумму проекций всех сил, приложенных к элементу, на ось стержня:

$$-N + t_x dx + (N + dN) = 0,$$

откуда

$$\frac{dN}{dx} = -t_x. \quad (1.2)$$

Эта зависимость используется при анализе различных вопросов, в частности, при проверке правильности построения эпюры N . Если вычислить производные в уравнениях N_x на участках об и вс, то увидим, что на участке об (см. рис. 1.12) должна действовать равномерно распределенная нагрузка интенсивностью γA_1 , а на участке вс – γA_2 .

1.7.2. Внутренние усилия при кручении

Стержень, который нагружен моментами, действующими в плоскостях, перпендикулярных его продольной оси, испытывает кручение. Такие стержни называют валами. При этом в поперечных сечениях вала возникает только одно внутреннее усилие – крутящий момент M_x .

Крутящий момент в сечении равен сумме внешних моментов, приложенных к его оставшейся части, или другими словами – сумме внешних крутящих моментов, расположенных по одну сторону от сечения.

Условимся крутящий момент считать положительным, если при взгляде на сечение со стороны внешней нормали он направлен по ходу часовой стрелки (рис. 1.14).

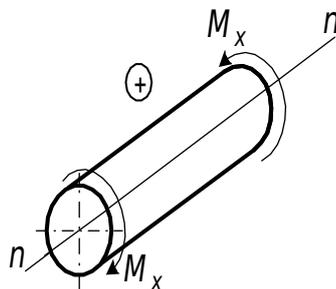


Рис. 1.14. Правило знаков для M_x

Заметим, что принятое правило знаков для крутящего момента не имеет физического смысла. Оно необходимо для установления направле-

ния крутящего момента и при построении эпюры M_x . Построим эпюру M_x для вала, показанного на рис. 1.15.

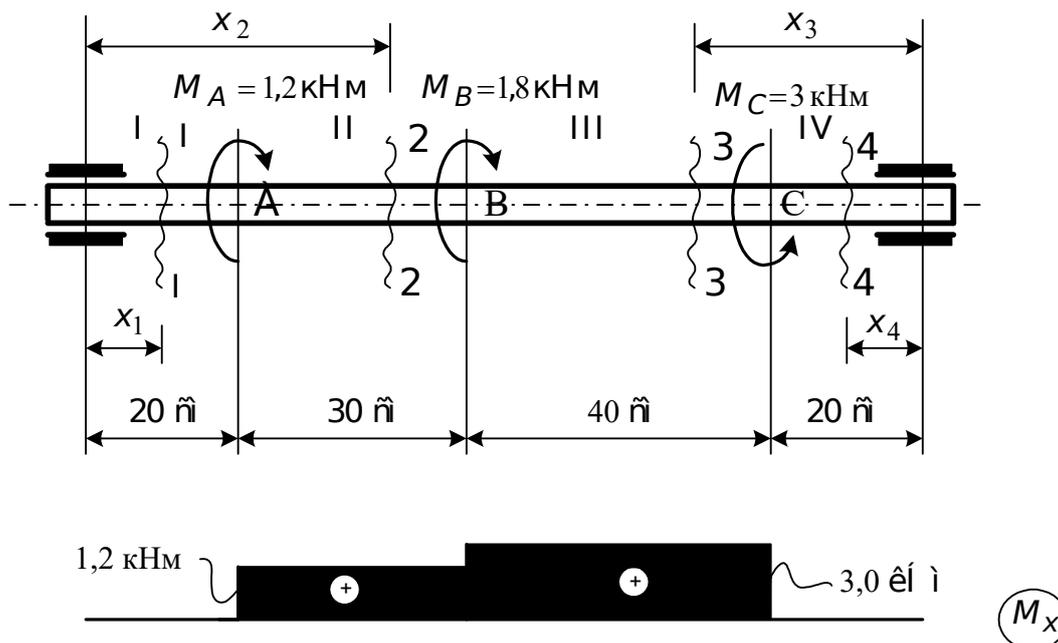


Рис. 1.15. К построению эпюры M_x для вала

Разбиваем стержень на четыре участка. Используя метод сечений, на участке I мысленно проводим в произвольном месте сечение 1-1 (начало координат принимаем в крайнем левом сечении), отбрасываем правую часть стержня и рассматриваем равновесие оставшейся левой части:

$$M_1 = 0 \quad 0 \leq x_1 \leq 20 \text{ см.}$$

Крутящий момент в произвольном сечении 2-2 участка II, в соответствии с приведенным правилом знаков, получаем

$$M_2 = M_A = 1,2 \text{ кНм} \quad 20 \text{ см} \leq x_2 \leq 50 \text{ см.}$$

Крутящий момент на участке III (оставшейся частью является правая, начало координат в крайнем правом сечении)

$$M_3 = M_C = 3 \text{ кНм} \quad 20 \text{ см} \leq x_3 \leq 60 \text{ см.}$$

Крутящий момент на участке IV равен нулю, т. е.

$$M_4 = 0 \quad 0 \leq x_4 \leq 20 \text{ см.}$$

При построении эпюры крутящих моментов положительные значения крутящих моментов будем откладывать вверх от базовой линии, а отрицательные значения – вниз (рис. 1.15).

Помимо внешних сосредоточенных крутящих моментов, на стержень (вал) может действовать и распределенная по некоторому закону моментная нагрузка интенсивностью m_x . Между этой внешней моментной нагрузкой m_x и крутящим моментом M_x существует дифференциальная

зависимость. Для ее получения рассмотрим стержень с моментной нагрузкой m_x (рис. 1.16), из которого вырежем элемент длиной dx .

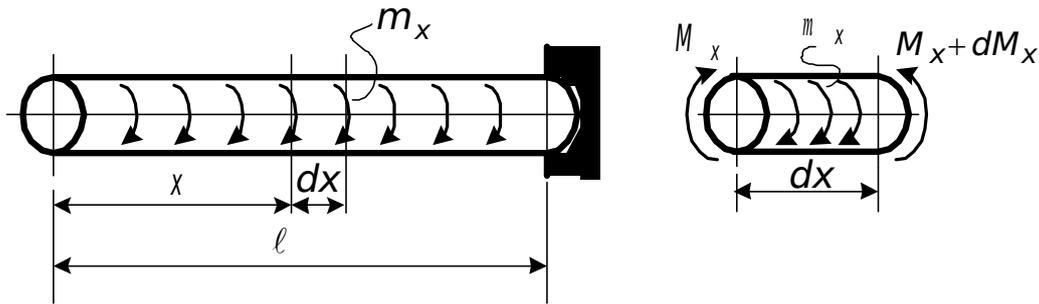


Рис. 1.16. К выводу дифференциальной зависимости между m_x и M_x

Этот элемент будет нагружен уравнивающимися положительными крутящими моментами M_x и $(M_x + dM_x)$, где dM_x – приращение крутящего момента, и внешней распределенной моментной нагрузкой m_x , которую можно считать равномерно распределенной ввиду малости dx .

Составим уравнение равновесия для элемента

$$\sum M_x = 0: \quad M_x + m_x dx - (M_x + dM_x) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dM_x}{dx} = m_x. \quad (1.3)$$

Для проверки правильности построения эпюры M_x (рис. 1.15) используем дифференциальную зависимость (1.3). Вычислим первые производные на участках I, II, III, IV. Они равны нулю. Отсюда следует, что равномерно распределенная нагрузка отсутствует.

1.7.3. Внутренние усилия при изгибе стержней с прямой осью

В инженерной практике часто используются балки с поперечным сечением, имеющим вертикальную ось симметрии. Если внешняя нагрузка и реактивные усилия лежат в одной плоскости, которая совпадает с осью симметрии сечения, то балка будет изгибаться в той же плоскости (ось изгибаемого стержня не выходит из этой плоскости). Такой изгиб называют плоским. Здесь будут рассматриваться случаи, когда при плоском изгибе внешняя нагрузка перпендикулярна продольной оси балки. Поэтому в поперечных сечениях балки возникают только поперечная сила и изгибающий момент, а продольная сила равна нулю.

Поперечная сила в любом сечении балки равна сумме проекций всех сил, расположенных по одну сторону от сечения, на нормаль к оси балки.

Она считается положительной, если она направлена так, что стремится повернуть элемент балки по ходу часовой стрелки (рис. 1.17, а).

Чтобы получить изгибающий момент в сечении балки, необходимо алгебраически просуммировать все изгибающие моменты, расположенные по одну сторону сечения.

Изгибающий момент считается положительным, если он изгибает элемент балки выпуклостью вниз, вызывая растяжение нижних волокон (рис. 1.17, б).

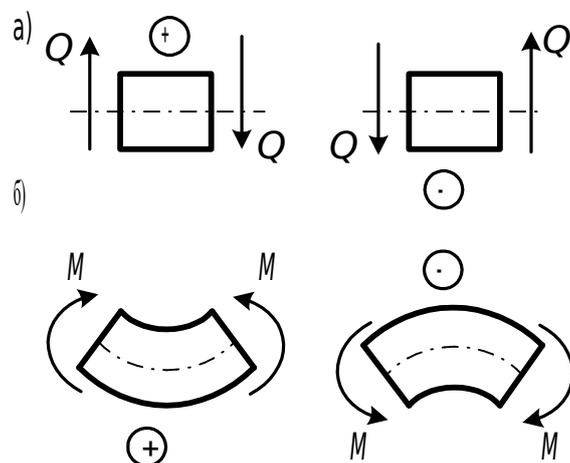


Рис. 1.17. Правило знаков для поперечной силы (а) и изгибающего момента (б)

При построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов положительные значения Q откладываем вверх, а M – вниз от базисной горизонтальной линии. Отрицательное значение – наоборот.

Для простоты запоминания: поперечная сила считается положительной, если слева от сечения она направлена вверх, а справа – вниз. Для отрицательной поперечной силы – обратное правило знаков. Положительные ординаты на эпюре поперечных сил откладываются вверх от базисной линии, отрицательные – вниз.

По аналогии с поперечной силой предлагается следующее правило знаков и для изгибающего момента: изгибающий момент считается положительным, если слева от сечения он направлен по часовой стрелке, а справа – против часовой стрелки, и отрицательным, если слева от сечения направлен против часовой стрелки, а справа – по часовой. Положительные ординаты откладываются вниз от базисной линии, а отрицательные – вверх.

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов поясним на примере (рис. 1.18).

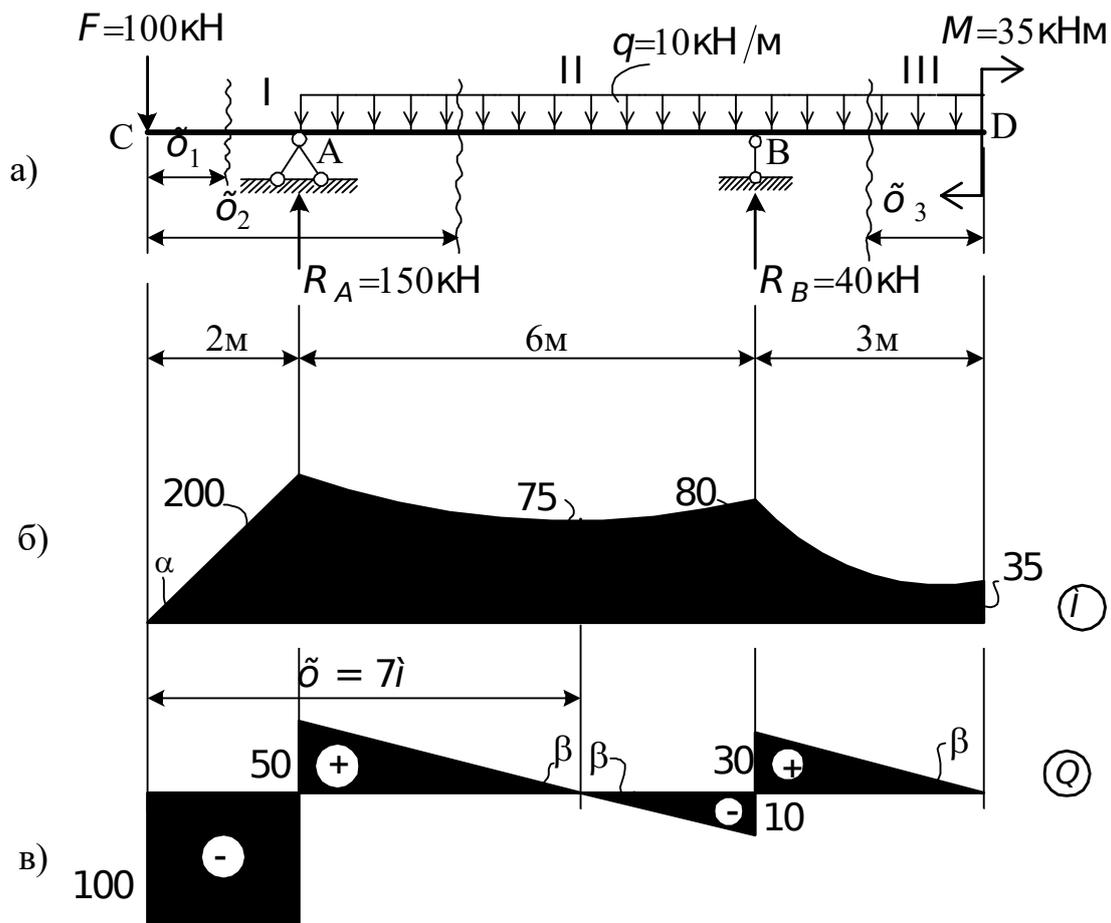


Рис. 1.18. Построение эпюр M и Q в однопролетной балке:
 а – расчетная схема балки; б – эпюра M ; в – эпюра Q

Сначала определим опорные реакции. Предположим, что вертикальные опорные реакции R_A и R_B направлены вверх. Горизонтальная реакция в шарнирно-неподвижной опоре А равна нулю, так как внешняя нагрузка перпендикулярна оси балки. Поэтому на рис. 1.18, а горизонтальная реакция не показана.

Составим уравнения равновесия – уравнения моментов относительно опор (точек А и В) для того, чтобы реакции R_A и R_B определить независимо друг от друга.

$$\sum M_B = 0: R_A \cdot 6 - 100 \cdot 8 - 10 \cdot 9 \cdot 1,5 + 35 = 0;$$

$$\sum M_A = 0: R_B \cdot 6 - 35 - 10 \cdot 9 \cdot 4,5 + 100 \cdot 2 = 0.$$

Отсюда

$$R_A = 150\text{ кН} \quad \text{и} \quad R_B = 40\text{ кН}.$$

Положительные знаки, полученные из решения этих уравнений, у опорных реакций указывают на то, что их действительное направление совпало с предполагаемым. Далее следует обязательно проверить пра-

вильность определения опорных реакций, составив следующее уравнение равновесия:

$$\sum Y = 0: \quad 150 + 40 - 100 - 10 \cdot 9 = 0.$$

Следовательно, реакции найдены верно.

В соответствии с характером нагружения разобьем балку на три участка (рис. 1.18, а). Для составления выражений для M и Q применим метод сечений. Рассечем балку в произвольном сечении на каждом участке и рассмотрим на участках I и II равновесие левой части (ось X направлена вправо, начало координат в точке С), а на участке III – равновесие правой части (ось X направлена влево, начало координат в точке D).

Выражения изгибающих моментов и поперечных сил будут иметь следующий вид:

участок I $0 \leq x_1 \leq 2 \text{ м}$:

$$M_1 = -100 \cdot x_1; \quad Q_1 = -100;$$

участок II $2 \text{ м} \leq x_2 \leq 8 \text{ м}$:

$$M_2 = -100 \cdot x_2 + 150(x_2 - 2) - \frac{10(x_2 - 2)^2}{2};$$

$$Q_2 = -100 + 150 - 10(x_2 - 2);$$

участок III $0 \leq x_3 \leq 3 \text{ м}$:

$$M_3 = -35 - \frac{10x_3^2}{2}; \quad Q_3 = 10 \cdot x_3.$$

Изгибающий момент на участке I изменяется по линейной зависимости. Поэтому для построения эпюры M на этом участке достаточно вычислить значения M в начале и конце участка: при $x_1 = 0$ $M = 0$; при $x_1 = 2 \text{ м}$ $M = -200 \text{ кНм}$. Затем, отложив эти ординаты, соединим их прямой линией. На участке II изгибающий момент изменяется по квадратичной зависимости (зависит от X во второй степени). Для построения эпюры M следует определить значения изгибающего момента в трех сечениях: в начале и в конце участка, а также в сечении, где $Q = 0$, так как здесь момент достигает экстремального значения (максимума или минимума). Последнее утверждение доказывается ниже.

Вычислим значения M в начале и конце участка: при $x_2 = 2 \text{ м}$ $M = -200 \text{ кНм}$; при $x_2 = 8 \text{ м}$ $M = -80 \text{ кНм}$. Определим сечение, где $Q = 0$. Для этого выражение поперечной силы Q_2 приравняем к нулю:

$$Q_2 = -100 + 150 - 10(x_2 - 2) = 0,$$

отсюда $x_2 = 7 \text{ м}$.

Найдем значение M в этом сечении:

$$M_2 = -100 \cdot 7 + 150(7 - 2) - \frac{10(7 - 2)^2}{2} = -75 \text{ кНм}.$$

Отложив вычисленные значения изгибающих моментов, проведем через них квадратную параболу с вершиной в сечении $x_2 = 7$ м (здесь касательная к эпюре M параллельна базисной линии). Заметим, что при отсутствии сечения, в котором $Q = 0$ и $M = M_{\text{экт}}$, определяют значение момента посередине участка.

На третьем участке изгибающий момент изменяется по квадратичной зависимости. Сечение, где $Q = 0$, находится в точке D. Значение изгибающего момента при $x_3 = 0$ $M_3 = -35$ кНм; при $x_3 = 3$ м $M_3 = -80$ кНм. Отложив найденные ординаты, проводим через них квадратную параболу с вершиной в сечении D. Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 1.18, б. Поперечная сила на участке I постоянна и поэтому эпюра Q представляет собой прямую линию, параллельную базисной линии.

На участке II поперечная сила изменяется по линейной зависимости (зависит от X в первой степени). Поэтому для построения эпюры Q на этом участке достаточно вычислить значение Q в начале и конце участка: при $x_2 = 2$ м $Q_2 = 50$ кН; при $x_2 = 8$ м $Q_2 = -10$ кН.

На третьем участке поперечная сила так же, как и на втором участке, меняется по линейной зависимости. Значения Q в начале и конце участка: $x_3 = 0$ $Q_3 = 0$; $x_3 = 3$ м $Q_3 = 30$ кН.

Эпюра поперечных сил показана на рис. 1.18, в.

Рассмотрим еще один пример построения эпюр M и Q для балки, нагруженной неравномерно распределенной нагрузкой (рис. 1.19).

Определим опорные реакции из уравнений равновесия:

$$\sum M_B = 0: R_A \cdot l - \frac{q \ell}{2} \frac{\ell}{3} = 0;$$

$$\sum M_A = 0: R_B \cdot l - \frac{q \ell}{2} \frac{2 \ell}{3} = 0,$$

отсюда $R_A = \frac{q \ell}{6}$, $R_B = \frac{q \ell}{3}$.

При определении опорных реакций распределенная нагрузка была заменена равнодействующей, которая равна площади этой нагрузки (площади треугольника) и приложена в ее центре тяжести.

Проверим правильность определения реакций:

$$\sum Y = 0: \frac{q \ell}{6} + \frac{q \ell}{3} - \frac{q \ell}{2} = 0.$$

Следовательно, опорные реакции найдены верно.

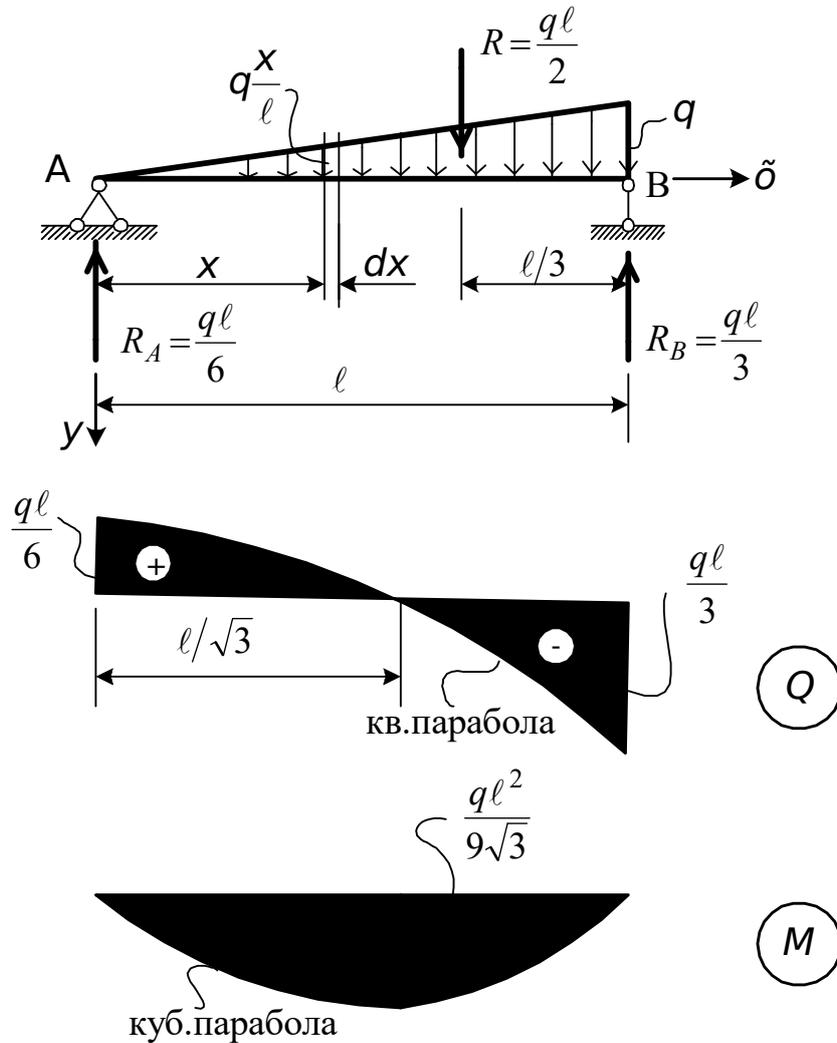


Рис. 1.19. Эпюры M и Q в балке, загруженной неравномерной нагрузкой

Рассматриваемая балка имеет один участок. Составим выражения Q и M , используя метод сечений. Для произвольного сечения x запишем выражения Q и M , рассматривая равновесие левой отсеченной части балки:

$$Q = \frac{qx}{l} \cdot x - \frac{1}{2} \frac{qx^2}{l} = \frac{qx}{l} \left(l - \frac{x^2}{l} \right);$$

$$M = \frac{qx}{l} \cdot \frac{x^2}{3} - \frac{1}{2} \frac{qx^2}{l} \cdot \frac{x}{3} = \frac{qx^3}{6l} \left(l - \frac{x^2}{l} \right).$$

Таким образом, поперечная сила изменяется по квадратичной зависимости, а изгибающий момент – по кубической.

Построим эпюру Q . Для этого вычислим значения:

$$\text{при } x = 0 \quad Q = \frac{qx}{l}; \quad \text{при } x = l \quad Q = -\frac{qx}{l}.$$

Через них проведем квадратичную параболу, обращенную выпуклостью вверх, так как в сечении А ($X = 0$) находится ее вершина. Построим эпюру M . Определим значения M в начале и конце участка: при $x = 0$ $M = 0$, при $x = \ell$ $M = 0$. На этом участке есть характерное сечение, где $Q = 0$ и $M = M_{\text{экт}}$. Найдем его: $Q = \frac{q}{6} \left(\ell - \frac{3x^2}{\ell} \right) = 0$. Отсюда, решая квадратное уравнение, найдем $x = \ell / \sqrt{3}$.

$$\text{Определим момент в этом сечении: } M_{\text{экт}} = \frac{q \ell^2}{9 \sqrt{3}}.$$

По вычисленным значениям изгибающих моментов проводим кубическую параболу с вершиной при $x = \ell / \sqrt{3}$ (касательная к эпюре M в этом сечении параллельна базисной линии).

Между внешней нагрузкой q , поперечной силой Q и изгибающим моментом имеются важные дифференциальные зависимости. Установим их. На участке балки, нагруженной сплошной нагрузкой, проведем два сечения на расстояниях X и $x + dx$ от левой опоры (рис. 1.19). Выделим элемент балки длиной dx . Действие левой отброшенной части балки на элемент заменим поперечной силой Q и изгибающим моментом M , а действие правой отброшенной части – силой $Q + dQ$ и моментом $M + dM$. Здесь dQ и dM – приращение поперечной силы и изгибающего момента на элементе dx . Предположим, что поперечные силы и изгибающие моменты положительны. Кроме этих сил, на элемент действует внешняя распределенная нагрузка q , которую вследствие малости dx можно считать равномерно распределенной. Под действием указанных сил элемент находится в равновесии (рис. 1.20). Составим для элемента два уравнения равновесия:

$$\sum Y = 0: \quad -Q + q dx + (Q + dQ) = 0;$$

$$\sum M_0 = 0: \quad M + Q dx - q dx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0.$$

Из первого уравнения после преобразований получим

$$\frac{dQ}{dx} = -q, \tag{1.4}$$

т. е. первая производная от поперечной силы по абсциссе X равна интенсивности сплошной нагрузки в сечении с обратным знаком.

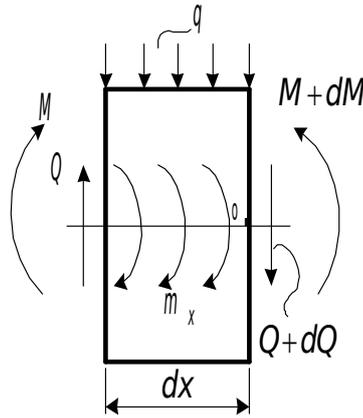


Рис. 1.20. К выводу дифференциальных зависимостей между q , Q и M

Из второго уравнения, пренебрегая членом $q \frac{dx^2}{2}$ как величиной второго порядка малости, найдем

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (1.5)$$

Первая производная от изгибающего момента по абсциссе x равна поперечной силе в том же сечении.

Зависимость (1.4) с учетом (1.5) может быть записана в виде

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q. \quad (1.6)$$

Вторая производная от изгибающего момента по продольной координате X равна интенсивности распределенной нагрузки, взятой с обратным знаком.

Если к балке на участке, где выделяется элемент dx , приложена внешняя распределенная моментная нагрузка m (на рис. 1.20 показана пунктиром), то

$$\frac{dM}{dx} = Q + m. \quad (1.7)$$

На основании полученных дифференциальных зависимостей (1.4), (1.5) сформулируем основные правила, оказывающие помощь при построении эпюр M и Q :

1. На участке, где нет распределенной нагрузки, поперечная сила постоянна, изгибающий момент изменяется по линейной зависимости, причем тангенс угла наклона α эпюры M равен силе Q (рис. 1.18, участок СА). В частном случае может быть $q = 0$ и $Q = 0$, тогда $M = const$.

2. На участке, где имеется равномерно распределенная нагрузка, поперечная сила изменяется по линейной зависимости (тангенс угла наклона

В эюры Q равен q), а изгибающий момент – по квадратичной зависимости, у которой выпуклость обращена в сторону действия распределенной нагрузки q (рис. 1.18, участки АВ и AD).

Если на этом участке поперечная сила в одном из сечений равна нулю ($Q = M' = 0$), то изгибающий момент в этом сечении принимает экстремальное значение – максимум или минимум (рис. 1.18, б, сечение на участке АВ при $x = 7$ м и сечение D), здесь касательная к эюре M горизонтальна.

3. В сечении, где приложена сосредоточенная сила, на эюре Q будет скачок, равный значению этой силы и направленный в ту же сторону (при построении эюры слева направо). На рис. 1.18, в это сечение С, А, В. Эюра M в этом сечении будет иметь перелом, направленный в сторону действия силы F (рис.1.18, б, сечение С, А, В).

4. В сечении, где приложен сосредоточенный изгибающий момент, на эюре M будет скачок, равный значению момента M ; на эюре Q изменений не будет. При этом направление скачка будет вниз (при построении эюры слева направо), если сосредоточенный момент направлен по часовой стрелке, и вверх, если момент направлен против часовой стрелки (рис. 1.18, б, сечение D, эюра на участке BD построена справа налево).

5. На участке, где имеется распределенная нагрузка, изменяющаяся по линейному закону, поперечная сила изменяется по квадратичной зависимости, а изгибающий момент – по кубической (рис. 1.19). Выпуклость эюры Q устанавливается в зависимости от характера нагружения с использованием (1.4). Выпуклость эюры M обращена в сторону действия распределенной нагрузки (см. рис. 1.19).

1.7.4. Внутренние усилия в рамах

Стержневая система, стержни которой (стойки и ригели) во всех или некоторых узлах жестко соединены между собой, называется рамой (см. п. 1.5, рис. 1.7, г). Ось таких систем представляет собой ломаную линию. Если ломаная линия рамы лежит в одной плоскости, то ее называют плоской. Здесь мы будем рассматривать только плоские рамы, нагруженные в плоскости ломаной линии. Тогда возникающие в каком-либо сечении внутренние усилия можно свести к трем величинам: изгибающему моменту M , поперечной силе Q и продольной силе N . Понятие об изгибающем моменте остается прежним. Определение поперечной силы расширяется, а именно: так как у ломаного бруса силы не всегда перпендикулярны оси, то поперечной силой будем называть проекцию всех сил, приложенных к левой (или правой) части бруса, на нормаль к оси бруса в том сечении, для которого определяется поперечная сила.

Продольной силой будем называть проекцию всех сил, приложенных к левой (или правой) части бруса, на касательную к его оси. Понятия «слева», «справа», «низ», «верх» при рассмотрении вертикальных элементов системы зависит от наблюдателя. Тогда правило знаков для изгибающих моментов и поперечных сил остается прежним (см. рис. 1.17). Продольная сила считается положительной, если она вызывает растяжение стержня в рассматриваемом сечении, и отрицательной, если она вызывает сжатие (см. п. 1.7.1).

Рассмотрим пример построения эпюр M , Q , N в раме (рис. 1.21).

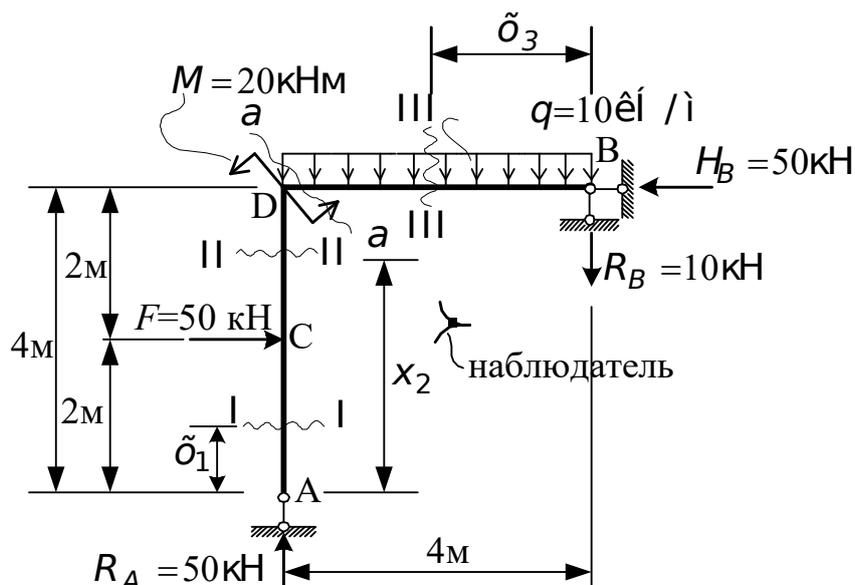


Рис. 1.21. Расчетная схема рамы

Определим опорные реакции из уравнения равновесия:

$$\sum X = 0: \quad H_B - 50 = 0,$$

отсюда $H_B = 50 \text{ кН}$.

$$\sum M_B = 0: \quad R_A \cdot 4 - 50 \cdot 2 - 20 - 10 \cdot 4 \cdot 2 = 0,$$

отсюда $R_A = 50 \text{ кН}$.

$$\sum M_A = 0: \quad R_B \cdot 4 - 50 \cdot 4 + 10 \cdot 4 \cdot 2 - 20 + 50 \cdot 2 = 0,$$

отсюда $R_B = 10 \text{ кН}$.

Все реакции найдены независимо друг от друга. Проверим правильность их определения, составив следующие уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum Y = 0: & \quad R_A - 10 \cdot 4 - 10 = 0, \\ \sum M_D = 0: & \quad 50 \cdot 2 + 20 - 10 \cdot 4 \cdot 2 - 10 \cdot 4 = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, опорные реакции вычислены правильно.

Разделим раму на три участка: AC, CD, DB. На каждом участке в произвольном месте проведем сечение (рис. 1.21) и составим уравнения равновесия для отсеченных частей рамы.

На участке AC ($0 \leq x_1 \leq 2\text{м}$) в сечении рассматриваем равновесие левой части рамы (наблюдатель расположен справа от стойки AD). Получим

$$N_1 = -R_A = -50 \text{кН}, \quad Q_1 = 0, \quad M_1 = 0.$$

На участке CD ($2\text{м} \leq x_2 \leq 4\text{м}$) в сечении II-II, рассматривая равновесие левой части рамы, имеем

$$N_2 = -R_A = -50 \text{кН}, \quad Q_2 = -50 \text{кН}, \quad M_2 = -50(x_2 - 2).$$

На участке DB ($0 \leq x_3 \leq 4\text{м}$) в сечении III-III, рассматривая равновесие правой части рамы, найдем

$$N_3 = -50 \text{кН}, \quad Q_3 = 10 + 10 \cdot x_3; \quad M_3 = -10 \cdot x_3 - 10 \frac{x_3^2}{2}.$$

По этим выражениям построим эпюры продольных и поперечных сил, изгибающих моментов (рис. 1.22, а, б, в).

Построение эпюры следует проверить, используя дифференциальные зависимости между Q , Q и M . На основании зависимости (1.4) на участке BD

$$\frac{dQ}{dx_3} = 10.$$

Следуя зависимости (1.5), на этом же участке

$$\frac{dM}{dx_3} = -(10 + 10 x_3).$$

Несовпадение знаков объясняется тем, что эпюры M и Q на этом участке строились справа налево.

Кроме проверок с использованием дифференциальных зависимостей, необходимо проверить равновесие узлов рамы, т. е. частей рамы, полученных проведением сечений, расположенных на бесконечно малых расстояниях от точки соединения стержней, и отдельных ее частей.

Рассмотрим равновесие узла D (рис. 1.22, г), приложив в сечениях внутренние силы в соответствии с построенными эпюрами N , Q , M . Даже не составляя уравнений равновесия, видим, что узел D находится в равновесии.

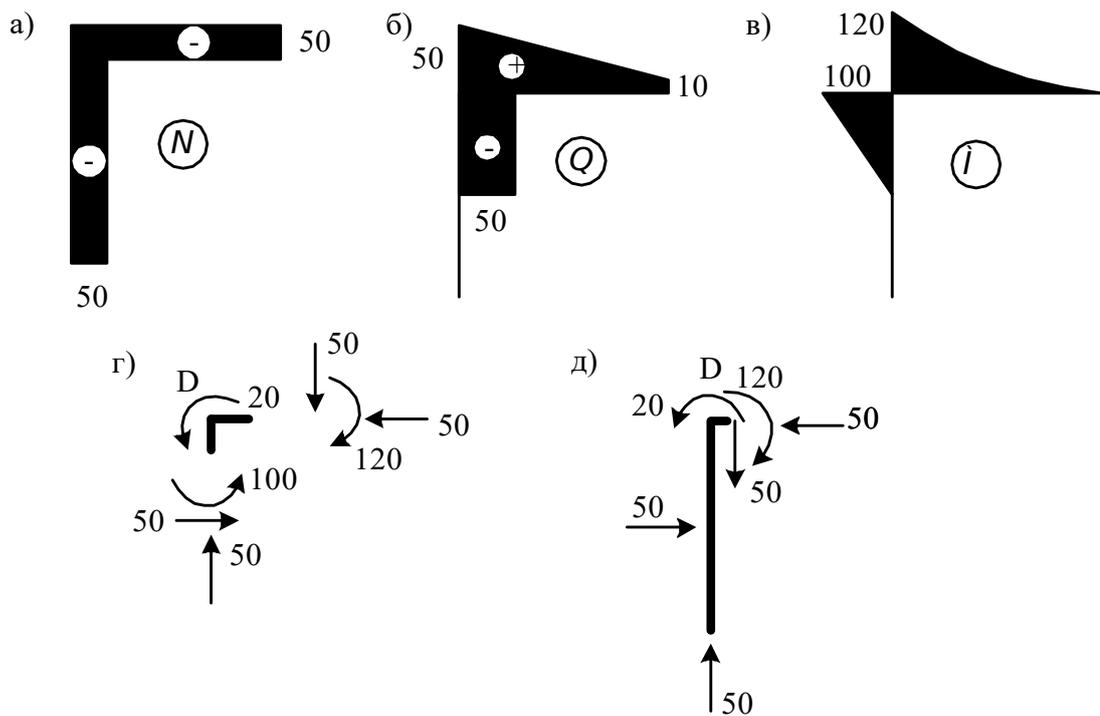


Рис. 1.22. Эпюры внутренних усилий

Проведем сечение *a-a* (рис. 1.21) и рассмотрим равновесие левой части рамы (рис. 1.22, д). К этой части рамы приложим внешние нагрузки и в месте сечения – продольную, поперечную силы, изгибающий момент в соответствии с эпюрами *N*, *Q*, *M*.

Составим уравнения равновесия для отсеченной части:

$$\sum X = 0, \quad 50 - 50 = 0; \quad \sum Y = 0, \quad 50 - 50 = 0;$$

$$\sum M_D = 0, \quad 50 \cdot 2 + 20 - 120 = 0.$$

Следовательно, рассматриваемая часть рамы находится в равновесии.

1.7.5. Внутренние силы в криволинейных стержнях

В поперечных сечениях криволинейного стержня возникают те же внутренние усилия, что и в раме. Правила знаков и правила построения эпюр *N*, *Q*, *M* остаются такими же. Однако, в отличие от рамы, состоящей из системы прямолинейных стержней, в криволинейном стержне продольная сила будет определяться как сумма проекций всех внешних сил, приложенных к оставшейся части, на касательную к оси стержня, а поперечная сила – как сумма проекций тех же сил на нормаль к его оси. Покажем это на следующем примере (рис. 1.23).

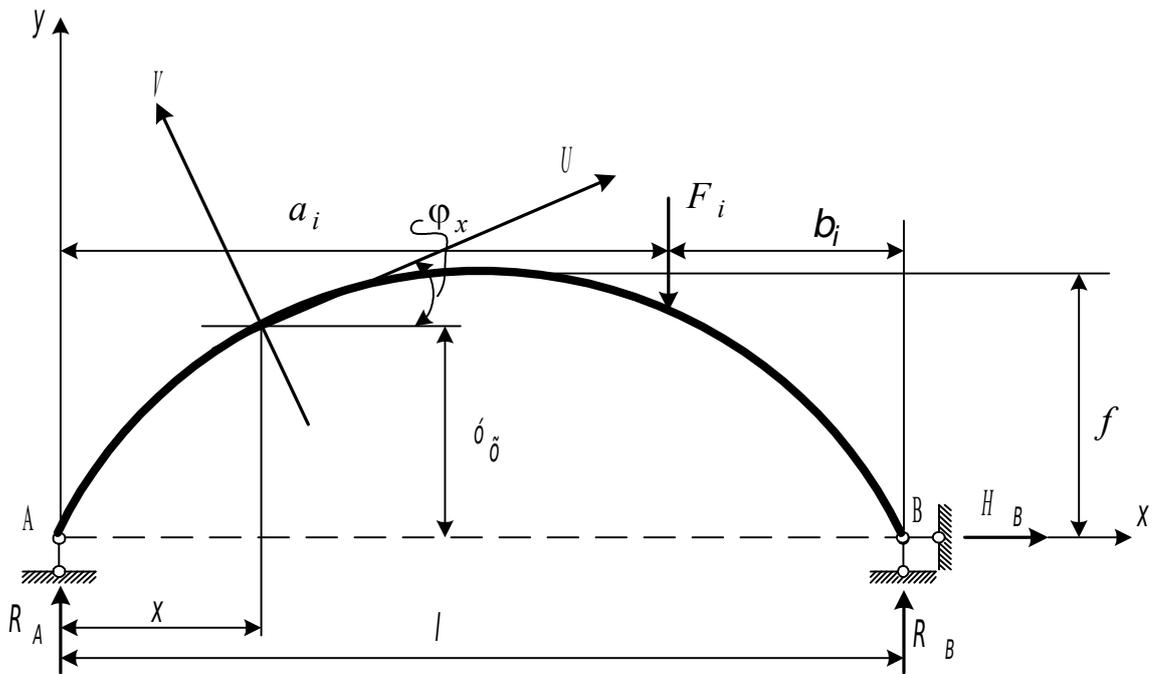


Рис. 1.23. Расчетная схема криволинейного бруса

Ограничимся вначале случаем вертикальной нагрузки. На рис. 1.23 показана сила F_i , приложенная в произвольном сечении бруса на расстоянии a_i от левой опоры и b_i – от правой. Распределенная нагрузка, если такая действует на брус, приводится к равнодействующей

$$F_i = q_i c_i,$$

где c_i – протяженность распределенной нагрузки интенсивностью q_i .

Для определения вертикальных опорных реакций R_A и R_B составим уравнения равновесия вида $\sum M_A = 0$ и $\sum M_B = 0$.

В результате получим

$$R_A = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n F_i b_i; \quad R_B = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n F_i a_i; \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где n – число сосредоточенных сил.

Полученные формулы показывают, что реакции R_A и R_B ничем не отличаются от тех вертикальных реакций, которые получились бы, если бы кривой брус был заменен балкой, опирающейся в точках А и В.

Горизонтальная опорная реакция в точке В равна нулю. Это следует из уравнения

$$\sum F_x = 0.$$

В произвольном сечении x кривого бруса изгибающий момент, поперечная и продольная силы соответственно равны

$$M_x = M_x^0, \quad Q_x = Q_x^0 \cos \varphi_x, \quad N_x = -Q_x^0 \sin \varphi_x,$$

где M_x^0 , Q_x^0 – соответственно, изгибающий момент и поперечная сила от заданной вертикальной нагрузки в сечении X в балке с прямой осью, опирающейся в точках А и В;

$$\cos \varphi_x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_x}}; \quad \sin \varphi_x = \frac{\operatorname{tg} \varphi_x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_x}};$$

$\operatorname{tg} \varphi_x = \frac{dy}{dx}$ – производная функции y , описывающей ось балки.

Если ось кривого бруса очерчена по квадратной параболе:

$$y = \frac{4f}{\ell^2}(\ell - x)x,$$

то
$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi_x = \frac{4f}{\ell^2}(\ell - 2x).$$

Если уравнение оси арки представляет собой окружность:

$$y = \sqrt{(2R - x)x},$$

то
$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi_x = \frac{R - x}{\sqrt{(2R - x)x}}.$$

В криволинейных стержнях, очерченных по дуге окружности, положение произвольного сечения целесообразно определять при помощи полярной системы координат. Тогда выражения внутренних усилий будут представлены как функции угла α (рис. 1.24, а).

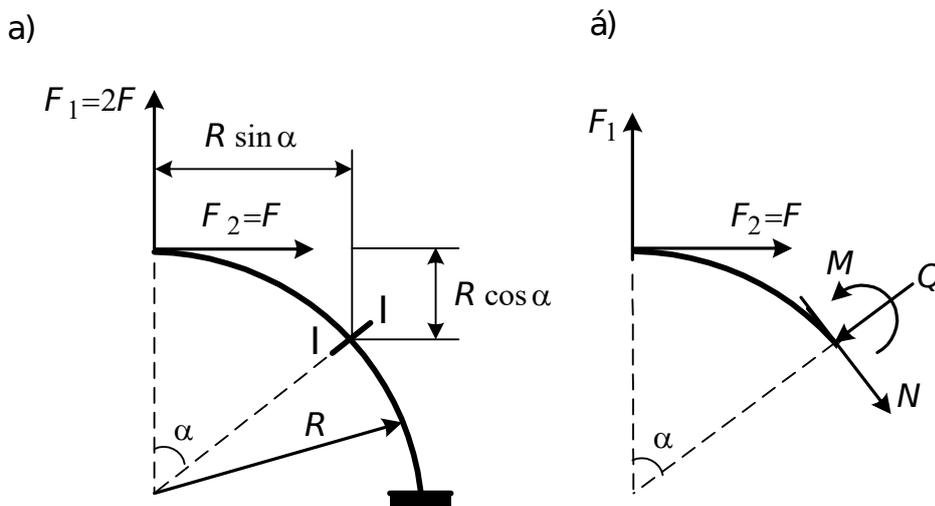


Рис. 1.24. К определению усилий в кривом стержне, очерченном по дуге окружности

Рассечем стержень в сечении I-I под произвольным углом α и отбросим правую его часть (рис. 1.24, б). Уравновесим оставшуюся часть внутренними усилиями N , Q , M положительного направления. Запишем выражения этих внутренних усилий

$$N = F_1 \sin \alpha - F_2 \cos \alpha,$$

$$Q = F_1 \cos \alpha + F_2 \sin \alpha,$$

$$M = F_1 R \sin \alpha + F_2 (R - R \cos \alpha).$$

Вычислим значения N , Q , M при различных углах α :

при $\alpha = 0$ $N = -F$; $Q = 2F$; $M = 0$,

при $\alpha = 45^\circ$ $N = 0,7F$, $Q = 2,1F$, $M = 1,7FR$,

при $\alpha = 90^\circ$ $N = 2F$, $Q = F$, $M = 3FR$.

Откладывая полученные значения внутренних усилий по нормали к оси (т. е. по радиусу), построим эпюры N , Q и M (рис. 1.25).

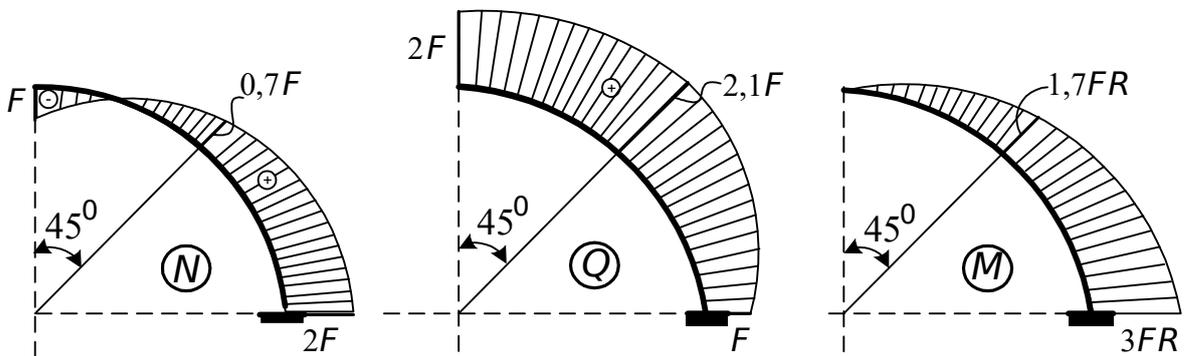


Рис. 1.25. Эпюры N , Q , M в кривом стержне, очерченном по дуге окружности

Между внешней нагрузкой, продольной, поперечной силой и изгибающим моментом в стержне кругового очертания имеются дифференциальные зависимости. Для доказательства этого рассмотрим равновесие элемента АВ, выделенного из кривого стержня двумя бесконечно близкими сечениями под углами α и $\alpha + d\alpha$ (рис. 1.26).

В сечениях, ограничивающих элемент, действуют продольные силы N и $N + dN$, поперечные силы Q и $Q + dQ$, изгибающие моменты M и $M + dM$, заменяющие действие отброшенных частей стержня. Элемент нагружен равномерно распределенной нагрузкой. При выводе будем пользоваться сформулированным ранее правилом знаков для N , Q и M .

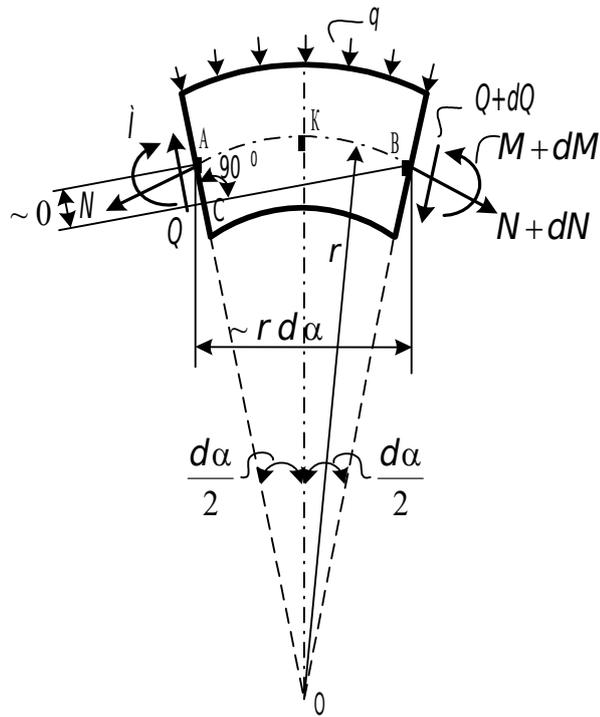


Рис. 1.26. К определению дифференциальных зависимостей между N , Q , M в кривом стержне

Составим уравнение равновесия

$$\sum N_{AB} = 0:$$

$$Q \sin \frac{d\alpha}{2} + N \cos \frac{d\alpha}{2} + (Q + dQ) \sin \frac{d\alpha}{2} - (N + dN) \cos \frac{d\alpha}{2} = 0.$$

Учитывая, что $\sin \frac{d\alpha}{2} = \frac{d\alpha}{2}$ и $\cos \frac{d\alpha}{2} = 1$, получим

$$\frac{dN}{d\alpha} = Q, \quad (1.8)$$

$$\sum N_{OK} = 0:$$

$$Q \cos \frac{d\alpha}{2} - N \sin \frac{d\alpha}{2} - (Q + dQ) \cos \frac{d\alpha}{2} - (N + dN) \sin \frac{d\alpha}{2} - qr d\alpha = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dQ}{d\alpha} = -N - qr. \quad (1.9)$$

Из уравнения равновесия

$$\sum M_B = 0, \quad Q r d\alpha + M - (M + dM) - qr d\alpha \frac{r d\alpha}{2} = 0$$

после простейших преобразований, отбрасывая величины второго порядка малости, найдем

$$\frac{dM}{d\alpha} = Q r. \quad (1.10)$$

Зависимости (1.8), (1.9), (1.10) позволяют проверять правильность составления выражений для N , Q и M при изгибе кругового криволинейного стержня. Так, нетрудно убедиться, что выражения для N , Q и M в примере (рис. 1.24) составлены правильно:

$$\frac{dN}{d\alpha} = F_1 \cos \alpha + F_2 \sin \alpha = Q,$$

$$\frac{dQ}{d\alpha} = -F_1 \sin \alpha + F_2 \cos \alpha = -N \text{ (распределенная нагрузка отсутствует),}$$

$$\frac{dM}{d\alpha} = F_1 R \cos \alpha + F_2 R \sin \alpha = QR.$$

Эпюры N , Q , M для криволинейных стержней обладают следующими свойствами, вытекающими из формул (1.8), (1.9), (1.10):

1) в сечениях, где $Q=0$, на эпюрах M и N экстремумы, т. е. касательные к эпюрам параллельны касательным к оси стержня в этих сечениях;

2) в сечениях, где $N=0$, на эпюре Q экстремумы.

1.8. Напряжения и деформации

1.8.1. Компоненты напряжений

В пункте 1.7 было показано, что внутренние усилия действуют во всех точках сечения (рис. 1.10) и представляют собой, в общем случае, неравномерно распределенную нагрузку, характеризующуюся в каждой точке числовым значением и направлением вектора интенсивности.

Рассмотрим бесконечно малый элемент площади сечения dA (рис. 1.27).

В силу малости элемента можно считать, что внутренние усилия, приложенные к его различным точкам, одинаковы по величине и направлению. Равнодействующая их $d\vec{R}$ будет проходить через центр тяжести элемента dA .

Проекциями $d\vec{R}$ на оси x , y , z будут элементарная продольная сила и dN элементарные поперечные силы dQ_y и dQ_z .

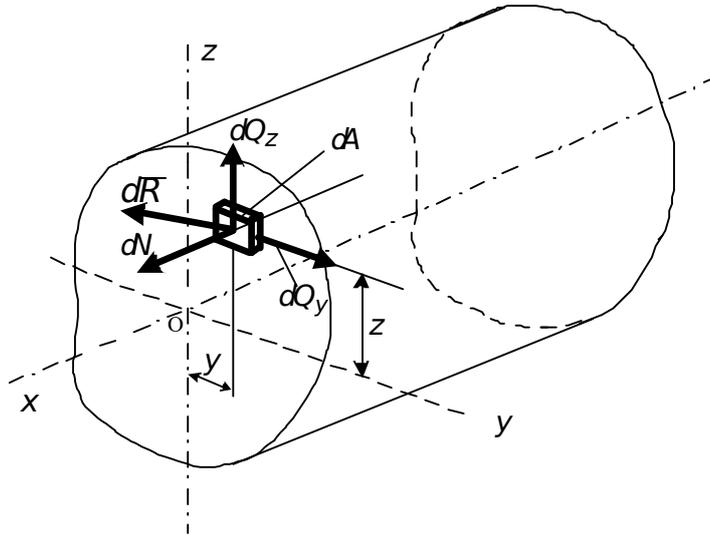


Рис. 1.27. Нормальные и касательные напряжения в точке

Разделив величины dN , dQ_y и dQ_z на площадь dA , получим величины продольных и поперечных сил, приходящихся на единицу площади:

$$\sigma = \frac{dN}{dA}, \quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dA}, \quad \tau_z = \frac{dQ_z}{dA}. \quad (1.11)$$

Эти величины называют напряжениями в точке X, Y, Z сечения стержня, причем σ – нормальное напряжение, τ – касательное. Напряжения измеряются в Н/м^2 , Н/см^2 , кН/м^2 , кН/см^2 .

Таким образом, напряжением называется внутренняя сила, отнесенная к единице площади в данной точке рассматриваемого сечения. Установим общие зависимости между σ и τ , с одной стороны, и N , Q_y , Q_z , M_y , M_z , M_x – с другой. Исходя из определения для усилий и моментов (п. 1.7, рис. 1.11) и учитывая формулы (1.11), найдем

$$N = \int_A dN = \int_A \sigma dA, \quad (1.12)$$

$$Q_y = \int_A dQ_y = \int_A \tau_y dA, \quad (1.13)$$

$$Q_z = \int_A dQ_z = \int_A \tau_z dA, \quad (1.14)$$

$$M_y = \int_A z dN = \int_A \sigma z dA, \quad (1.15)$$

$$M_z = \int_A y dN = \int_A \sigma y dA, \quad (1.16)$$

$$M_x = \int_A (y dQ_z - z dQ_y) = \int_A (y \tau_z - z \tau_y) dA. \quad (1.17)$$

Полученные уравнения будем называть статическими уравнениями или интегральными уравнениями равновесия.

Если взять очень малый элемент объема в виде куба вблизи точки O_1 (рис. 1.27) со сторонами, параллельными осям координат, то обозначения для составляющих напряжения, действующих по граням этого элемента и положительные направления их будем принимать такими, как показано на рис. 1.28. Так как размеры выделенного элемента бесконечно малы, то эти напряжения отличаются друг от друга на бесконечно малые, поэтому ими можно пренебречь для рассматриваемой здесь задачи.

Нормальные напряжения обозначены буквой σ с индексом, соответствующим обозначению оси: σ_x , σ_y , σ_z . Нормальное напряжение положительно, когда оно вызывает растяжение, и отрицательно, когда оно вызывает сжатие.

Касательные напряжения обозначены буквой τ с двумя индексами. Первый индекс обозначает направление нормали к рассматриваемой площадке, второй индекс – направление составляющей напряжений: τ_{yx} , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{zx} , τ_{zy} , τ_{yz} .

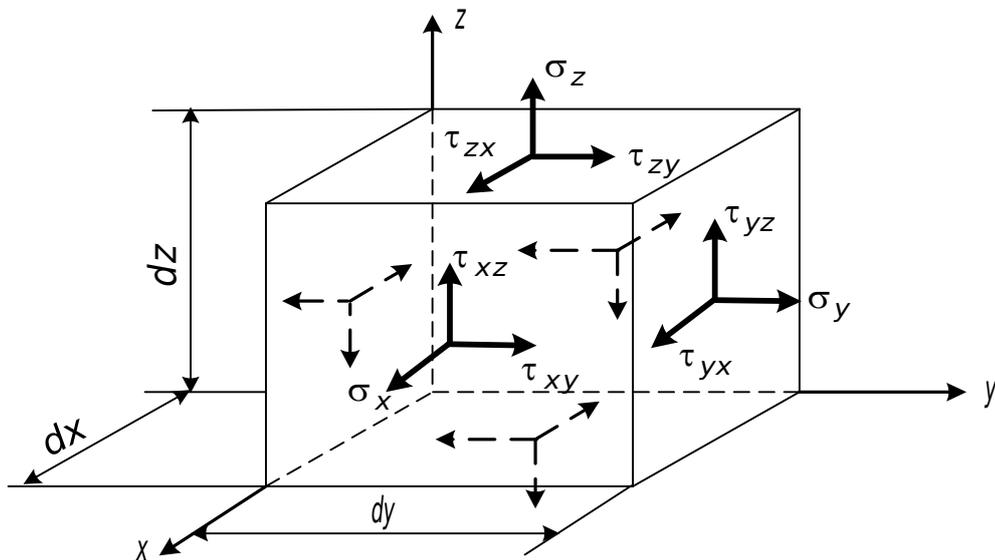


Рис. 1.28. Нормальные и касательные напряжения в элементе объема

За положительные направления составляющих касательного напряжения, действующего на любой грани элементарного кубика, принимают направления осей координат, если растягивающее напряжение по той же грани имеет направление, совпадающее с положительным направлением соответствующей оси. Если растягивающее напряжение имеет противоположное положительной оси направление, то за положительное направление составляющих касательного напряжения следует взять обратное направление оси.

Возьмем момент сил, действующих на элемент относительно оси X (см. в п. 1.7 основные правила составления уравнений равновесия). В результате получим

$$\tau_{zy} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \tau_{yz} \cdot dx \cdot dy \cdot dz,$$

отсюда

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}.$$

Аналогично, взяв момент сил относительно осей Z и Y , найдем

$$\tau_{xy} = \tau_{yx},$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Равенства

$$\tau_{zy} = \tau_{yz},$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tag{1.18}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

носят название закона парности (взаимности) касательных напряжений и формулируются так: по двум взаимно перпендикулярным площадкам составляющие касательного напряжения, перпендикулярные линии пересечения этих площадок, равны между собой.

Напряжения, действующие на элемент объема (рис. 1.28), образуют так называемый тензор напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

Здесь первый столбец состоит из компонент напряжений, действующих на площадках, нормальных к оси X , второй – к оси Y , третий – к оси Z . Если задан тензор напряжений, то напряженное состояние в точке вполне определено.

1.8.2. Составляющие деформации

При исследовании деформаций упругого тела мы будем исходить из допущения, что налицо имеется достаточное число связей для того, чтобы предотвратить движение тела как свободного твердого тела. Так что никакие перемещения частиц тела невозможны без деформации его.

Мы будем рассматривать (см. п. 1.6) только малые деформации, которые встречаются в инженерных сооружениях.

Малые перемещения частиц деформированного тела обычно раскладываются на составляющие U , V , W , параллельные соответствующим осям координат (рис. 1.29). Предположим, что эти составляющие непрерывно изменяются по объему тела.

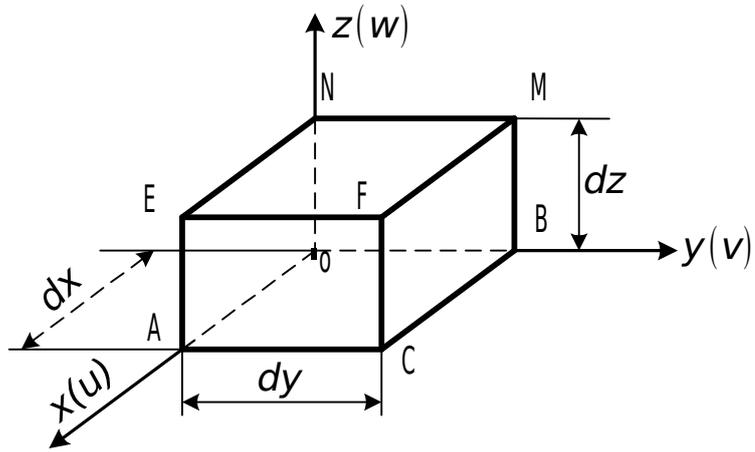


Рис. 1.29. К выводу зависимостей между линейными деформациями и перемещениями

Рассмотрим бесконечно малый элемент dx, dy, dz упругого тела (рис. 1.29). Если тело подвергается деформации и величины u, v, w являются составляющими перемещения точки O , то перемещение в направлении оси X бесконечно близкой точки A , лежащей на оси X , равно $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$, так как с приращением координаты X функция u получает приращение $\frac{\partial u}{\partial x} dx$. Поэтому приращение длины элемента OA вследствие деформации равно $\frac{\partial u}{\partial x} dx$.

Следовательно, относительное удлинение в направлении оси X равно

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.20)$$

Аналогично,

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (1.21)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (1.22)$$

Помимо линейных деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, тело испытывает и угловые деформации. Рассмотрим искажение угла между элементарными отрезками OA и OB (рис. 1.30). Если u и v являются перемещениями точки O в направлении осей X и Y , то перемещения точки A в направлении оси Y и точки B в направлении оси X будут соответственно $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$ и $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$.

Вследствие этих перемещений новое направление $O'A'$ будет составлять со своим первоначальным направлением указанный на чертеже (рис. 1.30) угол $\frac{\partial v}{\partial x}$. Таким же образом направление $O'B'$ будет составлять с направлением OB малый угол $\frac{\partial u}{\partial y}$. Отсюда следует, что первоначально прямой угол AOB между элементами OA и OB уменьшится:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.23)$$

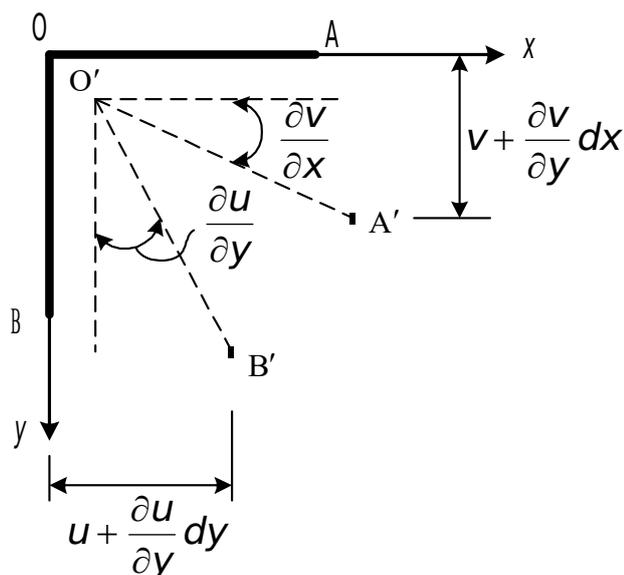


Рис. 1.30. К выводу зависимостей между угловыми деформациями и перемещениями

Это и есть деформация сдвига между плоскостями xz и yz .

Деформации сдвига между плоскостями xu и xz , yx и yz будут соответственно

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (1.24)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.25)$$

Как и линейные деформации (1.20) – (1.22), углы сдвига весьма малы и имеют порядок $\gamma \approx 10^{-4} - 10^{-3}$. Полученные относительные деформации в точке сведем в таблицу

$$\mathcal{T}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0,5 \gamma_{xy} & 0,5 \gamma_{xz} \\ 0,5 \gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0,5 \gamma_{yz} \\ 0,5 \gamma_{zx} & 0,5 \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

в которой углы сдвига в целях аналогии с тензором напряжений (1.19) поделены пополам. Величины (1.26) количественно определяют деформации материала в окрестностях точки и составляют тензор деформаций.

1.8.3. Зависимости между составляющими напряжения и составляющими деформации

Экспериментально установлено, что для большинства материалов при малых деформациях в упругой стадии связь между деформациями и

напряжениями может быть принята линейной. Эта связь была впервые указана Гуком* для растяжения и сжатия и носит название закона Гука.

Представим элементарный прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными осям координат, подвергающийся действию нормального напряжения σ_x , равномерно распределенного по двум противоположным граням (рис. 1.31).

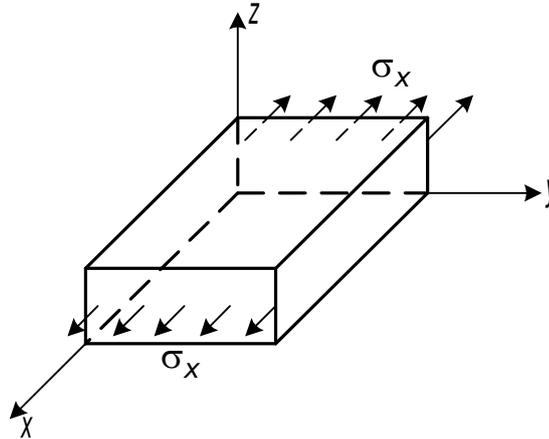


Рис. 1.31. К выводу обобщенного закона Гука: направление X

Опыты показывают, что в случае изотропного материала эти нормальные напряжения не вызывают никакого изменения углов элемента. Увеличение размеров элемента в направлении оси X на $\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}$ сопровождается поперечным сужением $\varepsilon''_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$ и $\varepsilon''_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$.

Воспользуемся принципом независимости действия сил (см. п. 1.6.6) и рассмотрим линейные деформации, обусловленные нормальными напряжениями σ_y и σ_z (рис. 1.32).

□ Роберт Гук (1635-1705) – английский естествоиспытатель, разносторонний ученый и изобретатель. Сформулированный им закон звучал так: «Каково удлинение, такова сила» («Ut tensio sic vis»). В современном виде формула закона Гука имеет вид $\sigma = E \varepsilon$.

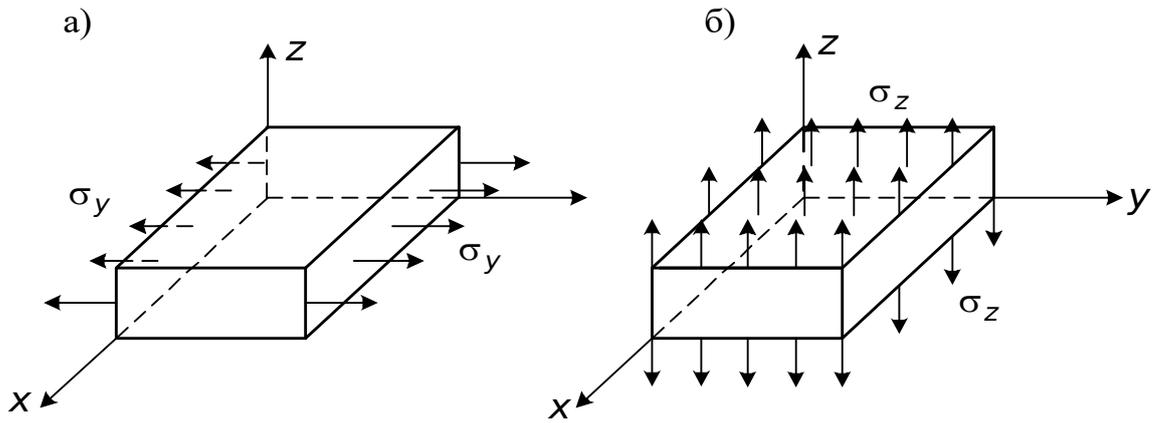


Рис. 1.32. К выводу обобщенного закона Гука: направления y, z

В результате действия нормальных напряжений σ_y (рис. 1.32,а) элемент удлиняется в направлении оси y на величину $\varepsilon'_y = \frac{\sigma_y}{E}$ и укорачивается в направлении осей x и z на $\varepsilon''_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$, $\varepsilon'''_z = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$.

В результате действия нормальных напряжений σ_z (рис. 1.32, б) происходит удлинение в направлении оси z $\varepsilon'_z = \frac{\sigma_z}{E}$ и укорочение в направлении осей x и y : $\varepsilon''_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$, $\varepsilon'''_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$.

Складывая деформации, вызванные напряжениями σ_x , σ_y , σ_z , окончательно получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] ; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] ; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] . \end{aligned} \quad (1.27)$$

Полученные выражения (1.27) являются аналитическими зависимостями обобщенного закона Гука для изотропного тела. Из этих формул видно, что зависимость между напряжениями и деформациями полностью определяется двумя физическими величинами, характеризующими свойства материалов – модулем упругости E и коэффициентом Пуассона* ν , которые определяются экспериментально.

Теперь рассмотрим действие касательных напряжений (рис. 1.33).

* Симеон Дени Пуассон (1781-1840) – выдающийся французский механик, физик и математик.

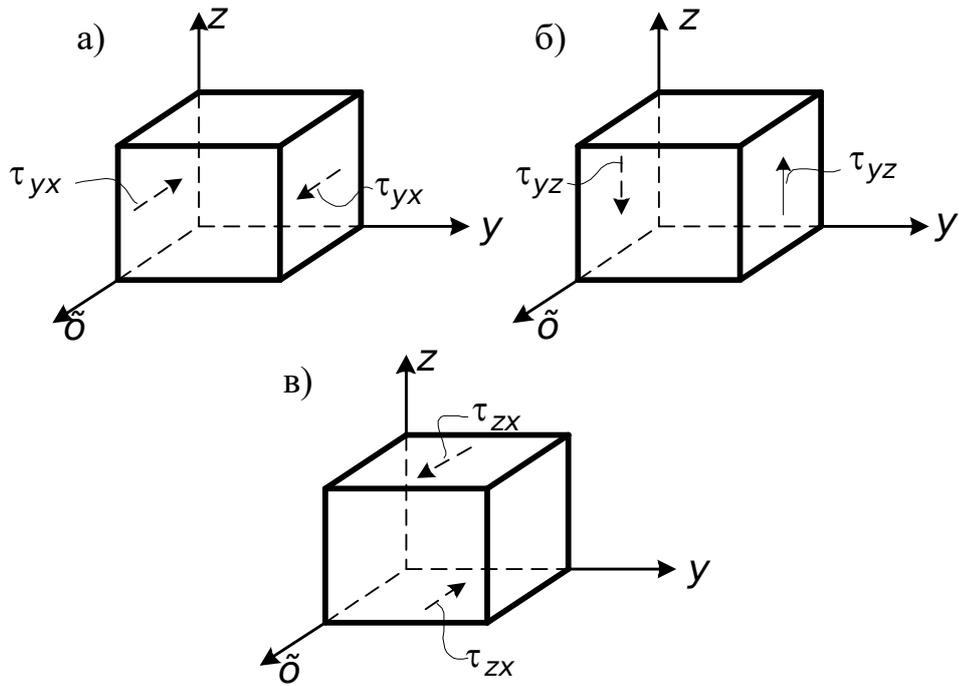


Рис. 1.33. К выводу зависимостей между касательными напряжениями и сдвигами

Опытами установлено, что изменение угла между любыми двумя координатными осями зависит от составляющих напряжения, параллельным этим осям. Поэтому

$$\begin{aligned} \gamma_{yx} &= \frac{\tau_{yx}}{G}, \\ \gamma_{zy} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

где G – модуль сдвига,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (1.29)$$

Покажем, что это действительно так. Рассмотрим деформацию прямоугольного параллелепипеда, когда $\sigma_y = -\sigma_z$, $\sigma_x = 0$ (рис. 1.34, а).

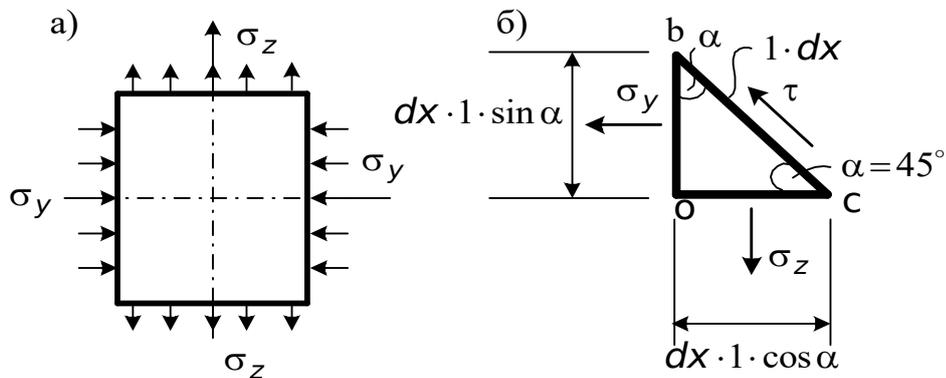


Рис. 1.34. К выводу зависимости между E и G

Тогда

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = -\frac{\sigma_z(1+\nu)}{E};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{\sigma_z(1+\nu)}{E}.$$

Выделим из прямоугольного параллелепипеда элемент obc и рассмотрим его равновесие (рис. 1.34, б):

$$\sum F_{bc} = 0:$$

$$\tau \cdot dx + \sigma_y \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot dx - \sigma_z \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot dx = 0;$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_y) = \sigma_z.$$

В процессе деформации угол α (рис. 1.34, б) будет изменяться на малую величину $\frac{\gamma}{2}$:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 + \varepsilon_y}{1 + \varepsilon_z}.$$

Для того чтобы было справедливо полученное равенство, необходимо, чтобы модуль сдвига определялся согласно (1.29).

Зависимость (1.29) подтверждается экспериментально. Полученная формула (1.29) показывает, что три постоянные E , G и ν , характеризующие упругие свойства изотропного материала, связаны между собой. Найдя из опыта две из них, можно третью рассчитать согласно (1.29).

Раздел 2

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ

В формулы, связывающие напряжения в сечениях стержней с внешними силами, как это будет установлено в дальнейшем, помимо площади поперечного сечения, входят и некоторые другие характеристики сечений, зависящие от их формы и размеров. Этот раздел курса и посвящен геометрическим характеристикам плоских сечений.

2.1. Статический момент площади

Пусть даны сечение бруса площадью A и ось $Z-Z$, лежащая в плоскости этого сечения (рис. 2.1).

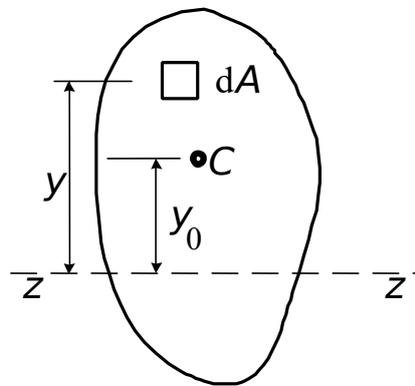


Рис. 2.1. К выводу формулы для определения статического момента площади сечения

Выделим элемент площади dA , расположенный на расстоянии y от оси Z . Статическим моментом элементарной площадки dA относительно оси Z называется произведение этой площадки на расстояние y

$$dS_z = y \cdot dA.$$

Статический момент всей площади относительно оси Z равен сумме статических моментов элементарных площадок. Так как элементарных площадок бесконечно много, то сумму заменяем интегралом, который возьмем по всей площади сечения:

$$S_z = \int_A y \cdot dA. \quad (2.1)$$

На основании известной из теоретической механики теоремы о моменте равнодействующей, сумма статических моментов элементарных площадок относительно какой-нибудь оси равна моменту всей площади относительно этой оси, т. е. произведению площади фигуры на расстояние от центра тяжести до оси. Если для площади A известно y_0 – расстояние центра тяжести C до оси $Z-Z$, то

$$S_z = \int_A y \cdot dA = y_0 \cdot A. \quad (2.2)$$

Статический момент может быть положительным, отрицательным или нулевым.

Из равенства (2.2) видно, что статический момент всей площади сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения, равен нулю. Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются центральными. В случае сложного поперечного сечения, если площадь его можно разбить на отдельные простые фигуры, статический момент всей площади можно получить как сумму статических моментов этих простых фигур.

2.2. Центр тяжести сечения

Если сечение имеет ось симметрии, то центр тяжести находится на этой оси. Если сечение имеет две оси симметрии, то центр тяжести находится в точке пересечения этих осей.

Для определения положения центра тяжести фигуры, не имеющей осей симметрии, нужно найти его координаты относительно произвольно взятых осей и затем воспользоваться формулой (2.2). Например, чтобы найти центр тяжести C фигуры, изображенной на рис. 2.2, возьмем две оси Z и Y , совпадающие с двумя сторонами фигуры, и будем искать координаты z_0 и y_0 точки C относительно этих осей.

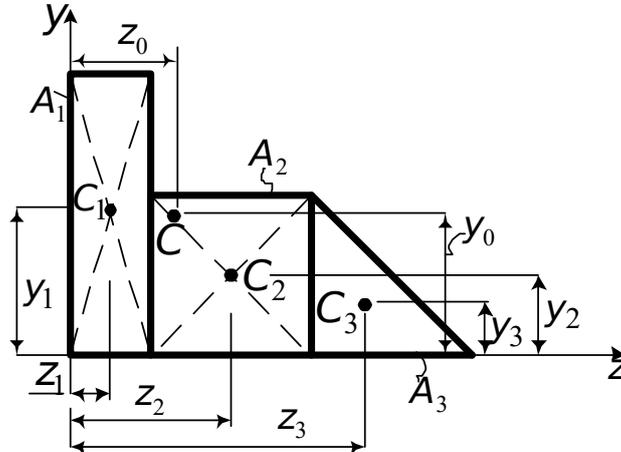


Рис. 2.2. К выводу формул для определения координат центра тяжести

Для этого разобьем сечение на простые фигуры, для которых положение центров тяжести C_1, C_2, C_3 известно. Составим статический момент площади относительно оси Y . Это можно сделать двумя способами:

$$S_y = A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3$$

или

$$S_y = A \cdot z_0,$$

где

$$A = A_1 + A_2 + A_3.$$

Приравняем эти выражения друг другу:

$$Az_0 = A_1z_1 + A_2z_2 + A_3z_3,$$

откуда найдем

$$z_0 = \frac{S_y}{A}. \quad (2.3)$$

Аналогично,

$$y_0 = \frac{S_z}{A}. \quad (2.4)$$

Таким образом, чтобы найти положение центра тяжести поперечного сечения относительно заданных осей, нужно составить статические моменты площади относительно этих осей и поделить их на площадь фигуры.

2.3. Моменты инерции сечений

Возьмем произвольное сечение площадью A , отнесенное к координатным осям Z и Y (рис. 2.3).

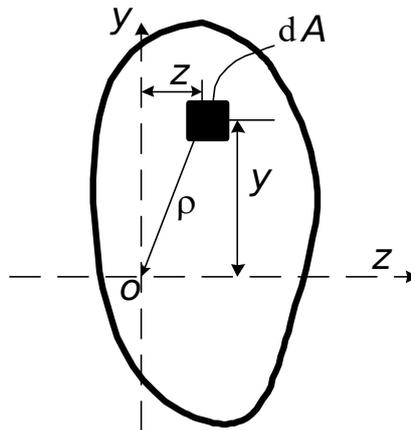


Рис. 2.3. К выводу формул для определения моментов инерции

Выделим элемент площади dA , расположенный на расстоянии Y от оси Z и расстоянии Z от оси Y . Составим произведения $dA \cdot y^2$ и $dA \cdot z^2$. Произведение $dA \cdot y^2$ называется моментом инерции элементарной площадки dA относительно оси Z . Аналогично, $dA \cdot z^2$ – момент инерции площадки dA относительно оси Y .

Момент инерции всей площади равен сумме моментов инерции элементарных площадок:

$$J_z = \int_A y^2 dA; \quad (2.5)$$

$$J_y = \int_A z^2 dA. \quad (2.6)$$

Итак, осевым моментом инерции сечения относительно какой-нибудь оси называется интеграл, взятый по всей площади сечения от

произведения элементарной площадки на квадрат расстояния ее до этой оси.

Произведение площадки dA на ее координаты Z и Y называется центробежным моментом инерции элементарной площадки относительно осей Z, Y :

$$J_{zy} = \int_A zy dA. \quad (2.7)$$

Произведение площадки dA на квадрат ее расстояния до точки O (полюса) называется полярным моментом инерции элементарной площадки.

Полярный момент инерции всего сечения равен

$$J_{\rho} = \int_A \rho^2 dA. \quad (2.8)$$

Полярный момент инерции всегда равен сумме осевых моментов инерции относительно любой пары взаимно перпендикулярных осей, проходящих через полюс. Докажем это:

$$J_{\rho} = \int_A \rho^2 dA = \int_A (z^2 + y^2) dA = \int_A z^2 dA + \int_A y^2 dA = J_z + J_y. \quad (2.9)$$

Осевые (2.5), (2.6) и полярный (2.8) моменты инерции для любого элемента сечения являются величинами положительными независимо от положения элемента относительно осей или полюса.

Центробежный момент инерции (2.7) может быть величиной положительной, отрицательной или равной нулю.

2.3.1. Зависимость между моментами инерции при параллельном переносе осей

Пусть заданы моменты инерции J_z, J_y сечения относительно осей Z и Y , проходящих через центр тяжести сечения. Найдем моменты инерции относительно осей Z_1 и Y_1 , параллельных осям Z и Y и проходящих от них на расстояниях a, b (рис. 2.4).

Определим момент инерции площади фигуры относительно оси Z_1 :

$$J_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA.$$

Первый член в правой части полученного уравнения представляет собой осевой момент инерции J_z (2.5).

Интеграл второго члена – статический момент площади (2.2) относительно оси Z . Он равен нулю, так как по условию задачи ось Z проходит через центр тяжести. Интеграл третьего члена равен площади сечения.

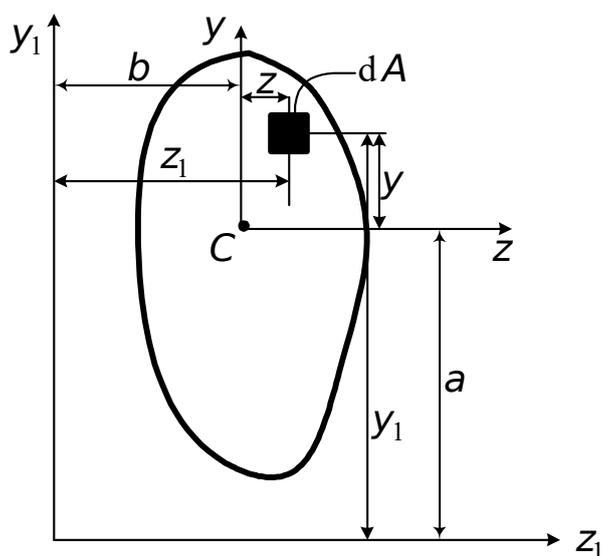


Рис. 2.4. К выводу зависимостей между моментами инерции относительно параллельных осей

Таким образом,

$$J_{z_1} = J_z + a^2 A \quad (2.10)$$

момент инерции сечения относительно произвольной оси, лежащей в плоскости этого сечения, равен моменту инерции сечения относительно центральной оси, параллельной заданной, плюс произведение площади сечения на квадрат расстояния между этими осями.

Аналогично,

$$J_{y_1} = J_y + b^2 A \quad (2.11)$$

Формула перехода для центробежного момента инерции от осей, проходящих через центр тяжести сечения к другим осям, параллельным им (рис. 2.4), имеет вид

$$J_{z_1 y_1} = J_{zy} + abA \quad (2.12)$$

Отметим, что при вычислении моментов инерции по формуле (2.12) a и b следует брать с учетом знака в системе координат z_1, y_1 .

Из формул (2.10) – (2.12) видно, что моменты инерции принимают минимальные значения при $a = 0$ или $b = 0$, т. е. когда оси проходят через центр тяжести. Следовательно, из семейства параллельных осей минимальный момент инерции будет относительно центральной оси.

Формула (2.12) упрощается, если одна из центральных осей сечения является осью симметрии. Тогда $J_{zy} = 0$ и центробежный момент инерции относительно осей, параллельных центральному, равен

$$J_{z_1 y_1} = abA \quad (2.13)$$

Складывая формулы (2.10), (2.11) и учитывая, что $J_{\rho_1} = J_{z_1} + J_{y_1}$ (см. формулу (2.9)), получаем зависимость для полярного момента

инерции при параллельном переносе осей из центра тяжести (полюс O) в произвольную точку (полюс O_1):

$$J_{\rho_1} = J_{\rho} + (a^2 + b^2)A. \quad (2.14)$$

2.3.2. Изменение осевых и центробежного моментов инерции при повороте координатных осей

Для сечения площадью A возьмем произвольные оси координат Z и Y . Положим, что относительно этих осей вычислены моменты инерции J_z, J_y, J_{zy} . Повернем оси координат против хода часовой стрелки на некоторый угол α (положительное значение угла), как показано на рис. 2.5.

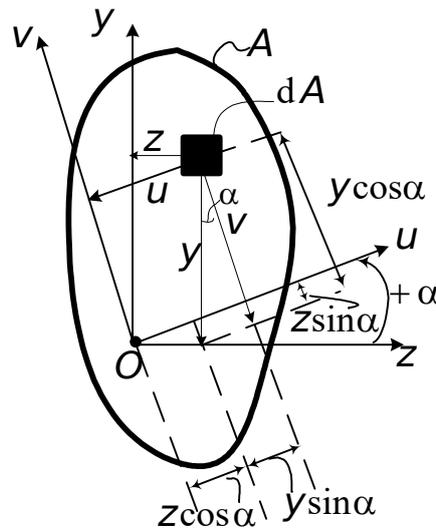


Рис. 2.5. К выводу зависимостей между моментами инерции при повороте осей

Выделим элементарную площадку dA и выразим ее новые координаты u, v через старые:

$$v = y \cos \alpha - z \sin \alpha ;$$

$$u = z \cos \alpha + y \sin \alpha .$$

Найдем моменты инерции относительно новых осей:

$$\begin{aligned} J_u &= \int_A v^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 dA = \\ &= \int_A y^2 \cos^2 \alpha dA - 2 \int_A zy \cos \alpha \cdot \sin \alpha dA + \int_A z^2 \sin^2 \alpha dA = \\ &= J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - 2J_{zy} \sin \alpha \cdot \cos \alpha . \end{aligned}$$

Учитывая, что $2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$, получим

$$J_u = J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{zy} \sin 2\alpha . \quad (2.15)$$

Аналогично найдем момент инерции относительно оси V :

$$J_v = \int_A u^2 dA = \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA =$$

$$= J_z \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{zy} \sin 2\alpha. \quad (2.16)$$

Складывая почленно выражения (2.15) и (2.16), получим

$$J_v + J_u = J_z + J_y. \quad (2.17)$$

Следовательно, сумма осевых моментов инерции при повороте осей остается величиной постоянной. Это следует из того, что сумма осевых моментов инерции равна полярному моменту инерции относительно точки пересечения осей (см. формулу (2.9)).

Получим теперь зависимость для центробежного момента инерции относительно осей U и V :

$$J_{uv} = \int_A uv dA = \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - z \sin \alpha) dA.$$

Учитывая, что

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha,$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha,$$

найдем

$$J_{uv} = \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{zy} \cos 2\alpha. \quad (2.18)$$

2.3.3. Главные оси и главные моменты инерции. Радиус инерции

Формулы (2.15), (2.16), (2.18) показывают, что если оси координат постепенно поворачивать, то величины моментов инерции будут непрерывно меняться. Найдем такой угол поворота, при котором осевые моменты инерции достигают экстремальных (т. е. предельных) значений. Возьмем производные по α от J_u и J_v и приравняем их нулю:

$$\frac{dJ_u}{d\alpha} = -(J_z - J_y) \sin 2\alpha - 2J_{zy} \cos 2\alpha = 0,$$

$$\frac{dJ_v}{d\alpha} = -(J_y - J_z) \sin 2\alpha + 2J_{zy} \cos 2\alpha = 0.$$

Сравним полученные выражения производных с выражением J_{uv} . Эти выражения по существу одинаковые, они различаются только множителями $\pm \frac{1}{2}$. Следовательно, приравнявая нулю производную от J_u , мы тем самым приравниваем нулю центробежный момент J_{uv} . Дифференцирование J_v дает тот же результат, но с противоположным знаком. Это указывает на то, что оба момента инерции J_u и J_v достигают предельных значений одновременно.

Легко убедиться, что при постоянном увеличении угла α один из моментов инерции возрастает, а другой убывает, и когда первый принимает значение \max , то второй — \min , а центробежный момент инерции обращается в нуль.

Такие две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции принимают максимальное для одной оси и минимальное для другой оси значения, называются главными осями инерции.

Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются главными центральными осями инерции.

Из (2.18) найдем угол наклона главных осей инерции:

$$\frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{zy} \cos 2\alpha = 0,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z}. \quad (2.19)$$

По этой формуле определяются два значения угла α , отличающиеся друг от друга на 90° , и положение главных осей, которые являются взаимно перпендикулярными.

Проведем анализ формулы (2.19).

Первый случай: если $J_{zy} \neq 0$ и $J_z - J_y \neq 0$, то для α получим два первых корня α_1 и $\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1$.

Второй случай: если $J_{zy} = 0, J_z - J_y \neq 0$, то $\operatorname{tg} 2\alpha = 0$, $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$, т. е. начальные оси – главные.

Третий случай: если $J_{zy} \neq 0, J_z - J_y = 0$, то $\operatorname{tg} 2\alpha = \infty$, $\alpha_1 = 45^\circ$ и $\alpha_2 = 135^\circ$. Примером этого случая может быть сечение в виде равнобокого уголка (рис. 2.6), для которого осевые моменты инерции относительно центральных осей Z и Y равны между собой, а центробежный момент инерции $J_{zy} \neq 0$; главные оси U и V составляют с этими осями углы 45° и 135° .

Четвертый случай: если $J_{zy} = 0, J_z - J_y = 0$, то $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{0}{0}$ и, следовательно, при любом повороте оси являются главными. Примерами таких сечений будут круг, квадрат и т. д.

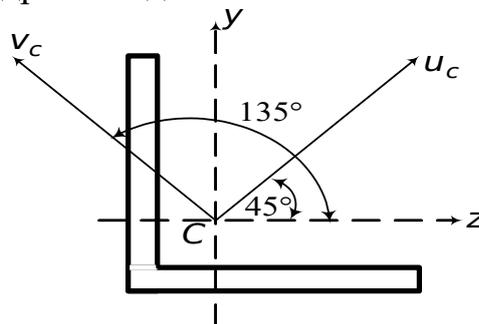


Рис. 2.6. Главные центральные оси инерции равнобокого уголка

Выражения для нахождения главных моментов инерции J_{\max} и J_{\min} можно получить, исключив из (2.15) и (2.16) угол α (2.19):

$$J_{\frac{\max}{\min}} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2}. \quad (2.20)$$

Знак плюс перед вторым слагаемым в (2.20) относится к максимальному моменту инерции, знак минус – к минимальному.

Отметим, что если за исходные оси принять главные, то формулы перехода к повернутым осям (2.15), (2.16), (2.18) упрощаются, так как в этих формулах $J_{zy} = 0$.

Рассмотрим еще один вопрос. По полученным результатам вычислений по формуле (2.19) невозможно установить, какая из главных осей является осью, относительно которой момент инерции имеет наибольшее или наименьшее значение. Здесь следует использовать такое правило: ось максимум (или минимум) всегда составляет меньший угол с той из осей (осью Z или Y), относительно которой момент инерции имеет большее (или меньшее) значение.

Введем понятие радиуса инерции. Осевые моменты инерции в общем виде определяются зависимостями (2.5), (2.6):

$$J_z = \int_A y^2 dA; \quad J_y = \int_A z^2 dA.$$

Здесь Z и Y – переменные. Величины моментов инерции не изменятся, если в подынтегральные выражения вместо переменных величин ввести их средние значения, которые обозначим через i_z, i_y . Тогда

$$J_z = \int_A i_z^2 dA = i_z^2 A; \quad J_y = \int_A i_y^2 dA = i_y^2 A.$$

Величины i_z и i_y называются радиусами инерции сечения относительно осей Z, Y :

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}. \quad (2.21)$$

Радиусы инерции, соответствующие главным осям, называются главными радиусами инерции и определяются по формулам

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{J_{\max}}{A}}; \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}. \quad (2.22)$$

2.3.4. Моменты инерции простейших фигур

Вычислим момент инерции прямоугольника относительно оси, проходящей через центр тяжести (рис. 2.7).

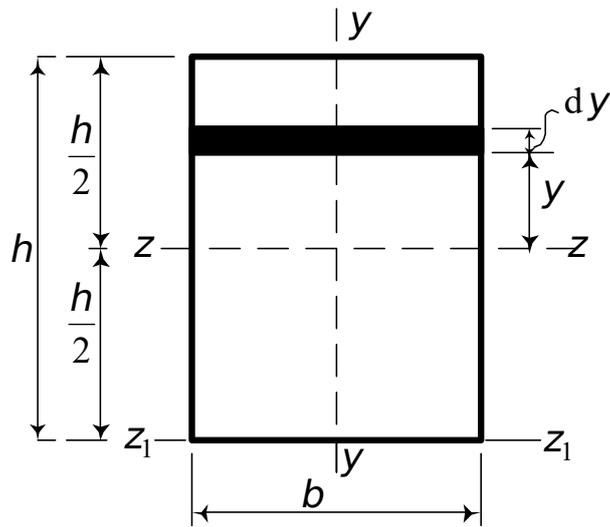


Рис. 2.7. К вычислению моментов инерции прямоугольника

Разобьем весь прямоугольник на бесконечно малые элементы линиями, параллельными оси Z .

Момент инерции элемента

$$dJ_z = y^2 b dy.$$

Момент инерции всего прямоугольника

$$J_z = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}.$$

Момент инерции относительно оси Z_1 , параллельной оси Z , найдем по формуле (2.10):

$$J_{z_1} = J_z + a^2 A = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4} \cdot bh = \frac{bh^3}{3}.$$

Определим теперь момент инерции треугольника относительно оси Z_1 , проходящей через его вершину параллельно основанию (рис. 2.8).

Разобьем весь треугольник на тонкие полосы линиями, параллельными оси Z_1 . Рассмотрим полосу, находящуюся на расстоянии Y от вершины. Высота этой полосы равна dY , ширина bY/h (найдена из пропорции $z/y = b/h$).

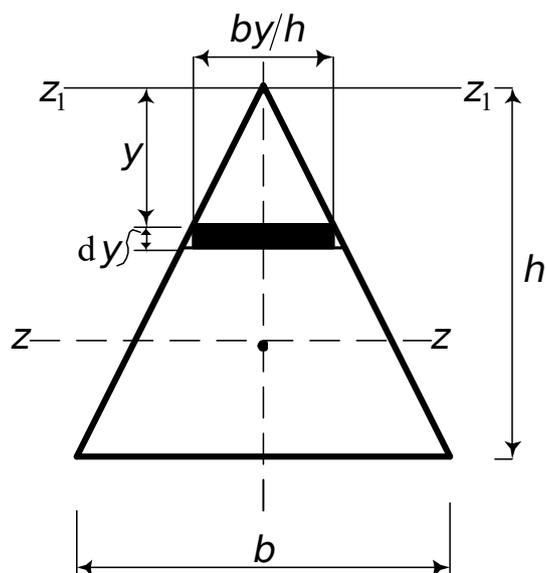


Рис. 2.8. К определению моментов инерции треугольника

Момент инерции полосы

$$dJ_{z_1} = y^2 \frac{b}{h} y dy.$$

Момент инерции всего треугольника

$$J_{z_1} = \int_0^h y^3 \frac{b}{h} dy = \frac{b}{h} \cdot \frac{y^4}{4} \Big|_0^h = \frac{bh^3}{4}.$$

Для нахождения момента инерции относительно оси Z , проходящей через центр тяжести сечения, воспользуемся формулой (2.10):

$$J_z = J_{z_1} - a^2 A = \frac{bh^3}{4} - \frac{bh}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{bh^3}{36}.$$

Для круга (рис. 2.9) найдем сначала полярный момент инерции относительно его центра. Круг с радиусом r разобьем на бесконечно малые элементы, представляющие собой концентрические кольца. Возьмем одно из таких колец с радиусом ρ и толщиной $d\rho$.

Полярный момент инерции кольца

$$dJ_\rho = (2\pi\rho d\rho)\rho^2.$$

Чтобы получить полярный момент инерции всей площади круга, нужно просуммировать моменты инерции всех колец:

$$J_\rho = \int_0^r 2\pi\rho^3 d\rho = 2\pi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^r = \frac{\pi r^4}{2}.$$

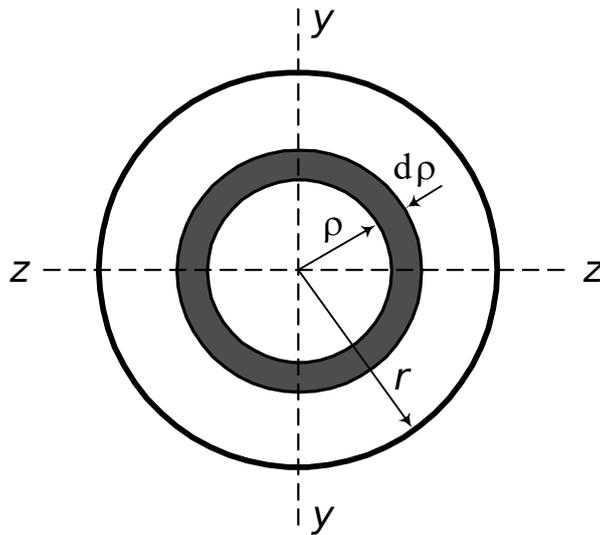


Рис. 2.9. К определению момента инерции круга

Вследствие симметрии круга моменты инерции относительно всех осей, проходящих через центр круга, равны между собой, т.е. $J_z = J_y$. С другой стороны, зная, что $J_\rho = J_z + J_y$ (см. (2.9)), получим

$$J_z = J_y = \frac{J_\rho}{2} = \frac{\pi r^4}{4}.$$

2.3.5. Вычисление моментов инерции сложных фигур

При расчетах балок на прочность и жесткость необходимо определять значения геометрических характеристик сложных поперечных сечений, а именно, положение главных центральных осей и главных центральных моментов инерции.

Порядок их определения рассмотрим на примере (рис. 2.10).

Сечение разбиваем на четыре части: двутавр, швеллер, уголок и полоса $50 \times 2,4$ см. Геометрические характеристики двутавра I №36: $h_1 = 36$ см; $b_1 = 14,5$ см; $d_1 = 0,75$ см; $t_1 = 1,23$ см; $A_1 = 61,9$ см²; $J_{z_1} = 13380$ см⁴; $J_{y_1} = 516$ см⁴. Геометрические характеристики швеллера 24 а: $h_2 = 24$ см; $b_2 = 9,5$ см; $d_2 = 0,56$ см; $t_2 = 1,07$ см; $A_2 = 32,9$ см²; $J_{z_2} = 254$ см⁴; $J_{y_2} = 3180$ см⁴; $y_0 = 2,67$ см. Геометрические характеристики уголка $100 \times 63 \times 8$: $h_3 = 10$ см; $b_3 = 6,3$ см; $d_3 = 0,8$ см; $A_3 = 12,6$ см²; $J_{z_3} = 127$ см⁴; $J_{y_3} = 39,2$ см⁴; $z_0 = 1,5$ см; $y_0 = 3,32$ см; $\text{tg } \alpha_3 = 0,391$; $\text{tg } 2\alpha_3 = 0,923$. Геометрические характеристики полосы: $h_4 = 2,4$ см; $b_4 = 50$ см; $A_4 = 12$ см².

2.3.5.1. Определение центра тяжести сечения

В качестве вспомогательных осей, относительно которых будем определять центр тяжести сечения, принимаем оси двутавра (z_1, y_1). Вы-

числяем координаты центров тяжести остальных трех составляющих сечения относительно этих осей (рис. 2.10):

$$\begin{aligned} z_2 &= 50 - 14,5/2 - 12 = 30,75 \text{ см} & y_2 &= 36/2 + 2,4 + 2,67 = 23,07 \text{ см} ; \\ z_3 &= 50 - 14,5/2 - 1,5 = 41,25 \text{ см} & y_3 &= 36/2 - 3,32 = 14,68 \text{ см} ; \\ z_4 &= 50/2 - 14,5/2 = 17,75 \text{ см} & y_4 &= 36/2 + 2,4/2 = 19,20 \text{ см} . \end{aligned}$$

Координаты центра тяжести двутавра относительно своих центральных осей равны нулю, т.е. $z_1 = 0, y_1 = 0$.

Теперь согласно (2.3) и (2.4)

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{S_{y_1}}{A} = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3 + A_4 z_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} ; \\ y_0 &= \frac{S_{z_1}}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + A_4 y_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} . \end{aligned}$$

Подставляя сюда численные значения координат и площадей элементов сечения, найдем $z_0 = 16,1 \text{ см}$; $y_0 = 14,28 \text{ см}$ (см. рис. 2.10).

2.3.5.2. Вычисление моментов инерции составного сечения относительно центральных осей

Моменты инерции листа относительно собственных осей z_4, y_4 вычисляются по формулам для прямоугольного сечения (см. п. 2.3.4):

$$J_{z_4} = \frac{b_4 h_4^3}{12} ; \quad J_{y_4} = \frac{h_4 b_4^3}{12} .$$

Моменты инерции всего сечения вычисляем по формулам (2.10), (2.11), (2.12):

$$\begin{aligned} J_{z_c} &= \sum_{i=1}^4 (J_{z_i} + A_i a_i^2) = J_{z_1} + A_1 y_0^2 + J_{z_2} + A_2 (y_2 - y_0)^2 + \\ &\quad + J_{z_3} + A_3 (y_3 - y_0)^2 + J_{z_4} + A_4 (y_4 - y_0)^2 ; \\ J_{y_c} &= \sum_{i=1}^4 (J_{y_i} + A_i b_i^2) = J_{y_1} + A_1 z_0^2 + J_{y_2} + A_2 (z_2 - z_0)^2 + \\ &\quad + J_{y_3} + A_3 (z_3 - z_0)^2 + J_{y_4} + A_4 (z_4 - z_0)^2 ; \end{aligned}$$

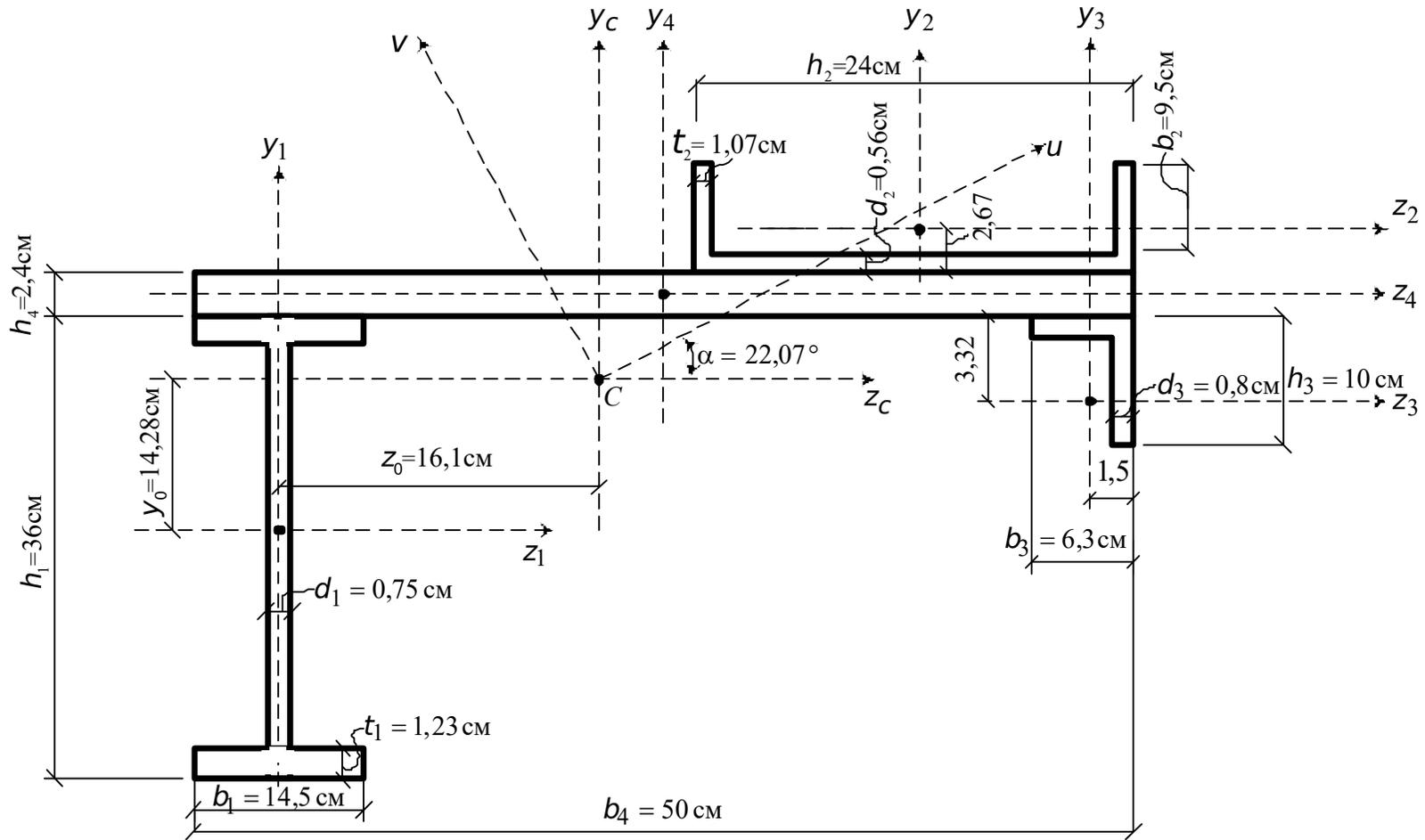


Рис. 2.10. Схема заданного сечения

$$J_{zcy_c} = \sum_{i=1}^4 (J_{z_i y_i} + A_i a_i b_i) = 0 + A_1(-z_0)(-y_0) + 0 + A_2(y_2 - y_0)(z_2 - z_0) + \\ + \frac{J_{y_3} - J_{z_3}}{2} \operatorname{tg} 2\alpha_3 + A_3(y_3 - y_0)(z_3 - z_0) + 0 + A_4(y_4 - y_0)(z_4 - z_0),$$

где $J_{y_3} = 39,2 \text{ см}^4$; $J_{z_3} = 127 \text{ см}^4$.

В результате вычислений получаем $J_{z_c} = 31890 \text{ см}^4$, $J_{y_c} = 60138 \text{ см}^4$, $J_{zcy_c} = 19528 \text{ см}^4$.

Заметим, что при вычислении центробежного момента инерции всего сечения центробежные моменты инерции относительно собственных осей двутавра, полосы и швеллера равны нулю (если сечение имеет хотя бы одну ось симметрии, то центробежный момент инерции сечения относительно этой оси равен нулю).

Для нахождения центробежного момента инерции уголка пользуемся формулой (2.19). Знак $\operatorname{tg} 2\alpha$ определяем из табл. 2.1.

2.3.5.3. Определение положения главных центральных осей и главных моментов инерции

Угол наклона главных осей определяем, используя формулу (2.19):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z} = \frac{2 \cdot 19528}{60138 - 31890} = 1,383,$$

отсюда $2\alpha = 54,14^\circ$, а $\alpha = 27,07^\circ$.

Вычисляем главные моменты инерции по формуле (2.20):

$$J_{\frac{\max}{\min}} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2}.$$

Отсюда $J_v = J_{\max} = 70114 \text{ см}^4$; $J_u = J_{\min} = 21914 \text{ см}^4$.

Выполним проверку правильности вычислений:

$$J_z + J_y = J_{\max} + J_{\min};$$

$$J_{uv} = \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{zy} \cos 2\alpha = 0.$$

Нетрудно убедиться, что условия проверок выполняются.

Таблица 2.1

Определение центробежного момента инерции неравнобокого уголка

--	--	--	--	--

№ пп	Положение уголка на плоскости	Знак $\operatorname{tg} 2\alpha$	№ пп	Положение уголка на плоскости	Знак $\operatorname{tg} 2\alpha$
1		+	5		+
2		-	6		+
3		+	7		-
4		-	8		-

2.4. Моменты инерции сечений тонкостенных стержней

Основным признаком тонкостенного стержня является соотношение его геометрических размеров: в поперечном сечении одно из измерений (толщина δ) существенно меньше другого – длины контура S ; последняя же в свою очередь остается много меньше, чем длина стержня l .

К схеме тонкостенных стержней сводятся многие элементы машиностроительных и строительных конструкций. Это, прежде всего, подкрепляющие элементы оболочек самолетов и ракет, тележек железнодорожных вагонов и других конструкций.

Тонкостенный стержень, в силу отмеченных геометрических соотношений, обнаруживает свойства, отличающие его от стержней сплошного сечения. Главной особенностью тонкостенных стержней является то, что у

них при нагрузках, создающих закручивание, поперечные сечения в процессе деформации не остаются плоскими. Происходит так называемая депланация сечений, которая связана с перемещениями точек из плоскости поперечного сечения вдоль оси стержня. Эти деформации могут достигать значительной величины. Поэтому дополнительно к рассмотренным выше геометрическим характеристикам: статическому моменту площади (2.2), осевым моментам инерции (2.5), (2.6), центробежному моменту инерции (2.7), вводятся так называемые секториальные геометрические характеристики, которые получаются из обычных, если в них заменить декартовые координаты на секториальные.

2.4.1. Система координат

Для тонкостенных стержней, в отличие от хорошо известных и часто употребляющихся декартовой и криволинейной систем координат, вводится так называемая секториальная система координат (рис. 2.11).

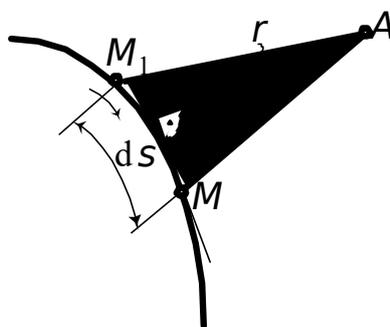


Рис. 2.11. Секториальная система координат

Рассмотрим среднюю линию контура поперечного сечения. Выберем на этом контуре начало отсчета M_1 и из заданного полюса A проведем два луча к концам элементарного отрезка dS . Удвоенную площадь треугольника AM_1M обозначим через $d\omega$:

$$d\omega = r dS,$$

где r – расстояние от полюса до касательной к линии контура в точке M .

Интеграл

$$\omega = \int_0^S r dS \quad (2.23)$$

называется секториальной площадью (координатой).

Для прямолинейного контура, состоящего из прямых участков $r = \text{const}$ (ω зависит от S линейно), значение секториальной площади в произвольной точке n может быть найдено по формуле (рис. 2.12)

$$\omega_n = \omega_k + Y_k Z_n - Z_k Y_n,$$

где ω_k – секториальная площадь в предыдущей точке;

Y_k, Z_k – координаты точки k (начало элемента);

Y_n, Z_n – координаты точки n (конец элемента).

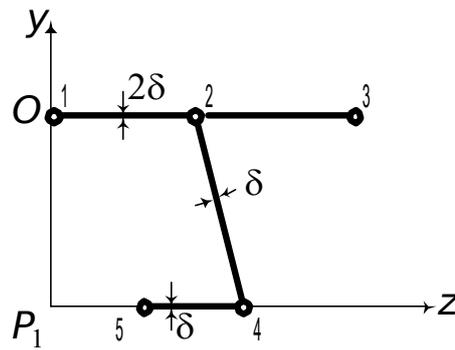


Рис. 2.12. Схема поперечного сечения стержня

Начинают вычисления с точки, в которой выбрано начало отсчета “0”. Значение секториальной площади в этой точке всегда равно нулю. Затем необходимо последовательно вычислить секториальную площадь в остальных точках. Если сечение разветвляется (на рис. 2.12 – точка 2), нужно двигаться от точки разветвления сначала в одном направлении, затем – в другом. Так, например, секториальная площадь в точках 3, 4, 5 равна

$$\omega_3 = \omega_2 + Y_2 Z_3 - Z_2 Y_3;$$

$$\omega_4 = \omega_2 + Y_2 Z_4 - Z_2 Y_4;$$

$$\omega_5 = \omega_4 + Y_4 Z_5 - Z_4 Y_5.$$

2.4.2. Секториальные характеристики сечения

Как было отмечено выше, для получения секториальных геометрических характеристик необходимо в формулах (2.2), (2.5), (2.6), (2.7) заменить декартовые координаты на секториальные. В результате получим секториальный статический момент, m^4 :

$$S_\omega = \int_A \omega dA; \quad (2.24)$$

секториальный момент инерции, m^6 :

$$J_\omega = \int_A \omega^2 dA; \quad (2.25)$$

секториально-линейные статические моменты относительно осей Z и Y

$$J_{z\omega} = \int_A y\omega dA; \quad J_{y\omega} = \int_A z\omega dA. \quad (2.26)$$

Так как секториальная площадь (координата) может иметь как положительные, так и отрицательные значения, то секториально-линейные статические моменты (2.26) также могут быть как положительными, так и отрицательными. Полус, относительно которого секториально-линейные моменты обращаются в нуль, называется главным полюсом.

2.4.3. Определение положения главного полюса

Для определения координат главного полюса зададимся вначале произвольной точкой B , пользуясь которой как главным полюсом при произвольном начале отсчета M_1 , найдем секториальную координату ω_B (рис. 2.13).

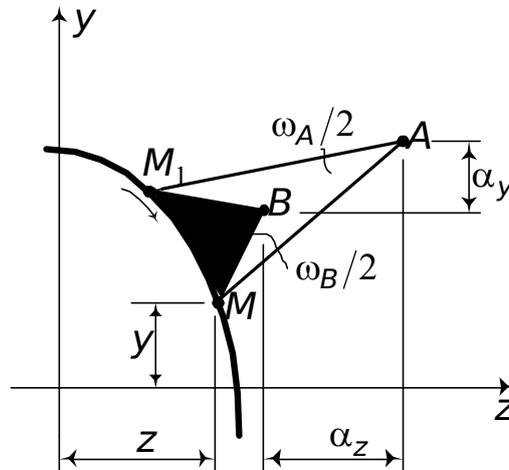


Рис. 2.13. К определению положения главного полюса

Пусть α_z и α_y – координаты точки A относительно точки B .
Секториальные координаты ω_A и ω_B связаны равенством

$$\omega_A = \omega_B - \alpha_z y + \alpha_y z + C, \quad (2.27)$$

где C – произвольная постоянная.

Подставляя (2.27) в (2.26), приходим к системе уравнений относительно α_z и α_y :

$$J_{z\omega} - \alpha_z J_z + \alpha_y J_{zy} + C \cdot S_z = 0;$$

$$J_{y\omega} - \alpha_z J_{zy} + \alpha_y J_y + C \cdot S_y = 0.$$

Будем считать, что Z и Y – центральные оси сечения. Тогда $S_z = 0$ и $S_y = 0$ (см. п. 2.1).

Решив систему уравнений, получим формулы для координат точки A :

$$\alpha_z = \frac{-J_{z\omega} J_y + J_{y\omega} J_z}{J_y J_z - J_{yz}^2}; \quad (2.28)$$

$$\alpha_y = \frac{J_{y\omega} J_z - J_{z\omega} J_{yz}}{J_y J_z - J_{yz}^2}. \quad (2.29)$$

Если Z и Y – главные центральные оси сечения, то $J_{zy} = 0$, и формулы (2.28), (2.29) значительно упрощаются:

$$\alpha_z = -J_{z\omega} / J_z; \quad \alpha_y = J_{y\omega} / J_y. \quad (2.30)$$

Если полученные по формулам (2.28) – (2.30) значения координат α_z и α_y положительны, то их следует откладывать от точки B по направлению осей координат.

Теперь найдем главную нулевую точку отсчета секториальных координат, т. е. точку, когда S_{ω} (2.24) обратится в нуль. Очевидно, что ω_A и ω , найденные для истинной точки M_0 , отличаются на некоторую постоянную C :

$$\omega = \omega_A + C.$$

Подставив полученную величину в (2.24) и потребовав, чтобы $S_{\omega} = 0$, найдем

$$C = -\frac{S_{\omega_A}}{A}. \quad (2.31)$$

2.4.4. Определение секториального момента инерции

Процесс вычисления секториального момента инерции проследим на примере сечения тонкостенного стержня, показанного на рис. 2.14.

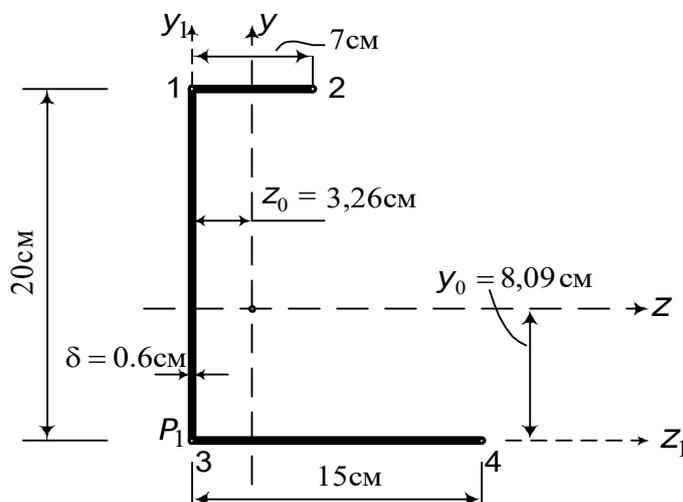


Рис. 2.14. Сечение тонкостенного стержня

Заданное сечение располагаем в положительной четверти. Пронумеруем характерные точки сечения (начало и конец элементов) и представим его в виде набора прямоугольных элементов, имеющих толщину δ_{kn} и длину H_{kn} . Вспомогательные оси проведем так, чтобы они совпадали с осями элементов 1-3 и 3-4. Определим координаты центра тяжести сечения (см. п. 2.2). В результате несложных вычислений они оказываются равными

$$y_0 = 8,09 \text{ см}, \quad z_0 = 3,26 \text{ см}.$$

Вычислим центральные моменты инерции (2.5), (2.6) и центробежный момент инерции (2.7). Для тонкостенных элементов, имеющих постоянную толщину, указанным формулам можно придать следующий вид:

$$J_z = \int_A y^2 dA = \sum_{S_i} \delta_i \int_{S_i} y \cdot y ds,$$

$$J_y = \int_A z^2 dA = \sum \delta_i \int_{S_i} z \cdot z ds, \quad (2.32)$$

$$J_{zy} = \int_A zy dA = \sum \delta_i \int_{S_i} y \cdot z ds.$$

Здесь $dA = \delta_i ds$, $\delta_i = \text{const}$ – толщина тонкостенных элементов. При такой замене не учитывается собственный момент инерции тонкостенного элемента относительно средней линии контура, значение которого обычно мало по сравнению с моментом инерции всего сечения. Каждый из интегралов (2.32) будем рассматривать как интеграл, у которого подинтегральное выражение представляет собой произведение двух функций: $z = f_1(s)$ и $y = f_2(s)$. Эти функции линейные, и на некотором участке длиной l графически они могут быть представлены в виде трапеций (рис. 2.15).

Продолжим прямолинейную эпюру на рис. 2.15,а до точки 0. Тогда можно записать

$$\int_A^B zy ds = \text{tg } \alpha \int_A^B s' y ds = \text{tg } \alpha \omega S_0 = \omega Y_0. \quad (2.33)$$

Полученный интеграл (2.33) можно рассматривать как статический момент площади эпюры на рис. 2.15, а относительно точки 0. Но статический момент площади равен статическому моменту ее равнодействующей, приложенной в центре тяжести этой площади.

Итак, искомый интеграл получается умножением площади эпюры на рис. 2.15, а на расположенную под ее центром тяжести ординату эпюры на рис. 2.15, б. При этом ординаты функций (эпюр) следует подставлять в формулу (2.33) с учетом их знаков.

Теперь для вычисления моментов инерции описанным выше способом предварительно построим эпюры Y_0 и Z_0 (рис. 2.16).

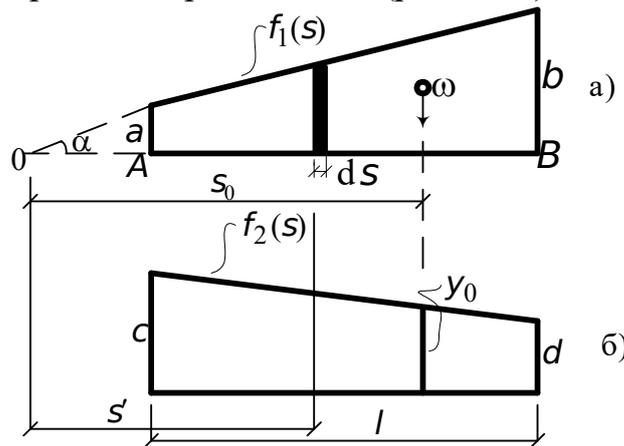


Рис. 2.15. К вычислению интегралов (2.32)

а)

б)

в)

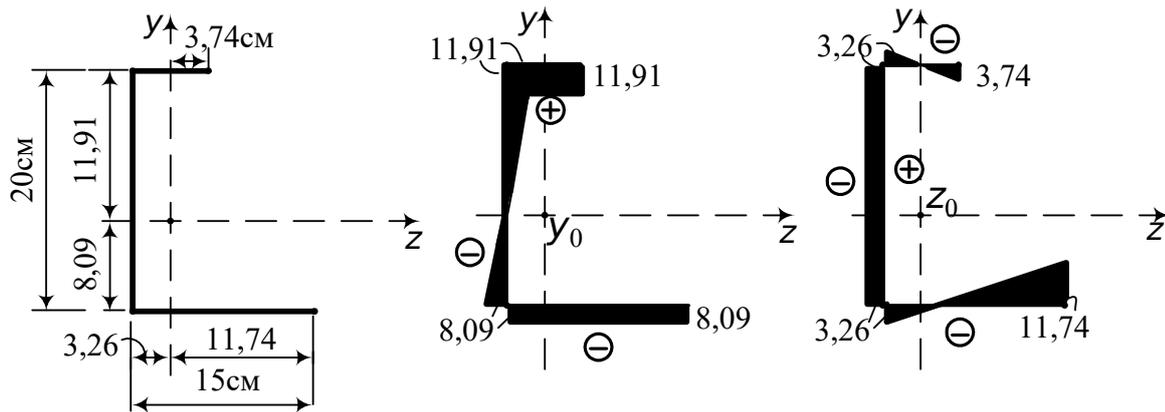


Рис. 2.16. Поперечное сечение тонкостенного стержня (а) и эпюры Y (б), Z (в)

“Перемножаем” построенные эпюры и находим

$$J_y = 0,6 \left[\frac{1}{2} 3,26 \cdot 7 \left(\frac{2}{3} 3,26 - \frac{1}{3} 3,74 \right) + \frac{1}{2} 3,74 \cdot 7 \left(\frac{2}{3} 3,74 - \frac{1}{3} 3,26 \right) + \right. \\ \left. + 3,26 \cdot 20 \cdot 3,26 + \frac{1}{2} 3,26 \cdot 15 \left(\frac{2}{3} 3,26 - \frac{1}{3} 11,74 \right) + \frac{1}{2} 11,74 \cdot 15 \left(\frac{2}{3} 11,74 - \frac{1}{3} 3,26 \right) \right] = \\ = 475,47 \text{ см}^4;$$

$$J_z = 0,6 \left[11,91 \cdot 7 \cdot 11,91 + \frac{1}{2} 11,91 \cdot 20 \left(\frac{2}{3} 11,91 - \frac{1}{3} 8,09 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} 8,09 \cdot 20 \left(\frac{2}{3} 8,09 - \frac{1}{3} 11,91 \right) + 8,09 \cdot 15 \cdot 8,09 \right] = 1628,57 \text{ см}^4;$$

$$J_{yz} = 0,6 \left[11,91 \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{2} 3,74 - \frac{1}{2} 3,26 \right) + 3,26 \cdot 20 \left(\frac{1}{2} 8,09 - \frac{1}{2} 11,91 \right) + \right. \\ \left. + 8,09 \cdot 15 \left(\frac{1}{2} 3,26 - \frac{1}{2} 11,74 \right) \right] = -371,43 \text{ см}^4.$$

Определим теперь секториальные характеристики сечения. Выбираем полюс P_1 и начало отсчета 0 в точке 3 (рис. 2.17). Определяем ω_n по формуле (см. п. 2.4.1)

$$\omega_n = \omega_k + \omega'_n = \omega_k + y_k z_n - z_k y_n.$$

Вычисления начинаем с точки 3:

$$\omega_3 = 0;$$

$$\omega_1 = \omega_3 + (y_3 z_1 - z_3 y_1) = 0 + (0 \cdot 0 - 0 \cdot 20) = 0;$$

$$\omega_2 = \omega_1 + (y_1 z_2 - z_1 y_2) = 0 + (20 \cdot 7 - 0 \cdot 20) = 140 \text{ см}^2;$$

$$\omega_4 = \omega_3 + (y_3 z_4 - z_3 y_4) = 0 + (0 \cdot 15 - 0 \cdot 0) = 0.$$

Строим эпюру ω_{P_1} (рис. 2.17).

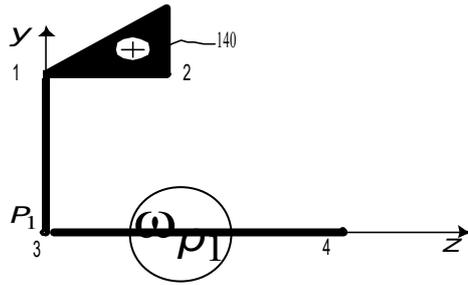


Рис. 2.17. Эюра секториальной площади ω_{P_1} (P_1 – полюс, начало отсчета в т. 3)

Вычислим секториально-линейные статические моменты инерции (2.26). Для этого “перемножим” эюру ω_{P_1} (рис. 2.16) поочередно на эюры Y_0 и Z_0 (рис. 2.16 б, в):

$$J_{y\omega} = \int_A z\omega dA = 0,6 \frac{1}{2} 140 \cdot 7 \left(-\frac{1}{3} 3,26 + \frac{2}{3} 3,74 \right) = 413,56 \text{ см}^5,$$

$$J_{z\omega} = \int_A y\omega dA = 0,6 \frac{1}{2} 140 \cdot 7 \cdot 11,91 = 3501,54 \text{ см}^5.$$

Для определения координат α_z и α_y используем формулы (2.28) и (2.29):

$$\alpha_z = \frac{-J_{z\omega}J_y + J_{y\omega}J_{yz}}{J_zJ_y - J_{yz}^2} = \frac{-3501,54 \cdot 475,47 + 413,56 \cdot (-371,43)}{1628,57 \cdot 475,47 - (371,43)^2} = -2,86 \text{ см},$$

$$\alpha_y = \frac{J_{y\omega}J_z - J_{z\omega}J_{yz}}{J_zJ_y - J_{yz}^2} = \frac{413,56 \cdot 1628,57 - 3501,54 \cdot (-371,43)}{1628,57 \cdot 475,47 - (371,43)^2} = 3,10 \text{ см}.$$

Совместим полюс P_1 с центром изгиба, начало отсчета 0 оставим в прежнем положении (рис. 2.18).

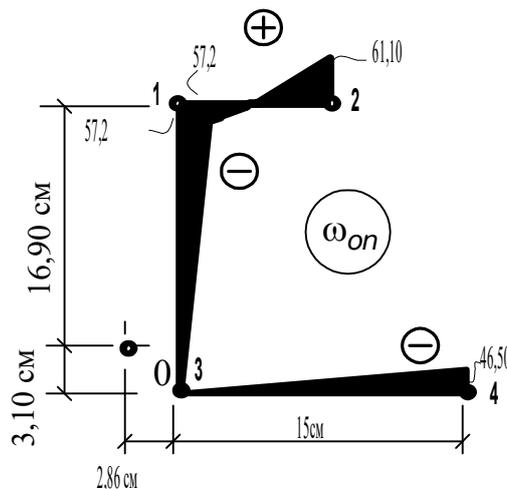


Рис. 2.18. Эюра секториальной площади ω_{O1}

Определим новое значение секториальной площади ω_{O1} :

$$\begin{aligned}\omega_{on} &= \omega_{ok} + (y_k - \alpha_y)(z_n - \alpha_z) - (z_k - \alpha_z)(y_n - \alpha_y); \\ \omega_{03} &= 0; \\ \omega_{01} &= \omega_{03} + (y_3 - \alpha_y)(z_1 - \alpha_z) - (z_3 - \alpha_z)(y_1 - \alpha_y) = 0 + (0 - 3,10)(0 + 2,86) - \\ &\quad - (0 + 2,86)(20 - 3,10) = -57,20 \text{ см}^2; \\ \omega_{02} &= \omega_{01} + (y_1 - \alpha_y)(z_2 - \alpha_z) - (z_1 - \alpha_z)(y_2 - \alpha_y) = 61,10 \text{ см}^2; \\ \omega_{04} &= \omega_{03} + (y_3 - \alpha_y)(z_4 - \alpha_z) - (z_3 - \alpha_z)(y_4 - \alpha_y) = -46,50 \text{ см}^2.\end{aligned}$$

По найденным значениям ω_{01} , ω_{02} , ω_{03} , ω_{04} строим эпюру секториальной площади (рис. 2.18).

Вычисляем секториальный статический момент $S_{\omega 0}$ и вспомогательную величину C (2.31):

$$\begin{aligned}S_{\omega 0} &= \int_A \omega_{on} dA = 0,6 \left[\frac{1}{2} 61,10 \cdot 7 - \frac{1}{2} 57,2 \cdot 7 - \frac{1}{2} 57,2 \cdot 20 - \frac{1}{2} 46,5 \cdot 15 \right] = -544,26 \text{ см}^4; \\ C &= -\frac{S_{\omega 0}}{A} = \frac{544,26}{25,2} = 21,60 \text{ см}^2.\end{aligned}$$

Для построения главной эпюры секториальной площади находим

$$\begin{aligned}\omega_{гл} &= \omega_{on} + C; \\ \omega_{3гл} &= \omega_{03} + C = 0 + 21,60 = 21,60 \text{ см}^2; \\ \omega_{1гл} &= \omega_{01} + C = -57,20 + 21,60 = -35,60 \text{ см}^2; \\ \omega_{2гл} &= \omega_{02} + C = 61,10 + 21,60 = 82,70 \text{ см}^2; \\ \omega_{4гл} &= \omega_{04} + C = -46,50 + 21,60 = -24,90 \text{ см}^2.\end{aligned}$$

По полученным значениям строим эпюру главных секториальных площадей (рис. 2.19).

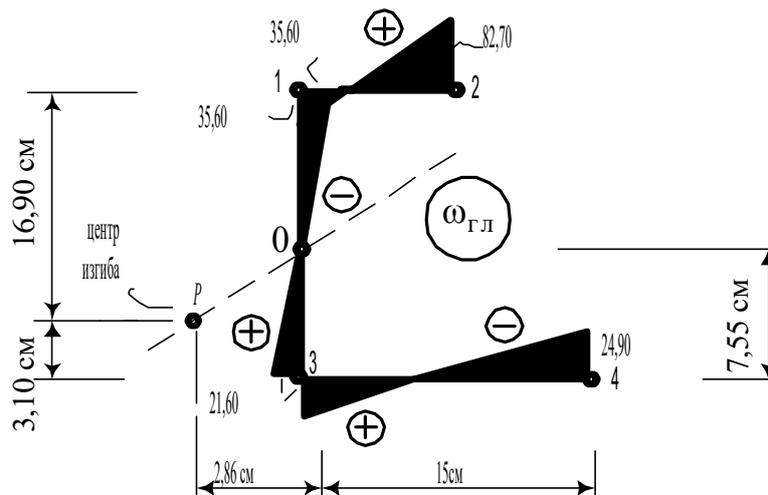


Рис. 2.19. Эпюра главной секториальной площади

Значение секториального момента инерции находим “перемножением” эпюры $\omega_{гл}$ на себя:

$$J_{\omega} = \int_A \omega_{r,II}^2 dA = 0,6 \left[\frac{1}{2} 82,70 \cdot 7 \left(\frac{2}{3} 82,70 - \frac{1}{3} 35,60 \right) + \frac{1}{2} 35,60 \cdot 7 \left(\frac{2}{3} 35,60 - \frac{1}{3} 82,70 \right) + \right.$$

EMBED

Equation.3

$$+ \frac{1}{2} 35,60 \cdot 20 \left(\frac{2}{3} 35,60 - \frac{1}{3} 21,60 \right) + \frac{1}{2} 21,60 \cdot 20 \left(\frac{2}{3} 21,60 - \frac{1}{3} 35,60 \right) +$$

$$\left. + \frac{1}{2} 21,60 \cdot 15 \left(\frac{2}{3} 21,60 - \frac{1}{3} 24,40 \right) + \frac{1}{2} 24,40 \cdot 15 \left(\frac{2}{3} 24,10 - \frac{1}{3} 21,60 \right) \right] = 12733,58 \text{ см}^6.$$

Найденная величина, как будет показано в разд. 8, входит в формулу нормальных напряжений при кручении.

Раздел 3

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

В различных элементах конструкций и машин возникают только продольные усилия, которые вызывают в них деформацию растяжения или сжатия. Например, трос подъемника при подъеме груза растянут, колонны каркаса многоэтажного здания преимущественно сжаты, элементы ферм могут быть растянутыми или сжатыми и т. д. (см. п. 1.7.1).

В простейшем случае растянутый или сжатый стержень – это стержень с силами, приложенными к его концам и направленными вдоль его оси (рис. 3.1).

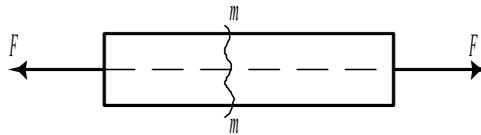


Рис. 3.1. Центральнo растянутый стержень

У концов бруса напряжения распределяются по сложному закону, который зависит от способа приложения сил к брусу. Однако эта зависимость по мере удаления от концов сказывается на напряжениях все меньше и меньше. В частях бруса, удаленных от точек приложения сил на расстояние, примерно равное наибольшему размеру поперечного сечения, способ приложения нагрузки почти не влияет на напряжения (принцип Сен-Венана^{*}). В дальнейшем будем исключать из рассмотрения части бруса, близкие к местам приложения сил.

3.1. Напряжения в сечениях, перпендикулярных оси бруса

Сделаем поперечный разрез m - m и отбросим правую часть, действие которой заменим силами, распределенными по сечению (рис. 3.2).

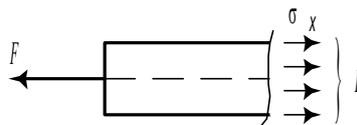


Рис. 3.2. К выводу формулы для нормальных напряжений

Так как внутренние силы должны заменить приложенную к отброшенной части внешнюю силу F , предположим, что они имеют такое же направление, какое имела отброшенная сила F , т. е. они должны быть горизонтальными и, следовательно, нормальными к сечению и направленными вправо. Равнодействующая внутренних сил равна внешней силе F , приложенной к оставшейся части, так как обе силы должны уравно-

^{*} Барре де Сен-Венан (1797-1886) – французский ученый в области механики, его основные труды посвящены теории упругости, сопротивлению материалов и гидродинамике.

вешивать друг друга. Интенсивность внутренних сил, т. е. величина их на единицу площади будет нормальным напряжением.

Опыты, проводимые в лабораториях, показывают, что при растяжении или сжатии бруса продольные волокна, расположенные на его поверхности, испытывают одинаковые удлинения. Естественно предположить, что и внутри все продольные волокна испытывают такое же удлинение, а потому поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации (гипотеза плоских сечений – гипотеза Я. Бернулли*).

Так как удлинения во всех точках поперечного сечения одинаковы, то можно считать, что и напряжения постоянны по всему сечению, т. е. $\sigma_x = \text{const}$. Используя зависимость (1.12)

$$N = \int_A \sigma_x dA,$$

получим

$$N = \sigma_x A,$$

откуда нормальные напряжения определяются по формуле

$$\sigma_x = \frac{N}{A}. \quad (3.1)$$

Формула (3.1) может быть применена при определении нормальных напряжений в растянутых стержнях и в коротких сжатых стержнях.

Касательные напряжения τ в поперечном сечении равны нулю, потому что все внутренние силы перпендикулярны сечению.

3.2. Напряжения в сечениях, наклонных к оси бруса

Рассмотрим напряжения, которые возникают в бруске по площадкам, наклонным к его оси (рис. 3.3, а).

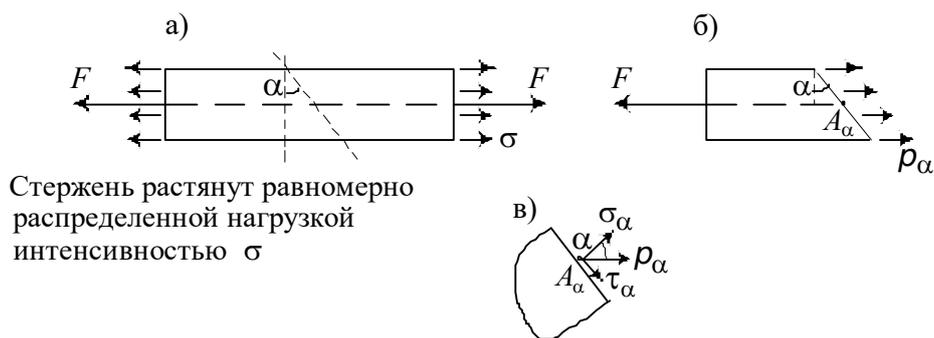


Рис. 3.3. Напряжения на наклонных площадках растянутого стержня

Рассечем стержень по наклонному сечению и отбросим правую его часть (рис. 3.3, б). На наклонной площадке полные напряжения ρ_α будут направлены вдоль продольной оси и распределены равномерно. Оставшая-

* Якоб Бернулли (1654-1705) – швейцарский математик, физик, механик.

ся левая часть стержня находится в равновесии. Поэтому внешняя нагрузка F и равнодействующая полных напряжений должны быть равны между собой:

$$F = \rho_{\alpha} A_{\alpha} = N,$$

где A_{α} – площадь наклонного сечения, $A_{\alpha} = A/\cos \alpha$.

Таким образом, полное напряжение на наклонной площадке равно

$$\rho_{\alpha} = \sigma \cos \alpha. \quad (3.2)$$

Разложим полное напряжение на нормальное и касательное напряжения (рис. 3.3, в). Тогда с учетом формулы (3.2) имеем

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.3)$$

Нормальные напряжения имеют наибольшее значение

$$\sigma_{\max} = \sigma \quad \text{при} \quad \alpha = 0,$$

т. е. в поперечном сечении $m-m$ (рис. 3.1), а наименьшее значение

$$\sigma_{\min} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 90^{\circ},$$

т. е. на площадках, параллельных оси бруса.

При $\alpha = 45^{\circ}$ $\sigma_{\alpha} = 0,5\sigma$.

Касательные напряжения имеют наибольшее значение по абсолютной величине при $\alpha = 45^{\circ}$ ($\alpha = 135^{\circ}$), т. е. на площадках, наклоненных к оси бруса под углом 45° (рис. 3.4). При этом $\tau_{\max} = \sigma/2$.

Значения, равные нулю, касательные напряжения имеют по площадкам, перпендикулярным и параллельным оси бруса.

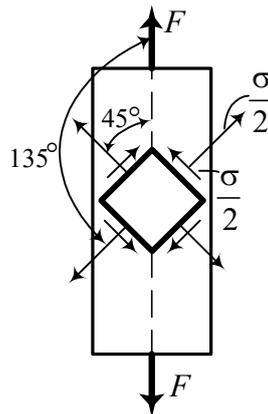


Рис. 3.4. Действие напряжений на площадках, наклоненных к оси бруса под углом $\alpha = 45^{\circ}$ (135°)

Кроме того, следует напомнить (см. (1.18)), что на двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по абсолютной величине.

3.3. Деформации при растяжении и сжатии

3.3.1. Продольная деформация

Рассмотрим брус, нагруженный на конце силой F (рис. 3.5).

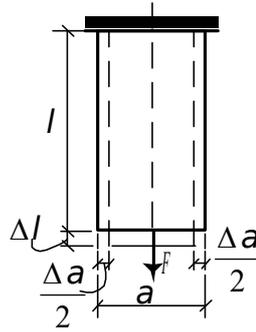


Рис. 3.5. Деформации бруса при растяжении

Длину бруса до деформации обозначим через l , а приращение длины (положительное или отрицательное) – через Δl . Приращение длины бруса называется полным или абсолютным удлинением (укорочением), или абсолютной продольной деформацией. Полное удлинение (укорочение) измеряется в линейных единицах (см, мм).

Относительным удлинением (относительной продольной деформацией) называют ту долю абсолютной продольной деформации, которая приходится на единицу длины бруса:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (3.4)$$

Величины как относительных, так и абсолютных продольных деформаций стержней, выполненных из наиболее распространенных строительных материалов, весьма малы (см. п. 1.1). Так, для реальных строительных материалов они имеют порядок $\varepsilon \approx 10^{-3}$.

Если рассматривать только упругие деформации, то для них опытным путем установлена прямая пропорциональность между величиной растягивающей силы и соответствующим ей удлинением (см. п. 1.8.3).

При растяжении или сжатии стержня (или его участка), как известно, единственное усилие, отличное от нуля, – нормальная сила N . Тогда нормальное напряжение определяется формулой (3.1), и связь между напряжениями и деформациями в соответствии с законом Гука (1.27), принимает вид

$$\sigma = E \varepsilon, \quad (3.5)$$

где E – коэффициент пропорциональности, называемый модулем упругости и характеризующий способность материала сопротивляться линейной деформации (размерность – МПа).

Графически прямая пропорциональность изображается наклонной прямой. Прямолинейная зависимость между напряжением и деформацией является простейшим приближенным выражением сложного физического

закона и довольно хорошо соблюдается для многих материалов при напряжениях, не превышающих определенного для данного материала предела.

Численное значение модуля E для различных материалов определяют лабораторным путем. Эти значения для наиболее часто применяемых материалов приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Значения модуля упругости E и коэффициента Пуассона ν

Материал	E , МПа	ν
Сталь прокатная	$(2 - 2,1) \cdot 10^5$	0,3
Чугун серый (белый)	$(1,15 - 1,6) \cdot 10^5$	0,3
Алюминиевые сплавы	$0,7 \cdot 10^5$	0,31 – 0,35
Медь, латунь, бронза	$(1,0 - 1,3) \cdot 10^5$	0,18
Бетон	$(0,04 - 0,4) \cdot 10^5$	0,16 – 0,2
Кирпичная кладка	$(0,001 - 0,078) \cdot 10^5$	0,25
Древесина при растяжении (сжатии)		
вдоль волокон	$(0,1 - 0,12) \cdot 10^5$	0,5
поперек волокон	$(0,004 - 0,01) \cdot 10^5$	0,02
Резина	$(0,00007 - 7) \cdot 10^5$	0,47 – 0,5
СВАМ при соотношении продольных и поперечных слоев		
1:1	$0,35 \cdot 10^5$	0,13
10:1	$0,58 \cdot 10^5$	-
Пробка	-	0
Парафин	-	0,5

3.3.2. Поперечная деформация

Продольная деформация сопровождается изменением поперечных размеров: при растяжении они уменьшаются, а при сжатии увеличиваются. Изменение поперечных размеров бруса при растяжении и сжатии называется поперечной деформацией.

Рассмотрим брус, который растягивается силой F (рис. 3.5). Обозначим через a один из поперечных размеров бруса до деформации. При растяжении этот размер уменьшится на величину Δa , которую назовем абсолютной поперечной деформацией или абсолютным поперечным сужением. Отношение абсолютного поперечного сужения к начальному размеру называется относительной поперечной деформацией

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a}. \quad (3.6)$$

Относительная поперечная деформация прямо пропорциональна соответствующей продольной деформации и обратна ей по знаку (см. (1.27)):

$$\varepsilon' = -\nu \varepsilon, \quad (3.7)$$

где ν – коэффициент поперечной деформации (см. п. 1.8.3).

Этот коэффициент представляет собой абсолютную величину отношения относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации:

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (3.8)$$

Определим, в каких пределах может изменяться величина ν . Из бруса до его деформации выделим двумя поперечными и четырьмя продольными плоскостями кубик со сторонами, равными единице (рис. 3.6).

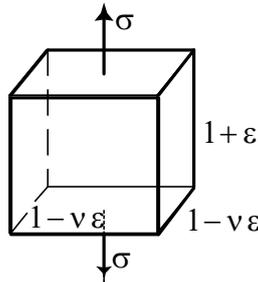


Рис. 3.6. Деформации элемента при его растяжении

В результате деформации кубик получит новые размеры: высоту $(1 + \varepsilon)$, стороны основания $(1 - \nu \varepsilon)$. Начальный объем кубика $V = 1 \text{ см}^3$, а после деформации $V' = (1 + \varepsilon)(1 - \nu \varepsilon)^2$. Пренебрегая величинами второго порядка малости, после перемножения получим

$$V' = 1 + \varepsilon(1 - 2\nu).$$

Относительное изменение объема кубика

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = \varepsilon(1 - 2\nu).$$

Если учесть (3.5), то

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\nu).$$

Считая, что объем куба при растяжении не может уменьшаться (он незначительно увеличивается или в предельном случае остается без изменения), получим

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon (1 - 2\nu) \geq 0,$$

$$(1 - 2\nu) \geq 0, \quad 2\nu \leq 1, \quad \nu \leq 0,5.$$

Таким образом, для различных материалов значения коэффициента Пуассона находятся в пределах $0 \leq \nu \leq 0,5$. Значения коэффициента Пуассона для некоторых материалов приведены в табл. 3.1.

3.4. Определение перемещений при растяжении и сжатии

Определение перемещений при известных значениях напряжений заключается в интегрировании системы дифференциальных зависимостей (1.20)-(1.25):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}$$

3.4.1. Растяжение стержня силой на конце

При растяжении или сжатии (см. рис. 3.7, а также п. 1.7.1)

$$\sigma_x = \frac{N}{A}, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0. \quad (3.9)$$

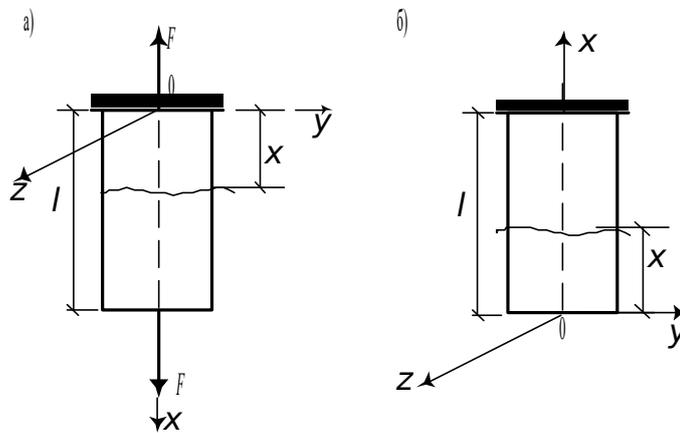


Рис. 3.7. К определению перемещений в стержне при растяжении или сжатии

На основании закона Гука (1.27), (1.28) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{\sigma_x}{E}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = -\frac{\nu\sigma_x}{E}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)] = -\frac{\nu\sigma_x}{E}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая (1.20) – (1.25) и (1.27), (1.28), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{N}{EA}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu N}{EA}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\nu N}{EA}, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (3.11)$$

Интегрирование первых трех уравнений дает

$$u = \frac{Nx}{EA} + D, \quad v = -\frac{\nu Ny}{EA}, \quad w = -\frac{\nu Nz}{EA}. \quad (3.12)$$

Уравнения (3.10) при этих значениях u , v и w выполняются, следовательно, (3.12) – искомое решение. Жесткие перемещения в на-правлениях осей Y , Z и жесткие повороты вокруг координатных осей под действием продольных сил невозможны. Поэтому во втором и третьем уравнениях (3.11) постоянные интегрирования приняты равными нулю. Что касается первого уравнения (3.12), то здесь удержана только одна постоянная D , т. к. закрепление должно препятствовать только смещению стержня в направлении оси OX (рис. 3.7). Если стержень закреплен в на-чале координат, то по условию $u = 0$ при $x = 0$, значит, постоянная $D = 0$. Если начало координат расположено на свободном конце (рис. 3.7), то

$$u = \frac{Nx}{EA} + D.$$

По условию $u = 0$ при $x = l$, поэтому постоянная

$$D = -\frac{Nl}{EA}.$$

Перемещения v и w (3.12) не зависят от расстояния до закрепления, т. е. от положения сечения. На оси стержня они равны нулю, а по мере удаления от оси возрастают по абсолютной величине. Знак минус указывает на направление перемещений, обратное направлению координатных осей OY и OZ (при положительных значениях координат Y и Z). Перемещения u точек стержня в направлении растяжения одинаковы в каждом поперечном сечении (X фиксировано). Это означает, что при растяжении плоская форма сечения не искажается. Сечение перемещается как жесткое по направлению действия силы на величину, пропорциональную расстоянию до закрепленного конца. В случае рис. 3.7, а наибольшие перемещения совпадают с абсолютным удлинением стержня:

$$u_{x=l} = \Delta l = \frac{Nl}{EA},$$

где N – нормальная сила, равная растягивающей силе F .

Если стержень растягивается несколькими силами (рис. 3.8), приложенными в разных сечениях, то в пределах каждого участка, где нормальная сила имеет постоянное значение, вычисление перемещений можно производить по формулам (3.12). Постоянная D при этом на разных участках имеет разные значения. Последние определяются условиями сопряжения участков между собой. Покажем это.

$$F_1 + F_2 + F_3$$

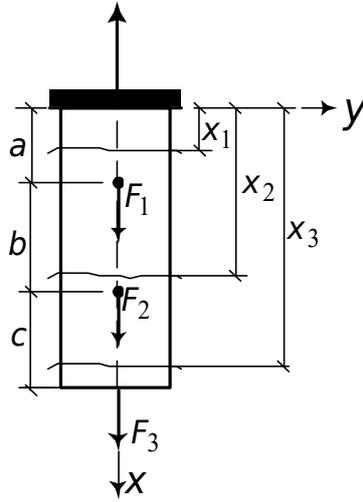


Рис. 3.8. Перемещения в стержне, нагруженном несколькими силами

Перемещения U на участках стержня представляются равенствами

$$u_1 = \frac{N_1 x_1}{EA} + D_1, \quad 0 \leq x_1 \leq a;$$

$$u_2 = \frac{N_2 x_2}{EA} + D_2, \quad a \leq x_2 \leq a+b;$$

$$u_3 = \frac{N_3 x_3}{EA} + D_3, \quad a+b \leq x_3 \leq a+b+c.$$

Здесь $N_1 = F_1 + F_2 + F_3$; $N_2 = F_2 + F_3$; $N_3 = F_3$.

По условию $u_1 = 0$ при $x_1 = 0$ (заделка), отсюда

$$D_1 = 0.$$

На границе между первым и вторым участками при $x_1 = a, x_2 = a$ должно быть $u_2 = u_1$, т. е.

$$\frac{N_2 a}{EA} + D_2 = \frac{N_1 a}{EA},$$

откуда

$$D_2 = \frac{F_1 a}{EA}.$$

Аналогично, по равенству $u_3 = u_2$ при $x_2 = a+b$ и $x_3 = a+b$, т. е. на границе между вторым и третьим участками

$$\frac{N_3(a+b)}{EA} + D_3 = \frac{N_2(a+b)}{EA} + D_2,$$

откуда

$$D_3 = \frac{F_1 a + F_2(a+b)}{EA}.$$

Все постоянные найдены, теперь можно определить перемещения. Деление на участки при вычислении перемещений нужно производить и в тех случаях, когда стержень имеет ступенчатую форму, т.е. состоит из отдельных частей с разными площадями поперечных сечений (см. рис. 1.12).

3.4.2. Растяжение стержня под действием собственного веса

Предположим, что составляющие напряжений в рассматриваемой задаче (рис. 3.9) определяются такими же формулами (3.9), как и в стержне, растягиваемом силой на конце.

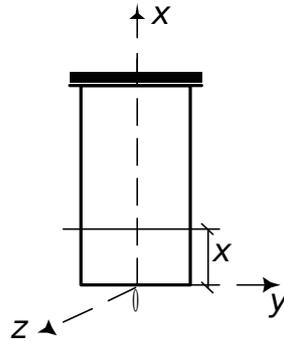


Рис. 3.9. К определению перемещений в брусе под действием собственного веса

Нормальная сила в сечении X равна

$$N = \gamma x A,$$

где γ – объемный вес материала стержня, A – площадь поперечного сечения.

Напряжение в сечении, в соответствии с (3.1), равно

$$\sigma_x = \gamma x. \quad (3.13)$$

Итак, при растяжении стержня собственным весом в поперечных сечениях возникают только равномерно распределенные нормальные напряжения. В любой точке сечения материал находится в линейном напряженном состоянии. Напряжения σ_x изменяются по длине стержня в соответствии с линейным законом.

Используя (1.27), (1.20) – (1.22) и (3.13), получим

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\gamma x}{E}; \quad (3.14)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu \sigma_x}{E} = -\frac{\nu \gamma x}{E}; \quad (3.15)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\nu \sigma_x}{E} = -\frac{\nu \gamma x}{E}. \quad (3.16)$$

Интегрируем уравнение (3.14). В результате найдем

$$u = \frac{\gamma x^2}{2E} + f_0, \quad (3.17)$$

где f_0 – функция от координат Y и Z , подлежащая в дальнейшем определению.

Подставив (3.17) в (1.23) и (1.24), получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_0}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (3.18)$$

откуда

$$v = -x \frac{\partial f_0}{\partial y} + v_0, \quad w = -x \frac{\partial f_0}{\partial z} + w_0, \quad (3.19)$$

где v_0 и w_0 являются функциями координат Y и Z .

Подставив (3.19) в уравнения (3.15) и (3.16), найдем

$$-x \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{\nu \gamma x}{E}; \quad -x \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = -\frac{\nu \gamma x}{E}. \quad (3.20)$$

Так как v_0 и w_0 не зависят от X , то уравнения (3.20) мы сможем удовлетворить, лишь приняв

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} = \frac{\nu \gamma}{E}; \\ v_0 = 0; \quad w_0 = 0; \quad f_0 = \frac{\nu \gamma}{2E} (y^2 + z^2). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Подставив выражения (3.19) для V и W в уравнение (1.25), найдем

$$-x \frac{\partial^2 f_0}{\partial y \partial z} + \frac{\partial v_0}{\partial z} - x \frac{\partial^2 f_0}{\partial y \partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0, \quad (3.22)$$

а так как v_0 и w_0 не зависят от X , то должны быть выполнены условия

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial y \partial z} = 0; \quad \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0. \quad (3.23)$$

На основании уравнений (3.21) и (3.23) можем написать общие выражения для функций u , v и w :

$$u = \frac{\gamma}{2E} [x^2 + \nu(y^2 + z^2)] + D; \quad (3.24)$$

$$v = -\frac{\nu \gamma x y}{E}; \quad (3.25)$$

$$w = -\frac{\nu \gamma z x}{E}. \quad (3.26)$$

На оси стержня $y = z = 0$

$$u = \frac{\gamma x^2}{2E} + D; \quad (3.27)$$

$$v = w = 0. \quad (3.28)$$

Как и ранее (см. п. 3.4), жесткие повороты вокруг координатных осей под действием равномерно распределенной нагрузки γA , представляющей собой вес бруса, невозможны. Поэтому в уравнениях (3.25) и (3.26) постоянные интегрирования равны нулю. В уравнении (3.24) постоянная D определяется из граничных условий – при $x = l$ $u = 0$ (см. рис. 3.9).

Плоскости поперечных сечений при растяжении собственным весом не остаются плоскими, они искривляются. Искажение сечений не зависит от положения их вдоль длины стержня (величина $\nu(y^2 + z^2)$ постоянна и не зависит от X). Точки же стержня, лежащие на оси X , имеют лишь вертикальные перемещения (3.27).

Как показывает формула (3.27), удлинение бруса (рис. 3.9) от собственного веса вдвое меньше того, которое вызвал бы груз, равный весу бруса и приложенный на его конце.

Полученные формулы (3.24) – (3.28) применимы и в случае сжатия вертикально расположенных брусьев, у которых опорным сечением является нижнее (рис. 3.10).

Влияние собственного веса на напряжения и деформации при растяжении или сжатии является существенным лишь в тех случаях, когда длина l растянутого бруса или высота h сжатого велика. Примерами могут служить высокие каменные столбы, заводские трубы, стены высоких зданий и т. п. В этих случаях рационально применять брусья переменного сечения. Форму их боковой поверхности можно подобрать так, что во всех поперечных сечениях будут возникать одинаковые напряжения. Такой брус называют брусом равного сопротивления при растяжении или сжатии (рис. 3.10, б). Брус равного сопротивления является наиболее экономичным с точки зрения расхода материала, однако изготовление его затруднительно вследствие нелинейной боковой поверхности. Вместо брусьев равного сопротивления применяют брусья в виде усеченных пирамид (рис. 3.10, а) или ступенчатые (рис. 3.10, в).

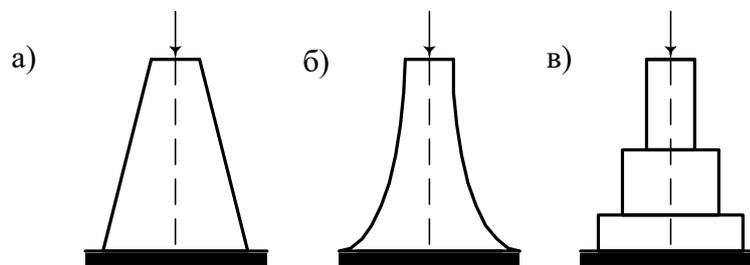


Рис. 3.10. Брусья переменного сечения:
а – усеченная пирамида; б – брус равного сопротивления; в – ступенчатый брус

3.5. Статически неопределимые системы, работающие на растяжение или сжатие

Статически неопределимыми стержневыми системами называются системы, имеющие число неизвестных реакций или усилий в стержнях, превышающее число уравнений равновесия, которые можно составить для определения этих неизвестных. Для решения таких задач необходимо составить уравнения равновесия и установить, сколько имеется лишних неизвестных. После чего составить дополнительные уравнения, исходя из рассмотрения условий деформации системы.

3.5.1. Расчет статически неопределимых систем

на силовые воздействия

Пусть, например, стержень AB постоянного сечения (рис. 3.11), выполненный из однородного материала, закрепленный по концам, нагружен силой F в пределах его длины l .

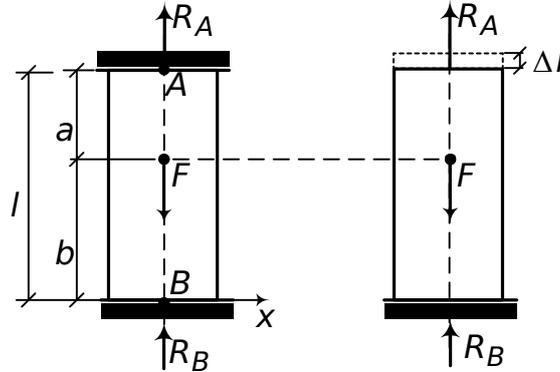


Рис. 3.11. К расчету статически неопределимых систем на силовые воздействия

От действия силы F в заделках A и B возникают опорные реакции R_A и R_B . Примем их направления противоположными направлению силы F . Составим единственное уравнение равновесия $\sum Y = 0$:

$$R_A + R_B = F.$$

Число неизвестных превышает число возможных уравнений равновесия на единицу. Следовательно, система один раз статически неопределима.

Для ее решения составим одно дополнительное уравнение. Оно в данной задаче выражает следующую мысль: длина бруса l не может измениться, так как он жестко закреплен с двух сторон, т. е.

$$\Delta l = 0.$$

Отбросим одну из заделок, например, верхнюю, и заменим ее действие на стержень реакцией R_A . В этой системе (теперь статически определимой), используя принцип независимости действия сил, найдем Δl :

$$\Delta l = \frac{R_A l}{EA} - \frac{F b}{EA} = 0.$$

Отсюда определим

$$R_A = \frac{F b}{l}.$$

Из уравнения равновесия следует

$$R_B = \frac{F a}{l}.$$

Реакции R_A и R_B определены и получены со знаком плюс, что указывает на правильность выбранного направления. Таким образом, раскрыта статическая неопределимость системы. Эпюра продольных сил строится обычным путем с применением метода сечений (см. п. 1.7.1).

3.5.2. Расчет статически неопределимых систем на температурные воздействия и неточность изготовления

В статически определимых системах температурные воздействия и неточность изготовления элементов систем не вызывают усилий.

При изменении температуры в статически неопределимых системах возникают отличные от нуля усилия.

Покажем это. Рассмотрим стальной брус (рис. 3.12, а), заделанный своими концами в стены, которые считаются неподвижными, так что длина бруса l остается неизменной.

Температура бруса повысилась с t_1 до t_2 . Повышение температуры составляет $t = t_2 - t_1$. От повышения температуры брус стремится удлиняться, но стены препятствуют этому удлинению, давят на концы бруса и вызывают в нем сжимающие напряжения от реакции R_t .

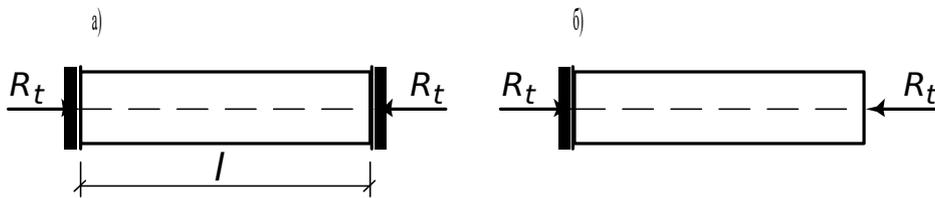


Рис. 3.12. К расчету статически неопределимых систем на температурные воздействия

Предположим, что правая стена убрана (рис. 3.12, б). Тогда удлинение бруса, вызванное температурой, равно

$$\Delta l_t = \alpha t l,$$

где α – коэффициент линейного расширения материала бруса (для стали $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$).

В действительности стена у правого конца бруса имеется. Она сжимает брус силой R_t , укорачивая его:

$$\Delta l_R = \frac{R_t l}{EA}.$$

Удлинение Δl_t и укорочение Δl_R должны быть равны, так как в действительности длина бруса не изменяется:

$$\alpha t l = \frac{R_t l}{EA},$$

отсюда

$$R_t = \alpha t EA.$$

Напряжение, вызванное изменением температуры бруса, составляет

$$\sigma_t = \frac{R_t}{A} = \alpha t E.$$

При изготовлении конструкции неизбежны небольшие неточности, например, в длинных элементах. В статически определимых системах

такие неточности не вызывают никаких дополнительных напряжений. Совершенно иначе обстоит дело, если система статически неопределима.

Пусть брус подвешен на трех стержнях (рис. 3.13), причем в результате неточности изготовления средний стержень 2 сделан короче на величину δ . Чтобы собрать конструкцию и соединить с бруском, средний стержень необходимо растянуть на величину Δl_2 , а крайние стержни сжать на величину Δl_1 так, чтобы нижние концы всех стержней расположились на одной горизонтали. Отсюда получим уравнение совместности деформаций:

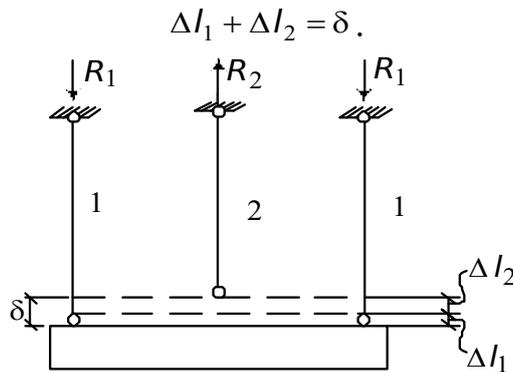


Рис. 3.13. К расчету статически неопределимых систем на неточность сборки

При сборке в стержнях появятся усилия, хотя внешней нагрузки нет: в крайних стержнях – сжимающие R_1 , в среднем – растягивающие R_2 . Составим уравнение статики $\sum Y = 0$: $R_2 - 2R_1 = 0$.

Выразим удлинения через усилия:

$$\frac{R_1 l}{E_1 A_1} + \frac{R_2 l}{E_2 A_2} = \delta.$$

Решая совместно уравнение статики и уравнение совместности, найдем

$$R_1 = \frac{\delta}{l \left[\frac{1}{E_1 A_1} + \frac{2}{E_2 A_2} \right]};$$

$$R_2 = \frac{2\delta}{l \left[\frac{1}{E_1 A_1} + \frac{2}{E_2 A_2} \right]}.$$

3.6. Сведения о строительных материалах несущих конструкций

К основным строительным материалам, из которых изготавливаются несущие конструкции, относятся сталь, алюминий и его сплавы, железобетон, древесина, пластмассы и др.

Сталью называют сплав железа с углеродом и основными добавками марганца (его обозначают буквой Г), кремния (С). Для улучшения ее свойств сталь легируют (соединяют, связывают) добавками хрома (Х), ни-

келя (Н), меди (Д), молибдена (М), титана (Т), ванадия (Ф), циркония (Ц). Вредными примесями являются сера и фосфор.

Стали маркируют буквами и цифрами. Содержание углерода в сотых долях процента указывают первыми двумя цифрами, легирующие добавки обозначают буквами, а их содержание сверх 1,5 % ставят после соответствующей буквы в целых единицах. Содержание добавок менее 0,3 % не фиксируют. Например, низколегированная сталь марки 23Х2Г2Т содержит 0,23 % углерода, хрома и марганца – от 1,5 до 2 %, титана – от 0,3 до 1,5 %. Содержание других легирующих добавок до 0,3 % не указано.

В зависимости от назначения и гарантируемых характеристик углеродистую сталь делят на три группы: группа А гарантирует механические свойства стали; Б – ее химический состав; В – механические свойства и химический состав.

По ГОСТ 380-71 марку углеродистой стали обозначают буквами Ст; порядковыми номерами 0, 1, ... , 6 характеризуют ее химический состав и механические свойства; указывают группу стали – Б, В (группу А не указывают); обозначают степень раскисления – кп (кипящая сталь, сразу разлитая из ковша в наложницы), пс (полуспокойная сталь – занимает промежуточное положение по продолжительности выдержки), сп (спокойная сталь, выдержанная некоторое время в ковшах); пишут категорию от нормируемых механических свойств – от 1-й до 6-й (первую категорию не указывают); при повышенном содержании марганца после обозначения марки ставят букву Г. Таким образом, марка углеродистой стали ВСтЗсп2 означает: сталь 3, спокойная, 2-й категории, группы В; ВСтЗГпс – сталь 3 с повышенным содержанием марганца, полуспокойная, группы В.

В строительных нормах для упрощения маркировки строительные и арматурные стали делят на условные классы прочности (классы стали): строительные – С38/23...С85/75; арматурные – А-1...А-V, Ат-IV...Ат-VI, В-I, В-II, Вр-II, К-7. Цифры в индексах классов строительных сталей обозначают: числитель – минимальное временное сопротивление на разрыв по ГОСТу, кгс/мм²; знаменатель – минимальный предел текучести по ГОСТу, кгс/мм². Буквы в индексах классов арматурных сталей обозначают: Ат – термически упроченная, В (волочение) – проволока гладкая, Вр – проволока периодического профиля (рифленая), К – канат.

Строительные стали применяют преимущественно в виде прокатных профилей, листов; арматурные – в виде стержней или проволоки, получаемой волочением.

Алюминий и сплавы играют второстепенную роль и применяются в тех случаях, когда это экономически целесообразно или невозможно применение стали. Алюминий легче стали почти в 3 раза, прочность его сплавов мало ей уступает, но модуль упругости также почти в 3 раза меньше, что определяет большую его деформативность в конструкциях.

Для строительных конструкций применяют сплавы алюминия с медью (АД1М, АД31Т1), с марганцем (АМцМ), магнием (АМг2М, АМг2П),

сплавы с добавками цинка (1915Т) и меди (1925Т). Буквы после обозначения марки сплава обозначают его состояние: М – отожженное (мягкое), П – полузакаленное (путем вытяжки), Т – закаленное (твердое), Т1 – закаленное и искусственно состаренное при повышенной температуре.

Железобетон – это комплексный материал, удачно сочетающий два разнородных материала – сталь и бетон. Длительная и надежная совместная работа стали и бетона обеспечивается их физико-механическими свойствами, а также выполнением правил сочетания этих материалов (при конструировании железобетонных элементов).

Бетон хорошо сопротивляется сжатию и гораздо хуже – растяжению. Поэтому во всех железобетонных конструкциях растянутые, а иногда и сжатые от нагрузки зоны бетона усиливают хорошо сопротивляющейся растяжению (и сжатию) сталью.

Древесина – древнейший строительный материал. В основных элементах строительных конструкций используют хвойную древесину, так как она содержит меньше пороков, чем лиственная древесина, а также включает смолы, что способствует лучшему сопротивлению увлажнению и загниванию. Из хвойной древесины наиболее высоким качеством отличается сосновая древесина. Среди лиственных пород выделяется дубовая древесина, обладающая повышенной прочностью и стойкостью к загниванию, но и большей стоимостью.

Пластмассы. Конструкционные пластмассы используют в составе элементов несущих и ограждающих конструкций. Из наиболее прочных стеклопластиков выполняют основные элементы несущих конструкций. Прозрачные стеклопластики применяют в элементах ограждающих конструкций зданий. Сверхлегкие пенопласты используют в средних слоях легких покрытий и стен.

3.7. Испытания материалов на растяжение и сжатие

Чтобы иметь возможность судить о прочности конструкций под нагрузкой, нужно изучить основные свойства применяемых материалов и их поведение при увеличении нагрузки вплоть до разрушения. Для этого образцы материала испытывают в лаборатории на специальных машинах.

Металлические образцы для испытания на растяжение изготавливают в виде стержней круглого или прямоугольного сечения. Круглые образцы имеют на концах утолщения (головки), а плоские – уширения. Этими концами образцы закладывают в захваты испытательной машины, после чего растягивают. Для получения сравнительных результатов испытаний данного материала, произведенных на различных образцах, необходимо, чтобы образцы имели определенные соотношения размеров. Эти соотношения и сами размеры установлены стандартом (ГОСТ 1497-84).

3.7.1. Диаграммы растяжения пластичных и хрупких материалов

Рассмотрим вначале результаты испытаний на растяжение образцов из низкоуглеродистой стали (рис. 3.14). Из этой группы сталей наибольшее применение для строительных конструкций находят стали марок Ст3 и Ст3ГПс.

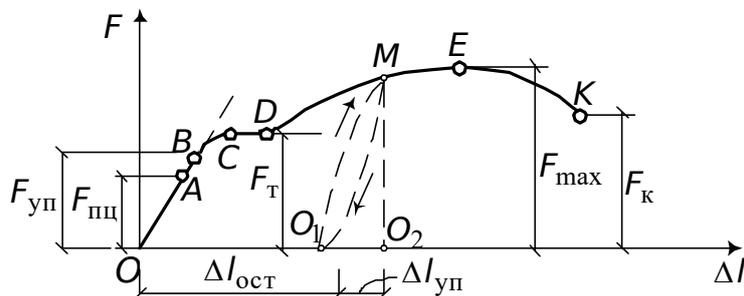


Рис. 3.14. Диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали

В начальной стадии нагружения до точки **A** диаграмма растяжения представляет собой наклонную прямую, что указывает на пропорциональность между нагрузкой и деформацией – справедливость закона Гука (3.5). Нагрузка, при которой эта пропорциональность еще не нарушается, на диаграмме обозначена через $F_{пц}$ и используется для вычисления напряжения $\sigma_{пц}$, до которого существует прямо пропорциональная зависимость между нагрузкой и деформацией:

$$\sigma_{пц} = \frac{F_{пц}}{A_0},$$

где A_0 – площадь поперечного сечения образца.

Для стали Ст3 предел пропорциональности приблизительно равен $\sigma_{пц} = (195 - 200)$ МПа.

Зона **OA** называется зоной упругости. Здесь возникают только упругие, очень незначительные деформации (0,1 %). Данные, характеризующие эту зону, позволяют определить значение модуля упругости E .

После достижения предела пропорциональности деформации начинают расти быстрее, чем нагрузка, и диаграмма становится криволинейной. На этом участке в непосредственной близости от точки **A** находится точка **B**, соответствующая пределу упругости. Пределом упругости $\sigma_{уп}$ называется максимальное напряжение, при котором в материале не обнаруживаются признаков пластической (остаточной) деформации (0,001 – 0,03 %). Предел упругости характеризует начало перехода от упругой деформации к пластической.

У большинства металлов значения предела пропорциональности и предела упругости незначительно отличаются друг от друга. Для стали Ст3 $\sigma_{уп} = (205 - 210)$ МПа.

При дальнейшем нагружении криволинейная часть диаграммы переходит в почти горизонтальный участок **CD** – площадку текучести. Здесь деформации растут практически без увеличения нагрузки. Нагрузка F_T ,

соответствующая точке D , используется при определении физического предела текучести

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}.$$

Физическим пределом текучести σ_T называется наименьшее напряжение, при котором образец деформируется без заметного увеличения растягивающей нагрузки.

Предел текучести является одной из основных механических характеристик прочности металлов. Для Ст3 $\sigma_T = (220 - 250)$ МПа. При этом относительная деформация составляет $\varepsilon = (\Delta l / l) \cdot 100 \% \approx 2 \%$.

Зона BD называется зоной общей текучести. В этой зоне значительно развиваются пластические деформации. При этом у образца повышается температура, изменяются электропроводность и магнитные свойства. Особенно наглядно фронт распространения пластической деформации вдоль образца можно наблюдать при испытании плоских полированных образцов. На поверхности таких образцов в момент возникновения пластической деформации появляются темные наклонные полосы, которые, как правило, с осью образца составляют углы $45^\circ - 60^\circ$ (линии Людерса-Чернова). Эти линии возникают вследствие необратимых сдвигов, происходящих в кристаллах под действием небольших касательных напряжений. Описанные явления вызывают изменение внутренней структуры металла, что приводит к его упрочнению. Диаграмма после зоны текучести снова становится криволинейной. Образец способен воспринимать возрастающее усилие до значения F_{\max} – точка E на диаграмме. Усилие F_{\max} используется для вычисления временного сопротивления

$$\sigma_B = \frac{F_{\max}}{A}.$$

Напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, предшествующей разрушению образца, называется временным сопротивлением.

Для стали марки Ст3 временное сопротивление $\sigma_B = (370 - 470)$ МПа. Относительная деформация при этом составляет $\approx 16 \%$.

Зона DE называется зоной упрочнения. Здесь удлинение происходит равномерно по всей длине, первоначальная цилиндрическая форма образца сохраняется, а поперечное сечение изменяется незначительно и также равномерно. При максимальном усилии на образце в наиболее слабом месте возникает локальное уменьшение поперечного сечения – шейка (а иногда и две). Дальнейшая деформация происходит в этой зоне образца. Сечение в середине шейки продолжает быстро уменьшаться, но напряжения в этом сечении все время растут, хотя растягивающее усилие и убывает. Вне области шейки напряжения уменьшаются, и поэтому удлинения остальной части образца не происходит. Наконец, в точке K образец разрушается. Сила, соответствующая точке K , называется разрушающей, а напряжение – истинным пределом прочности, которое равно

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A_k},$$

где A_k – площадь поперечного сечения в месте разрыва.

Зона EK называется зоной местной текучести. Истинное напряжение в момент разрыва (в шейке) в образце из стали Ст3 достигает 900 – 1000 МПа.

Помимо указанных характеристик прочности по результатам испытаний образца (рис. 3.14) определяют и характеристики пластичности.

Относительное удлинение после разрыва

$$\delta = \frac{l_k - l_0}{l_0} \cdot 100 \%,$$

где l_k – расчетная длина рабочей части образца после разрыва;

l_0 – первоначальная длина рабочей части образца ($l_0/d_0 = 5 - 10$);

d_0 – первоначальный диаметр образца.

Для стали марки Ст3 характеристика пластичности $\delta = (25 - 27) \%$.

Другой характеристикой пластичности является относительное сужение после разрыва ψ (%):

$$\psi = \frac{A_0 - A_k}{A_0} \cdot 100 \%,$$

где A_0 – начальная площадь поперечного сечения образца.

Для стали марки Ст3 $\psi = (60 - 70) \%$.

Если образец после нагрузки, соответствующей пределу текучести (рис. 3.14), разгрузить, то процесс разгрузки будет изображен линией MO_1 , почти параллельной первоначальному упругому участку диаграммы. Удлинение, полученное образцом до начала разгрузки, при разгрузке полностью не исчезает. Остаточное удлинение $\Delta l_{ост}$ (отрезок OO_1 на рис. 3.14) называется пластическим удлинением ($\Delta l_{уп}$ – упругое удлинение). Следовательно, за пределом упругости полное удлинение образца состоит из двух частей – упругой и пластической:

$$\Delta l = \Delta l_{уп} + \Delta l_{ост},$$

а до предела упругости – только из чисто упругой – $\Delta l_{ост} = 0$.

Если после разгрузки образца его тут же снова нагрузить, то процесс повторного нагружения отобразится линией O_1M , которая почти совпадает с линией MO_1 , описывающей процесс разгрузки. Обе линии (разгрузки и нагрузки) образуют петлю – петлю гистерезиса. Площадь петли гистерезиса соответствует потерям механической энергии за один цикл, которые весьма малы. Эти потери называются внутренним (молекулярным) трением.

При дальнейшем нагружении (после точки M) кривая продолжается так, как будто не было промежуточной разгрузки. Следовательно, у образца после предварительного деформирования улучшились упругие свойства

– повысились предел пропорциональности и предел упругости, но зато ухудшились пластические свойства – уменьшилось остаточное удлинение после разрыва, т. е. материал стал более хрупким.

Явление повышения упругих свойств материала в результате предварительного пластического деформирования называется наклепом.

Следует отметить, что после предварительной вытяжки металла в некотором направлении его механические свойства изменяются при работе на растяжение только в том же направлении; при работе на сжатие в том же направлении его свойства почти не изменяются. Последнее обстоятельство имеет большое значение для материала, который подвергается действию переменных напряжений.

Диаграмма растяжения $F = f(\Delta l)$ (см. рис. 3.14) характеризует свойства образца, так как зависит от его размеров. Для оценки механических свойств материала диаграмму растяжения перестраивают в координатах “напряжение-деформация”. Для этого все ординаты делят на первоначальную площадь поперечного сечения A_0 , а все абсциссы – на первоначальную длину рабочей части l_0 . В результате получаем диаграмму напряжений $\sigma = f(\varepsilon)$, которая имеет тот же вид, что и диаграмма $F = f(\Delta l)$, так как A_0 и l_0 постоянны. Эта диаграмма является условной, поскольку при ее построении не учитывается изменение значений A_0 и l_0 в процессе испытания. Истинные напряжения в каждый момент нагружения будут больше условных. Заметное отклонение истинных напряжений от условных происходит после предела текучести, так как сужение сечения становится более значительным. Диаграммы истинных напряжений строятся, как правило, для теоретических исследований, например, при решении задач образования больших деформаций. Условные диаграммы напряжений используются на практике для определения механических характеристик материала $\sigma_{пц}$, $\sigma_{уп}$, σ_T , σ_B , σ_K , δ , ψ , а также модуля упругости E .

Диаграмма растяжения низколегированной стали изображена на рис. 3.15. Аналогичную диаграмму имеют и другие пластичные материалы, например, красная медь, сплавы алюминия.

В начале диаграммы между нагрузкой и деформацией также соблюдается прямо пропорциональная зависимость (закон Гука). Точка, где эта зависимость нарушается, соответствует пределу пропорциональности. После точки A прямолинейный участок диаграммы плавно переходит в криволинейный – зону пластических деформаций.

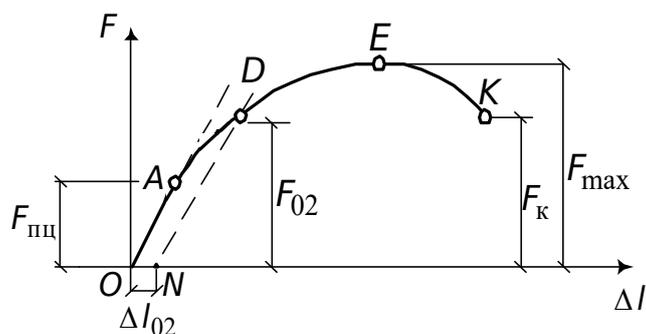


Рис. 3.15. Диаграмма растяжения низколегированной стали

На диаграмме растяжения нет площадки текучести. Поэтому вместо физического предела текучести определяют условный предел текучести σ_{02} (точка D на рис. 3.15) – напряжение, при котором остаточное удлинение достигает 0,2 % от рабочей длины образца:

$$\sigma_{02} = \frac{F_{02}}{A_0}.$$

Для определения нагрузки F_{02} вычисляется значение остаточного удлинения Δl_{02} , исходя из рабочей длины образца. Отрезок, соответствующий остаточной деформации Δl_{02} , откладывается вправо от точки O . Из точки N проводится прямая, параллельная OA , до пересечения с диаграммой растяжения. При приближении к максимальной нагрузке на образце появляется местное сужение (точка E). После точки E нагрузка начинает уменьшаться. При нагрузке F_k образец разрушается. Следует отметить, что участок диаграммы EK у низкоуглеродистой стали (рис. 3.14) длиннее, чем у низколегированной. Это указывает на то, что низколегированная сталь обладает меньшей пластичностью, поэтому шейка у нее является менее выраженной. Механические же характеристики прочности выше у низколегированной, чем у низкоуглеродистой стали.

При растяжении образцов из хрупкого материала (чугуна) на диаграмме (рис. 3.16) почти не получается прямолинейного участка: искривление линии графика начинается при сравнительно низких напряжениях, но так как деформации в этом случае малы, отклонение от закона Гука незначительное.

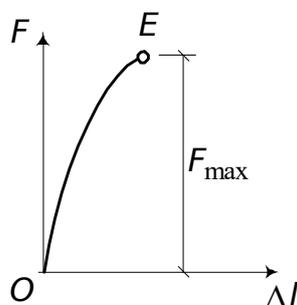


Рис. 3.16. Диаграмма растяжения чугуна

Разрыв образцов из хрупких материалов происходит почти внезапно при очень малых удлинениях ($\approx 0,4 - 1\%$ расчетной длины образца).

Характер разрушения чугунного образца существенно отличается от разрушения стального. Разрушение чугунного образца происходит в результате отрыва по площадке, перпендикулярной направлению растягивающей силы. На поверхности излома видна крупнозернистая структура материала.

3.7.2. Диаграммы сжатия различных материалов

Если на концах прямого бруса приложены силы, направленные вдоль его оси навстречу друг другу, то в брусе возникает сжатие. Длина бруса должна быть не более чем в пять-шесть раз больше меньшего из его поперечных размеров, чтобы не возникало продольного изгиба.

Испытанию на сжатие подвергают короткие образцы обычно круглого или квадратного сечения. Образец помещают между опорными плитами пресса, которые, сближаясь, сжимают его. Но на результат опыта сильно влияет трение, возникающее между основаниями образца и опорными плитами пресса. Сжатый в продольном направлении образец стремится расширяться в поперечных направлениях, однако у концов образца трение препятствует такому расширению.

Для уменьшения влияния трения производят смазку маслом или парафином. При этом предел прочности получается несколько ниже по сравнению с образцами, испытываемыми без смазки. Таким образом, получаемый из опыта предел прочности является в значительной мере условной величиной, поэтому установлены стандартные пределы.

Хрупкие материалы, например, чугун (рис. 3.17), при испытании на сжатие без смазки торцов разрушается в основном от сдвига по площадкам с наибольшими касательными напряжениями (рис. 3.17, б). Диаграмма с самого начала имеет почти линейную зависимость (рис. 3.17, а). На этом участке диаграммы форма и размеры образца изменяются незначительно. При приближении к максимальной нагрузке кривая диаграммы становится более полой, и образец принимает слегка бочкообразную форму.

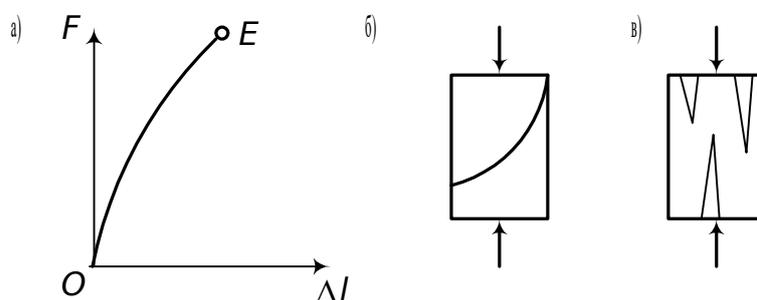


Рис. 3.17. Диаграмма сжатия чугуна

При хорошо смазанных торцах разрушение образцов из хрупких материалов сопровождается образованием продольных трещин (рис. 3.17, в). Причиной их появления является неравномерное распределение усилий

по поверхности соприкосновения образца с плитой, которое при больших деформациях вызывает перекося элементарных частиц внутри образца. В результате появляются отрывающие усилия в сечениях, параллельных оси бруса.

Большинство хрупких материалов (бетон, камень) разрушаются при сжатии так же, как чугун, и имеют подобную диаграмму. Хрупкие материалы сопротивляются сжатию значительно лучше, чем растяжению. Например, у серого чугуна предел прочности на сжатие равен 560 – 900 МПа, а на растяжение – 120 – 190 МПа, т. е. примерно в 4-5 раз меньше.

Образцы из пластичных материалов – стали, свинца, меди (рис. 3.18) – при сжатии значительно укорачиваются, сильно расширяясь в поперечном направлении, но трещин, характерных для сдвига, в них не наблюдается.

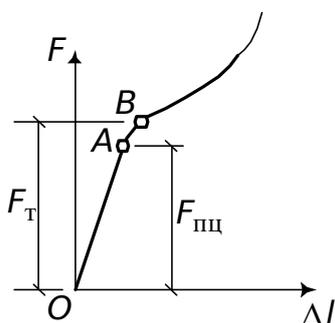


Рис. 3.18. Диаграмма сжатия низкоуглеродистой стали

Начальный участок диаграммы является прямолинейным – до точки **A** (рис. 3.18). Угол наклона совпадает с углом наклона аналогичного участка диаграммы растяжения. Это свидетельствует о том, что модуль упругости у стали при растяжении и сжатии можно принимать одинаковым. После точки **A** диаграмма плавно переходит в кривую, подобную диаграмме растяжения. Площадка текучести здесь выражена слабо. При дальнейшем нагружении, когда развиваются значительные пластические деформации, образец сплющивается, принимая бочкообразную форму. Обычно на этом испытание заканчивают, так как образец разрушить не удастся, как не удастся определить и предел прочности. Значения предела пропорциональности и предела текучести при растяжении и сжатии практически одинаковы.

Рассмотрим еще диаграмму сжатия древесины (рис. 3.19, а). Древесина относится к анизотропным материалам, сопротивляемость которых внешней нагрузке зависит от расположения волокон при испытании.

При сжатии образца вдоль волокон (кривая 1 на рис. 3.19, а) на участке **OA** древесина работает почти упруго, и рост деформаций фактически происходит пропорционально увеличению нагрузки.

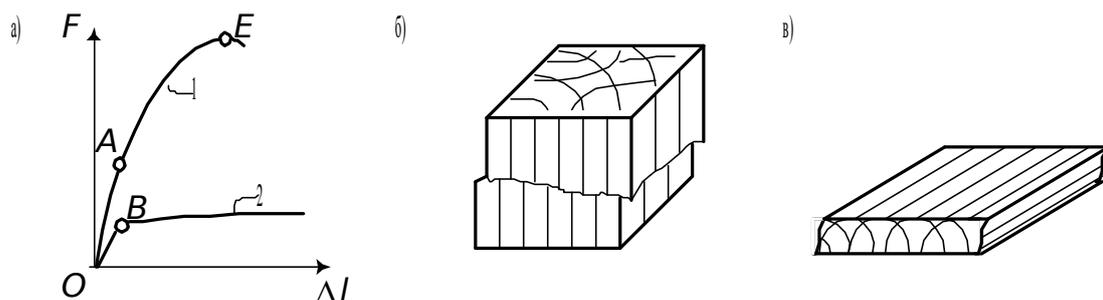


Рис. 3.19. Диаграмма сжатия древесины

При дальнейшем увеличении нагрузки деформации начинают расти быстрее, чем усилия. Это указывает на упругопластическую область работы материала. Разрушение образца происходит при нагрузке F_{\max} (точка E) с образованием характерной складки (рис. 3.19, б).

При сжатии образца поперек волокон до небольшой нагрузки (точка B на кривой 2 рис. 3.19, а), соответствующей пределу пропорциональности, между нагрузкой и деформацией существует линейная зависимость. Затем деформации быстро увеличиваются, а нагрузка растет незначительно. В результате образец спрессовывается – уплотняется. Разрушающая нагрузка определяется условно. Она соответствует деформации сжатия образца на $1/3$ своей первоначальной высоты.

Сопротивление древесины сжатию вдоль волокон в 8-10 раз больше сопротивления поперек волокон.

В заключение приведем механические характеристики (при растяжении и сжатии) наиболее часто применяемых в строительных конструкциях материалов (табл. 3.2).

Таблица 3.2

Механические характеристики некоторых строительных материалов

Материал	σ_B , МПа		σ_T (σ_{02}), МПа	δ , %	ψ , %
	при растяжении	при сжатии			
Ст3	370-470	-	220-250	23-27	60-70
О9Г2, 17ГС, 14Г2	450-520	-	310-350	21-23	-
Чугун серый С4	120-380	500-1200	-	1-1,4	-
Дюралюминий Д16	230-465	-	100-350	8-13	30-15
Бетон	0,14-2,5	0,95-0,43	-	-	-
Кирпич	0,7-3	7,5-100	-	-	-
Древесина вдоль волокон	25-34	20-33	-	-	-
СВАМ					
1:1	480	420	-	1,4-2	-
10:1	900	-	-	-	-

3.8. Влияние различных факторов на механические

характеристики материалов

Описанные выше испытания материалов проводятся при нормальных условиях, т. е. при температуре 20°C , непрерывном и плавном перемещении захватов машины со скоростью не более 10 мм/мин. Однако существуют различные условия, в которых приходится работать материалу строительных конструкций. Например, при повышенных или пониженных температурах, при действии радиоактивных, особенно нейтронных, проникающих излучений и др. Ясно, что механические свойства материалов будут изменяться и зависеть от условий эксплуатации конструкций, элементов машин и механизмов.

3.8.1. Влияние температуры

При повышении температуры у большинства материалов механические характеристики прочности уменьшаются, а при понижении температуры – увеличиваются. Например, предел текучести стали марки Ст3 в зависимости от температуры можно определить так:

$$\sigma_T(T) = \gamma_S \sigma_T(20^{\circ}\text{C}),$$

где T – температура, $^{\circ}\text{C}$;

γ_S – коэффициент, который выбирается согласно табл. 3.3.

Таблица 3.3

Зависимость коэффициента γ_S от температуры

Коэффициент	Температура, $^{\circ}\text{C}$							
	20	100	200	400	500	600	700	750
γ_S	1	0,95	0,9	0,8	0,7	0,5	0,25	0

Как видно из табл. 3.3, при $T = 750^{\circ}\text{C}$ предел текучести $\sigma_T = 0$.

Зависимость модуля упругости строительной стали марки Ст3 от температуры показана на рис. 3.20.

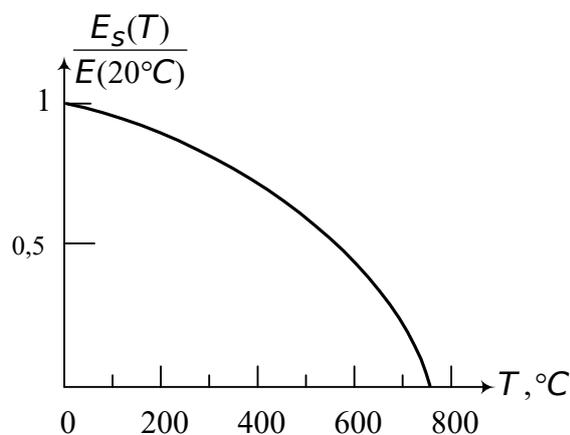


Рис. 3.20. Зависимость модуля упругости Ст3 от температуры

При отрицательных температурах у сталей увеличивается их хрупкость: при $T < -45^{\circ}\text{C}$ Ст3 становится хрупкой. Это свойство называется хладноломкостью.

Коэффициент Пуассона стали марки Ст3 мало зависит от температуры и равен примерно 0,28-0,33.

3.8.2. Влияние скорости деформации

Скорость нагружения и, следовательно, скорость деформирования влияют на механические характеристики материалов. С их увеличением у материалов увеличиваются механические характеристики прочности, особенно у пластмасс и других органических материалов. На рис. 3.21 изображена диаграмма напряжений низкоуглеродистой стали при статическом и динамическом нагружениях.

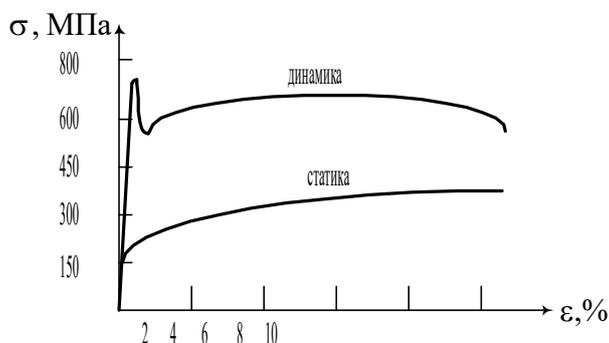


Рис. 3.21. Влияние на диаграмму напряжений низкоуглеродистой стали статического и динамического нагружения (средняя скорость деформации 970 1/с)

Сравнение этих диаграмм показывает, что предел текучести и временное сопротивление стали выше, а модуль упругости при динамическом испытании практически не изменяется.

Зависимости σ_T , σ_B , δ низкоуглеродистой стали от средней скорости деформации показаны на рис. 3.22.

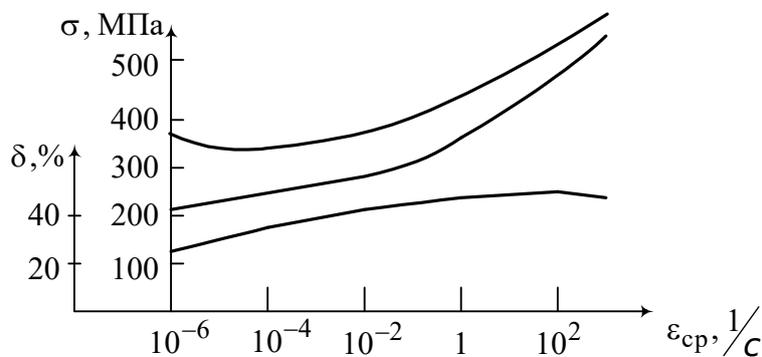


Рис. 3.22. Влияние скорости деформации на механические характеристики низкоуглеродистой стали

Графики на рис. 3.22 также свидетельствуют о том, что предел текучести σ_T и временное сопротивление σ_B выше при динамическом нагружении, чем при статическом.

3.8.3. Влияние технологических факторов

Механические характеристики стали, даже одного состава, зависят от способа ее получения и обработки. При литье возможность образования различных дефектов в виде пустот, раковин и включений увеличивается. Это приводит к снижению механических характеристик прочности стали.

Прокатка меняет структуру стали – делает ее анизотропной. При этом значительно изменяются механические свойства в направлении прокатки – сталь становится более прочной. В других направлениях механические свойства существенно отличаются от свойств в направлении прокатки.

Волочение представляет собой вытяжку с обжатием. Изделия, полученные таким способом, обладают высокими прочностными свойствами.

Существуют и другие способы технологической обработки стали: токарная обработка, обработка поверхности роликами, хромирование и др. Все эти способы направлены на то, чтобы улучшить прочностные свойства металлов.

3.9. Потенциальная энергия деформации и работа, затрачиваемая на растяжение стержня

В упругой стадии после разгрузки деформируемых тел их первоначальный объем и форма полностью восстанавливаются. Это указывает на наличие в нагруженном теле некоторого запаса энергии – потенциальной энергии деформации.

Вычислим работу, затрачиваемую на растяжение призматического стержня, закрепленного верхним концом и нагруженного на нижнем конце силой F (рис. 3.23, б). Зависимость между растягивающей силой и удлинением изобразим на диаграмме наклонной прямой (рис. 3.23, а).

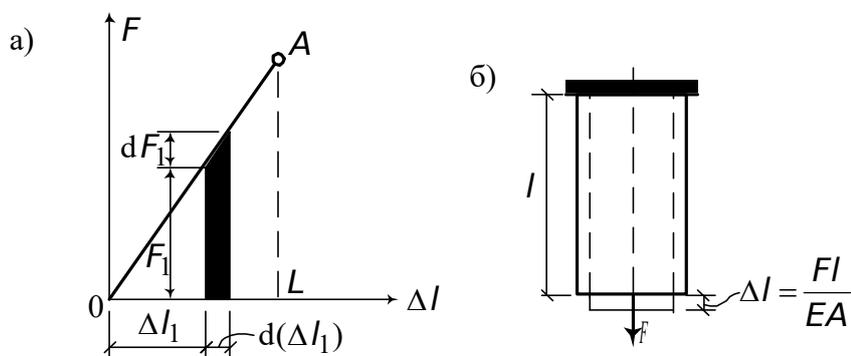


Рис. 3.23. К определению потенциальной энергии деформации

Пусть в некоторый момент нагружения растягивающая сила равна F_1 , а удлинение – Δl_1 , причем $F_1 = K \Delta l_1$, где $K = F/\Delta l$ – угловой коэффициент.

Растягивающей силе дадим бесконечно малое приращение dF_1 , тогда стержень получит бесконечно малое удлинение $d(\Delta l_1)$ и сила F_1 совершит на перемещении $d(\Delta l_1)$ работу

$$F \cdot d(\Delta l_1).$$

Работой силы dF_1 на перемещениях $d(\Delta l_1)$ пренебрегаем как бесконечно малой величиной второго порядка.

Тогда работа, затрачиваемая на растяжение образца в упругой стадии, равна

$$A = \int_0^{\Delta l} F_1 \cdot d(\Delta l_1) = K \int_0^{\Delta l} \Delta l_1 \cdot d(\Delta l_1) = \frac{F \Delta l}{2}. \quad (3.29)$$

Эта работа изображается площадью треугольника OAL (рис. 3.23,а).

При принятых предпосылках затраченная на растяжение образца работа полностью переходит в потенциальную энергию. Возникающими при этом потерями, ввиду их малости, пренебрегаем. Тогда

$$A = W = \frac{F \Delta l}{2}. \quad (3.30)$$

В формулу (3.30) входят конечные величины силы и деформации.

Подставив в (3.30) вместо Δl его значение (см. п. 3.4 и рис. 3.23), найдем

$$W = \frac{F^2 l}{2EA}. \quad (3.31)$$

Формулой (3.31) можно пользоваться только в том случае, когда продольная сила и площадь поперечного сечения постоянны.

Удельная потенциальная энергия, т. е. энергия, отнесенная к единице объема, равна

$$u = \frac{W}{V} = \frac{F^2 l}{2EA} \frac{1}{Al} = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (3.32)$$

Для определения работы, затрачиваемой на растяжение стержня за пределом пропорциональности, можно распространить те же рассуждения на всю диаграмму растяжения (рис. 3.24).

Из приведенных ранее рассуждений можно заключить, что работа, затраченная на разрыв образца, равна полной площади диаграммы растяжения

$$A = \eta F_{\max} \Delta l, \quad (3.33)$$

где η – коэффициент заполнения диаграммы. Для стали марки Ст3 $\eta = 0,85 - 0,87$.

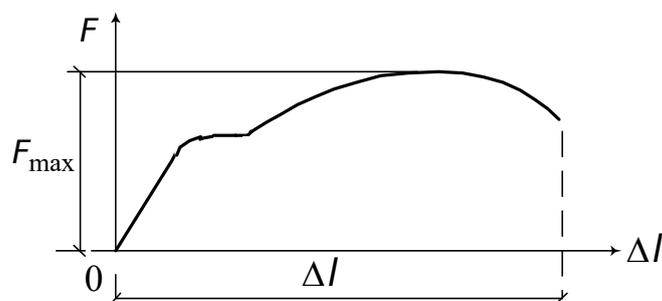


Рис. 3.24. К определению работы, затрачиваемой на растяжение стержня за пределом пропорциональности

3.10. Методы расчета строительных конструкций

3.10.1. Метод предельных состояний

Этот метод был разработан проф. Н.С. Стрелецким и начал применяться с 1955 г. По этому методу в настоящее время рассчитывают все конструкции промышленных и гражданских зданий и сооружений, мостов и др.

Предельным считается состояние, при котором конструкция перестает удовлетворять эксплуатационным требованиям, предъявляемым в процессе возведения зданий и сооружений.

Различают две группы предельных состояний: первая – непригодность к эксплуатации по причинам потери несущей способности; вторая – непригодность к нормальной эксплуатации в соответствии с предусмотренными технологическими или бытовыми условиями.

В правильно запроектированном сооружении не должно возникнуть ни одно из указанных предельных состояний, т. е. должна быть обеспечена его надежность.

Надежностью называется способность объекта сохранять в процессе эксплуатации качество, заложенное при проектировании.

Факторы, от точного учета которых зависит уровень надежности сооружения или отдельного его элемента, следующие:

- нагрузки и другие воздействия;
- механические свойства материалов;
- геометрические параметры конструктивных элементов;
- условия работы;
- степень ответственности сооружения и др.

3.10.1.1. Нагрузки и воздействия

Нормативные значения нагрузок и воздействий при нормальной эксплуатации устанавливаются “Строительными нормами и правилами” (СНиП). Возможные отклонения значений нагрузок от нормативных учитываются коэффициентом надежности по нагрузке

$$n > 1.$$

Нагрузки и воздействия, полученные путем умножения их нормативных значений на коэффициент надежности по нагрузке, называются расчетными. Например,

расчетная сила

$$F = nF_n;$$

расчетная равномерно распределенная нагрузка

$$q = nq_n.$$

Коэффициент надежности по нагрузке от собственной массы принят $n = 1,05 - 1,2$, а по снеговой нагрузке – $n = 1,4 - 1,6$. Такое различие в значениях коэффициента n объясняется тем, что снеговая нагрузка более изменчива, чем собственная масса.

3.10.1.2. Механические свойства материалов

Основной характеристикой сопротивления материалов – силовым воздействием – является нормативное сопротивление R_n , которое устанавливается СНиПом с учетом условий контроля и статистической изменчивости механических свойств материала. В качестве нормативного сопротивления строительных сталей принимают наименьшее контролируемое (браковочное) значение предела текучести σ_T или временного сопротивления σ_B . Эти значения устанавливаются ГОСТами или техническими условиями на металл.

Возможные отклонения в неблагоприятную сторону от значений нормативного сопротивления учитываются коэффициентом надежности по материалу $\gamma_m > 1$. Этот коэффициент отражает статистическую изменчивость свойств материала и их отличие от свойств отдельно испытанных образцов. Например, для металла $\gamma_m = 1,025 - 1,15$; для бетона $\gamma_m = 1,3 - 1,5$.

Величина, полученная в результате деления нормативного сопротивления на коэффициент надежности по материалу, называется расчетным сопротивлением

$$R = \frac{R_n}{\gamma_m}.$$

Она представляет собой наименьшую возможную величину нормативного сопротивления. Значения для R устанавливаются СНиПом.

3.10.1.3. Геометрические параметры конструктивных элементов

Возможное неблагоприятное отклонение геометрических характеристик учитывается либо при помощи коэффициента точности, либо путем дополнительного слагаемого, которое прибавляется к нормативному значению геометрической характеристики, либо, в ряде случаев, коэффициентом надежности по материалу.

3.10.1.4. Условия работы

Особенности действительной работы материалов, элементов конструкций, их соединений учитываются коэффициентом условий работы γ . Он отражает влияние температуры, агрессивности среды, длительности и многократной повторяемости воздействия, приближенности расчетных схем и условности расчетных предпосылок ($\gamma < 1$), а также перераспределение усилий при развитии пластических деформаций и другие благоприятные факторы ($\gamma > 1$). Числовые значения для γ устанавливаются СНиПом на основании экспериментальных и теоретических исследований и вводятся в качестве множителя к значению расчетного сопротивления R .

3.10.1.5. Степень ответственности сооружения

Степень ответственности и капитальности сооружений, а также значимость последствий тех или иных предельных состояний учитывается коэффициентом надежности по назначению $\gamma_n \leq 1$. Его вводят в качестве делителя к значению расчетного сопротивления или в качестве множителя к значению расчетных нагрузок, воздействий и усилий.

3.10.1.6. Условие прочности при растяжении

Надежность и гарантия от возникновения предельных состояний первой группы (по несущей способности) обеспечивается выполнением следующего условия:

$$N \leq S,$$

где N – усилие, действующее в рассчитываемом элементе конструкции;

S – предельное усилие, которое может воспринять рассчитываемый элемент.

Усилие N , являющееся наибольшим возможным усилием, определяется как

$$N = nF_n,$$

а предельное усилие

$$S = AR\gamma/\gamma_n,$$

где A – площадь поперечного сечения.

Таким образом, условие прочности (надежности) для центрально растянутого (сжатого) стержня ($\gamma_n = 1$) будет иметь вид

$$N \leq AR\gamma \quad (3.34)$$

или

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq R\gamma. \quad (3.35)$$

3.10.2. Метод допускаемых напряжений

Этот метод остается пока основным при расчете механических узлов и деталей машиностроительных конструкций. Основой метода допус-

каемых напряжений является предположение, что критерием прочности конструкции будет выполнение следующего условия прочности:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (3.36)$$

где σ_{\max} – наибольшее напряжение, возникающее в одной из точек опасного сечения и определяемое расчетом;

$[\sigma]$ – допускаемое для данного материала напряжение, полученное на основании экспериментальных исследований.

Допускаемым напряжением называют то наибольшее напряжение, при котором конструкция будет работать длительное время без всякой опасности ее разрушения.

Допускаемое напряжение должно быть меньше опасного σ_0 в число раз, равное выбранному коэффициенту запаса.

Для пластичных материалов за опасное напряжение при статической нагрузке принимается предел текучести σ_T или σ_{02} , для хрупких материалов – временное сопротивление (предел прочности) σ_B .

Значение коэффициента запаса зависит от материала, назначения сооружения, характера действия нагрузок и многих других факторов. Основными факторами, которые влияют на выбор его значения, являются соответствие механических свойств материала конструкции и отдельно испытанных образцов; учет конкретных условий работы рассчитываемой конструкции; степень точности метода определения напряжений; неточность задания внешней нагрузки; долговечность и значимость проектируемого сооружения или машины.

Для строительных сталей значение коэффициента запаса прочности принимается $n = 1,4 - 1,6$; для хрупких материалов $n = 2,5 - 3,5$; для древесины $n = 3,5 - 6$.

Значения допускаемых напряжений устанавливаются техническими условиями и нормами проектирования. Для некоторых материалов они приведены в табл. 3.4.

Запишем условия (3.36) в трех вариантах:

– проверка прочности

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]; \quad (3.37)$$

– подбор сечения

$$A \geq \frac{F}{[\sigma]}; \quad (3.38)$$

– определение наибольшей допускаемой силы

$$F_{\max} \leq [\sigma]A. \quad (3.39)$$

Таблица 3.4

Значения допускаемых напряжений

Материал	Допускаемое напряжение, МПа	
	Растяжение	Сжатие
Сталь:		
углеродистая	160	160
легированная	100-400	100 - 400
Чугун серый	28 - 80	120 - 150
Медь	30 – 120	30 - 120
Латунь	70 – 140	70 - 140
Бронза	60 - 120	60 - 120
Алюминий	30 - 80	30 - 80
Дюралюминий	80 - 150	80 - 150
Текстолит	30 - 40	30 - 40
Гетинакс	50 - 70	50 - 70
Сосна:		
вдоль волокон	7 - 10	10 - 12
поперек волокон	-	1,5 - 2
Дуб:		
вдоль волокон	9,6 - 13	13 - 15
поперек волокон	-	2 - 3,5
Бетон	0,1 - 0,7	1 - 9
Камень (кладка)	0,1 - 0,3	0,4 - 4
Кирпич (кладка)	0,1 - 0,2	0,6 - 2,5

3.10.3. Метод разрушающих нагрузок

Критерий прочности, принятый в методе допускаемых напряжений, а именно напряжение в точке не всегда и не полностью характеризует условие наступления разрушения конструкции. В ряде случаев за такой критерий целесообразнее принимать предельную нагрузку, которую может выдержать конструкция, не разрушаясь и существенно не изменяя свою форму. При этом условие прочности, состоящее в том, что предельная или разрушающая нагрузка не должна превышать допускаемую, можно представить в виде

$$F_{\max} \leq [F] = \frac{F_{\text{пред}}}{n}, \quad (3.40)$$

где n – коэффициент запаса прочности, принимаемый таким же, как и в методе допускаемых напряжений.

При определении разрушающей нагрузки для конструкций из пластичного материала принимается схематизированная диаграмма напряжений – диаграмма Прандтля (рис. 3.25).

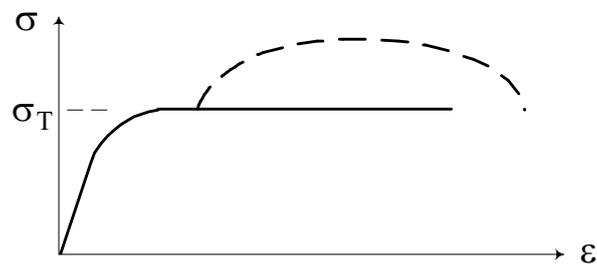


Рис. 3.25. Диаграмма Прандтля

Схематизация диаграммы заключается в предположении, что материал работает в упругой стадии вплоть до предела текучести, а затем материал обладает безграничной площадкой текучести. Материал, работающий по такой модели, называется идеально упруго-пластическим. Как правило, эта диаграмма больше всего соответствует диаграмме материала, имеющего ярко выраженную площадку текучести.

Для статически определимых систем этот способ совпадает с расчетом по допускаемым напряжениям. Для статически неопределимых систем он дает более экономное решение. Покажем это. Подберем сечения стержней, на которых подвешен призматический брус (рис. 3.26).

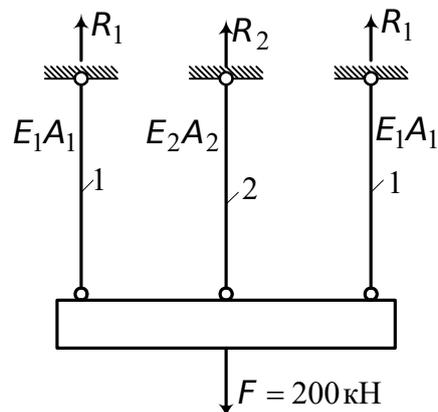


Рис. 3.26. К подбору сечений стержней по методам допускаемых напряжений и разрушающей нагрузки

Длины всех стержней одинаковы, а площади сечений и материалы различны: боковые стержни имеют одинаковую площадь A_1 и сделаны из стали, средний – из дюралюминия и имеет площадь A_2 . Отношение жесткостей $E_1 A_1 / E_2 A_2 = 2$. Допускаемые напряжения $[\sigma_1] = 160 \text{ МПа}$, $[\sigma_2] = 140 \text{ МПа}$.

Составим уравнение статики $\sum Y = 0$:

$$2R_1 + R_2 = F.$$

Дополнительное уравнение получим из условий деформации. В силу симметрии системы брус будет опускаться вниз, сохраняя горизонтальное положение, т. е.

$$\Delta l_1 = \Delta l_2.$$

Выражая удлинения через усилия, получим

$$\frac{R_1 l}{E_1 A_1} = \frac{R_2 l}{E_2 A_2}.$$

Отсюда с учетом уравнения статики и заданного соотношения $\frac{E_1 A_1}{E_2 A_2}$ найдем

$$R_1 = \frac{2}{5}F, \quad R_2 = \frac{1}{5}F.$$

Исходя из условия прочности (3.38),

$$A_1 = 5 \text{ см}^2, \quad A_2 = 7,5 \text{ см}^2, \quad \text{или} \quad A_1 = \frac{2}{3}A_2.$$

Для того чтобы найти площади поперечных сечений по методу разрушающих нагрузок, воспользуемся следующими условиями:

$$F = 2[\sigma_1]A_1 + [\sigma_2]A_2 = 2[\sigma_1]A_1 + \frac{3}{2}[\sigma_2]A_1.$$

Отсюда найдем

$$A_1 = 3,8 \text{ см}^2; \quad A_2 = 5,7 \text{ см}^2.$$

Полученные площади сечений на 24 % меньше соответствующих площадей, найденных при расчете по допускаемым напряжениям.

В заключение заметим, что определение разрушающей нагрузки возможно только для несложных расчетных схем.

3.10.4. Понятие о вероятностном методе расчета на прочность

Многочисленные экспериментальные данные убедительно свидетельствуют о том, что предел прочности, предел текучести, предел упругости и другие механические характеристики материалов имеют весьма значительный разброс. Например, при определении предела прочности бетона на сжатие одинаковые результаты не получаются даже тогда, когда образцы изготовлены из бетонной смеси одного замеса. Объясняется это тем, что прочность бетона является функцией многих факторов: крупности и качества заполнителя, активности цемента, различных технологических факторов и т. п. Принимая во внимание случайную природу этих факторов, естественно считать предел прочности случайной величиной.

Аналогичная ситуация имеет место и для других строительных материалов: древесины, кирпичной кладки, полимерных композитных материалов, стали, алюминиевых сплавов и т. п.

Наиболее полную информацию о случайной величине содержит функция распределения (закон распределения). Часто в качестве распределения прочности материала используются нормальный закон (закон Гаусса); распределение Гумбеля-Вейбулла; распределение Пирсона III типа; логарифмическое нормальное распределение и др.

Наряду с изменчивостью механических характеристик материалов приходится считаться с изменчивостью геометрических характеристик элементов, в частности, площади поперечного сечения стержней, и внешних воздействий.

Расчет конструкций на прочность сводится к проверке выполнения условия

$$\sigma < R, \quad (3.41)$$

где R – предел прочности (или текучести материала).

Предел прочности материала R и напряжение, действующее в конструкции, как отмечалось выше, являются случайными величинами, поэтому можно лишь требовать, чтобы это условие выполнялось с большой вероятностью, достаточно близкой к единице.

Введем случайную величину

$$S = R - \sigma,$$

с помощью которой условие прочности записывается в виде

$$S > 0. \quad (3.42)$$

Обращение S в нуль, т. е. нарушение условия (3.42) соответствует наступлению предельного состояния конструкции, другими словами – наступлению ее отказа.

Тогда вероятность того, что S имеет положительное значение, называется вероятностью безотказной работы.

Раздел 4

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

4.1. Плоское напряженное состояние и плоская деформация

В практических приложениях часто встречаются задачи, в которых все явления можно рассматривать происходящими в одной плоскости Oxy , т. е. рассматривать плоскую задачу. При расчете инженерных сооружений могут встретиться два вида плоской задачи: плоская деформация (рис. 4.1, а) и плоское напряженное состояние (рис. 4.1, б).

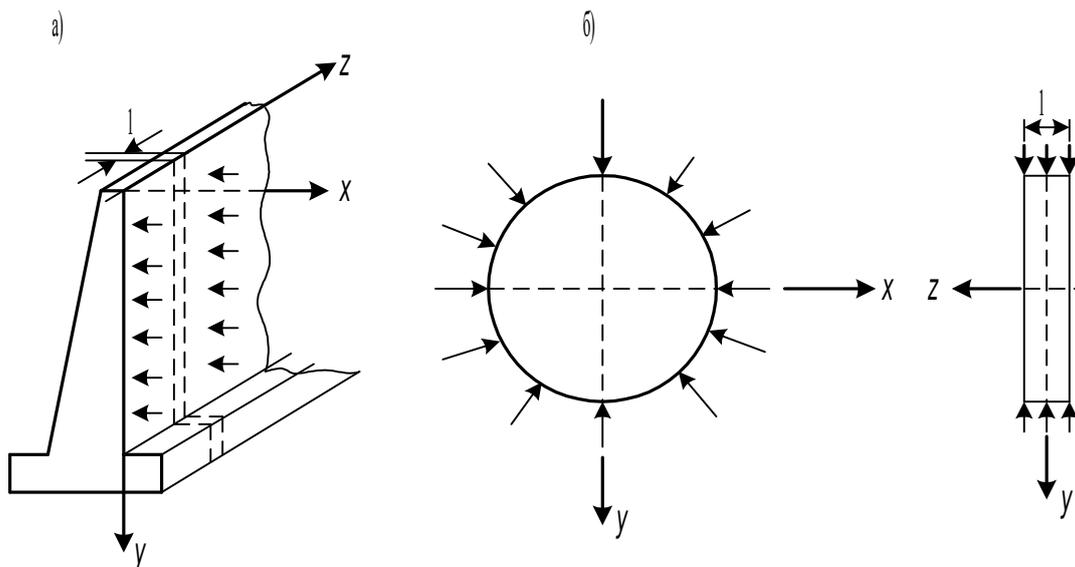


Рис. 4.1. Примеры конструкций, работающих в условиях плоской деформации (а) и плоского напряженного состояния (б)

Примером конструкции, работающей в условиях плоской деформации, является подпорная стенка (рис. 4.1, а), подвергающаяся действию бокового давления, постоянного по величине вдоль стенки. Сечения, удаленные от концов стенки, остаются плоскими, и при изучении распределения напряжений достаточно рассмотреть только один элемент стенки между двумя смежными поперечными сечениями (рис. 4.1, а). Для плоской деформации имеем

$$\varepsilon_z = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y). \quad (4.1)$$

Тогда в соответствии с (1.27) и (1.28) с учетом (4.1) получаем

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2) \sigma_x - \nu(1 + \nu) \sigma_y]; \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2) \sigma_y - \nu(1 + \nu) \sigma_x]; \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_z = 0; \quad (4.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy}, \quad \gamma_{zy} = \gamma_{zx} = 0. \quad (4.5)$$

Во всех случаях плоской деформации размер в направлении оси Z не имеет значения, и в дальнейшем мы будем длину элемента принимать равной единице.

Примером конструкции, работающей в условиях плоского напряженного состояния, может служить тонкая пластинка, которая подвергается действию сил, приложенных к ее контуру (рис. 4.1, б). Здесь составляющие напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} не зависят от координаты Z , а составляющие напряжений $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

На основании (1.27) и (1.28) для плоского напряженного состояния получаем

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y); \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x); \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y); \quad (4.8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0.$$

Так как составляющие напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} не зависят от координаты Z , то размеры пластины в направлении оси Z не имеют значения. В дальнейшем это измерение обычно принимается равным единице.

4.1.1. Напряжения в точке

Зная составляющие напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} в любой точке пластинки, находящейся в плоском напряженном состоянии или испытывающей плоскую деформацию, можно определить из уравнений статики напряжения, действующие по любой площадке, проходящей через эту точку перпендикулярно к пластинке и наклонно к осям X и Y .

Пусть точка O (рис. 4.2) является точкой напряженной пластинки и предположим, что составляющие напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} известны. Рассматриваем бесконечно малую треугольную призму obc . Объемной силой пренебрегаем. Будем предполагать, что напряжения по граням призмы распределены равномерно. Обозначим: N – нормаль к плоскости bc ; \bar{X} , \bar{Y} – составляющие поверхностных сил, отнесенные к единице площади; A – площадь грани bc ; $A \cos \alpha$ – площадь грани oc ; $A \sin \alpha$ – площадь грани ob .

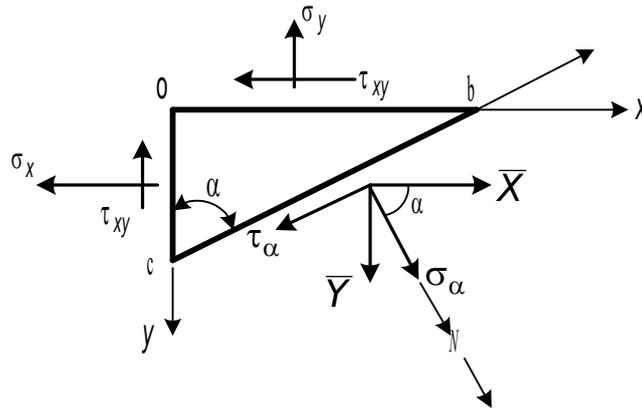


Рис. 4.2. Напряженное состояние в точке

Составляем уравнение равновесия:

$$\sum X = 0: \bar{X} = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha;$$

$$\sum Y = 0: \bar{Y} = \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha;$$

$$\sum N = 0: \sigma_\alpha = \bar{X} \cos \alpha + \bar{Y} \sin \alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Учитывая, что $2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$, получим

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha. \quad (4.9)$$

Спроектируем теперь силы, действующие на рассматриваемый элемент на грань bc

$$\sum bc = 0:$$

$$\tau_\alpha = \bar{Y} \cos \alpha - \bar{X} \sin \alpha = \sigma_y \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} \cos^2 \alpha - \sigma_x \sin \alpha \cos \alpha - \tau_{xy} \sin^2 \alpha.$$

Выполним группировку членов и учтем, что

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha.$$

В результате этих преобразований получим

$$\tau_\alpha = \tau_{xy} \cos 2\alpha + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\alpha. \quad (4.10)$$

Формулу (4.9) иногда применяют в несколько ином виде, используя известные из тригонометрии равенства

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha);$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha);$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha. \quad (4.11)$$

Формулы (4.9) – (4.11) выражают закон изменения нормального и касательного напряжений в зависимости от угла наклона площадки.

4.1.2. Главные напряжения. Положение главных площадок

Изменение положения площадки bc (рис. 4.2) по отношению к координатным осям приводит к изменению напряжений σ_α и τ_α . Как следует из равенств (4.9) – (4.11), эти напряжения являются функциями угла α . Представляет практический интерес отыскание максимальных и минимальных значений нормальных σ_α и касательных τ_α напряжений и положений площадок, на которых они действуют. Для этого приравняем к нулю производную $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0$

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\alpha \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + 2\alpha \tau_{xy} \cos 2\alpha = 0. \quad (4.12)$$

Сравнивая полученное уравнение с (4.10), видим, что, приравнивая к нулю производную $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}$, мы тем самым приравниваем к нулю касательное напряжение (4.10), так как отличаются эти выражения на константу «2». Таким образом, на площадке действия экстремальных нормальных напряжений касательные напряжения равны нулю. В каждой точке деформированного тела, находящегося в условиях плоского напряженного состояния или плоской деформации, имеются две такие взаимно перпендикулярные площадки. Эти площадки называются главными площадками.

Найдем положения главных площадок, приравняв (4.10) к нулю:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (4.13)$$

Выражение (4.13) дает два взаимно перпендикулярных направления с углами наклона α и $\alpha + 90^\circ$, по которым действуют главные напряжения. Углы α нужно откладывать по оси Ox (рис. 4.2) по часовой стрелке, если в результате подсчета $\alpha > 0$, и против часовой стрелки, если $\alpha < 0$. Подсчет по формуле (4.13) приводит к вполне определенным значениям угла α при всех значениях σ_x , σ_y , τ_{xy} , за исключением случая, когда $\sigma_x = \sigma_y$ и $\tau_{xy} = 0$. Последнее значение напряжений приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. В этом случае любая площадка является главной.

Для определения величин главных напряжений воспользуемся формулами (4.11), (4.13) и известным из тригонометрии выражением

$$\cos 2\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}.$$

В результате имеем

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (4.14)$$

Подкоренное выражение (4.14) при любых напряжениях σ_x , σ_y , τ_{xy} больше нуля, поэтому корни σ_1 и σ_2 всегда вещественны.

Вернемся к формуле (4.13). Она дает направления, но не указывает, в каком из них действует σ_1 (σ_{\max}), а в каком σ_2 (σ_{\min}). Для решения этого вопроса, по правилам математики, можно было бы исследовать знак второй производной $\frac{d^2 \sigma_\alpha}{d\alpha^2}$. Однако можно пойти другим путем. Из формулы $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2\tau_\alpha$ вытекает, что при $\tau_\alpha > 0$ имеем $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} > 0$. Следовательно, σ_α возрастает с увеличением α .

4.1.3. Экстремальные касательные напряжения

Одно и то же плоское напряженное состояние в точке может быть представлено различными исходными площадками и напряжениями. Так как касательные напряжения на главных площадках отсутствуют, то главные площадки наиболее просто определяют напряженное состояние в точке. Поэтому примем их за исходные (рис. 4.3).

Используем формулы (4.10) и (4.11). Полагаем, что

$$\sigma_x = \sigma_1, \quad \sigma_y = \sigma_2, \quad \text{а} \quad \tau_{xy} = 0.$$

Тогда

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha; \quad (4.15)$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha. \quad (4.16)$$

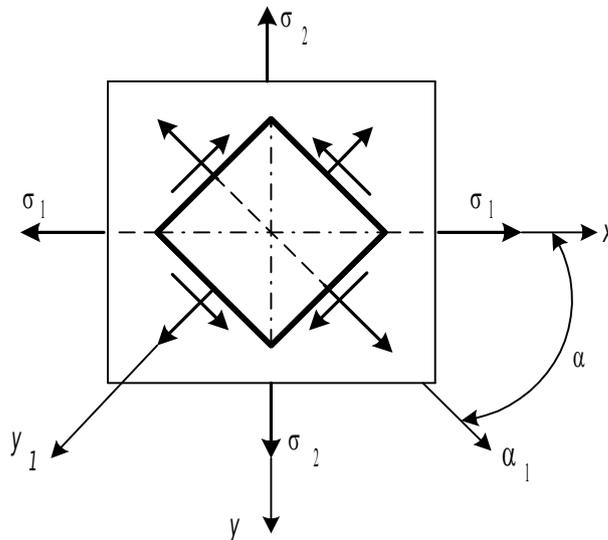


Рис. 4.3. К определению экстремальных касательных напряжений

Из формулы (4.15) следует, что при $\alpha = 45^\circ$ $\sin 2\alpha = 1$, и касательные напряжения имеют экстремальное значение

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (4.17)$$

Подставляя (4.14) в формулу (4.17) и произведя простейшие преобразования, найдем

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (4.18)$$

В общем случае на площадках с τ_{\max} нормальные напряжения (4.16) не равны нулю.

Действительно, при $\alpha = \pm 45^\circ$

$$\sigma_{\pm 45^\circ} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \quad (4.19)$$

В частном случае, когда на гранях призмы действуют два главных напряжения $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$,

$$\tau_{\max} = \sigma, \quad (4.20)$$

а нормальные напряжения на площадках с экстремальными касательными напряжениями равны нулю, получаем чистый сдвиг (см. п. 1.8.3).

4.2. Исследование напряжений в трех измерениях

Наши предыдущие исследования (см. п. 4.1) ограничивались задачами в двух измерениях (плоскостными задачами). Рассмотрим теперь общий случай напряженного состояния в трех измерениях. Ранее было показано (см. п. 1.8), что напряжения, действующие на шесть граней элементарного куба, можно выразить шестью составляющими напряжениями, а именно – тремя нормальными напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и тремя касательными напряжениями $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ (см. рис. 1.28). Если эти составляющие напряжения для какой-нибудь точки известны, то напряжения, действующие по любой наклонной грани, проходящей через эту точку, можно определить из уравнений статики.

Рассмотрим условие равновесия элементарного четырехгранника (рис. 4.4).

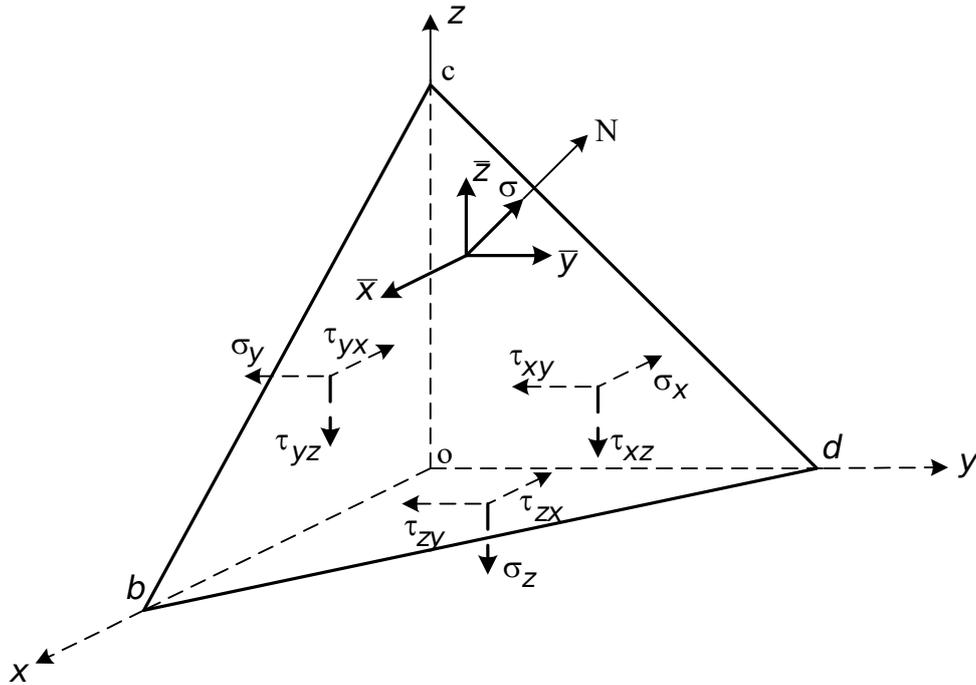


Рис. 4.4. К исследованию напряжений в трех измерениях

Выделенный элемент очень мал, поэтому объемными силами пренебрегаем, как и изменениями по его граням, и допускаем, что напряжения распределены равномерно.

Введем следующие обозначения: N – нормаль к плоскости bcd ; $\cos(N, x) = \ell$ – косинус угла между нормалью к наклонной грани и осью x ; $\cos(N, y) = m$; $\cos(N, z) = n$; A – площадь грани bcd ; $A\ell$ – площадь грани odc ; Am – площадь грани obc ; An – площадь грани bod ; \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} – отнесенные к единице площади составляющие поверхностных сил в данной точке.

Спроектируем все силы, действующие на элемент, на ось X :

$$A\bar{X} - A\ell\sigma_x - Am\tau_{xy} - An\tau_{xz} = 0.$$

Отсюда

$$\bar{X} = \sigma_x \ell + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n. \quad (4.21)$$

Аналогично, спроектировав все силы на оси Y и Z , найдем

$$\bar{Y} = \sigma_y m + \tau_{yz} n + \tau_{xy} \ell, \quad (4.22)$$

$$\bar{Z} = \sigma_z n + \tau_{xz} \ell + \tau_{yz} m. \quad (4.23)$$

Полное напряжение в точке найдем, используя свойство диагонали прямого параллелепипеда (рис. 4.5):

$$\bar{\sigma} = \sqrt{(\bar{Z})^2 + (\bar{Y})^2 + (\bar{X})^2}. \quad (4.24)$$

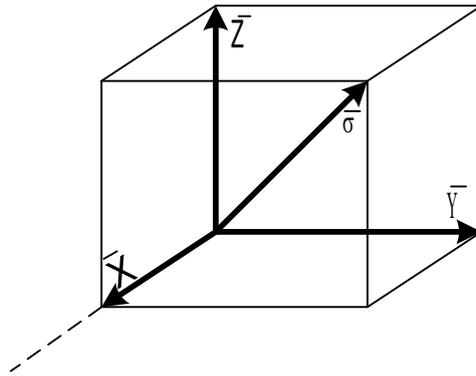


Рис. 4.5. К определению полного напряжения

Составляющую полного напряжения, направленную по нормали N , т.е. нормальное напряжение σ на площадке bcd , определим как сумму проекций на эту нормаль напряжений X, Y, Z (рис. 4.6)

$$\sigma = X \ell + Y m + Z n, \quad (4.25)$$

Касательные напряжения по той же площадке (рис. 4.6)

$$\tau = \sqrt{(\bar{\sigma})^2 - \sigma^2}. \quad (4.26)$$

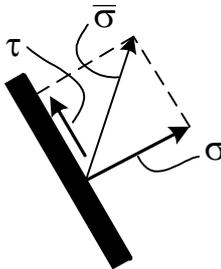


Рис. 4.6. К определению касательного напряжения

4.2.1. Главные напряжения и положение главных площадок

Найдем положение главных площадок, проходящих через точку O (рис. 4.4), и определим величины действующих по ним напряжений, если известны напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$. Предположим, что площадка bcd (рис. 4.4) – одна из трех главных площадок. Тогда по этой площадке касательное напряжение $\tau = 0$ (рис. 4.6, формула (4.26)), а вектор полного напряжения $\bar{\sigma}$ (рис. 4.5, формула (4.24)) совпадает с направлением нормали. Напряжение $\bar{\sigma}$ является одним из искомых главных напряжений $\bar{\sigma} = \sigma$. Составляющие этого напряжения по координатным осям определяются уравнениями

$$X = \sigma \ell;$$

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \sigma m; \\ \bar{Z} &= \sigma n. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Отметим, что уравнения (4.27) можно получить путем непосредственного проектирования σ на те же оси.

Приравняв правые части уравнений (4.21), (4.22), (4.23), (4.27) и учтя, что согласно закону парности касательных напряжений (1.18) $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{zy} = \tau_{yz}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, получим однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных ℓ , m , n :

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)\ell + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0; \\ \tau_{xy}\ell + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n &= 0; \\ \tau_{xz}\ell + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Между направляющими косинусами нормали N существует зависимость

$$\ell^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad (4.29)$$

поэтому они не могут одновременно равняться нулю. Из высшей алгебры известно, что при условии (4.29) определитель системы уравнений (4.28) должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.30)$$

Раскрыв его и производя группировку членов, получим

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0, \quad (4.31)$$

где

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \quad (4.32)$$

$$J_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2; \quad (4.33)$$

$$J_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{zy}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz}. \quad (4.34)$$

Корни уравнения (4.31) будут значениями трех главных напряжений σ_1 , σ_2 , σ_3 . Главные напряжения не зависят от выбора осей x , y , z . Следовательно, корни уравнения, а значит и его коэффициенты J_1 , J_2 , J_3 не меняются при повороте осей координат. Величины J_1 , J_2 , J_3 называются поэтому первым, вторым и третьим инвариантами напряженного состояния.

Для отыскания ℓ , m , n , соответствующих одному из трех главных напряжений σ_1 , σ_2 , σ_3 , надо значение этого главного напряжения подставить в (4.28) вместо σ . Совместное решение (4.28) и (4.29) дает искомые величины ℓ , m , n . Одно из трех главных напряжений будет алгебраически наибольшим в данной точке. Обозначим его σ_1 .

Наименьшее напряжение обозначим σ_3 , а промежуточное σ_2 , т.е. $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

4.2.2. Экстремальные значения касательных напряжений

Найдем наибольшие касательные напряжения в точке деформируемого тела и положение площадки, на которой они возникают. С этой целью используем формулы

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \ell^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2; \quad (4.35)$$

$$\tau_\alpha^2 = (\bar{\sigma}_\alpha)^2 - \sigma_\alpha^2 = \sigma_1^2 \ell^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 \ell^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2; \quad (4.36)$$

$$\ell^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Здесь σ_α и τ_α – нормальные и касательные напряжения на рассматриваемой наклонной площадке.

Формула (4.35) получена следующим образом. Если за начальную систему координат принять не случайную систему X, Y, Z , а систему главных осей 1, 2, 3, то условия (4.21), (4.22) и (4.23) упрощаются, так как координатные плоскости будут являться главными площадками и все касательные напряжения, действующие по этим граням, равны нулю, т. е.

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= \sigma_1 \ell; \\ \bar{Y}_2 &= \sigma_2 m; \\ \bar{Z}_3 &= \sigma_3 n. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Тогда составляющая полного напряжения, направленная по нормали N , будет равна (см.(4.25))

$$\sigma_\alpha = \bar{X}_1 \ell + \bar{Y}_2 m + \bar{Z}_3 n. \quad (4.38)$$

Подставляя сюда (4.37), получим (4.35).

Касательное напряжение по той же площадке найдем из (4.26), переписав это выражение в следующем виде:

$$\tau_\alpha = \sqrt{(\bar{\sigma}_\alpha)^2 - \sigma_\alpha^2},$$

где $\bar{\sigma}_\alpha = \sqrt{(X_1)^2 + (Y_2)^2 + (Z_3)^2}$.

Применяя к этим выражениям уравнения (4.37) и (4.38), получим формулу (4.36).

Теперь исключим из выражения (4.36) направляющий косинус ℓ с помощью равенства (4.29)

$$\ell^2 = 1 - m^2 - n^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tau_\alpha^2 &= \sigma_1^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_1^2)m^2 + (\sigma_3^2 - \sigma_1^2)n^2 - \\ &\quad - [\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)m^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)n^2]^2. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Аналогично исключим из (4.36) m^2 и n^2 :

$$m^2 = 1 - \ell^2 - n^2;$$

$$\tau_\alpha^2 = \sigma_2^2 + (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)\ell^2 + (\sigma_3^2 - \sigma_2^2)n^2 -$$

$$- \left[\sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2)\ell^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)n^2 \right]^2; \quad (4.40)$$

$$n^2 = 1 - \ell^2 - m^2;$$

$$\tau_\alpha^2 = \sigma_3^2 + (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)\ell^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)m^2 -$$

$$- \left[\sigma_3 + (\sigma_1 - \sigma_3)\ell^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 \right]^2. \quad (4.41)$$

Как показывает анализ этих уравнений, экстремальные значения полных касательных напряжений получаются на площадках, определяемых направляющими косинусами:

– для уравнения (4.39)

$$m = 0, \quad \ell = n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2};$$

– для уравнения (4.40)

$$n = 0, \quad \ell = m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2};$$

– для уравнения (4.41)

$$\ell = 0, \quad n = m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Касательные напряжения на этих площадках определим подстановкой в выражения (4.39), (4.40) и (4.41) указанных направляющих косинусов.

Подставляем в уравнение (4.39). В результате получаем

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}. \quad (4.42)$$

Подстановка в уравнения (4.40) и (4.41) дает соответственно:

$$\text{а) } m = 0; \quad \ell = n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{б) } n = 0; \quad \ell = m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{в) } \ell = 0; \quad n = m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad (4.43)$$

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}. \quad (4.44)$$

Произведенные выкладки приводят к следующим выводам. Площадками действия экстремальных касательных напряжений являются

площадки, проходящие через одну из главных осей и составляющие с двумя другими осями углы 45° (рис. 4.7). Иными словами, эти площадки перпендикулярны одной из главных площадок и наклонены к двум другим под углом 45° . Так как углы можно откладывать по разные стороны от главных осей, таких площадок шесть в каждой точке деформированной среды. Если величины главных напряжений подчинены неравенствам $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то наибольшее касательное напряжение равно $\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$, т. е. полуразности наибольшего и наименьшего главных напряжений.

4.2.3. Октаэдрические напряжения

Площадка, равнонаклонная к направлениям трех главных напряжений, называется октаэдрической, а действующие на ней напряжения – октаэдрическими напряжениями. Указанные площадки отсекают на осях 1, 2, 3 равные отрезки и образуют в пространстве октаэдр (рис. 4.8).

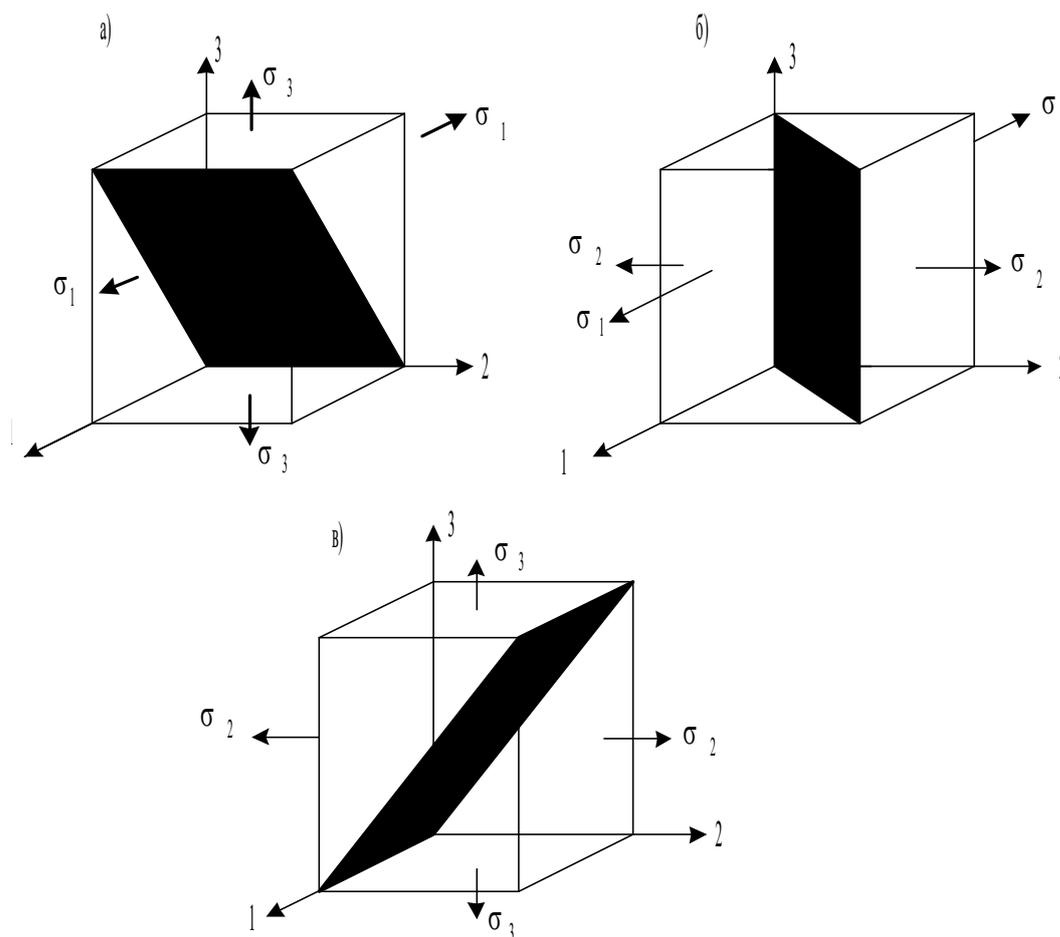


Рис. 4.7. Площадки действия экстремальных касательных напряжений

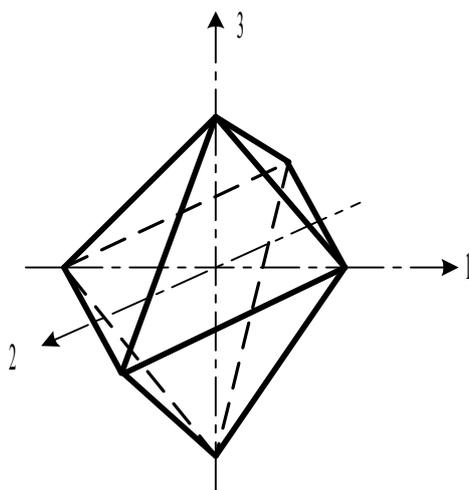


Рис. 4.8. Октаэдрические площадки

Косинусы углов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ являются направляющими косинусами для нормали ON и поэтому (см. (4.29)) связаны соотношением

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1.$$

Для октаэдрических площадок

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_{окт},$$

следовательно,

$$\cos \alpha_{окт} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Полное октаэдрическое напряжение получим, используя (4.21) – (4.23) и (4.24)

$$\bar{\sigma}_{окт} = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)}. \quad (4.45)$$

Нормальное октаэдрическое напряжение на основании (4.25) равно

$$\sigma_{окт} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (4.46)$$

а касательное октаэдрическое напряжение, учитывая (4.26), будет иметь следующий вид:

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}. \quad (4.47)$$

При изучении вопросов прочности и пластичности тел общая деформация материала в окрестности точки подразделяется на деформации изменения объема и формы. Важное значение октаэдрических напряжений определяется тем, что с первой из этих деформаций связано напряжение $\sigma_{окт}$, а со второй – $\tau_{окт}$.

4.3. Потенциальная энергия деформации при объемном напряженном состоянии

При простом растяжении или сжатии удельная потенциальная энергия деформации определяется формулой (3.32)

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Учитывая, что в этом случае $\sigma = E \varepsilon$ (см. формулу (3.5)), преобразуем зависимость (3.32). Тогда

$$u = \frac{\sigma \varepsilon}{2}. \quad (4.48)$$

При объемном напряженном состоянии в случае малых деформаций удельная потенциальная энергия может быть найдена путем суммирования:

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2}. \quad (4.49)$$

Подставив сюда $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, по закону Гука (1.27) получим

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)]. \quad (4.50)$$

Необходимо отметить, что формулы закона Гука (1.27) записаны относительно произвольных осей X, Y, Z , т. е. для общего случая объемного напряженного состояния. Эти зависимости могут быть распространены и на случай главных осей, так как они справедливы при малых деформациях, когда касательные напряжения, вызывая сдвиги, не оказывают влияния на линейные деформации. В общем случае деформирования происходит изменение объема и формы рассматриваемого элемента. В соответствии с этим удельную потенциальную энергию деформации можно представить как энергию изменения объема $U_{об}$ и энергию изменения формы $U_{ф}$.

Представим, что каждое из действующих главных напряжений состоит из двух слагаемых

$$\sigma_1 = \sigma_{1,об} + \sigma_{1,ф}; \quad \sigma_2 = \sigma_{2,об} + \sigma_{2,ф}; \quad \sigma_3 = \sigma_{3,об} + \sigma_{3,ф}.$$

Изменение объема при сохранении формы характеризуется условием равенства относительных линейных деформаций в направлении трех осей $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$. Соблюдение этого условия возможно лишь при всестороннем равномерном растяжении или сжатии.

Предположим, что напряжения, вызывающие изменение объема, равны средней арифметической из трех напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

$$\sigma_{1,об} = \sigma_{2,об} = \sigma_{3,об} = \sigma_{ср} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad (4.51)$$

Тогда напряжения, вызывающие изменение формы, будут равны

$$\sigma_{1,\phi} = \sigma_1 - \sigma_{ср}; \quad \sigma_{2,\phi} = \sigma_2 - \sigma_{ср}; \quad \sigma_{3,\phi} = \sigma_3 - \sigma_{ср}. \quad (4.52)$$

Энергию изменения объема получим, подставив в (4.50) напряжения (4.51)

$$u_{об} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (4.53)$$

Энергию изменения формы найдем по формуле (4.50), подставив в нее (4.52)

$$u_{\phi} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]. \quad (4.54)$$

Полученные формулы (4.54) подтверждают, что при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ происходит только изменение объема, так как энергия изменения формы в этом случае равна нулю.

4.4. Пример исследования напряженного состояния в точке тела

Исходные данные: $\sigma_x = 130$ МПа; $\sigma_y = 100$ МПа; $\sigma_z = 70$ МПа; $\tau_{xy} = 90$ МПа; $\tau_{yz} = 100$ МПа; $\tau_{xz} = 90$ МПа. Схема действия заданных напряжений показана на рис. 4.9.

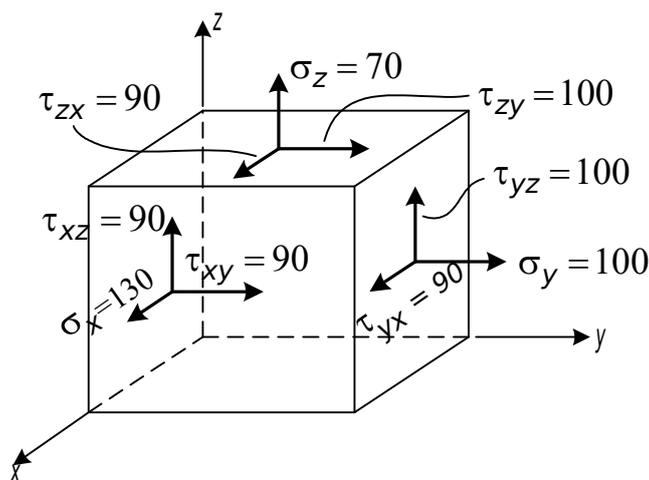


Рис. 4.9. Схема напряжений, действующих в точке тела

Вычисляем инварианты напряженного состояния (см. (4.32), (4.33), (4.34)):

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 130 + 100 + 70 = 300 \text{ МПа};$$

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 = 130 \cdot 100 + 130 \cdot 70 + 100 \cdot 70 - 90^2 - 90^2 - 100^2 = 2900 \text{ (МПа)}^2;$$

$$J_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz} = \\ = 130 \cdot 100 \cdot 70 - 130 \cdot 100^2 - 100 \cdot 90^2 - 70 \cdot 90^2 + 2 \cdot 90 \cdot 100 \cdot 90 = \\ = -147000 \text{ (МПа)}^3.$$

Представим уравнение (4.31) в следующем виде:

$$y^3 + py + q = 0, \quad (4.55)$$

где

$$y = \sigma - \frac{J_1}{3}; \quad p = J_2 - \frac{J_1^2}{3}; \quad q = -\frac{2J_1^3}{27} + \frac{J_1 J_2}{3} - J_3.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma' &= -2r \cos \frac{\varphi}{3} + \frac{J_1}{3}; \\ \sigma'' &= 2r \cos \left(60^\circ - \frac{\varphi}{3} \right) + \frac{J_1}{3}; \\ \sigma''' &= 2r \cos \left(60^\circ + \frac{\varphi}{3} \right) + \frac{J_1}{3}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Здесь

$$\cos \varphi = \frac{q}{2r^3},$$

$$r = \pm \sqrt[3]{|p| \cdot \frac{1}{3}}$$

(знак r должен совпадать со знаком q , следовательно $\cos \varphi > 0$).

Определяем:

$$p = J_2 - \frac{J_1^2}{3} = 2900 - \frac{(300)^2}{3} = -27100;$$

$$q = -\frac{2J_1^3}{27} + \frac{J_1 J_2}{3} - J_3 = -\frac{2(300)^3}{27} + \frac{300 \cdot 2500}{3} + 147000 = -1563000;$$

$$r = -\sqrt[3]{\frac{27100}{3}} = -95,04385;$$

$$\cos \varphi = \frac{q}{2r^3} = \frac{1563000}{2 \cdot (95,04385)^3} = 0,9102421;$$

$$\varphi = 24,461169^\circ;$$

$$\frac{\varphi}{3} = 8,153723^\circ; \quad \cos \frac{\varphi}{3} = 0,9898911;$$

$$60^\circ - \frac{\varphi}{3} = 60^\circ - 8,153723^\circ = 51,846277^\circ;$$

$$\cos \left(60^\circ - \frac{\varphi}{3} \right) = 0,6177735;$$

$$60^\circ + \frac{\varphi}{3} = 60^\circ + 8,153723^\circ = 68,153723^\circ;$$

$$\cos \left(60^\circ + \frac{\varphi}{3} \right) = 0,3721176;$$

$$\sigma' = 295,04385 \cdot 0,9898911 + \frac{300}{3} = 288,16612 \text{ МПа};$$

$$\sigma'' = -295,04385 \cdot 0,6177735 + \frac{300}{3} = -17,431143 \text{ МПа};$$

$$\sigma''' = -295,04385 \cdot 0,3721176 + \frac{300}{3} = 29,265022 \text{ МПа}.$$

Полученным главным напряжениям присваиваем обозначения (см. п. 4.2.1 – $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$)

$$\sigma_1 = 288,16612 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = 29,265022 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = -17,431143 \text{ МПа}.$$

Осуществляем проверку правильности полученного решения. Как было отмечено в п. 4.2.1, величины J_1 , J_2 , J_3 не меняются при повороте осей координат. Следовательно,

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

$$J_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3; \quad (4.57)$$

$$J_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

Проверим это:

$$J_1 = 288,16612 + 29,265022 - 17,431143 = 300 \text{ МПа};$$

$$J_2 = 288,16612 \cdot 29,265022 + 288,16612 \cdot (-17,431143) + \\ + 29,265022 \cdot (-17,431143) = 2900,002 \text{ (МПа)}^2;$$

$$J_3 = 288,16612 \cdot 29,265022 \cdot (-17,431143) = -147000,1 \text{ (МПа)}^3.$$

Как видим, результаты совпадают с ранее вычисленными. Следовательно, главные напряжения найдены правильно.

Найдем теперь положения главных площадок. Для этого систему уравнений (4.28) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}(\sigma_x - \sigma) \frac{\ell}{n} + \tau_{xy} \frac{m}{n} &= -\tau_{xz}, \\ \tau_{xy} \frac{\ell}{n} + (\sigma_y - \sigma) \frac{m}{n} &= -\tau_{yz}, \\ \tau_{xz} \frac{\ell}{n} + \tau_{yz} \frac{m}{n} + (\sigma_z - \sigma) &= 0,\end{aligned}\tag{4.58}$$

а соотношение между квадратами направляющих косинусов (4.29) запишем так:

$$\left(\frac{\ell}{n}\right)^2 + \left(\frac{m}{n}\right)^2 + 1 = \frac{1}{n^2}.\tag{4.59}$$

Решаем систему первых двух уравнений (4.58):

$$\begin{aligned}\frac{m}{n} &= \frac{\tau_{xy} \tau_{xz} - (\sigma_x - \sigma) \tau_{yz}}{(\sigma_y - \sigma)(\sigma_x - \sigma) - \tau_{xy}^2}, \\ \frac{\ell}{n} &= \frac{\tau_{xy} \tau_{yz} - \tau_{xz}(\sigma_y - \sigma)}{(\sigma_y - \sigma)(\sigma_x - \sigma) - \tau_{xy}^2},\end{aligned}\tag{4.60}$$

а третье уравнение используем для контроля найденных решений.

Найдем направляющие косинусы ℓ_1 , m_1 , n_1 к площадке, по которой действует $\sigma_1 = 288,16612$ МПа:

$$\begin{aligned}\frac{m_1}{n_1} &= \frac{90 \cdot 90 - (130 - 288,16612) \cdot 100}{(100 - 288,16612)(130 - 288,16612) - 90^2} = 1,1041067; \\ \frac{\ell_1}{n_1} &= \frac{90 \cdot 100 - (100 - 288,16612) \cdot 90}{(100 - 288,16612)(130 - 288,16612) - 90^2} = 1,197283.\end{aligned}$$

Проверим правильность найденных значений (см. третье уравнение (4.58)):

$$9 \cdot 1,197283 + 100 \cdot 1,1041067 + (70 - 288,16612) = 0.$$

Из соотношения (4.59) определяем n_1 :

$$\begin{aligned}(1,197283)^2 + (1,1041067)^2 + 1 &= \frac{1}{n_1^2}; \\ n_1 &= \pm 0,523242; \quad \ell_1 = \pm 0,6264688; \quad m_1 = \pm 0,577715.\end{aligned}$$

Аналогично определяем направляющие косинусы ℓ , m , n к площадкам, по которым действуют $\sigma_2 = 29,265022$ МПа, $\sigma_3 = -17,431143$ МПа.

Направляющие косинусы к площадке, по которой действует σ_2 ,

$$\frac{m_2}{n_2} = \frac{90 \cdot 90 - (130 - 29,265022) \cdot 100}{(100 - 29,265022) \cdot (130 - 29,265022) - 90^2} = 2,0251112;$$

$$\frac{\ell_2}{n_2} = \frac{90 \cdot 100 - (100 - 29,265022) \cdot 90}{(100 - 29,265022) \cdot (130 - 29,265022) - 90^2} = -2,7027355.$$

Определяем n_2 из уравнения (4.59):

$$(2,7027355)^2 + (2,0251112)^2 + 1 = \frac{1}{n_2^2},$$

$$n_2 = \pm 0,2839135; \quad \ell_2 = \mp 0,7673441; \quad m_2 = \pm 0,5749575.$$

Проверим правильность найденных результатов, для чего используем третье уравнение системы (4.58):

$$90 \cdot (-2,7027355) + 100 \cdot 2,0251112 + (70 - 29,265022) = 0.$$

Направляющие косинусы к площадке, по которой действует σ_3 ,

$$\frac{m_3}{n_3} = \frac{90 \cdot 90 - (130 + 17,431143) \cdot 100}{(100 + 17,431143) \cdot (130 + 17,431143) - 90^2} = -0,7210582;$$

$$\frac{\ell_3}{n_3} = \frac{90 \cdot 100 - (100 + 17,431143) \cdot 90}{(100 + 17,431143) \cdot (130 + 17,431143) - 90^2} = -0,1702813.$$

Проверим правильность полученных результатов. Для этого воспользуемся третьим уравнением системы (4.58):

$$90 \cdot (-0,1702813) + 100 \cdot (-0,7210582) + (70 + 17,431143) = 0.$$

Определим направляющие косинусы из уравнения (4.59):

$$(0,1702813)^2 + (0,7210582)^2 + 1 = \frac{1}{n_3^2};$$

$$n_3 = \pm 0,8034992; \quad \ell_3 = \mp 0,1368209; \quad m_3 = \pm 0,5793697.$$

Осуществим последнюю проверку из условий взаимной перпендикулярности нормалей к главным площадкам. Математически это выглядит так:

$$\begin{aligned} \ell_1 \ell_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0; \\ \ell_1 \ell_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 &= 0; \\ \ell_2 \ell_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 &= 0. \end{aligned} \tag{4.61}$$

Подставим в эти равенства найденные значения направляющих косинусов:

$$0,6264688(-0,7673441) + 0,577715 \cdot 0,5749575 + 0,523242 \cdot 0,2839135 = 0;$$

$$0,6264688(-0,1368209) + 0,577715 \cdot (-0,5793697) + 0,523242 \cdot 0,8034992 = 0;$$

$$(-0,7673441)(-0,1368209) + 0,5749575(-0,5793697) +$$

$$+ 0,2839135 \cdot 0,8034992 = 0.$$

Получились тождества, следовательно, направляющие косинусы найдены правильно.

Изображение главных площадок показано на рис. 4.10.

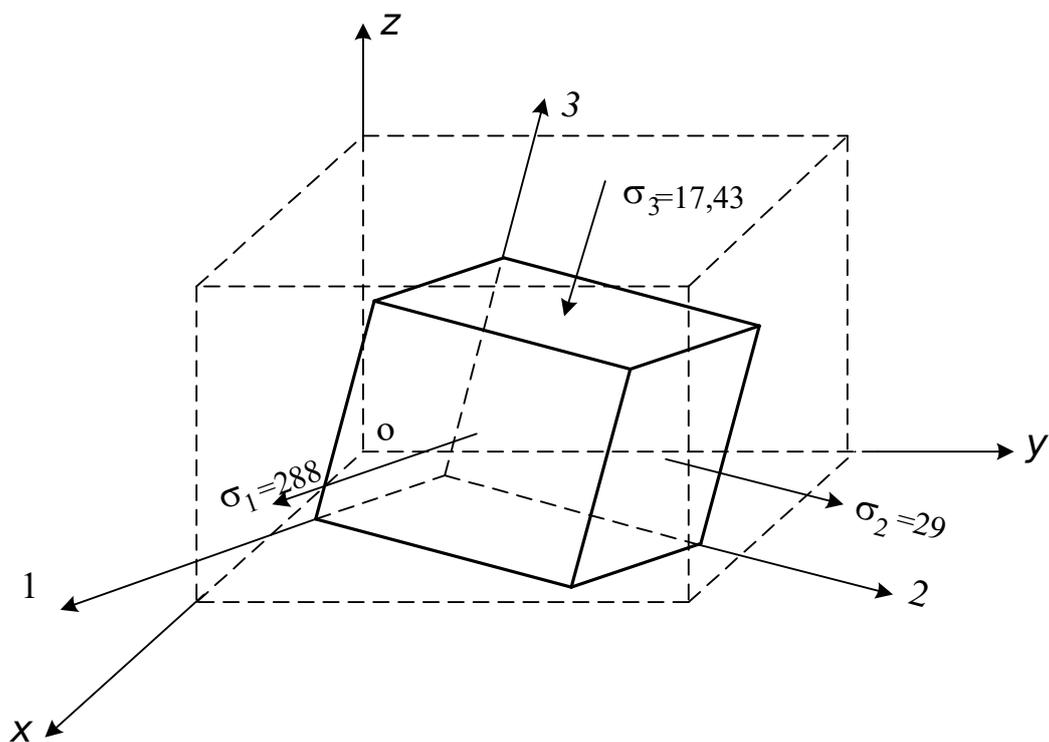


Рис. 4.10. Схема напряженного состояния в точке

Раздел 5

ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Как было отмечено в первом разделе курса, прочность сооружения зависит от прочности материала, из которого оно выполнено. Механические свойства материалов определяют при помощи испытательных машин. Испытания производят, главным образом, на простейшие виды действия сил: для пластичных материалов (металл) – на растяжение; для хрупких материалов (камень, бетон) – на сжатие. Способность материалов сопротивляться этим видам действия сил хорошо изучена. Способность материалов сопротивляться более сложным видам действия сил экспериментально изучена меньше. В настоящее время отсутствуют испытательные машины и измерительная техника, которые позволили бы создать любое напряженное состояние в образце и получить достоверные результаты. Однако в практике такие случаи постоянно встречаются. В связи с этим необходимо иметь какой-то критерий, по которому можно было бы на основании опытов на простейшие виды действия сил (растяжение, сжатие) судить о прочности материала в более сложных случаях нагружения. Следовательно, нужны некоторые общие положения, теоретически обоснованные и апробированные. Такие положения называются гипотезами или теориями прочности.

Задачей указанных гипотез является установление условий предельного состояния материала, т. е. момента разрушения или появления остаточных деформаций в случаях сложного напряженного состояния по данным, имеющимся для простого растяжения или сжатия.

Любое сложное напряженное состояние будем характеризовать главными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. При этом будем считать σ_1 наибольшим и σ_3 наименьшим главными напряжениями, т. е. $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ (см. п. 4.2.1). Опасные напряжения при растяжении обозначим σ_0 (это либо предел текучести $\sigma_0 = \sigma_T$, либо временное сопротивление $\sigma_0 = \sigma_B$ при расчете по методу допускаемых напряжений, или $\sigma_0 = R$, где R – нормируемое значение расчетного сопротивления, при расчете по методу предельных состояний), а при сжатии σ'_0 . При простом растяжении или сжатии ранее были получены следующие величины, характеризующие прочность и деформативность (формулы (3.1), (3.3), (3.5)):

$$\sigma = \frac{N}{A} \text{ – осевое нормальное напряжение;}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2} \text{ – наибольшее касательное напряжение по площадкам,}$$

расположенным под углом 45° к оси стержня;

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \text{ (3.5) – относительное удлинение в направлении оси стержня;}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau \text{ – угол сдвига.}$$

5.1. Теория наибольших нормальных напряжений

Эту теорию в литературе связывают с именем Галилея*. Согласно ей опасное состояние наступает тогда, когда наибольшие нормальные напряжения достигают некоторого предельного значения. При растяжении предельными напряжениями являются σ_0 , при сжатии σ'_0 . В соответствии с формулировкой гипотезы, опасное или предельное состояние определяется равенствами

$$\sigma_1 = \sigma_0, \quad |\sigma_3| = \sigma'_0. \quad (5.1)$$

Таким образом, в соответствии с гипотезой наибольших нормальных напряжений предельное состояние не может быть определено одним равенством. Условие прочности получим из (5.1) после замены σ_0 и σ'_0 допускаемыми напряжениями $[\sigma]_p$ и $[\sigma]_c$ или расчетными сопротивлениями R_p и R_c :

$$\sigma_1 \leq [\sigma]_p, \quad |\sigma_3| \leq [\sigma]_c \quad (5.2)$$

$$\sigma_1 \leq R_p, \quad |\sigma_3| \leq R_c,$$

т.е. для обеспечения прочности необходимо, чтобы главные напряжения в сложном напряженном состоянии материала не превышали напряжений при растяжении и сжатии.

Недостатки теории очевидны: сложное напряженное состояние в ней приравнивается к простому линейному. Кроме того, например, при сдвиге (см. п. 1.8.3) главные напряжения $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, где τ – касательные напряжения на площадке сдвига (см. рис. 1.34, б). Поэтому условие предельного состояния $\tau = \sigma_0$. Это означает, что разрушение или начало пластических деформаций должно происходить тогда, когда касательные напряжения τ достигнут по величине установленных при простом растяжении (или сжатии) временного сопротивления ($\sigma_0 = \sigma_B$), если материал хрупкий, или предела текучести ($\sigma_0 = \sigma_T$), если материал пластичный.

Состояние чистого сдвига (см. рис. 1.34, г) можно воспроизвести в лабораторных условиях (кручение тонких труб). Установлено, что разрушение хрупких материалов происходит при касательных напряжениях τ , равных $(0,75 - 0,80) \sigma_B$, а текучесть пластичных материалов наступает при $\tau_T = (0,55 - 0,60) \sigma_T$. Следовательно, опытное исследование чистого сдвига не подтверждает гипотезы наибольших нормальных напряжений.

Согласно представлениям рассматриваемой гипотезы, разрушение возможно в случае трехстороннего равномерного обжатия материала и

* Галилео Галилей (1564-1642) – итальянский физик, механик, астроном и математик. Основные открытия в области механики: закон инерции, закон падения тел и др.

должно произойти, если $|\sigma_1| = |\sigma_2| = |\sigma_3| = \sigma'_0$. Это также экспериментально не подтверждается.

Несмотря на указанные недостатки, для проверки прочности элементов, напряженное состояние которых незначительно отклоняется от линейного, т. е. если абсолютные значения двух главных напряжений малы по сравнению с третьим, гипотеза наибольших нормальных напряжений применяется в инженерно-технических расчетах.

5.2. Теория наибольших удлинений

Опасное напряженное состояние наступает тогда, когда наибольшее относительное удлинение достигает некоторого предельного значения. Обозначим последнее через ε_0 . В опасном или предельном состоянии имеем

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_0.$$

Считая закон Гука (1.27) справедливым до момента разрушения, можно выразить ε_{\max} и ε_0 через напряжения.

Пусть в сложном напряженном состоянии

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

По смыслу правой части предельных равенств за ε_0 нужно принять относительное удлинение в случае растяжения, т. е.

$$\varepsilon_0 = \sigma_0 / E.$$

Условие предельного состояния по этой теории приобретает форму

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_0. \quad (5.3)$$

В случае плоского напряженного состояния (при $\sigma_3 = 0$) соотношение (5.3) принимает вид

$$\sigma_1 - \nu\sigma_2 = \sigma_0.$$

При расчете по допускаемым напряжениям условие прочности записывается следующим образом:

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_p, \quad (5.4)$$

а при расчете по методу предельных состояний

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq R_p.$$

Выражая главные напряжения через σ_x , σ_y , τ_{xy} (4.14), получим для плоского напряженного состояния следующее условие:

$$\frac{1-\nu}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq R_p.$$

В полученное неравенство включены все главные напряжения, поэтому особенности напряженного состояния характеризуются наиболее полно.

В случае сжатия

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0,$$

и, следовательно, (см. (5.3))

$$\sigma_0 = -\nu \sigma_3. \quad (5.5)$$

Но экспериментально можно установить прямую связь σ_3 с опасным напряжением при сжатии σ'_0 :

$$\sigma'_0 = -\sigma_3. \quad (5.6)$$

Сравнение двух выражений для предельных состояний (5.5) и (5.6) позволяет прийти к заключению, что опасные напряжения при сжатии и растяжении должны быть связаны между собой равенством

$$\sigma_0 = \nu \sigma'_0. \quad (5.7)$$

Как следует из равенства (5.7), теория прочности навязывает материалу определенные свойства: напряжения σ_0 должны быть меньше σ'_0 во столько раз, во сколько раз ν меньше единицы. Такое соотношение между σ_0 и σ'_0 не выполняется для пластичных материалов, так как абсолютные значения пределов текучести при растяжении и сжатии для большинства из них примерно равны. Временное сопротивление хрупких материалов при растяжении меньше временного сопротивления при сжатии. Однако выполнение зависимости $\sigma_0 = \nu \sigma'_0$ для них наблюдается далеко не всегда. Это отклонение от требований гипотезы связано, во-первых, с тем, что закон Гука при растяжении хрупких материалов имеет, как правило, приближенный характер и, во-вторых, с изменением коэффициента Пуассона после нагружения за предел пропорциональности (в пластической зоне): $\nu = 0,5$ (см. п. 3.3.2).

В случае чистого сдвига (см. п. 1.8.3)

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = (1 + \nu) \tau$$

и в предельном состоянии

$$\tau = \frac{\sigma_0}{(1 + \nu)},$$

т. е. разрушение наступает, когда касательные напряжения (временное сопротивление при сдвиге τ_B) равны $(0,75 - 0,83) \sigma_0$ при средних значениях коэффициента Пуассона $\nu = \left(\frac{1}{5} \dots \frac{1}{3}\right)$. Полученные количественные зависимости τ_B от σ_B хорошо согласуются с результатами экспериментов для хрупких материалов. Поведение материала в состоянии равномерного трехстороннего сжатия с позиций рассматриваемой гипотезы объясняется тем, что при таком нагружении нет каких-либо удлинений и поэтому разрушение невозможно.

Рассматриваемую теорию прочности вполне обоснованно применяют при проверке прочности конструкций и деталей из хрупких материалов (при хрупком разрушении). При этом разрыв происходит в направлении наибольших удлинений: при растяжении – по плоскости поперечного сечения, при сжатии – по плоскостям, перпендикулярным

плоскости поперечного сечения, при кручении – под углом 45° к оси стержня.

5.3. Теория максимальных касательных напряжений

Разрушение пластичных материалов существенно отличается от разрушения хрупких. Оно сопровождается развитием остаточных деформаций, т. е. сдвигов в материале, и поэтому должно быть связано не с нормальными напряжениями и относительными удлинениями, а с касательными напряжениями. Обоснованием этой теории послужили работы Кулона и опыты Треска. В окончательном виде она была высказана Сен-Венаном, с именем которого обычно и связывается. Эта теория формулируется следующим образом. Пластическое состояние материала начинается тогда, когда наибольшие касательные напряжения достигают некоторой предельной величины. Такой предельной величиной является предел текучести для касательных напряжений τ_T , следовательно, условие пластичности может быть записано в виде

$$\tau_{\max} = \tau_T.$$

Так как $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ (см. (4.42)) и $\sigma_0 = \sigma_T$, $\tau_T = \frac{\sigma_T}{2}$ (см. п.3.2), то имеем

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T. \quad (5.8)$$

Условие прочности по этой теории имеет следующую форму:
– при расчете по методу допускаемых напряжений

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (5.9)$$

– при расчете по методу предельных состояний

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq R.$$

В случае плоского напряженного состояния одно из главных напряжений равно нулю. Используя (4.18), получим

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq R_p.$$

При $\sigma_y = 0$ это условие принимает вид

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R_p.$$

Это же условие при расчете по методу допускаемых напряжений записывается следующим образом:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]_p.$$

При растяжении ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) и сжатии ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$) начало текучести определяется одним и тем же значением предела текучести

$$\sigma_1 = \sigma_T \quad \text{и} \quad -\sigma_3 = \sigma_T,$$

что имеет место для пластичных материалов.

При чистом сдвиге ($\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$) $\tau = \frac{\sigma_T}{2}$, т. е. предел текучести для касательных напряжений τ_T составляет $0,5 \sigma_T$, что меньше τ_T , определяемого экспериментом.

Условие неразрушимости материалов в случае трехстороннего равномерного обжатия ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 < 0$) выполняется автоматически, так как левая часть равенства (5.8) обращается в нуль, и поэтому оно не может быть выполнено. В соответствии с рассматриваемой теорией текучесть не возникает и при сколь угодно больших главных напряжениях, если наибольшая разность между ними $\sigma_1 - \sigma_3$ по абсолютной величине меньше σ_T .

Условие (5.9) широко используется в технических расчетах для проверки прочности пластичных материалов в сложных напряженных состояниях. Недостаток его – отсутствие в расчетной формуле средних по величине главных нормальных напряжений σ_2 , что приводит к неточности в оценке напряженности материала.

5.4. Энергетическая теория прочности

За количественную характеристику начала пластических деформаций по этой теории принята потенциальная энергия изменения формы, связанная, как указывалось в п. 5.2, с развитием сдвигов в материале. Эта теория связана с именами Губера, Мизеса, Генки.

Пластическое состояние материала начинается тогда, когда удельная потенциальная энергия изменения формы достигнет некоторой предельной величины

$$u_\phi = u_{оп}. \quad (5.10)$$

В формуле (5.10)

$$u_\phi = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2].$$

За правую часть равенства (5.10) следует принять потенциальную энергию изменения формы при растяжении

$$u_{оп} = \frac{(1+\nu)}{3E} \sigma_0^2.$$

После подстановки u_ϕ и $u_{оп}$ в (5.10), сокращений и извлечения корня получим следующую формулу, определяющую начало текучести:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_0 = \sigma_T. \quad (5.11)$$

Отсюда следует такая форма условия прочности:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]_p. \quad (5.12)$$

При расчете по методу предельных состояний $[\sigma]_p$ следует заменить расчетным сопротивлением при растяжении R_p .

Для плоского напряженного состояния, используя (4.14) и полагая в нем $\sigma_y = 0$, $\sigma_x = \sigma$, $\tau_{xy} = \tau$, найдем

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

При расчете конструкций по методу предельных состояний прочность проверяется по следующей формуле:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R.$$

В случае сжатия (5.11) имеем

$$|\sigma_3| = \sigma_0.$$

Но так как опасное состояние при сжатии экспериментально устанавливается равенством

$$|\sigma_3| = \sigma'_0,$$

то согласование энергетического условия прочности с результатом опытов возможно только при примерно одинаковых пределах текучести материала в случаях растяжения и сжатия.

В случае сдвига ($\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$, $\sigma_2 = 0$) на основании равенства (5.11) имеем $\sqrt{3}\tau = \sigma_0$, или $\tau = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_0 \approx 0,57\sigma_0$, т. е. предел текучести для касательных напряжений τ_T должен быть равен 0,57 предела текучести при растяжении σ_T .

По экспериментальным исследованиям пластичных материалов τ_T находится в пределах $(0,55 - 0,60)\sigma_T$. В случае равномерного трехстороннего сжатия или растяжения, а также в случае близких между собой по значениям сколь угодно больших по абсолютной величине главных напряжений в соответствии с энергетическим условием опасного состояния, как и по условию наибольших касательных напряжений, переход материала в пластическое состояние невозможен. Это не соответствует истинному положению дела.

Несмотря на указанные несоответствия, энергетическое условие достаточно точно определяет начало пластических деформаций для

широкого класса обычно встречающихся на практике напряженных состояний. Энергетическая гипотеза прочности с успехом применяется для проверки прочности конструкций и деталей машин из пластичного материала.

5.5. Теория прочности Мора

Ни одна из вышеперечисленных гипотез прочности не является совершенной. Во-первых, выполнение каждой из них требует соблюдения определенных ограничений значений механических характеристик материала. По гипотезам наибольших касательных напряжений и энергетической, например, должно выполняться равенство пределов текучести при сжатии и растяжении. По гипотезе наибольших относительных удлинений временное сопротивление растяжению должно быть не больше 0,5 временного сопротивления сжатию.

Во-вторых, ни одна из указанных гипотез принципиально не может охватить разрушение во всех напряженных состояниях. Дело в том, что в основу одних гипотез положено представление о разрушении материала от отрыва (первая и вторая гипотезы), а в основу других – разрушение его от сдвига (третья и четвертая гипотезы). Однако установлено, что свойства материала существенно зависят от вида напряженного состояния. При одних соотношениях главных напряжений материал может быть хрупким, при других – пластичным. Поэтому разделение материалов на хрупкие и пластичные условно. Таким образом, применение в каждом частном случае той или иной гипотезы должно быть связано с характером напряженного состояния. Для полного, исчерпывающего, установления предельных равенств необходима гипотеза прочности, в равной мере применимая как к хрупкому, так и к пластическому разрушению.

Наиболее широкое признание в связи с этим получило предложение Мора, распространяющее гипотезу наибольших касательных напряжений на хрупкое разрушение материалов.

Условие предельного состояния по Морю имеет вид

$$\left(1 + \frac{\sigma_0}{\sigma'_0}\right)(\sigma_1 - \sigma_3) + \left(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma'_0}\right)(\sigma_1 + \sigma_3) = 2\sigma_0. \quad (5.13)$$

В частном случае равных опасных напряжений $\sigma'_0 = \sigma_0$ оно совпадает с условием гипотезы наибольших касательных напряжений (5.8).

Условие прочности имеет следующий вид:

$$\left(1 + \frac{\sigma_0}{\sigma'_0}\right)(\sigma_1 - \sigma_3) + \left(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma'_0}\right)(\sigma_1 + \sigma_3) \leq 2[\sigma]_p.$$

В случае плоского напряженного состояния, используя (4.18) и предположив, что в нем $\sigma_y = 0$, $\sigma_x = \sigma_1$, $\tau_{xy} = \tau$, получим

$$\frac{1-\kappa}{2} \sigma + \frac{1+\kappa}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]_p,$$

где $\kappa = \frac{\sigma_0}{\sigma'_0}$.

Теория Мора дает результаты, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными в тех случаях, когда $\sigma_1 > 0$, $\sigma_3 < 0$. Отличительной чертой теории Мора от рассмотренных ранее является то, что она полностью базируется на экспериментальных данных и по мере их накопления может уточняться. Недостатком теории Мора является неучет (как и в теории наибольших касательных напряжений) промежуточного главного напряжения σ_2 .

Раздел 6

ТЕОРИЯ ИЗГИБА

Под плоским поперечным изгибом понимается такой вид деформации, при которой все действующие активные и реактивные силы приложены к оси балки и лежат в главной плоскости. Главной называется плоскость, проходящая через главные центральные оси поперечных сечений. Предполагаем, что поперечные сечения балки симметричны относительно той плоскости, в которой лежат внешние силы (рис. 6.1), то есть плоскостью нагружения является плоскость симметрии.

Осью балки называется линия, которая проходит через центры тяжести всех поперечных сечений. До деформации балки ось представляет собой прямую линию (см. п. 1.2).

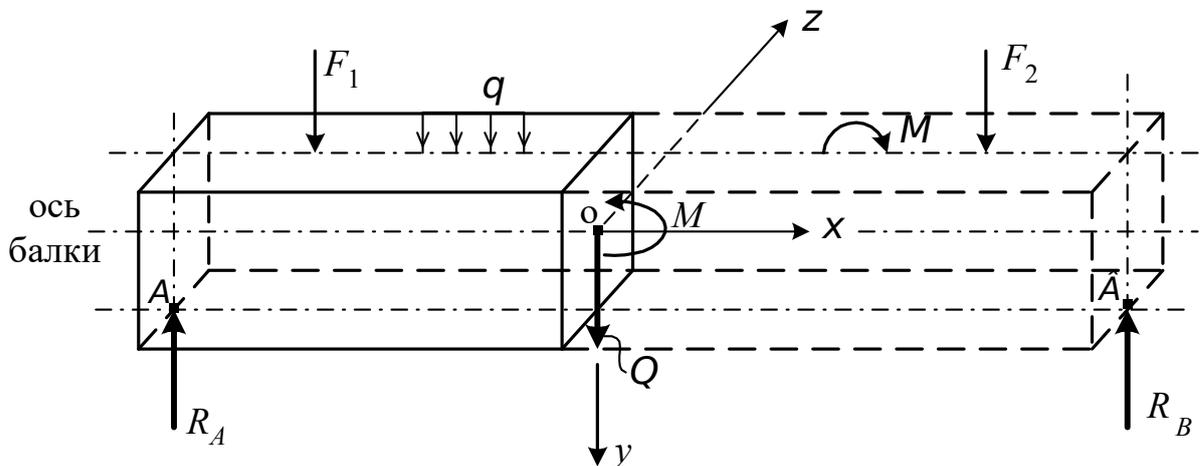


Рис. 6.1. Схема усилий, которые возникают в поперечных сечениях балки

При этих условиях внутренние силы, которые возникают в поперечных сечениях балки, приводятся к главному вектору Q , совпадающему с осью OY , и главному моменту M , плоскость действия которого совпадает с главной плоскостью XOY (рис. 6.1).

Если в поперечных сечениях балки возникают оба внутренних силовых фактора – изгибающий момент M и поперечная сила Q , то изгиб называется поперечным, а если только изгибающий момент – чистым.

6.1. Чистый изгиб

Рассмотрим вначале такие участки балок, где имеется только изгибающий момент, а поперечная сила равна нулю. В качестве примера возьмем балку, показанную на рис. 6.2.

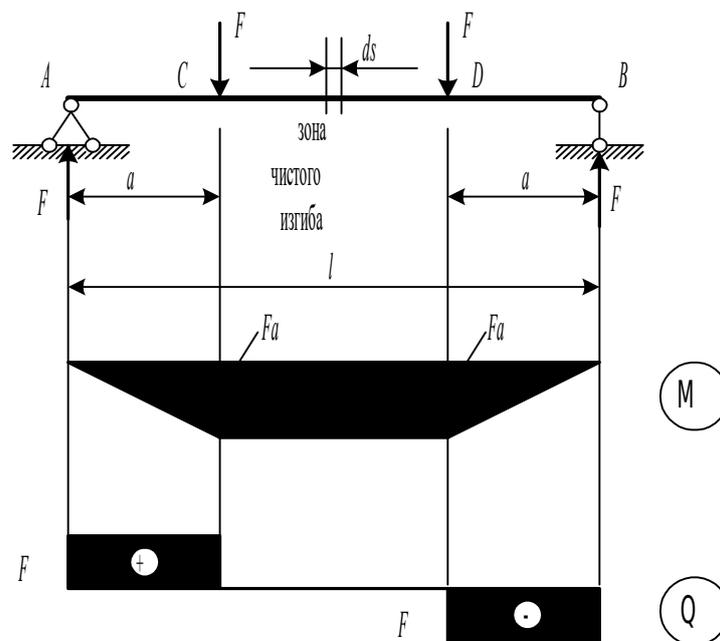


Рис. 6.2. Схема нагружения балки, приводящего к возникновению зоны чистого изгиба

При действии сил F балка изгибается, ее ось (прямая до изгиба) после изгиба принимает изогнутую форму (рис. 6.3). Верхние волокна балки сжимаются, нижние – растягиваются.

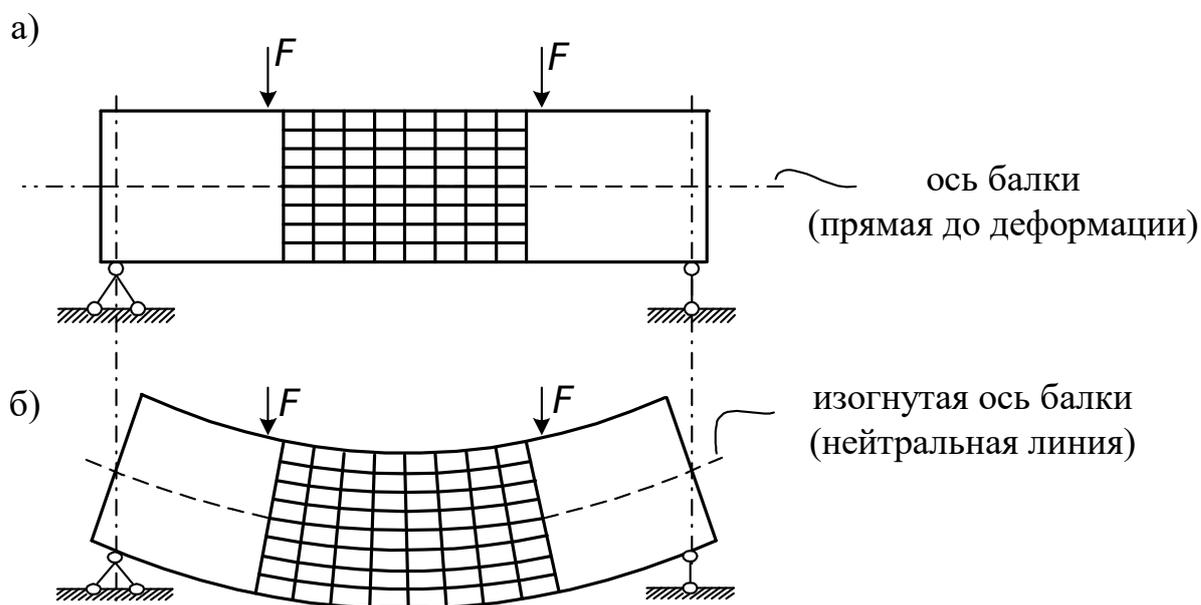


Рис. 6.3. Схемы искривления горизонтальных и вертикальных линий в зоне чистого изгиба

Если посмотреть все волокна балки, начиная с крайних верхних и кончая крайними нижними, то легко установить, что крайние верхние волокна сжимаются наиболее сильно, в следующих за ними – сжатие постепенно уменьшается и на некоторой высоте переходит в растяжение.

Последнее постепенно возрастает и в крайних нижних волокнах будет наибольшим. Между сжатыми и растянутыми волокнами будет такой слой, волокна которого при изгибе не меняют своей длины. Этот слой называется нейтральным.

Если на боковую поверхность балки нанести сетку из горизонтальных и вертикальных линий (рис. 6.3), то при изгибе горизонтальные линии искривятся примерно так же, как и ось балки, вертикальные же линии останутся прямыми; они только немного наклонятся, оставаясь перпендикулярными изогнутой оси балки. Отдельные прямоугольники сетки искажаются, но прямые углы остаются прямыми. Тогда поперечные сечения балки (рис. 6.1), плоские до деформации, остаются плоскими и после нее (гипотеза плоских сечений Якова Бернулли, 1705 г., см. п. 3.1).

Двумя поперечными сечениями вырежем в среднем участке балки элемент длиной ds (рис. 6.2) и представим его на отдельном чертеже (рис. 6.4).

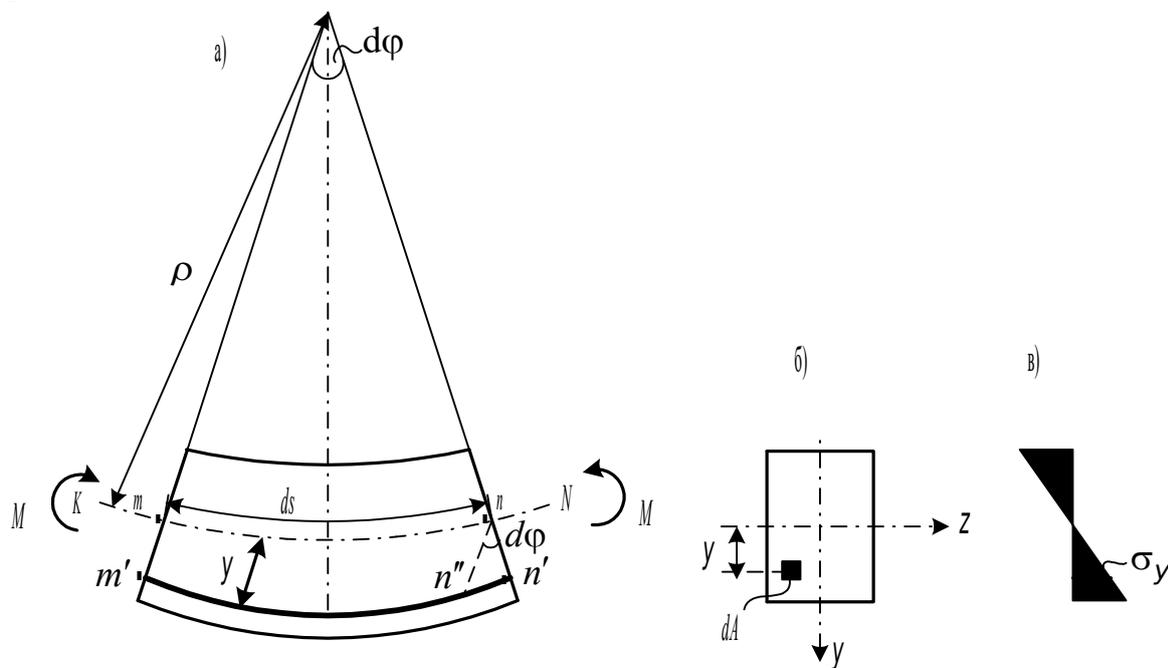


Рис. 6.4. Элемент балки

До деформации сечения балки параллельны между собой (рис. 6.2). После деформации они несколько наклоняются, образуя угол $d\phi$ (рис. 6.4). Пусть KN – нейтральный слой балки, ρ – радиус его кривизны, mn – длина продольного волокна, лежащего в нейтральном слое, которая не меняется при изгибе балки и все время остается равной ds :

$$mn = ds = \rho d\phi. \quad (6.1)$$

Возьмем волокно $m'n'$. При деформации это волокно удлинится. Чтобы определить приращение его длины, через точку n проведем линию, параллельную mm' , до пересечения с волокном $m'n'$ в точке n''

. Тогда $m'n'' = mn$ и отрезок $n'n''$ будет представлять полное удлинение волокна $m'n'$. Можно принять с точностью до малых второго порядка

$$n'n'' = y d\varphi. \quad (6.2)$$

Относительное удлинение волокна $m'n'$

$$\varepsilon = \frac{n'n''}{mn} = \frac{n'n''}{ds} = \frac{y d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}. \quad (6.3)$$

Для определенного сечения радиус кривизны изогнутой оси балки ρ есть величина постоянная, и поэтому относительное удлинение волокна прямо пропорционально расстоянию этого волокна до нейтральной оси балки.

Перейдем от деформаций к напряжениям, то есть рассмотрим физическую сторону задачи. Установив, что при изгибе балки одни из ее волокон удлиняются, а другие укорачиваются, можно сказать, что явление изгиба сводится к деформации продольных волокон.

Введем другую гипотезу. Примем, что при изгибе продольные волокна не нажимают друг на друга и не стремятся оторваться одно от другого. При таком предположении каждое волокно деформируется изолированно, испытывая простое одноосное сжатие или растяжение.

Следовательно, можно использовать закон Гука в виде (3.5), т. е.

$$\sigma = E \varepsilon.$$

Тогда, подставляя вместо ε ее значение (6.3), получим

$$\sigma = E \frac{y}{\rho}. \quad (6.4)$$

Эти напряжения нормальны к плоскости поперечного сечения (рис. 6.4, в) балки и меняются по линейному закону, а именно напряжение прямо пропорционально расстоянию волокна от нейтральной оси.

Теперь рассмотрим статическую сторону задачи. Возьмем левую часть балки. Заменяем отброшенную правую часть балки усилиями и составим уравнения равновесия (рис. 6.5).

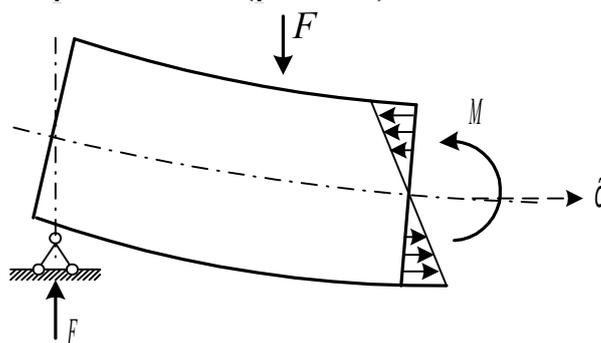


Рис. 6.5. К выводу формулы для нормальных напряжений

На поперечном сечении (рис. 6.4, б) выделим элементарные площадки dA . Тогда элементарное растягивающее усилие в волокне $n'm'$ равно

$$\sigma dA = \frac{E y}{\rho} dA. \quad (6.5)$$

Спроектируем все силы, действующие в сечении, на ось X :

$$\sum X = 0: \int_A \sigma dA = \int_A E \frac{y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0. \quad (6.6)$$

Так как $E \neq 0$, $\rho \neq 0$, то $\int_A y dA = 0$,

т. е. статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси должен быть равен нулю. Это возможно лишь в том случае, если нейтральная ось проходит через центр тяжести поперечного сечения. Итак, нейтральный слой в балке проходит через центры тяжести поперечных сечений.

Составим второе уравнение равновесия:

$$\sum M_{лев} = 0: \int_A \sigma y dA = \int_A E \frac{y^2}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M. \quad (6.7)$$

Но $\int_A y^2 dA = J$ – момент инерции (см. п. 2.3). Следовательно,

$$\frac{EJ}{\rho} = M \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}, \quad (6.8)$$

где $\frac{1}{\rho}$ – кривизна изогнутой оси балки;

EJ – жесткость балки при изгибе.

Кривизна изогнутой оси балки прямо пропорциональна изгибающему моменту и обратно пропорциональна жесткости балки.

В формулу (6.4) подставим (6.8). В результате найдем

$$\sigma = \frac{My}{J}. \quad (6.9)$$

Для материалов, которые одинаково (или почти одинаково) хорошо работают на растяжение и сжатие (сталь) наиболее употребительны сечения, симметричные относительно нейтральной оси (прямоугольники, двутавры, швеллеры ...).

Обозначим высоту сечения через h . Тогда, исходя из (6.9),

$$\sigma = \frac{M}{J} \frac{h}{2}.$$

Обозначим $\frac{J}{\frac{h}{2}} = W$ – момент сопротивления сечения. Тогда

$$\sigma = \frac{M}{W}. \quad (6.10)$$

Если сечение несимметрично относительно нейтральной оси (рис. 6.6), то

$$\sigma_1 = \frac{M}{W_1} \quad \text{и} \quad \sigma_2 = \frac{M}{W_2}, \quad (6.11)$$

где $W_1 = \frac{J}{h_1}$, $W_2 = \frac{J}{h_2}$.

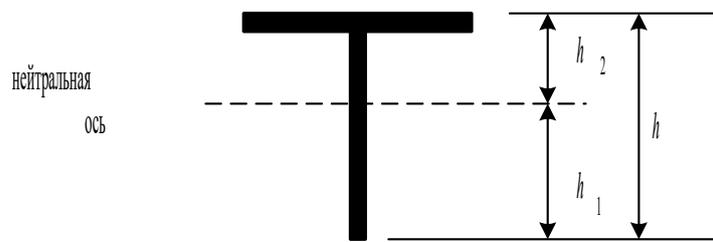


Рис. 6.6. Несимметричное относительно нейтральной оси поперечное сечение балки

6.2. Распространение выводов теории чистого изгиба на поперечный изгиб

При выводе формул (6.9), (6.10), (6.11) для нормальных напряжений мы имели в виду чистый изгиб, т. е. предполагался изгибающий момент, постоянный по длине рассматриваемого участка. Однако в расчетной практике наиболее часто встречается поперечный изгиб, когда в сечениях балки имеется как изгибающий момент, так и поперечная сила. При этом изгибающий момент уже не постоянен, а изменяется по длине балки.

Рассмотрим участок балки (рис. 6.7, а). На расстоянии y от нейтральной линии выделим волокно mn площадью dA (рис. 6.7, б).

При изменяющемся моменте усилия по концам выделенного волокна (рис. 6.7, в) различны. Но волокно находится в равновесии, а это возможно лишь при условии, что по его продольным граням действуют касательные усилия T_1 , T_2 . Следовательно, при поперечном изгибе возникают не только нормальные, но и касательные напряжения. Так как нормальные напряжения изменяются по высоте сечения, то и касательные тоже будут меняться, поэтому взаимные сдвиги волокон не одинаковы. Убедимся в этом с помощью опыта. Возьмем деревянный брусок $abcd$, распилим его на горизонтальные полоски и нагрузим силой F (рис. 6.8, а). Каждая полоска изгибается самостоятельно, у каждой верхние слои сжаты, а

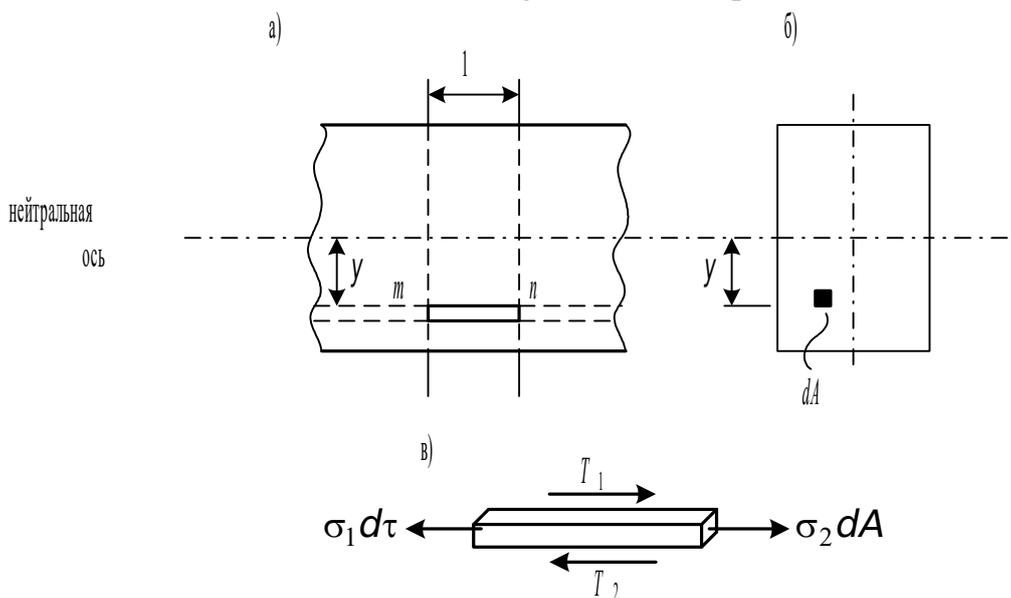


Рис. 6.7. К распространению выводов теории чистого изгиба на поперечный изгиб

нижние растянуты. Концы полок несколько сдвинутся один относительно другого по плоскостям разрезов. Торцевые грани примут ступенчатую форму (рис. 6.8, б). Почему же до разреза бруска отдельные его слои не сдвигались, а после разреза сдвигаются? Очевидно, силы, стремящиеся произвести этот сдвиг, были и до разреза, но выполнить его мешало сцепление волокон бруска.

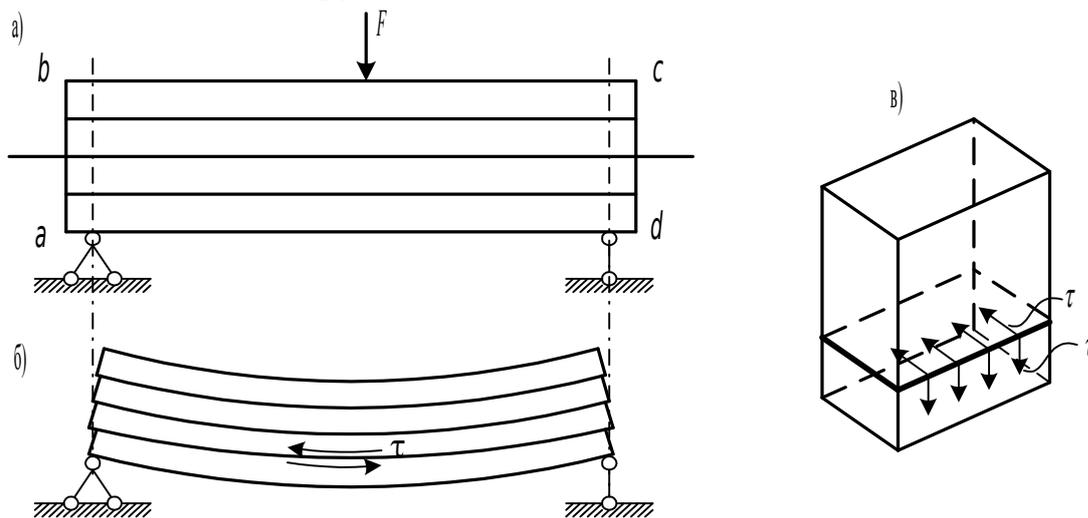


Рис. 6.8. Изгиб балки, составленной из горизонтальных брусков

На основании закона взаимности касательных напряжений (1.18) можно утверждать, что при поперечном изгибе будут возникать касательные напряжения и по площадкам, перпендикулярным к нейтральному слою, т. е. по вертикальным поперечным сечениям (рис. 6.8, в). Более точными исследованиями установлено, что влияние поперечной силы на величину нормальных напряжений незначительно. Оно зависит от отношения высоты балки к ее пролету. При небольшой высоте сечения $h = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{20}\right)l$ касательные напряжения составляют доли одного процента. Поэтому нормальные напряжения при поперечном изгибе определяют по формулам, выведенным в предположении *чистого изгиба*, – (6.9), (6.10), (6.11).

6.3. Вывод формулы касательных напряжений

Для аналитического определения касательных напряжений возьмем такой участок балки, на котором поперечная сила не равна нулю. Вырежем двумя поперечными сечениями элемент $mnrS$ длиной dx (рис. 6.9). Затем проведем сечение pq , параллельное нейтральному слою. Этими разрезами выделим из балки элемент $mnpq$.

Изгибающий момент в сечении X обозначим через M , а изгибающий момент в сечении $x + dx$ – через M_1 (рис. 6.9, а). Положим, что $M_1 > M$, так что приращение момента на длине рассматриваемого участка dx

$$M_1 - M = dM.$$

Нормальное напряжение в сечении X для волокна, лежащего на расстоянии y от нейтрального слоя (рис. 6.9, б, в) в соответствии с (6.9) равно

$$\sigma = \frac{M y}{J}.$$

Нормальное напряжение в сечении $x + dx$

$$\sigma_1 = \frac{M_1 y}{J}.$$

Силы N и N_1 , действующие по площади разреза $mm'pp'$, соответственно равны

$$N = \int_A \sigma dA = \frac{M}{J} \int_A y dA = \frac{M S}{J};$$

$$N_1 = \int_A \sigma_1 dA = \frac{M_1}{J} \int_A y dA = \frac{M_1 S}{J}.$$

На нижней грани элемента (рис. 6.9, б) должны быть силы, характеризующие действие отброшенной нижней части. Так как продольные волокна балки не давят друг на друга, нормальные напряжения по нижней грани элемента прикладывать не нужно, достаточно приложить лишь касательные напряжения τ , которые будем считать равномерно распределенными по ширине сечения балки.

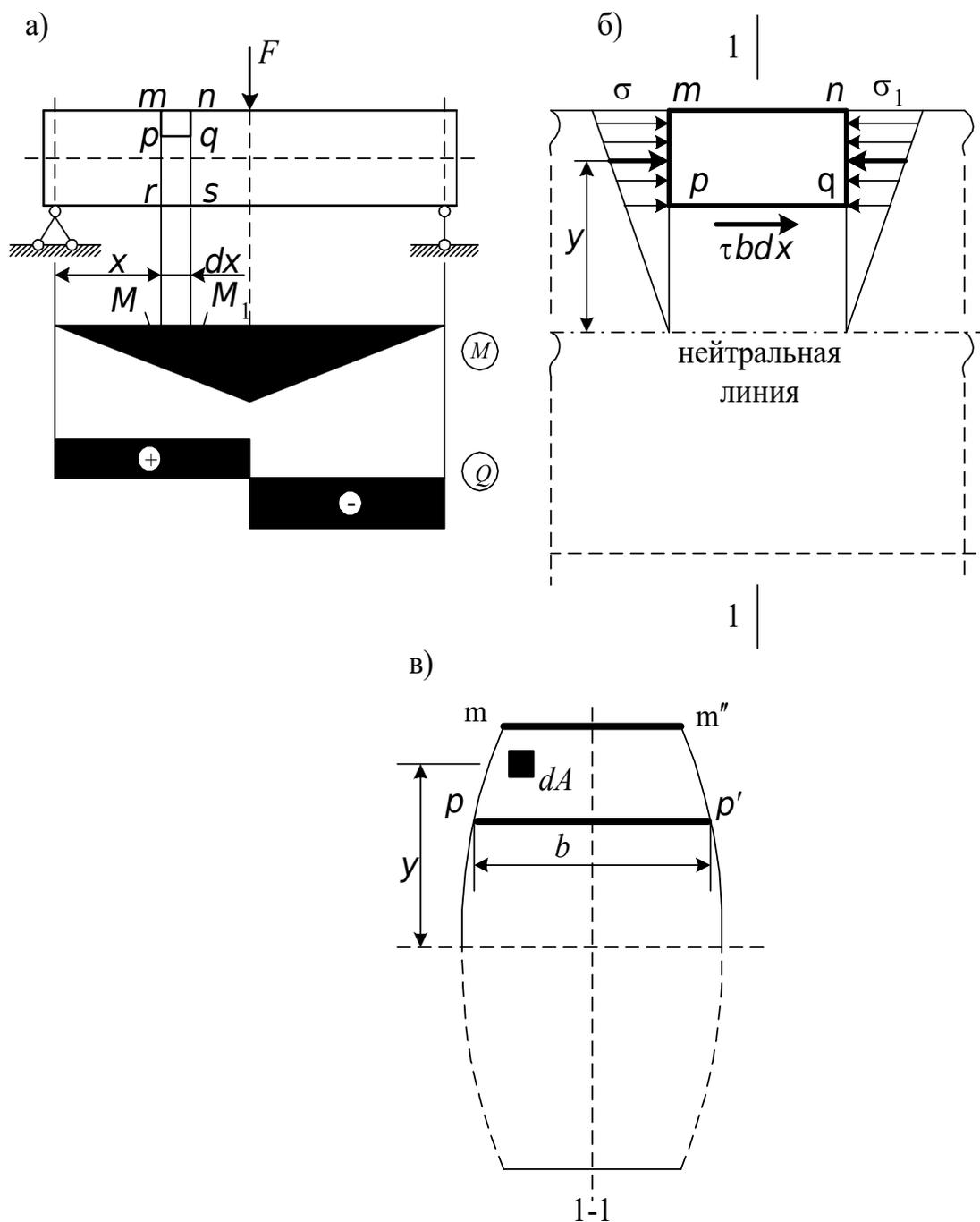


Рис. 6.9. К выводу формулы касательных напряжений

Уравнение равновесия для горизонтальных сил

$$\sum X = 0: N - N_1 + \tau b dx = 0.$$

Подставив в это равенство значения \$N\$ и \$N_1\$, получим

$$\tau b dx = dM \frac{S}{J}.$$

Так как $\frac{dM}{dx} = Q$ (см. (1.5)), то

$$\tau = \frac{QS}{Jb}, \quad (6.12)$$

где b – ширина сечения на уровне той площадки, на которой определяется касательное напряжение; S – статический момент площади относительно нейтральной оси той части поперечного сечения, которая лежит выше рассматриваемой площадки.

Формула (6.12) получена в 1855 г. Д.И. Журавским*. Она, как мы видели, основывается на двух допущениях: касательные напряжения в любой точке сечения направлены параллельно силе Q , величина касательного напряжения зависит только от координаты y точки сечения; другими словами, по ширине сечения касательные напряжения распределены равномерно.

6.3.1. Касательные напряжения для прямоугольного сечения

Изменение касательных напряжений по высоте сечения можно наглядно представить на графике, который называют эпюрой касательных напряжений. Из формулы (6.12) видно, что для заданного сечения балки изменение τ по высоте сечения зависит от величин S и b . Рассмотрим прямоугольное сечение (рис. 6.10).

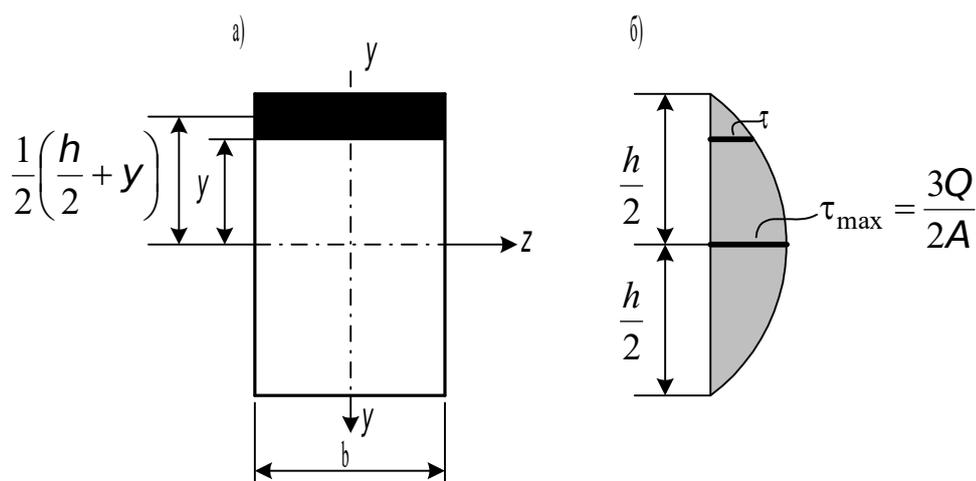


Рис. 6.10. Касательные напряжения в балке прямоугольного поперечного сечения

Статический момент заштрихованной площади относительно оси Z равен

$$S_z = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Подставив полученное выражение в (6.12), найдем

$$\tau = \frac{Q}{2J} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (6.13)$$

*Дмитрий Иванович Журавский (1821-1891) – выдающийся инженер путей сообщения России, строитель мостов Петербургско-Московской железной дороги.

Из этой формулы видно, что касательные напряжения по высоте сечения изменяются по закону параболы. Эти напряжения равны нулю при $y = \pm \frac{h}{2}$ и достигают максимума на уровне нейтральной оси ($y = 0$), где они равны

$$\tau_{\max} = Q \frac{12}{bh^3} \frac{h^2}{8} = \frac{3Q}{2A}. \quad (6.14)$$

Здесь A – площадь поперечного сечения, $A = bh$. Напомним, что момент инерции прямоугольника относительно оси Z равен $J_z = \frac{bh^3}{12}$ (см. п. 2.3.4).

6.3.2. Касательные напряжения для кругового сечения

Для бруса кругового сечения (рис. 6.11) путем несложной операции интегрирования можно найти $S = \frac{2}{3}(R^2 - y^2)^{3/2}$.

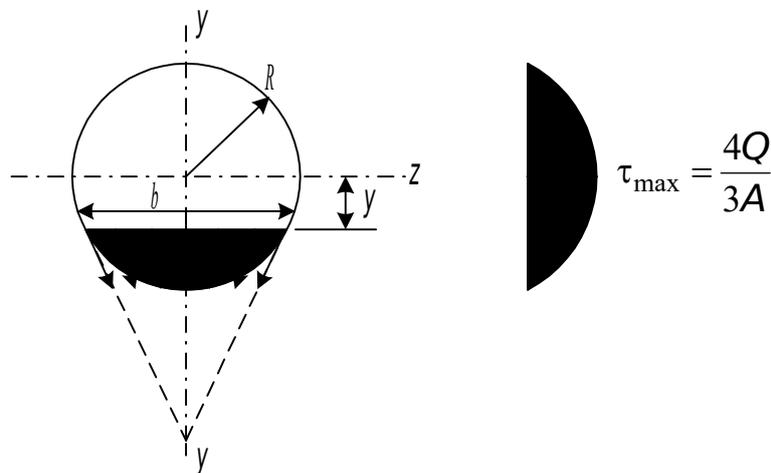


Рис. 6.11. Распределение касательных напряжений в балке кругового поперечного сечения

Кроме того, согласно п. 2.3.4,

$$J_z = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4},$$

$$b = 2\sqrt{R^2 - y^2},$$

откуда

$$\tau = \frac{4Q}{3\pi R^4} (R^2 - y^2) \quad (6.15)$$

и

$$\tau_{\max} = \frac{4Q}{3A}. \quad (6.16)$$

6.3.3. Касательные напряжения для треугольного сечения

Для бруса, имеющего сечение в форме треугольника с основанием b и высотой h (рис. 6.12), можно найти

$$S_z = \frac{1}{3} \frac{b}{h} \left(\frac{2h}{3} - y \right)^2 \left(\frac{h}{3} + y \right), \quad J_z = \frac{bh^3}{36},$$

$$\tau = \frac{4Q}{3bh^3} (2h - 3y)(h + 3y). \quad (6.17)$$

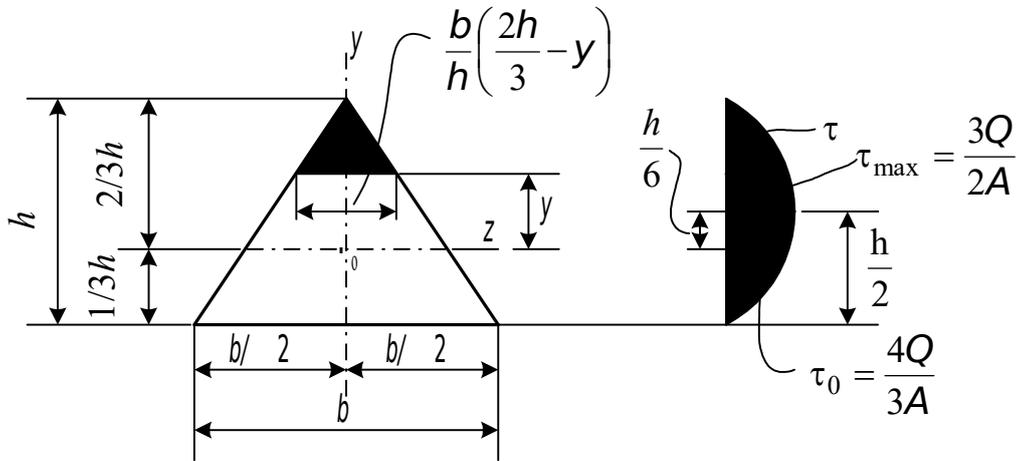


Рис. 6.12. Распределение касательных напряжений в балке треугольного поперечного сечения

Максимальные касательные напряжения имеют место при $y = \frac{h}{6}$:

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2A}, \quad (6.18)$$

где $A = \frac{1}{2}bh$.

На уровне нейтральной оси (при $y = 0$) касательные напряжения равны

$$\tau_{y=0} = \frac{4Q}{3A}. \quad (6.19)$$

Следует отметить, что для кругового и треугольного поперечных сечений полученные выше формулы (6.15) и (6.17) носят приближенный характер, так как здесь касательные напряжения имеют составляющие по оси Z . Для определения этих составляющих следует прибегать к более сложным приемам, нежели рассматриваемые в курсе сопротивления материалов. В большинстве случаев составляющие τ по оси Z играют существенно меньшую роль, чем составляющие по оси Y , поэтому при оценке прочности балок ими можно пренебречь.

6.3.4. Касательные напряжения для двутаврового сечения

Рассмотрим тонкостенное поперечное сечение балки в виде двутавра (рис. 6.13).

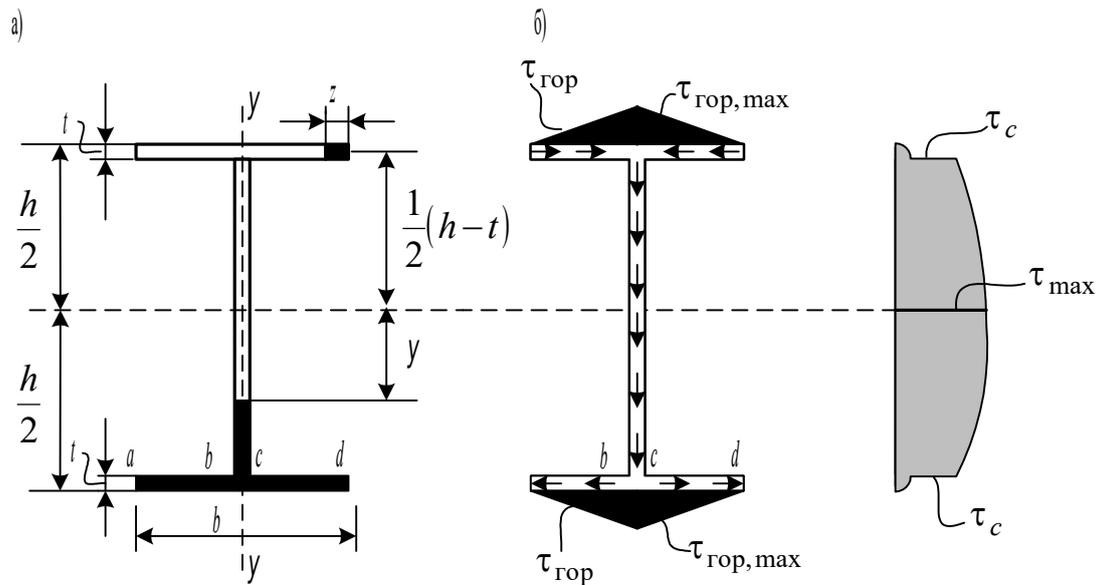


Рис. 6.13. Касательные напряжения в балке двутаврового поперечного сечения

Чтобы представить закон изменения касательных напряжений по высоте сечения, остановимся, как и ранее, на анализе влияния на их величину статического момента отсеченной площади S_z . На расстоянии y от нейтральной оси (рис. 6.13, а) статический момент отсеченной площади равен

$$S_z = \frac{1}{2} \left\langle d \left[\left(\frac{h}{2} - t \right)^2 - y^2 \right] + bt(h-t) \right\rangle. \quad (6.20)$$

При $y = 0$ (на уровне нейтральной оси) касательные напряжения достигают максимального значения

$$\tau_{\max} = \frac{Q \left[d \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 + bt(h-t) \right]}{2J_z \cdot d}. \quad (6.21)$$

При $y = \left(\frac{h}{2} - t \right)$, т. е. в месте перехода от стенки к полке, касательные напряжения равны

$$\tau_c = \frac{Qbt(h-t)}{2J_z \cdot d}. \quad (6.22)$$

Обычно толщина стенки d очень мала по сравнению с шириной полки b , поэтому разность между τ_{\max} (6.21) и τ_c (6.22) небольшая. Распределение касательных напряжений в месте соединения стенки с полкой следует более сложному закону и не может быть проанализировано в рамках элементарного подхода, т. е. на основании формулы (6.22), подстановкой в нее вместо $d - b$. Это видно из того факта, что при $y = \left(\frac{h}{2} - t \right)$ касательные напряжения на свободных поверхностях ab и cd (рис. 6.13, а) должны быть равны нулю, тогда как, согласно (6.20), они

имеют конечную величину. В местах перехода от широкой части сечения (полки двутавра) к более узкой (ее стенке) имеет место концентрация напряжений (см. п. 10.8). Для уменьшения этого опасного явления входящие углы в месте перехода стенки к полке округляются (см. сортамент прокатной стали, например, прил. 1). Заканчивая анализ распределения вертикальных касательных напряжений, подчеркнем, что в полках двутавра они очень малы, так как большую часть поперечной силы (около 95 %) воспринимает вертикальная стенка, полки же воспринимают только малую часть ее.

В полках двутавровой балки возникают также горизонтальные напряжения. Их можно определить по формуле (6.12), но только расстояние до рассматриваемой площадки нужно измерять от вертикальной оси по горизонтали, а статический момент отсеченной части полки брать относительно нейтральной оси сечения (рис. 6.13, а). И вместо ширины поперечного сечения b нужно ввести толщину стенки t . Тогда статический момент отсеченной части полки равен

$$S_z = \frac{1}{2} z t (h - t) ,$$

а горизонтальные касательные напряжения в полке определяются по следующей формуле:

$$\tau_{\text{гор}} = \frac{Q z (h - t)}{2 J_z} . \quad (6.23)$$

При $z = \frac{b}{2}$

$$\tau_{\text{гор. max}} = \frac{Q b (h - t)}{4 J_z} . \quad (6.24)$$

Как видно из рис. 6.13, б, траектории касательных напряжений в сечении при поперечной силе, направленной вниз, направлены от верхних краев полки к центру, далее проходят по стенке и затем направлены наружу к краям нижней полки.

6.4. Главные напряжения при изгибе балок

В практике встречаются такие случаи, когда наибольшими бывают напряжения по наклонным к оси балки площадкам. Они возникают в результате одновременного действия нормальных и касательных напряжений и называются главными напряжениями. Наибольшие и наименьшие главные напряжения действуют по двум взаимно-перпендикулярным площадкам, которые называются главными площадками (см. разд. 4). На главных площадках касательные напряжения равны нулю. Углы наклона главных площадок определяются по формуле (4.13), если в ней выполняются условия $\sigma_y = 0$, $\sigma_x = \sigma$, $\tau_{xy} = \tau$:

$$\text{tg } 2 \alpha = \frac{2 \tau}{\sigma} . \quad (6.25)$$

Равенство (6.25) для угла α дает два значения, которые отличаются на 90° (см. п. 4.1.2).

Формула для определения главных напряжений имеет следующий вид (получена из (4.14) заменой: $\sigma_y = 0$, $\sigma_x = \sigma$, $\tau_{xy} = \tau$):

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}. \quad (6.26)$$

Для того чтобы понять, как меняются величина и направление главных напряжений в балке, имеющей прямоугольное поперечное сечение, выберем по высоте сечения (рис. 6.14) пять точек А, В, С, D и Е. Точки А и Е находятся на верхней и нижней поверхности соответственно, а точка С – на середине высоты балки. Зная изгибающий момент и поперечную силу, которые действуют в данном поперечном сечении, можно подсчитать напряжения по (6.9), (6.12), (6.26). Принимаем, что эти напряжения действуют на малые элементы, которые выделим из балки около соответствующих точек (рис. 6.14, а, б).

Из схем, приведенных на рис. 6.14, а, видно, что в точке А главные сжимающие напряжения направлены горизонтально, при этом главные растягивающие напряжения равны нулю. При перемещении к нейтральной оси главные сжимающие и главные растягивающие напряжения будут отклоняться соответственно от горизонтали и вертикали и на нейтральной оси составят углы 45° с этими осями. В точке Е главные растягивающие напряжения горизонтальны, а главные сжимающие – равны нулю.

Площадки с самыми большими касательными напряжениями (см. (4.18), $\sigma_y = 0$, $\sigma_x = \sigma$, $\tau_{xy} = \tau$)

$$\tau_{\max/\min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (6.27)$$

расположены под углом 45° к площадкам с наибольшими нормальными напряжениями (рис. 6.14, б). На этих площадках нормальные напряжения в нуль не обращаются (см. точки А, В, D, Е на рис. 6.14, б (см. также п. 4.1.3)).

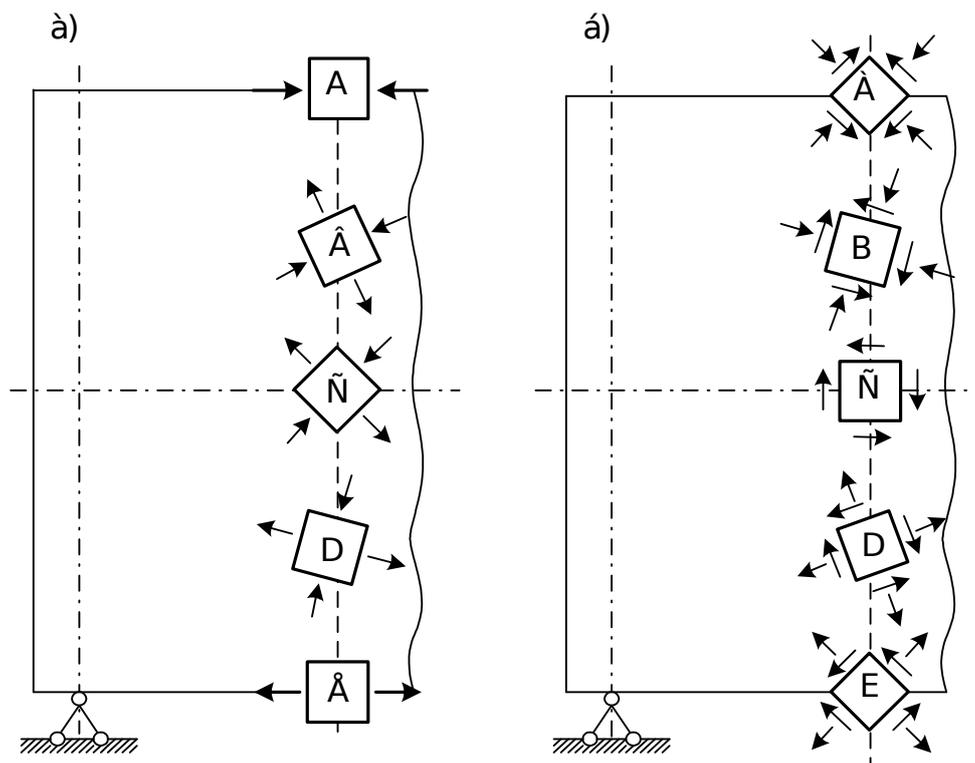


Рис. 6.14. Напряжения в балке прямоугольного поперечного сечения в точках А, В, С, D, Е: а – главные напряжения; б – максимальные касательные напряжения

6.5. Проверка прочности балок при изгибе

Из формулы (6.26) видно, что главные напряжения будут иметь большую величину в таких точках балки, в которых одновременно имеются большие нормальные (6.9) и большие касательные напряжения (6.12). Как касательные, так и нормальные напряжения изменяются, во-первых, по длине балки и, во-вторых, по высоте каждого поперечного сечения. Изменение σ и τ по длине балки зависит от величины M и Q . Наибольшие нормальные напряжения будут в тех сечениях балки, где изгибающий момент достигает максимального по абсолютной величине значения. Наибольшие касательные напряжения возникают там, где максимального значения достигает поперечная сила. Если оба сечения совпадают, то здесь будут и самые большие главные напряжения. Тогда это сечение балки и будет опасным. Чаще всего сечение с наибольшим изгибающим моментом и наибольшей поперечной силой не совпадают. В этом случае за опасные сечения следует принять: сечения, где изгибающий момент имеет наибольшее значение; сечение, где поперечная сила наибольшая; сечение, где M и Q , хотя и не принимают наибольших значений, но в своей комбинации создают наиболее невыгодное сочетание (т. е. главные напряжения будут наибольшими). После того, как опасные сечения балки определены, для каждого из них строят эпюры нормальных и касательных напряжений и указывают опасные точки уже в сечении. Изменение напряжений по

высоте сечения связано с видом поперечного сечения, поэтому положение опасных точек зависит от формы сечения (рис. 6.15).

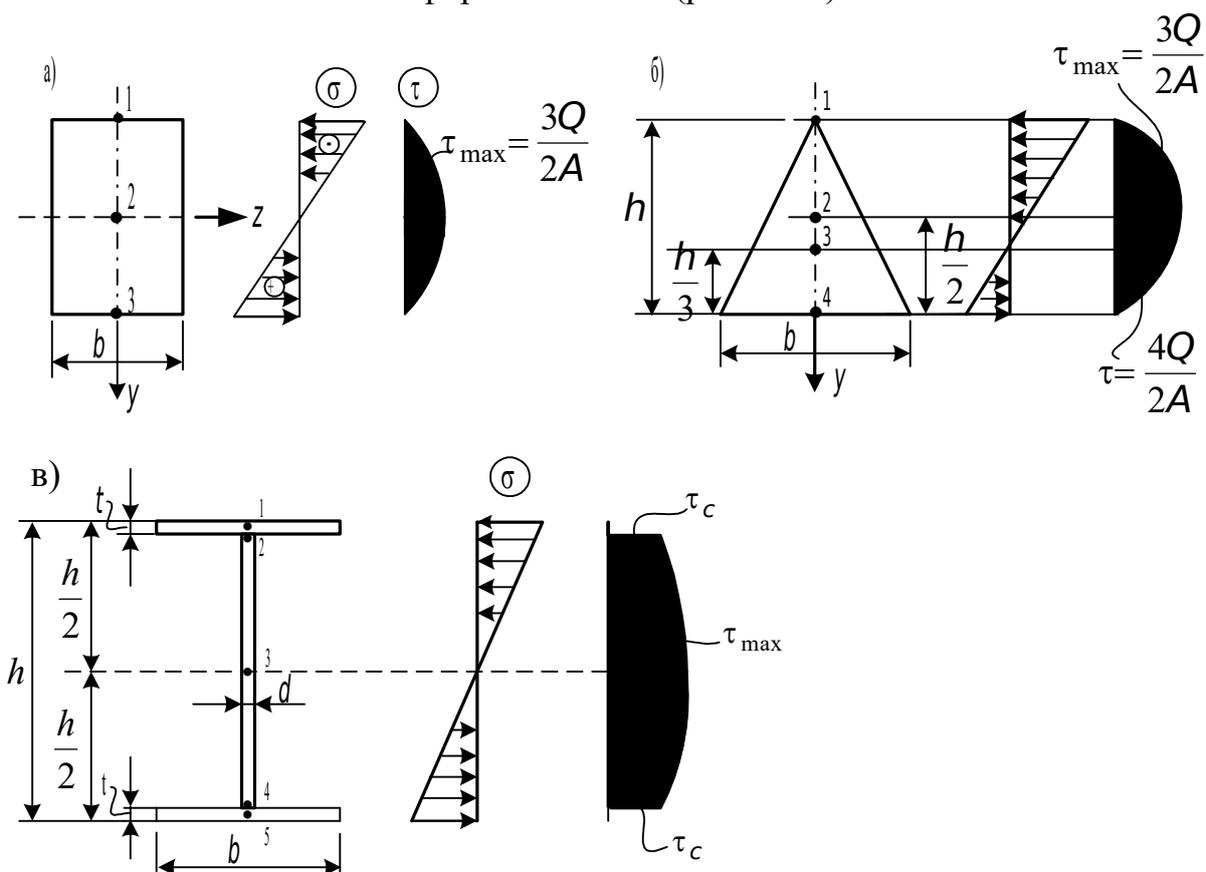


Рис. 6.15. Распределение нормальных и касательных напряжений в поперечных сечениях балок

Для прямоугольного сечения (рис. 6.15, а) опасными точками будут точки 1, 2, 3. В точках 1 и 3 касательные напряжения равны нулю, а нормальные – достигают наибольших по абсолютной величине значений. Напряженное состояние в этих точках линейное (одноосное), и условие прочности по методу допускаемых напряжений и предельных состояний принимают соответствующий вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \leq [\sigma], \quad (6.28)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \leq R.$$

В точке 2 (рис. 6.15, а) нормальные напряжения равны нулю, а касательные напряжения имеют наибольшие значения. Здесь наблюдается чистый сдвиг, поэтому проверку прочности необходимо произвести по формулам

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_z}{J_z b} \leq [\tau],$$

(6.29)

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_z}{J_z b} \leq R_{cp},$$

где R_{cp} – расчетное сопротивление на срез материала балки;
 $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение.

Что касается других точек, то где бы в поперечном сечении они ни были выбраны (например, точка 2 на рис. 6.15, б и в), в них будет плоское напряженное состояние, при котором определяющими являются напряжения (6.26). В этих случаях условия прочности, соответствующие различным теориям, принимают следующий вид:

– теория наибольших нормальных напряжений (см. п. 5.1)

$$\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]_p; \quad (6.30)$$

при сжатии $\left| \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right| \leq [\sigma]_c;$

– теория наибольших относительных удлинений (см. п. 5.2)

$$\frac{1-\nu}{2} \sigma + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (6.31)$$

– теория наибольших касательных напряжений (см. п. 5.3)

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (6.32)$$

– энергетическая теория прочности (см. п. 5.4)

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (6.33)$$

При расчете по методу предельных состояний в правой части формул (6.30) – (6.33) $[\sigma]$ заменяется на R (расчетное сопротивление).

6.6. Изогнутая ось прямого бруса

6.6.1. Дифференциальное уравнение изогнутой оси

Изогнутой осью балки или ее упругой линией называется та кривая, в которую обращается прямолинейная до деформации ось балки после приложения к ней нагрузки. Чтобы определить эту ось, нужно уметь составить ее уравнение, т. е. выразить ее ординаты как функции положения точки по длине балки. Поместим начало координат на левом конце балки (рис. 6.16). Обозначим через \mathcal{U} прогиб балки в сечении X .

Прогибы вниз считаем положительными. Проведем в сечении X касательную к изогнутой оси балки. Угол Φ будем считать положительным, если он образован вращением касательной по часовой стрелке.

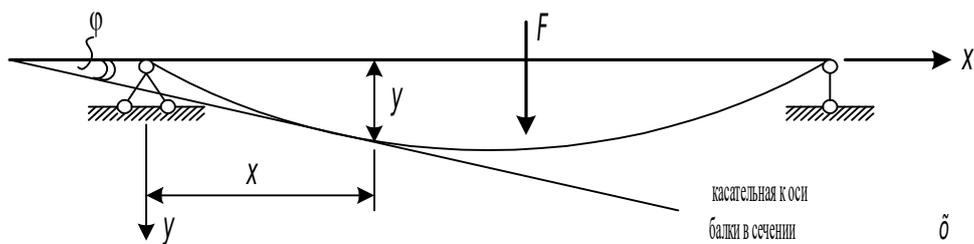


Рис. 6.16. К выводу дифференциального уравнения изогнутой оси балки

Найдем зависимость

$$y = f(x).$$

Воспользуемся равенством (6.8):

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{M}{EJ}.$$

Напомним, эту формулу читают так: кривизна балки в рассматриваемом сечении пропорциональна изгибающему моменту и обратно пропорциональна ее жесткости (см. п. 6.1).

В курсе высшей математики приводится следующее выражение для определения кривизны:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}. \quad (6.34)$$

Из этой формулы следует, что если известно уравнение кривой $y = y(x)$, то ее кривизна в каждой точке может быть вычислена через первую $\left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$ и вторую $\left(y'' = \frac{d^2y}{dx^2}\right)$ производные от этой функции. Подставив (6.34) в (6.8), получим

$$\frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \pm \frac{M}{EJ}. \quad (6.35)$$

По своей структуре это уравнение является нелинейным, так как содержит $(y')^2$. Оно редко используется при практических расчетах, так как большинство применяемых в строительстве балок являются очень жесткими, а их прогибы представляют собой величины очень малые по сравнению с их длиной. Для большинства балок максимальные прогибы не превышают $\left(\frac{1}{200} \dots \frac{1}{600}\right)l$. Изогнутая ось таких балок представляет собой очень пологую кривую, углы наклона которой редко превосходят $\left(\frac{1}{3} \dots \frac{1}{2}\right)^\circ$ и почти никогда не превышают 1° ; $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}\right)^\circ = 0,001$; $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\right)^\circ = 0,0087$; $\operatorname{tg}(1)^\circ = 0,017$. В знаменателе формулы (6.35) входят

квадраты \mathcal{Y}' (т. е. тангенсов). Они представляют собой величины ничтожно малые по сравнению с единицей: $(0,006)^2 = 3,6 \cdot 10^{-5}$; $(0,0087)^2 = 7,6 \cdot 10^{-5}$; $(0,017)^2 = 2,89 \cdot 10^{-4}$. Ими можно пренебречь и принять $\frac{1}{\rho} = \mathcal{Y}''$, тогда

$$\mathcal{Y}'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \frac{M}{EJ}. \quad (6.36)$$

Уравнение (6.36) устанавливает связь между изгибающим моментом M и второй производной прогиба \mathcal{Y}'' .

При положительном изгибающем моменте кривизна в любом сечении будет отрицательна, поскольку она выражается производной от убывающей функции $\frac{1}{\rho} = (\mathcal{Y}')'$. Из двух знаков уравнения (6.36) нужно выбрать тот, который будет соответствовать принятому направлению осей координат (рис. 6.16) и установленному правилу знаков для изгибающих моментов (п. 1.7.3, рис. 1.17, б).

Для нашего случая

$$\mathcal{Y}'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M}{EJ}. \quad (6.37)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (6.37) оказывается справедливым при условии, что ось X направлена вдоль оси балки вправо, а ось \mathcal{Y} – вниз. Продифференцировав уравнение (6.37) один раз по X и привлекая зависимость (1.5), получим

$$EJ \frac{d^3 y}{dx^3} = -Q. \quad (6.38)$$

Продифференцировав (6.38) один раз по X и учитывая зависимость (1.4), найдем

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q. \quad (6.39)$$

Уравнения (6.37), (6.38), (6.39) используют для определения прогибов балок. Прогиб \mathcal{Y} можно найти из решения любого из приведенных уравнений в зависимости от того, какая из величин M , Q или q задана и что представляется более удобным с математической точки зрения. Процедура определения прогиба включает в себя последовательное интегрирование уравнений (6.37), (6.38), (6.39), причем получающиеся при этом постоянные интегрирования находятся из граничных условий. Отметим, что метод непосредственного интегрирования указанных дифференциальных уравнений целесообразно использовать при наличии всего лишь одного участка (иногда – двух), так как при большом их количестве он становится громоздким ввиду наличия большого количества произвольных постоянных, которые предварительно необходимо определить.

6.6.2. Решение дифференциального уравнения методом

непосредственного интегрирования

Рассмотрим балку, показанную на рис. 6.17.

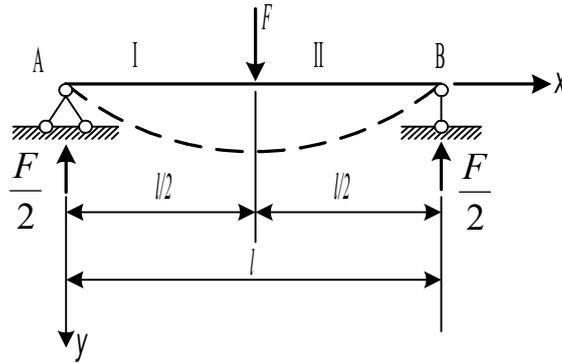


Рис. 6.17. Расчетная схема балки

Найдем ее прогиб путем решения дифференциального уравнения (6.37).

Составим выражение изгибающего момента по участкам. При этом будем учитывать силы, расположенные только слева (или только справа) от рассматриваемого сечения балки

$$M_1 = \frac{F}{2} x,$$

$$M_2 = \frac{F}{2} x - F \left(x - \frac{\ell}{2} \right).$$

Составим дифференциальные уравнения изогнутой оси балки. На первом участке $0 \leq x \leq \frac{\ell}{2}$

$$EJ y_1'' = -\frac{F}{2} x.$$

На втором участке $\frac{\ell}{2} \leq x \leq \ell$

$$EJ y_2'' = -\frac{F}{2} x + F \left(x - \frac{\ell}{2} \right).$$

Теперь интегрируем полученные уравнения

$$EJ y_1' = -\frac{F x^2}{4} + C_1,$$

$$EJ y_1 = -\frac{F x^3}{12} + C_1 x + C_2,$$

$$EJ y_2' = -\frac{F x^2}{4} + \frac{F}{2} \left(x - \frac{\ell}{2} \right)^2 + D_1,$$

$$EJ y_2 = -\frac{F x^3}{12} + \frac{F}{6} \left(x - \frac{\ell}{2} \right)^3 + D_1 x + D_2.$$

Отметим, что при интегрировании дифференциального уравнения на втором участке мы считали $\left(x - \frac{\ell}{2} \right)$ новой переменной, т. е. не раскрывали скобок. Этот прием, значительно упрощающий вычисления, в середине

прошлого столетия предложил немецкий ученый Клебш. Условия сопряжения первого и второго участков балки: при $x = \frac{\ell}{2}$

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad y_1 = y_2.$$

Используя эти условия, получаем

$$C_1 = D_1 \quad \text{и} \quad C_2 = D_2.$$

Таким образом, удовлетворение условий сопряжения приводит к равенству произвольных постоянных, полученных при первом и втором интегрировании. Граничные условия для рассматриваемой балки (рис. 6.17): при $x = 0$ $y_1 = 0$; при $x = l$ $y_2 = 0$. Удовлетворяя первому из этих условий, получим $C_2 = 0$. Значит $D_2 = 0$. Удовлетворим теперь второе условие: $-\frac{F \ell^3}{12} + \frac{F}{6} \left(\ell - \frac{\ell}{2} \right)^3 + D_1 \ell = 0$. Отсюда

$$D_1 = \frac{F \ell^2}{16} = C_1.$$

Теперь запишем окончательно:

$$y_1 = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{F x^3}{12} + \frac{F \ell^2}{16} x \right],$$

$$y_2 = \frac{1}{EJ} \left[\frac{F x^3}{12} - \frac{F}{6} \left(x - \frac{\ell}{2} \right)^3 + \frac{F \ell^2}{16} x \right].$$

Подставляя в первое уравнение $x = \frac{\ell}{2}$, получим максимальный прогиб в середине пролета $y_{\max} = \frac{F \ell^3}{48 EJ}$.

В качестве второго примера, иллюстрирующего метод непосредственного интегрирования, рассмотрим балку с пролетом ℓ , защемленную по краям и находящуюся под действием равномерно распределенной нагрузки q (рис. 6.18).

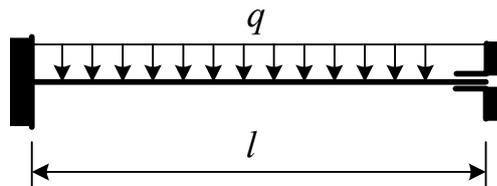


Рис. 6.18. К иллюстрации метода непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки возьмем в виде (6.39):

$$EJ y^{IV} = q.$$

Интегрируем это уравнение последовательно четыре раза:

$$EJ y''' = qx + C_1,$$

$$EJ y'' = \frac{qx^2}{2} + C_1 x + C_2,$$

$$EJ y' = \frac{qx^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{6} + C_2 x + C_3,$$

$$EJ y = \frac{qx^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Для определения произвольных постоянных запишем следующие граничные условия:

$$\text{при } x = 0 \quad y = 0, \quad \varphi = 0;$$

$$\text{при } x = \ell \quad y = 0, \quad \varphi = 0.$$

В результате получим

$$C_3 = C_4 = 0,$$

$$C_1 = -\frac{q\ell}{2}, \quad C_2 = \frac{q\ell^2}{12}.$$

Подставляя их в уравнения для прогиба, найдем

$$y = \frac{1}{EJ} \left(\frac{qx^4}{24} - \frac{q\ell}{12} x^3 + \frac{q\ell^2}{24} x^2 \right).$$

Полагая в полученном уравнении $x = \frac{\ell}{2}$, получим максимальный прогиб балки в середине пролета

$$y_{\max} = \frac{q\ell^4}{384EJ}.$$

6.6.3. Метод начальных параметров

В качестве исходного принимаем уравнение 4-го порядка, т. е. (6.39):

$$EJ y^{IV} = q.$$

Интеграл этого уравнения получен в предыдущем примере (см. п. 6.6.2):

$$EJ y = C_1 \frac{x^3}{3!} + C_2 \frac{x^2}{2!} + C_3 x + C_4 + Y(x). \quad (6.40)$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные интегрирования. Первые четыре члена представляют собой решения однородного уравнения (6.40). Последним членом выражено частное решение, соответствующее правой части дифференциального уравнения

$$Y(x) = \int \int \int \int q(dx)^4. \quad (6.41)$$

Из (6.41) видно, что интеграл $Y(x)$ выражает влияние внешней нагрузки. При равномерно распределенной нагрузке он равен $\frac{qx^4}{24}$ (см. п. 6.6.2).

В курсе математического анализа доказывается, что n -кратный интеграл функции $f(x)$ может быть приведен к однократному интегралу

$$\int \int \int \dots \int f(x) (dx)^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t) (x-t)^{n-1} dt. \quad (6.42)$$

Следуя формуле (6.42), интеграл $Y(x)$ из (6.41) можно представить как однократный

$$Y(x) = \frac{1}{3!} \int_0^x q(t) (x-t)^3 dt. \quad (6.43)$$

В этом интеграле t – новая переменная, а X представляет собой параметр подынтегрального выражения и является одновременно верхним пределом интеграла. При вычислении интегралов, зависящих от параметра, интегрирование производится известным способом, рассматривая параметр X при взятии интеграла как постоянную величину. Физический смысл интеграла: момент третьей степени от всех нагрузок, расположенных левее сечения X .

Вычислим по формуле (6.43) значения функции $Y(x)$ для различных нагрузок и различных случаев их приложения.

6.6.3.1. Равномерно распределенная нагрузка q

Допустим, что на участке балки, ограниченном координатами $x = a$ и $x = l$, действует равномерно распределенная нагрузка (рис. 6.19, а).

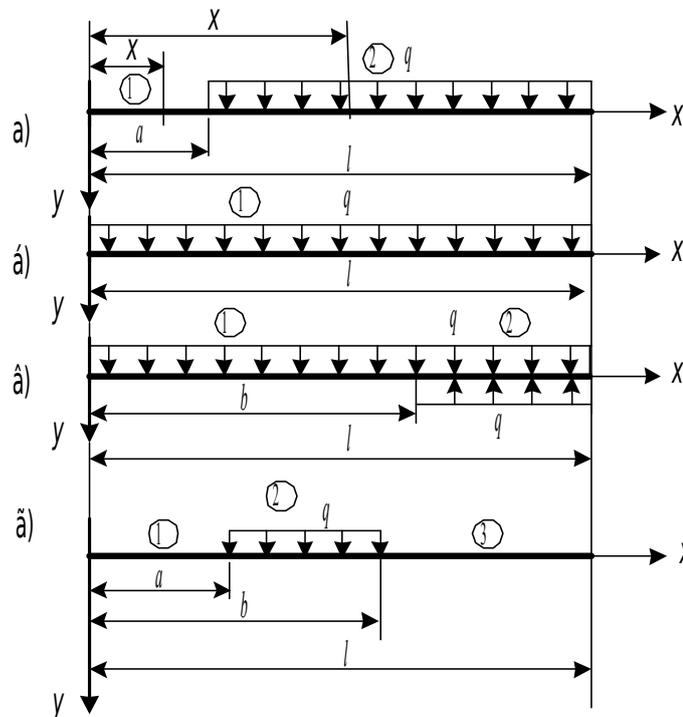


Рис. 6.19. К вычислению функции $Y(x)$ для различных случаев приложения равномерно распределенной нагрузки q

На первом участке $0 \leq x \leq a$ нагрузка отсутствует, поэтому интеграл $Y(x)$ равен нулю:

$$Y(x) = 0.$$

На втором участке $x \geq a$

$$Y_2(x) = -\frac{q}{3!} \int_a^x (x-t)^3 dt = \frac{q(x-a)^4}{4!}. \quad (6.44)$$

Если $a = 0$ (рис. 6.19, б), то действие нагрузки распространяется на всю длину балки и

$$Y(x) = \frac{qx^4}{4!}.$$

При действии нагрузки на участке балки с координатами $x = 0$ и $x = b$ (рис. 6.19, в) на первом участке $0 \leq x \leq b$ функция $Y_1(x)$ определяется по формуле (6.44). Для вычисления функции на втором участке продолжим нагрузку до конца балки и для того, чтобы напряженное состояние балки не изменилось, введем компенсирующую нагрузку той же интенсивности q , но направленную в противоположную сторону.

Тогда очевидно, что

$$Y_2(x) = \frac{q}{3!} \int_b^x (x-t)^3 dt = -\frac{q(x-b)^4}{4!}. \quad (6.45)$$

Интеграл $Y(x)$ для этого случая расположения нагрузки (рис. 6.19, в) запишется так:

$$Y(x) = \frac{qx^4}{4!} - \frac{q(x-b)^4}{4!}. \quad (6.46)$$

Для нагрузки, показанной на рис. 6.19, г, функция $Y(x)$ будет иметь такой вид:

$$Y_q(x) = \frac{q(x-a)^4}{4!} - \frac{q(x-b)^4}{4!}. \quad (6.47)$$

6.6.3.2. Сосредоточенная сила

Рассмотрим балку, загруженную в сечении $x = c$ сосредоточенной силой F (рис. 6.20).

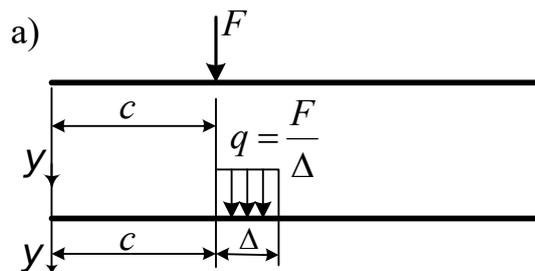


Рис. 6.20. К вычислению функции $Y(x)$ для сосредоточенной силы

На участке $x \leq c$ интеграл $Y(x)$ равен нулю, так как нагрузка здесь отсутствует:

$$Y(x) = 0.$$

Для того чтобы получить значение интеграла $Y(x)$ на втором участке, когда $x \geq c$, представим сосредоточенную силу в виде нагрузки $q = \frac{F}{\Delta}$, равномерно распределенной на участке Δ . Тогда интеграл вычислим так же, как в случае равномерно распределенной нагрузки:

$$Y(x) = \frac{F}{3! \Delta} \int_c^{c+\Delta} (x-t)^3 dt.$$

Воспользовавшись теоремой о среднем, запишем интеграл как произведение участка интегрирования Δ на некоторое среднее значение подинтегральной функции $(x-t_{cp})^3$:

$$Y_2(x) = \frac{F}{3! \Delta} (x-t_{cp})^3 \Delta = \frac{F}{3!} (x-t_{cp})^3.$$

Если теперь участок интегрирования Δ устремить к нулю, то абсцисса t_{cp} будет стремиться к своему предельному значению C :

$$Y_F(x) = \frac{F}{3!} (x-c)^3. \quad (6.48)$$

6.6.3.3. Сосредоточенный момент

Рассмотрим балку, в сечении $x=d$ которой приложен момент m (рис. 6.21, а).

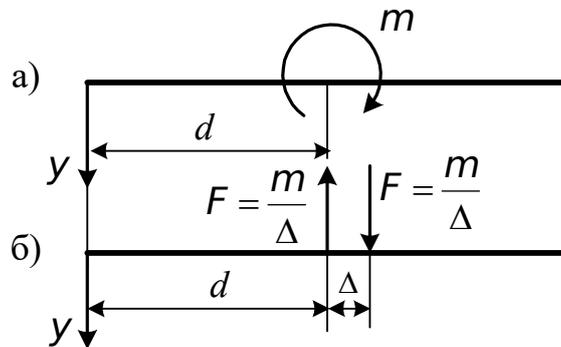


Рис. 6.21. К вычислению функции $Y(x)$ для сосредоточенного момента

Представим сосредоточенный момент в виде пары сил (рис. 6.21, б). Тогда значение интеграла, выражающее влияние двух сосредоточенных сил, можно записать так:

$$\begin{aligned} Y(x) &= -\frac{m(x-d)^3}{3! \Delta} + \frac{m[x-(d+\Delta)]^3}{3! \Delta} = -\frac{m}{3!} \left[\frac{(x-d)^3}{\Delta} - \frac{(x-d)^3}{\Delta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(x-d)^2 \Delta}{\Delta} - \frac{3(x-d) \Delta^2}{\Delta} + \frac{\Delta^3}{\Delta} \right] = \\ &= -\frac{m}{3!} [3(x-d)^2 - 3(x-d)\Delta + \Delta^2]. \end{aligned}$$

Устремив $\Delta \rightarrow 0$, получим

$$Y_M(x) = -\frac{m(x-d)^2}{2!}. \quad (6.49)$$

Представим полученное ранее уравнение (6.40) в следующем виде:

$$y = \frac{1}{EJ} \left(C_1 \frac{x^3}{3!} + C_2 \frac{x^2}{2!} + C_3 x + C_4 + Y(x) \right). \quad (6.50)$$

Возьмем первую, вторую и третью производные от этого уравнения:

$$y' = \varphi = \frac{1}{EJ} \left[C_1 \frac{x^2}{2!} + C_2 x + C_3 + Y'(x) \right]; \quad (6.51)$$

$$EJ y'' = -M = -C_1 x - C_2 - Y''(x); \quad (6.52)$$

$$EJ y''' = -Q = -C_1 - Y'''(x). \quad (6.53)$$

Вычислим значение производных от интеграла $Y(x)$ (6.43). Для этого воспользуемся известной в высшей математике формулой дифференцирования интеграла по верхнему пределу и параметру:

$$Y'(x) = \frac{1}{2!} \int_0^x (x-t)^2 q(t) dt;$$

$$Y''(x) = \int_0^x (x-t) q(t) dt;$$

$$Y'''(x) = \int_0^x q(t) dt.$$

Полагая в полученных формулах и в (6.43) $x = 0$, получим

$$Y(0) = Y'(0) = Y''(0) = Y'''(0) = 0. \quad (6.54)$$

Обозначим через Y_0 , φ_0 , M_0 , Q_0 соответственно прогиб, угол наклона, изгибающий момент и поперечную силу в начале координат (при $x = 0$). Эти величины назовем начальными параметрами. Выразим произвольные постоянные C_1 , C_2 , C_3 , C_4 через начальные параметры. Для этого в (6.50), (6.51), (6.52), (6.53) подставим $x = 0$ и учтем (6.54). В результате получим

$$y_0 = \frac{C_4}{EJ};$$

$$\varphi_0 = \frac{C_3}{EJ}; \quad (6.55)$$

$$M_0 = -C_2;$$

$$Q_0 = -C_1.$$

Подставив постоянные интегрирования (6.55) в уравнение изогнутой оси балки (6.50), найдем

$$y = y_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2!EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3!EJ} + \frac{Y(x)}{EJ}. \quad (6.56)$$

Теперь рассмотрим балку, находящуюся под действием всех вышеперечисленных нагрузок (рис. 6.22).

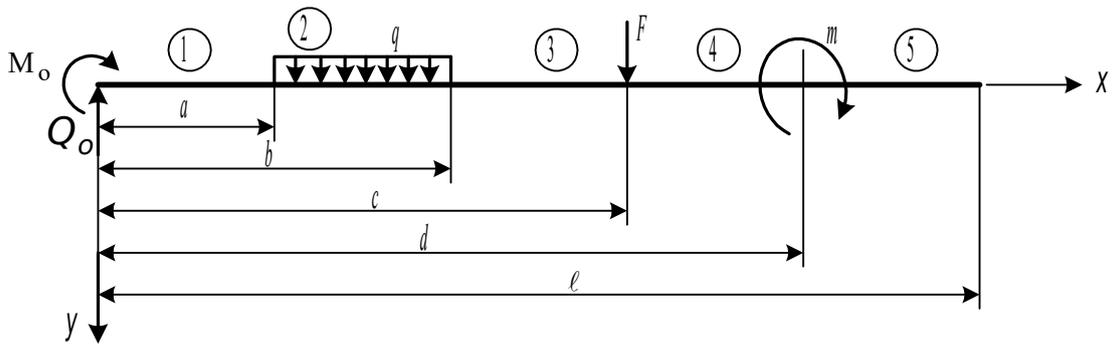


Рис. 6.22. К выводу уравнений метода начальных параметров

Запишем для нее уравнения изогнутой оси, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил:

$$y_x = y_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2!EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3!EJ} \Big|_1 + \frac{q(x-a)^4}{4!EJ} \Big|_2 - \frac{q(x-b)^4}{4!EJ} \Big|_3 + \frac{F(x-c)^3}{3!EJ} \Big|_4 - \frac{m(x-d)^2}{2!EJ} \Big|_5 ; \quad (6.57)$$

$$\varphi_x = \varphi_0 - \frac{M_0 x}{EJ} - \frac{Q_0 x^2}{2!EJ} \Big|_1 + \frac{q(x-a)^3}{3!EJ} \Big|_2 - \frac{q(x-b)^3}{3!EJ} \Big|_3 + \frac{F(x-c)^2}{2!EJ} \Big|_4 - \frac{m(x-d)}{EJ} \Big|_5 ; \quad (6.58)$$

$$M_x = M_0 + Q_0 x \Big|_1 - \frac{q(x-a)^2}{2!} \Big|_2 + \frac{q(x-b)^2}{2!} \Big|_3 - F(x-c) \Big|_4 + m \Big|_5 ; \quad (6.59)$$

$$Q_x = Q_0 \Big|_1 - q(x-a) \Big|_2 + q(x-b) \Big|_3 - F \Big|_4 . \quad (6.60)$$

Таким образом, для любой балки с любым количеством участков уравнения (6.57) – (6.60) определяются с точностью до четырех начальных параметров, из которых два находят сразу же из граничных условий, поставленных на левом конце балки. Для двух других начальных параметров необходимо сформулировать два граничных условия на другом ее конце (рис. 6.23).

В прил. 2 приведены формулы для определения недостающих начальных параметров различным образом нагруженных и различным образом опертых статически определимых балок.

В заключение этого пункта отметим, что направлениям Q_0 , M_0 , q , F , m , показанным на рис. 6.22, соответствуют знаки перед одноименными членами в уравнениях (6.57) – (6.60). Если перечисленные силовые факторы (один или несколько) имеют обратные направления, то и перед соответствующими членами указанных уравнений следует изменить знаки на обратные.

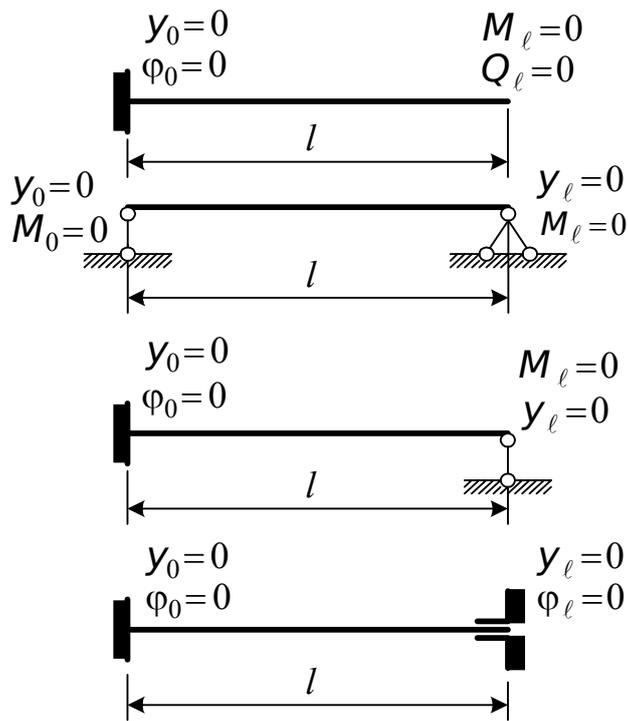


Рис. 6.23. К определению начальных параметров

Определим прогибы и углы поворота в сечениях стальной двутавровой балки (двутавр № 50), показанной на рис. 6.24. ($EJ = 7,945 \cdot 10^4$ кНм²). Определим сначала начальные параметры из условия опирания балки в начале координат.

При $x = 0$, $M_0 = -50$ кНм, $Q_0 = 0$.

Запишем уравнения (6.57) и (6.58) как

$$\begin{aligned}
 y_x = & y_0 + \varphi_0 x + \frac{50 x^2}{21 EJ} + \frac{10 x^4}{24 EJ} \Big|_1 - \frac{107,5 (x-2)^3}{6 EJ} \Big|_2 - \frac{10 (x-6)^4}{24 EJ} \Big|_3 + \\
 & + \frac{100 (x-6)^4}{6 EJ} - \frac{72,5 (x-10)^3}{6 EJ} + \frac{20 (x-10)^4}{24 EJ} \Big|_4 ; \\
 \varphi_x = & \varphi_0 + \frac{50 x}{EJ} + \frac{10 x^3}{6 EJ} \Big|_1 - \frac{107,5 (x-2)^2}{2 EJ} \Big|_2 - \frac{10 (x-6)^3}{6 EJ} + \frac{100 (x-6)^2}{2} \Big|_3 - \\
 & - \frac{72,5 (x-10)^2}{2 EJ} + \frac{20 (x-10)^3}{6 EJ} \Big|_4 .
 \end{aligned}$$

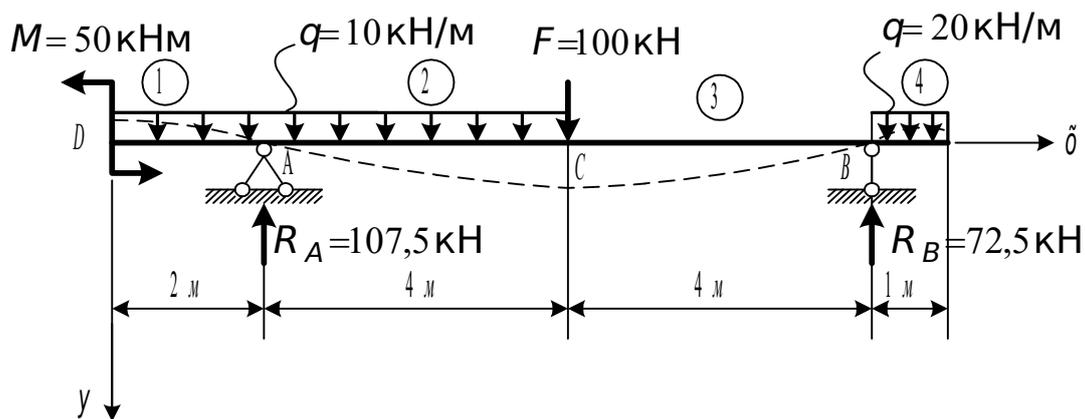


Рис. 6.24. К определению перемещений методом начальных параметров

В этих уравнениях неизвестными остаются еще два начальных параметра – прогиб Y_0 и угол поворота φ_0 в начале координат балки. Для их определения составим два дополнительных уравнения: при $x = 2\text{ м}$ $Y_x = 0$ и при $x = 10\text{ м}$ $Y_x = 0$. В результате получим систему двух уравнений с двумя неизвестными начальными параметрами

$$Y_0 + 2\varphi_0 + \frac{50 \cdot 4}{2EJ} + \frac{10 \cdot 16}{24EJ} = 0;$$

$$Y_0 + 10\varphi_0 + \frac{50 \cdot 100}{2EJ} + \frac{10 \cdot 10^4}{24EJ} - \frac{107,5 \cdot 8^3}{6EJ} - \frac{10 \cdot 4^4}{24EJ} + \frac{100 \cdot 4^3}{6EJ} = 0.$$

Решая эту систему, найдем

$$\varphi_0 = \frac{206,67}{EJ} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0,148^\circ,$$

$$Y_0 = -\frac{520}{EJ} = -0,654 \text{ см}.$$

Теперь найдем прогибы и углы поворота в сечениях балки:

$$x = 6\text{ м} \quad Y_x = 1,27 \text{ см},$$

$$\varphi_x = 0,048^\circ;$$

$$x = 4\text{ м} \quad Y_x = 0,84 \text{ см},$$

$$\varphi_x = 0,215^\circ;$$

$$x = 8\text{ м} \quad Y_x = 0,88 \text{ см},$$

$$\varphi_x = -0,21^\circ;$$

$$x = 11\text{ м} \quad Y_x = -0,467 \text{ см},$$

$$\varphi_x = -0,27^\circ.$$

Изогнутая ось балки показана на рис. 6.24 пунктиром.

В заключение отметим, что максимальный прогиб равен $\frac{1}{629}$ пролета балки, а угол поворота не превышает 0,50, что соответствует принятым в пп. 6.1 и 6.2 предпосылкам.

6.6.4. Метод фиктивной нагрузки

В большинстве встречающихся на практике задач уравнение изогнутой оси балки знать не нужно, а необходимо определить прогибы или углы поворота в одном или нескольких наиболее характерных ее сечениях. Изложим суть метода.

Рассмотрим дифференциальные уравнения (6.37) и (6.39):

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - \frac{M}{E J} ;$$

$$E J \frac{d^4 y}{d x^4} = q .$$

Представим эти уравнения в следующем виде:

$$\frac{d^2}{d x^2} (E J y) = - M ; \quad (6.61)$$

$$\frac{d^2}{d x^2} (M) = - q . \quad (6.62)$$

Сравнивая эти уравнения, видим, что изгибающий момент M связан с интенсивностью внешней нагрузки q , как EJ , кратная значению прогиба, связана с изгибающим моментом.

Положим, что

$$E J y = - M^\Phi , \quad (6.63)$$

где M^Φ – некоторый фиктивный (т. е. условный) изгибающий момент.

Тогда вторая производная от этого фиктивного момента будет представлять некоторую фиктивную (условную) нагрузку

$$\frac{d^2}{d x^2} (M^\Phi) = q^\Phi . \quad (6.64)$$

Отмеченная аналогия позволяет сделать вывод: при определении прогибов и углов поворота в балке нет необходимости интегрировать дифференциальное уравнение. Этот процесс можно заменить численным процессом нахождения фиктивных изгибающих моментов M^Φ , вызванных действием фиктивной нагрузки q^Φ .

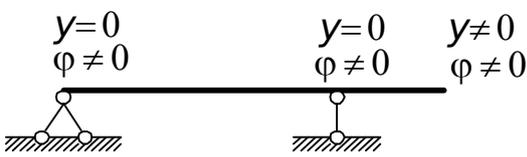
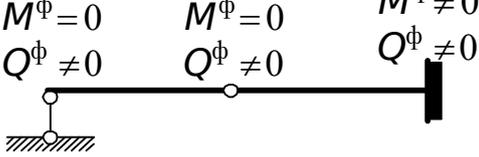
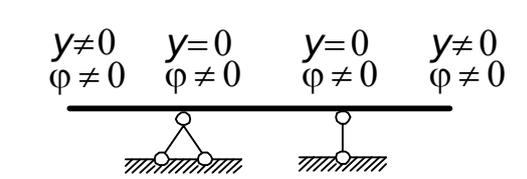
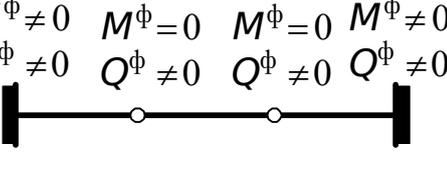
Таким образом, имеем

$$y = - \frac{M^\Phi}{E J} ; \quad (6.65)$$

$$\varphi = \psi' = -\frac{Q^{\Phi}}{EJ}. \quad (6.66)$$

Изложим порядок определения перемещений. Сначала строится эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки. Затем на основании зависимостей (6.65) и (6.66) строится фиктивная балка (табл. 6.1).

Заданные (действительные) и фиктивные балки

Заданная балка	Фиктивная балка
$y=0$ $\varphi \neq 0$ 	$M^\Phi=0$ $Q^\Phi \neq 0$ 
$y \neq 0$ $\varphi \neq 0$ 	$M^\Phi \neq 0$ $Q^\Phi \neq 0$ 
$y=0$ $\varphi \neq 0$ 	$M^\Phi=0$ $Q^\Phi \neq 0$ 
$y=0$ $\varphi \neq 0$ 	$M^\Phi \neq 0$ $Q^\Phi \neq 0$ 

Теперь необходимо вычислить величины M^Φ и Q^Φ в сечениях, где требуется найти прогибы и углы поворота, далее подставить их в формулы (6.65) и (6.66) и произвести окончательные вычисления. Основная сложность решения задач состоит в нахождении фиктивных изгибающих моментов M^Φ и фиктивных поперечных сил Q^Φ от нагрузки, представленной действительной эпюрой изгибающих моментов. Покажем, как это сделать наиболее просто (рис. 6.25). Пусть фиктивная нагрузка q^Φ (действительная эпюра изгибающих моментов) на каком-либо участке балки длиной ℓ имеет вид, показанный на рис. 6.25, а. Представим ее в виде суммы трех нагрузок (рис. 6.25, б, в, г). В свою очередь каждую из нагрузок можно заменить их равнодействующими $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Тогда участок балки загружают тремя силами $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, положение и величины которых известны.

Приведем пример. Для балки, показанной на рис. 6.26, а, найдем прогиб и угол поворота конца консоли.

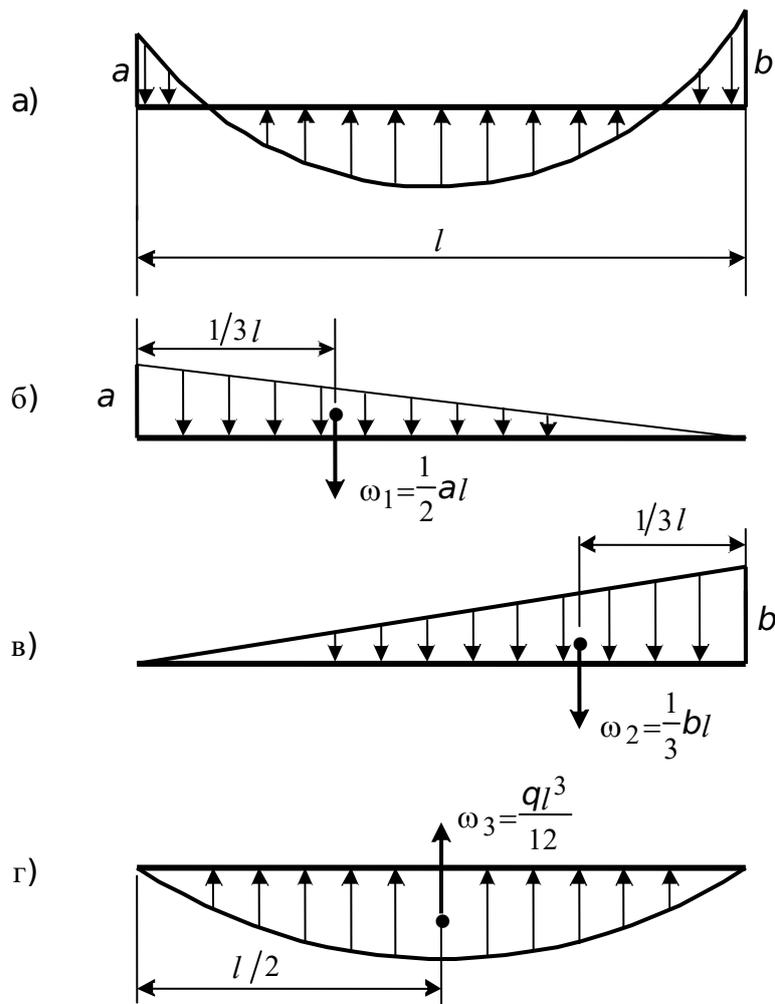


Рис. 6.25. Схема представления фиктивной нагрузки в виде суммы простых нагрузок

Строим эпюру M (рис. 6.26, б). Построенную эпюру моментов представляем фиктивной нагрузкой и прикладываем равнодействующую этой нагрузки к фиктивной балке (рис. 6.26, в).

Находим фиктивный изгибающий момент и фиктивную поперечную силу в заземлении. Для упрощения вычислений схему фиктивной балки представим в виде взаимодействующих между собой балок – верхней и нижней. Определив правую реакцию в верхней балке (рис. 6.26, г), передадим ее с противоположным знаком на нижнюю (рис. 6.26, д).

Тогда

$$M^{\Phi} = 30 \cdot 1 - 15 \cdot \frac{2}{3} = 20 ,$$

$$Q^{\Phi} = 30 - 15 = 15$$

и

$$y = -\frac{20}{EJ} ; \quad \varphi = -\frac{15}{EJ} .$$

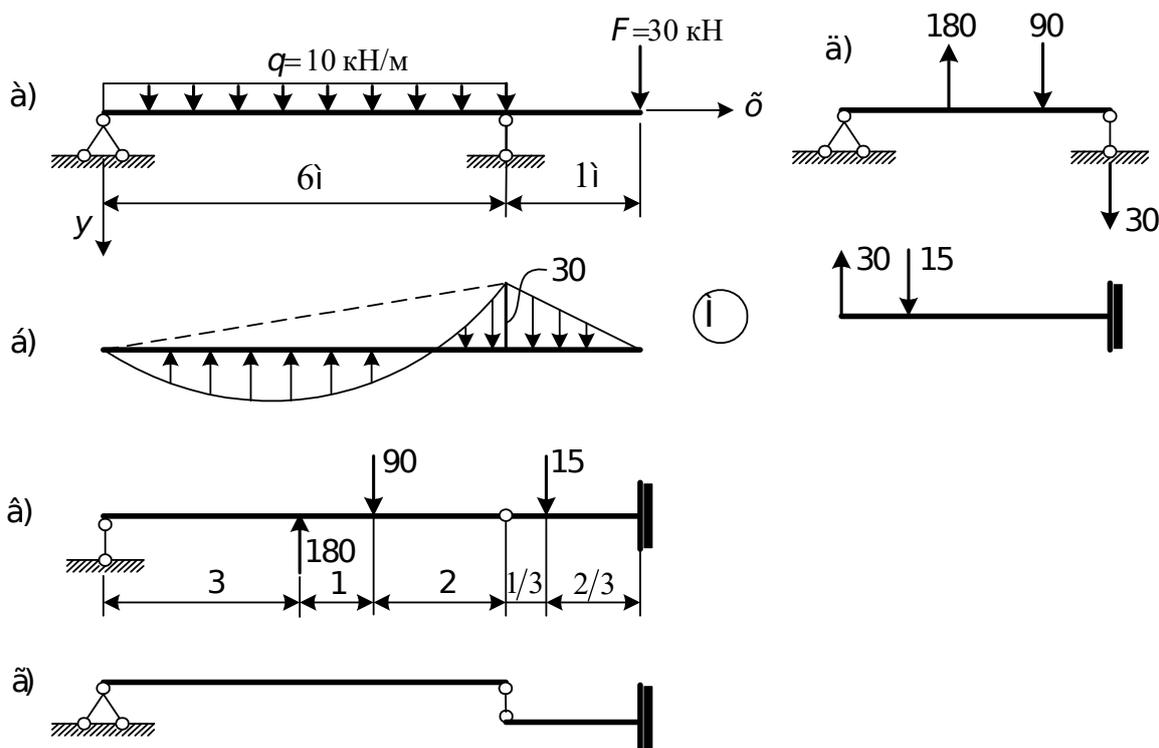


Рис. 6.26. К примеру определения перемещений методом фиктивной нагрузки

Знак “ – “ перед полученными формулами показывает, что прогиб конца консоли направлен вверх (не совпадает с положительным направлением оси y), а угол поворота образован вращением касательной к сечению, направленной против часовой стрелки (см. рис. 6.16).

6.6.5. Метод Мора

Прежде чем изложить сущность этого метода, отметим следующее. Настоящий учебник предназначен для студентов строительных специальностей, которые в полном объеме изучают курс строительной механики, где излагается теория определения перемещений, в том числе и метод Мора. В курсе строительной механики при выводе разрешающего уравнения метода Мора исходят из энергетических принципов и учитывают изгибающие моменты, продольные и поперечные силы. Здесь мы будем считать, что перемещения являются следствием только изгиба, а вывод формулы Мора получим из простых геометрических построений.

Рассмотрим балку, нагруженную произвольной нагрузкой (рис. 6.27, а).

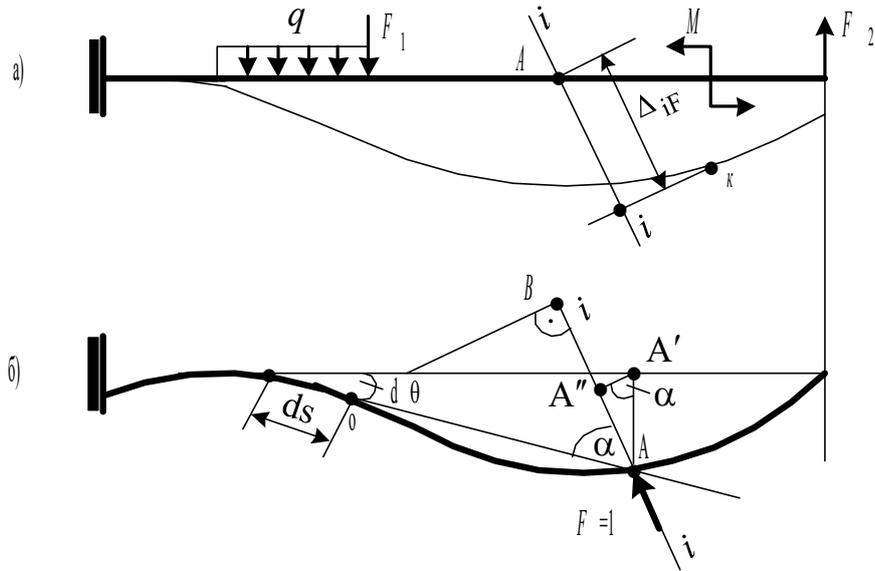


Рис. 6.27. К определению перемещений методом Мора

Определим перемещение точки A по направлению $i-i$, Δ_{iF} . Под действием заданной нагрузки балка деформируется и упругая линия занимает положение, показанное на рис. 6.27, б. В точке A балки в деформированном состоянии прикладываем безразмерную силу $F=1$ по направлению искомого перемещения. На элементарном участке балки длиной ds произойдет изменение кривизны и правое сечение повернется относительно левого на угол

$$d\theta = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) ds, \quad (6.67)$$

где $\frac{1}{\rho} = \frac{M_F + M_i}{EJ}$ – кривизна изогнутой оси балки на участке ds , вызванная моментами от внешней погрузки M_F и единичной силы M_i ; $\frac{1}{\rho_0} = \frac{M}{EJ}$ – кривизна изогнутой оси балки, вызванная единичным моментом M_i .

Вычитая значения кривизны, получим

$$\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) = \frac{M_F}{EJ}; \quad (6.68)$$

$$d\theta = \frac{M_F ds}{EJ}. \quad (6.69)$$

Найдем элементарное перемещение $d\Delta_{iF}$. Из построений, выполненных на рис. 6.27, б, видно, что

$$d\Delta_{iF} = AA'' = AA' \sin \alpha = oA \cdot \sin \alpha d\theta = oB d\theta = M_i d\theta. \quad (6.70)$$

Полное перемещение получим как определенный интеграл по всей длине стержня:

$$\Delta_{iF} = \int_0^{\ell} \frac{M_i M_F}{EJ} ds. \quad (6.71)$$

Таким образом, геометрическая задача определения перемещений точек системы по известным деформациям ее элементов свелась к хорошо изученной статической задаче, а именно, построению эпюр моментов в грузовом состоянии F и во вспомогательном состоянии i от силы $F_i = 1$ и последующему вычислению интеграла в формуле. Последняя операция условно называется «перемножением эпюр»: площадь нелинейной эпюры умножается на ординату линейной эпюры под центром тяжести нелинейной эпюры. Если функции M_i и M_F линейные, то операция перемножения обладает свойствами коммутативности.

Приведем пример вычисления интеграла Мора для участка балки с эпюрами M_F и M_i , показанными на рис. 6.28, а, в.

Представим эпюры M_F и M_i в виде простых фигур (рис. 6.28, б, г), для которых известны положения центров тяжести и площади. Теперь

$$\Delta_{iF} = \int_0^{\ell} \frac{M_F M_i}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{1}{2} a \ell \left(\frac{2}{3} c + \frac{1}{3} d \right) + \frac{1}{2} b \ell \left(\frac{1}{3} c + \frac{2}{3} d \right) - \right. \\ \left. - \frac{q \ell^3}{12} \left(\frac{1}{2} c + \frac{1}{2} d \right) \right].$$

Таким образом, для того чтобы определить линейное или угловое перемещения балки методом Мора, необходимо: построить эпюру моментов от заданной внешней нагрузки; по направлению искомого перемещения приложить к балке единичную силу (если необходимо определить линейное перемещение) или единичный момент (если необходимо определить угловое перемещение) и построить эпюру моментов (единичную эпюру); вычислить интеграл Мора (6.71), используя приведенное выше правило.

Покажем, как определить линейное и угловое перемещения на примере. Воспользуемся условием и данными задачи, приведенной в п. 6.6.4 (рис. 6.29).

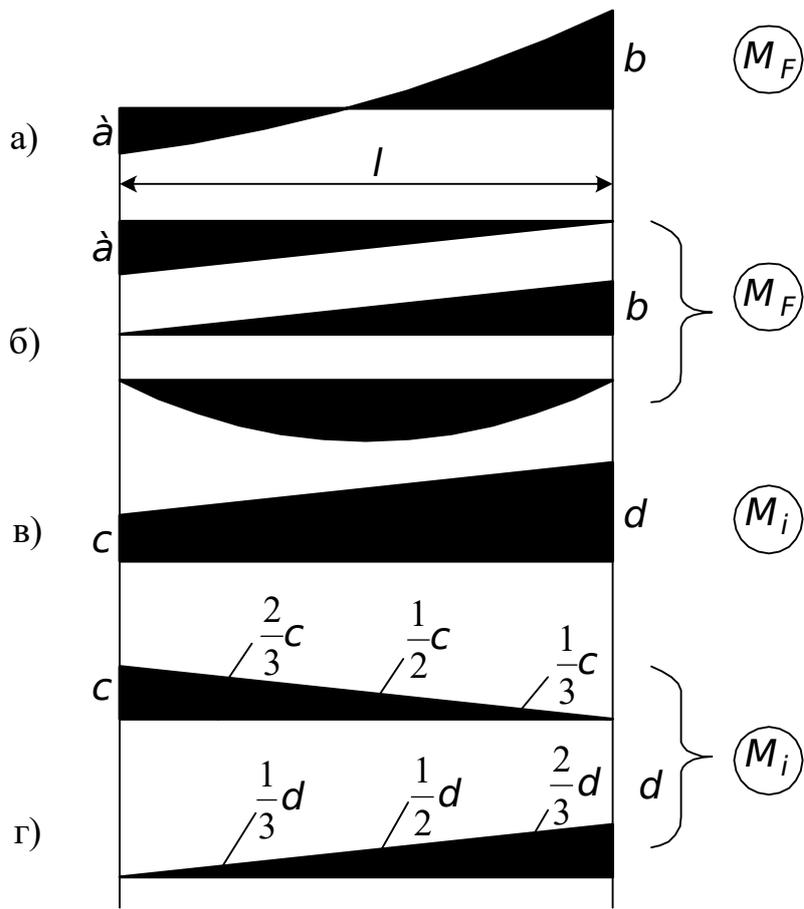


Рис. 6.28. К вычислению интеграла Мора

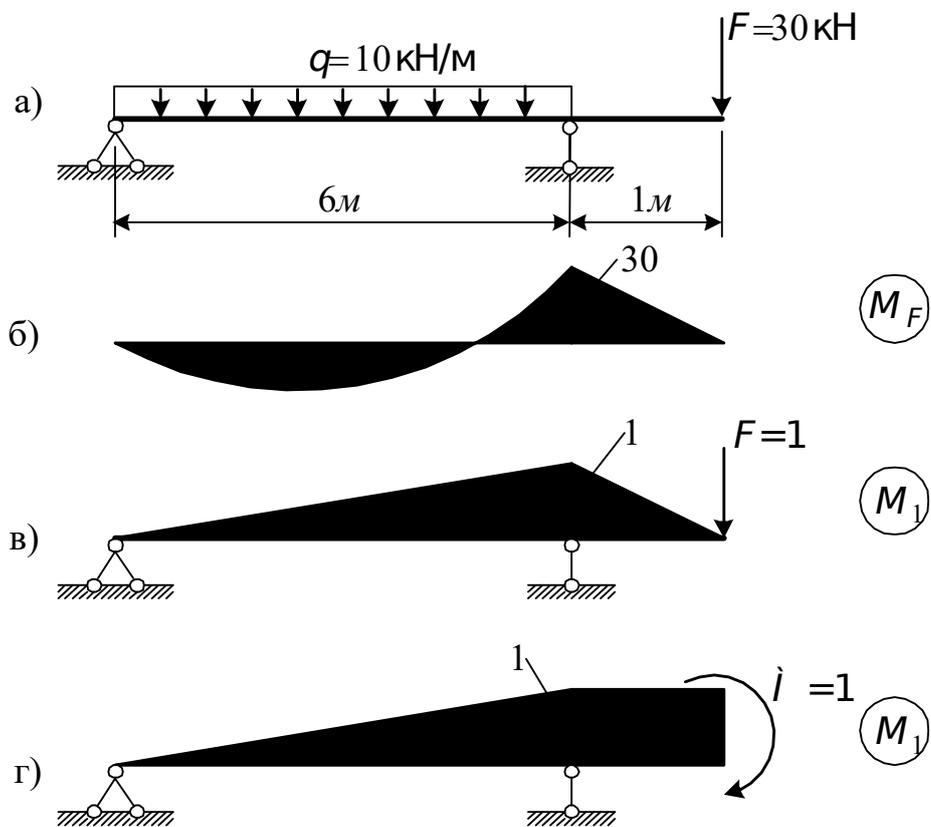


Рис. 6.29. К определению прогиба и угла поворота конца консоли методом Мора

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{10 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \right] = -\frac{20}{EJ};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{10 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \right] = -\frac{15}{EJ}.$$

Поясним полученные результаты. Во-первых, результаты совпадают с результатами, найденными методом фиктивной нагрузки (рис. 6.26, п. 6.6.4). По методу Мора отрицательные знаки показывают, что вертикальное перемещение направлено в противоположную сторону направления единичной силы $F = 1$ (рис. 6.29, в), а угол поворота – в противоположную сторону действия момента $M = 1$ (рис. 6.29, г), т. е. против часовой стрелки.

6.7. Сдвиг как частный случай изгиба

Сдвиг не возникает как самостоятельное явление, обычно он сопровождает какую-либо другую основную деформацию. Рассмотрим очень короткий консольный брус, нагруженный на конце силой Q (рис. 6.30, а).

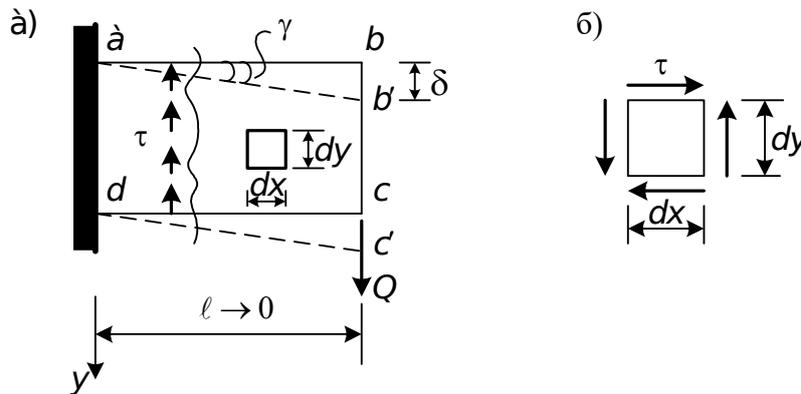


Рис. 6.30. Короткий брус, нагруженный на конце силой

Поскольку длина бруса очень мала, пренебрегаем изгибными деформациями. Тогда в сечении бруса отсутствуют нормальные напряжения. Останутся только касательные. Среднее значение этих напряжений в сечении бруса равно

$$\tau = \frac{Q}{A}, \quad (6.72)$$

где A – площадь поперечного сечения.

Напряженно-деформированное состояние, характеризуемое тем, что на гранях выделенного из сечения элемента (рис. 6.27, б) возникают только касательные напряжения, называют чистым сдвигом (см. 1.8.3).

Рассмотрим деформации при сдвиге. Касательное напряжение τ связано с угловой деформацией γ соотношением (см. (1.28))

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad (6.73)$$

где через G , как мы уже знаем (см. (1.29)), обозначена величина

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

При чистом сдвиге, как и при любом напряженном состоянии, в деформируемом теле накапливается упругая потенциальная энергия. Эту энергию легко подсчитать, располагая диаграммой $Q - \delta$ (рис. 6.31).

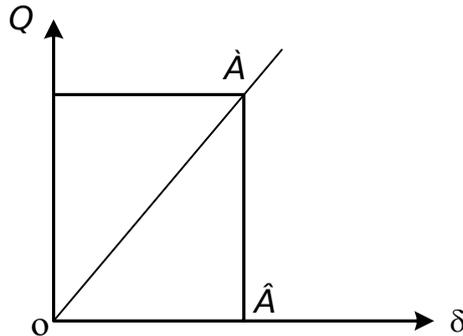


Рис. 6.31. К выводу формулы для удельной потенциальной энергии

Потенциальная энергия деформации при сдвиге аналогична потенциальной энергии при растяжении и сжатии (см. (3.9)):

$$A = W = \frac{Q \delta}{2}. \quad (6.74)$$

Обозначив длину рассматриваемого бруса через ℓ (рис. 6.30) и учитывая, что

$$\gamma = \frac{\delta}{\ell} = \frac{\tau}{G} = \frac{Q}{GA}, \quad (6.75)$$

можно записать

$$W = \frac{Q^2 \ell}{2GA}. \quad (6.76)$$

Удельная потенциальная энергия деформации, т. е. энергия, отнесенная к единице объема, равна

$$w = \frac{W}{A \ell} = \frac{Q^2 \ell}{2GA^2 \ell} = \frac{\tau^2}{2G}. \quad (6.77)$$

6.7.1. Расчеты соединений, работающих на сдвиг

Рассмотрим широко используемые в инженерной практике заклепочные, болтовые и сварные соединения. Их действительная работа сложна и лишь приближенно может быть охарактеризована как работа на сдвиг. Однако эти расчеты очень просты и достаточно надежны, так как

используемые в них расчетные сопротивления берутся на основании опытных данных. Это косвенно позволяет учесть, в определенной мере, действительную работу этих соединений.

Рассмотрим вначале заклепочное соединение (рис. 6.32, а).

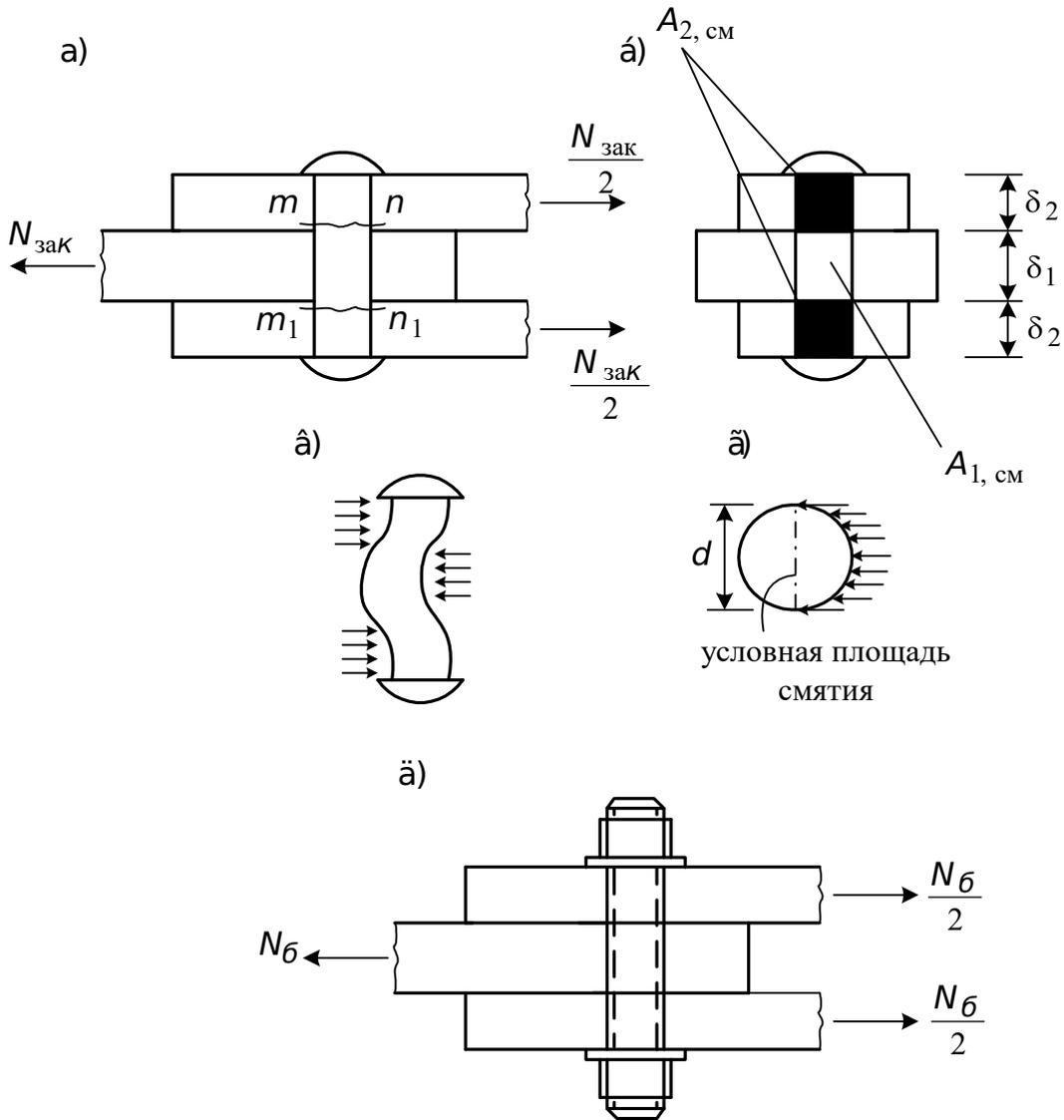


Рис. 6.32. Расчет заклепки и болта на срез и смятие

Одним из видов разрушения является срез заклепки по сечениям mn и m_1n_1 с площадью среза $A_{ср} = 2 \left(\frac{\pi d^2}{4} \right)$. В момент текучести приближенно можно считать, что касательные напряжения в этих сечениях распределены равномерно. Обозначая расчетное сопротивление заклепки на срез $R_{ср}$, получим расчетную силу на одну заклепку по срезу

$$N_{\text{зак}}^{\text{ср}} = A_{\text{ср}} R_{\text{ср}}. \quad (6.78)$$

Для пакета листов в общем случае $A_{\text{ср}} = n_{\text{ср}} \left(\frac{\pi d^2}{4} \right)$, где $n_{\text{ср}}$ – число срезов заклепки.

При расчете заклепочных соединений по допускаемым напряжениям $R_{\text{ср}}$ заменяется на $[\tau]_{\text{ср}}$.

Помимо среза при относительно тонких листах возможно нарушение соединения вследствие смятия листов или заклепки по поверхности их контакта. Фактическое распределение контактных напряжений весьма сложно (рис. 6.32, в, г). Поэтому вычисляются условные напряжения смятия, отнесенные к площади смятия $A_{\text{см}}$, являющейся проекцией фактической криволинейной площади на плоскость диаметрального сечения заклепки (рис. 6.32, г). Из условия прочности

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{N_{\text{зак}}}{A_{\text{см}}} \leq R_{\text{см}},$$

где $R_{\text{см}}$ – расчетное сопротивление на смятие, определяемое экспериментально, найдем расчетную силу для заклепки по смятию

$$N_{\text{зак}}^{\text{см}} = A_{\text{см}} R_{\text{см}}. \quad (6.79)$$

В общем случае

$$A_{\text{см}} = d \sum \delta,$$

где d – диаметр заклепки; $\sum \delta$ – наименьшая суммарная толщина листов, сминаемых в одном направлении.

Например, на рис. 6.32, б это будет меньшая из площадей $A_{1\text{см}} = d \delta_1$ и $A_{2\text{см}} = d \cdot 2 \delta_2$. Естественно, что из двух сил, найденных по срезу и смятию, фактической расчетной силой для заклепки $N_{\text{зак}}$ является меньшая из них.

Расчет заклепочного соединения обычно состоит в определении необходимого числа заклепок n при действии на соединение заданного расчетного усилия N . В упругой стадии это усилие неравномерно распределяется между заклепками. Однако в предельном состоянии благодаря деформациям текучести усилия в заклепках выравниваются. Поэтому принимается допущение: сила N распределяется между всеми заклепками поровну. Тогда

$$n = \frac{N}{N_{\text{зак}}}, \quad (6.80)$$

где $N_{\text{зак}}$ – наименьшая из двух расчетных сил, найденных для одной заклепки по срезу (6.78) и по смятию (6.79).

Болтовые соединения (рис. 6.32, д) рассчитываются так же, как и заклепки, на срез и на смятие по соответствующим формулам. Особенность представляет расчет высокопрочных болтов, применяемых во фрикционных соединениях, где благодаря нормируемому натяжению болта, достигаемому путем завинчивания гайки динамометрическим

ключом, создается сжатие пакета листов силой F_{σ} (рис. 6.33). При воздействии на соединение силы N_{σ} она воспринимается силами трения, возникающими на поверхностях контакта обжимаемых листов.

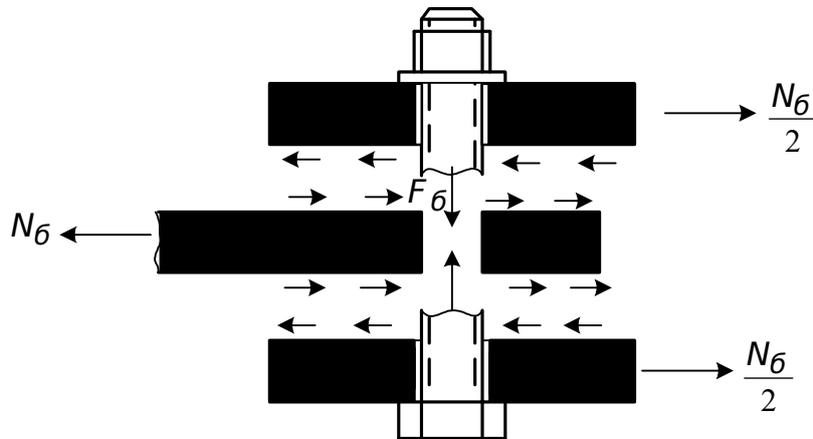


Рис. 6.33. Высокопрочный болт, обжимающий пакет листов

Расчетная сила, которую способен воспринять болт по трению, будет

$$N_{\sigma} = n_{\text{тр}} F_{\sigma} f m, \quad (6.81)$$

где f – коэффициент трения; $n_{\text{тр}}$ – число плоскостей трения (то же, что и число плоскостей среза у заклепки); m – коэффициент условий работы (0,8 - 0,9).

Коэффициент трения зависит от вида обработки трущихся поверхностей листов. Так, для обычной малоуглеродистой стали при очистке соединяемых поверхностей пескоструйным аппаратом – $f = 0,45$; металлическими щетками – $f = 0,35$; без очистки поверхностей – $f = 0,25$. Напряжения натяжения болта составляют 0,5 – 0,6 предела прочности высокопрочной стали, из которой он изготавливается. Число болтов определяется по формуле (6.80) с заменой $N_{\text{зак}}$ на N_{σ} .

Рассмотрим теперь сварное соединение двух листов угловыми швами (рис. 6.34, а) и установим принцип его расчета. Сварные соединения не дают ослабления элементов, менее трудоемки, чем другие виды соединений, и потому более экономичны. Разрушение швов в рассматриваемом соединении происходит от среза по наименьшей возможной площади среза, расположенной в биссекторной плоскости угла, где наплавляется шов (рис. 6.34, б).

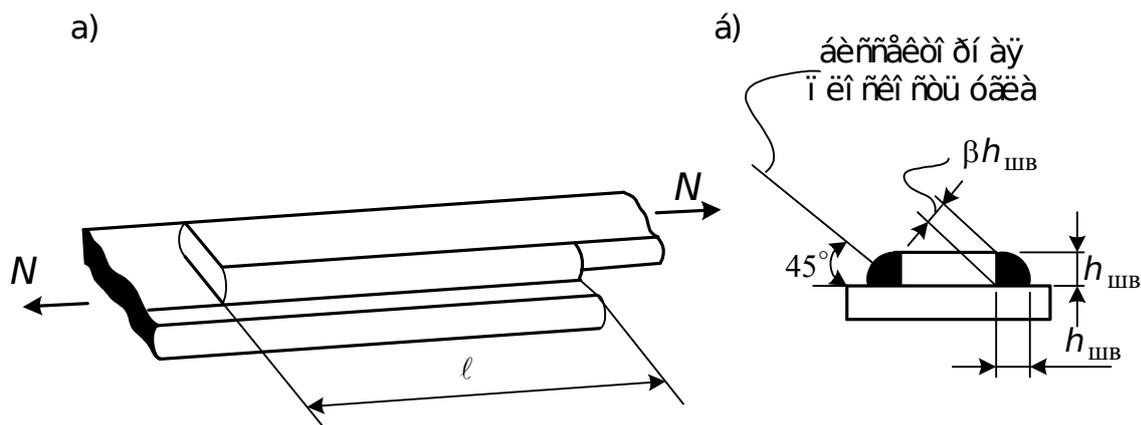


Рис. 6.34. Сварное соединение угловыми швами

При этом площадь среза на два шва будет

$$A_{\text{ср}} = 2 \ell h_{\text{ш}} \beta,$$

где β – коэффициент формы углового шва. Он зависит от вида сварки: для однопроходной автоматической – $\beta = 1$; однопроходной полуавтоматической и ручной – $\beta = 0,8$; многопроходной автоматической и полуавтоматической – $\beta = 0,7$; $h_{\text{ш}}$ – высота катета углового шва.

Предполагая равномерное распределение касательных напряжений по площади среза шва, условие прочности запишем в виде

$$\tau = \frac{N}{A_{\text{ср}}} = \frac{N}{2 \ell \beta h_{\text{ш}}} \leq R_{\text{ср}}, \quad (6.82)$$

где $R_{\text{ср}}$ – расчетное сопротивление материала углового сварного шва на срез; ℓ – расчетная длина шва, которая берется на 10 мм меньше фактической из-за возможного ухудшения качества сварки по концам шва. Чтобы не допускать чрезмерной неравномерности распределения напряжений по длине шва, ставится ограничение на его длину $\ell \leq 60 h_{\text{ш}}$.

По формуле (6.82), задавшись каким-либо одним размером шва, например $h_{\text{ш}}$, можно найти другой размер – длину шва ℓ .

6.8. Потенциальная энергия при изгибе

Как было показано ранее (см. п. 3.9 и 6.7), потенциальная энергия, накапливаемая в единице объема тела в пределах упругой деформации, определяется следующим образом:

– при действии нормальных напряжений (см. (3.32))

$$W = \frac{\sigma^2}{2E};$$

– при действии касательных напряжений (см. (6.77))

$$W = \frac{\tau^2}{2G}.$$

Потенциальная энергия в элементарном объеме

$$dV = \frac{\sigma^2}{2E} dV + \frac{\tau^2}{2G} dV.$$

Известно, что при изгибе (см. формулы (6.9) и (6.12))

$$\sigma = \frac{M y}{J}, \quad \tau = \frac{Q S}{J b}.$$

Подставим эти выражения в предыдущие и проинтегрируем по всему объему балки:

$$W = \int_V \frac{M^2 y^2}{2E J^2} dV + \int_V \frac{Q^2 S^2}{2G J^2 b^2} dV.$$

Учитывая, что $dV = dx dA$, получим

$$W = \int_{\ell} \frac{M^2}{2E J^2} dx \int_A y^2 dA + \int_{\ell} \frac{Q^2}{2G A} dx \int_A \frac{A S^2}{J^2 b^2} dA. \quad (6.83)$$

Введем обозначения

$$\int_A \frac{A S^2}{J^2 b^2} dA = \mu, \quad (6.84)$$

где A – площадь поперечного сечения; μ – коэффициент формы сечения.

Учтем, что

$$\int_A y^2 dA = J$$

момент инерции сечения относительно нейтральной оси (см. формулы (2.5) и (2.6)). Найдем окончательно

$$W = \int_{\ell} \frac{M^2}{2E J} dx + \int_{\ell} \frac{\mu Q^2}{2G A} dx. \quad (6.85)$$

Первый член полученного равенства представляет собой потенциальную энергию изгиба, второй – потенциальную энергию сдвига.

Раздел 7

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

7.1. Общие положения

Статически неопределимой стержневой системой будем называть такую систему, у которой при действии произвольной нагрузки не все продольные, поперечные силы и моменты могут быть найдены из уравнений равновесия твердого тела или системы твердых тел (из уравнений статики). Будем говорить, что система имеет лишние, или избыточные, связи, если после удаления их она остается геометрически неизменяемой и неподвижной. Например, в балке, показанной на рис. 7.1, а, можно удалить не более двух связей (рис. 7.1, б, в, г), так как иначе данная система потеряет геометрическую неизменяемость (рис. 7.1, д, е). Геометрически изменяемой называется такая система, в которой перемещения ее точек могут происходить без деформации стержней (такие возможные перемещения показаны пунктиром на рис. 7.1, д, е), а геометрически неизменяемой – в которой перемещения точек возможны только за счет деформации стержня. Напомним, что в качестве инженерных сооружений применяются только геометрически неизменяемые системы.

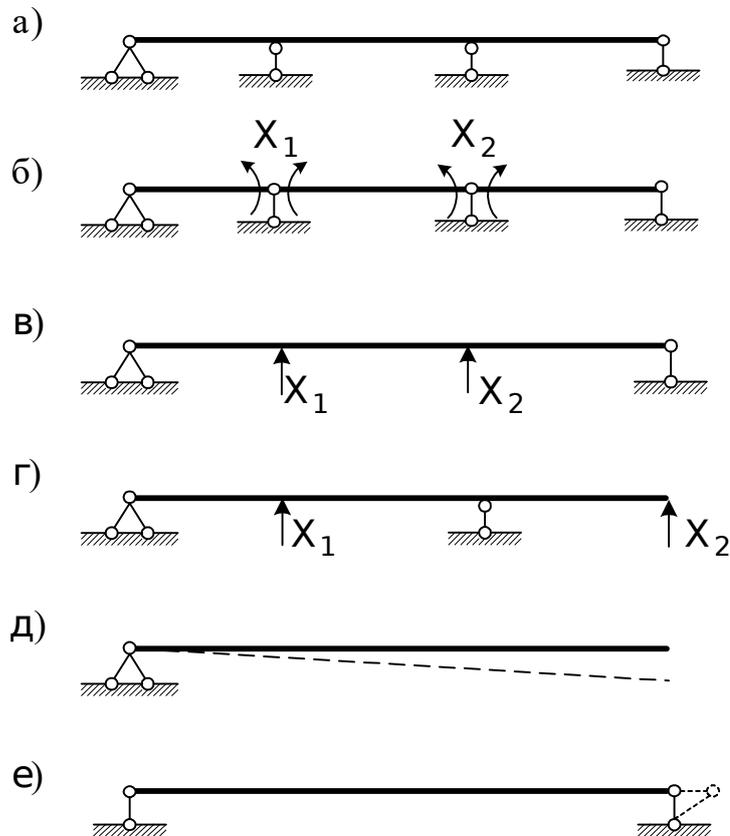


Рис. 7.1. Примеры статически неопределимой (а), статически определимых и геометрически неизменяемых систем (б), (в), (г) и геометрически изменяемых систем (д), (е)

Количество лишних связей называется степенью статической неопределимости системы. Эту степень можно найти как разность между числом искомых усилий и числом независимых уравнений равновесия, которые можно составить для их получения.

В частном случае, для балки, показанной на рис. 7.1, а, которая носит название неразрезной (перекрывает два и более пролетов и проходит через свои опоры, не прерываясь нигде шарнирами или разрезами), число лишних связей может быть найдено по формуле

$$L = C_0 - 3, \quad (7.1)$$

где L — число лишних связей; C_0 — число опорных связей; число 3 — три уравнения статики для плоской системы.

Характерным отличием неразрезной балки от разрезной является то, что нагрузка, расположенная в любом ее пролете, изгибает балку на протяжении всех пролетов, создавая плавную упругую линию.

Подводя итог вышесказанному, отметим, что системы с лишними связями обладают следующими свойствами:

- после потери лишних связей сохраняют свою геометрическую неизменяемость (рис. 7.1, б, в, г);
- допускают бесконечное множество решений, удовлетворяющих условиям равновесия, и имеют лишь одно решение, удовлетворяющее остальным условиям задачи;
- имеют отличные от нуля усилия при температурных воздействиях и смещении опор;
- могут иметь начальные усилия;
- усилия в них зависят от геометрических размеров сечений стержней и от модуля упругости материала этих стержней.

Задача расчета статически неопределимой системы, геометрическая схема которой задана, заключается в следующем: по заданной нагрузке необходимо подобрать рациональное сечение всех элементов так, чтобы система обладала достаточной надежностью и жесткостью при минимальных затратах материала. В такой постановке, имеющей наибольшее практическое значение, задача в общем виде еще не решена. В более узкой постановке задача расчета формулируется так: по заданной геометрической схеме, нагрузке и сечениям всех стержней определить усилия и деформации системы. При этом приходится задаваться сечениями на основании первоначального, ориентировочного расчета, затем определять усилия и напряжения, после чего в случае необходимости исправлять некоторые сечения и повторять расчет снова. Метод расчета статически неопределимых систем, элементы которых испытывают изгиб, по существу не отличается от рассмотренных ранее методов расчета статически неопределимых систем при растяжении и сжатии (см. п. 3.5). Сначала в заданной системе отбрасываются лишние связи, а вместо них прикладываются лишние неизвестные X_1, X_2, \dots, X_n

(рис. 7.1, б, в, г). При отбрасывании лишних связей нужно следить за тем, чтобы новая система была геометрически неизменяемой. Полученная таким образом статически определимая и геометрически неизменяемая система называется основной системой (рис. 7.1, б, в, г). Лишними связями (или основными неизвестными) в случае, представленном на рис. 7.1, б, считаются связи, препятствующие повороту сечений, расположенных бесконечно близко слева и справа от промежуточных опор. На рис. 7.1, в, г лишние неизвестные – это реакции опор.

Своеобразной статически неопределимой системой является балка на упругом основании, рассматриваемая в п. 7.3. Здесь в качестве основной неизвестной принимают функцию прогибов $y = y(x)$. После чего, используя дифференциальные зависимости (6.37), (6.38), получают внутренние усилия в балке.

Как уже отмечалось, уравнений равновесия недостаточно для определения усилий в необходимых и лишних связях. Поэтому для нахождения лишних неизвестных составляются дополнительные уравнения, которые носят название уравнений совместности деформаций или уравнений деформаций. Составление этих уравнений и их смысл изложены в следующем подразделе. Здесь же отметим, что метод расчета, в котором за неизвестные принимаются усилия в лишних связях, носит название метода сил.

7.2. Расчет неразрезных балок

Пусть задана неразрезная балка постоянного сечения ($EJ = \text{const}$) (рис. 7.2, а), нагруженная сосредоточенной, моментной и распределенной нагрузками.

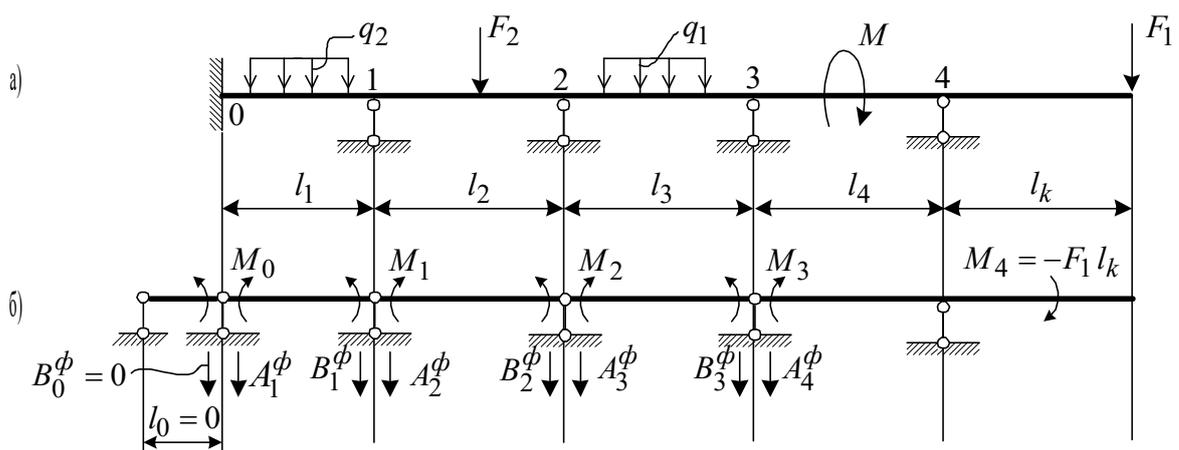


Рис. 7.2. Расчетная схема неразрезной балки (а), основная система (б)

Основная система (рис. 7.2, б) получается из заданной неразрезной балки (см. п. 7.1) при помощи устранения жесткой связи на каждой

промежуточной опоре и замены ее шарнирной. Выбор такой основной системы является удачным, так как поворот сечений на любой опоре зависит от трех неизвестных моментов и от внешней нагрузки, расположенной на правом и левом от этой опоры пролетах. Подробно особенности расчета неразрезных балок обсуждаются в курсе «Строительная механика».

На основании отмеченного для дальнейшего анализа выделим два смежных пролета неразрезной балки в основной системе (рис. 7.3, а). Построим единичные M_{n-1} , M_n , M_{n+1} и грузовую эпюры (рис. 7.3, б, в, г, д).

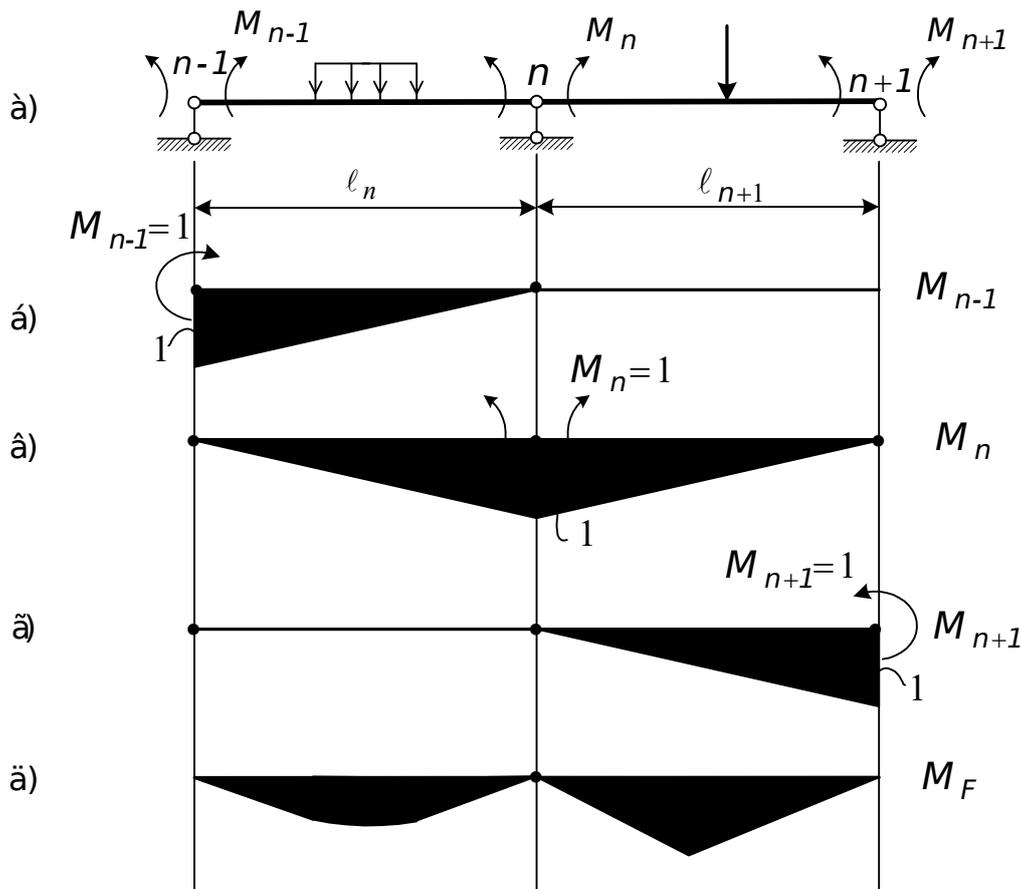


Рис. 7.3. Схема двух смежных пролетов неразрезной балки в основной системе (а), единичные и грузовая эпюры (б), (в), (г), (д)

Теперь необходимо составить условие, вносящее те же ограничения на деформации основной системы, которые имеются в неразрезной балке. В основной системе (рис. 7.3, а) обе стороны n -го опорного сечения, разделенные поставленным в балку шарниром, могут поворачиваться под действием внешней нагрузки независимо одна от другой.

В неразрезной балке шарнира нет, следовательно, взаимный поворот сечений, расположенных бесконечно близко слева и справа от n -ой опоры,

равен нулю. Поэтому условие совместности деформаций будет следующим:

$$M_{n-1} \delta_{n,n-1} + M_n \delta_{nn} + M_{n+1} \delta_{n,n+1} + \Delta_{nF} = 0, \quad (7.2)$$

где M_{n-1} , M_n , M_{n+1} – неизвестные моменты соответственно на опорах $n-1$, n , $n+1$ (рис. 7.3, а); $\delta_{n,n-1}$, δ_{nn} , $\delta_{n,n+1}$ – взаимный угол поворота сечений на n -й опоре, вызванный соответственно $M_{n-1}=1$, $M_n=1$, $M_{n+1}=1$; Δ_{nF} – взаимный поворот сечений на n -й опоре, вызванный внешней нагрузкой.

Зависимость (7.2) можно составить для каждой из промежуточных опор и, значит, написать столько добавочных уравнений, сколько имеется неизвестных опорных моментов. Для определения углов поворота $\delta_{n,n-1}$, δ_{nn} , $\delta_{n,n+1}$, Δ_{nF} воспользуемся методом фиктивной нагрузки (см. п. 6.6.4). Согласно этому методу, построенные эпюры M_{n-1} , M_n , M_{n+1} , M_F (рис. 7.3, б, в, г, д) принимаем за фиктивные нагрузки. Направляем их к оси балки и прикладываем к фиктивным пролетам (в данном случае фиктивная и заданная балки (пролеты) совпадают (см. табл. 6.1, рис. 7.4).

Теперь, используя формулу (6.66), найдем

$$\delta_{n,n-1} = \frac{\ell_n}{6EJ_n};$$

$$\delta_{nn} = \frac{\ell_n}{3EJ_n} + \frac{\ell_{n+1}}{3EJ_n}; \quad \delta_{n,n+1} = \frac{\ell_{n+1}}{6EJ_n}; \quad \Delta_{nF} = \frac{B_n^\phi}{EJ} + \frac{A_{n+1}^\phi}{EJ}. \quad (7.3)$$

Полученные зависимости могут быть также найдены методом Мора (см. п. 6.6.5). Подставим (7.3) в (7.2). После простейших преобразований получим следующее уравнение:

$$M_{n-1} \ell_n + 2M_n(\ell_n + \ell_{n+1}) + M_{n+1} \ell_{n+1} = -6(B_n^\phi + A_{n+1}^\phi). \quad (7.4)$$

Уравнение (7.4) носит название уравнения трех моментов. Таких уравнений составляется столько (об этом говорилось ранее), сколько имеется неизвестных опорных моментов. Например, для балки, показанной на рис. 7.2, б, система уравнений для нахождения неизвестных M_0 , M_1 , M_2 , M_3 имеет вид:

$$2M_0 \ell_1 + M_1 \ell_1 = -6(A_1^\phi);$$

$$M_0 \ell_1 + 2M_1(\ell_1 + \ell_2) + M_2 \ell_2 = -6(B_1^\phi + A_2^\phi);$$

$$M_1 \ell_1 + 2M_2(\ell_2 + \ell_3) + M_3 \ell_3 = -6(B_2^\phi + A_3^\phi);$$

$$M_2 \ell_3 + 2M_3(\ell_3 + \ell_4) + M_4 \ell_4 = -6(B_3^\phi + A_4^\phi).$$

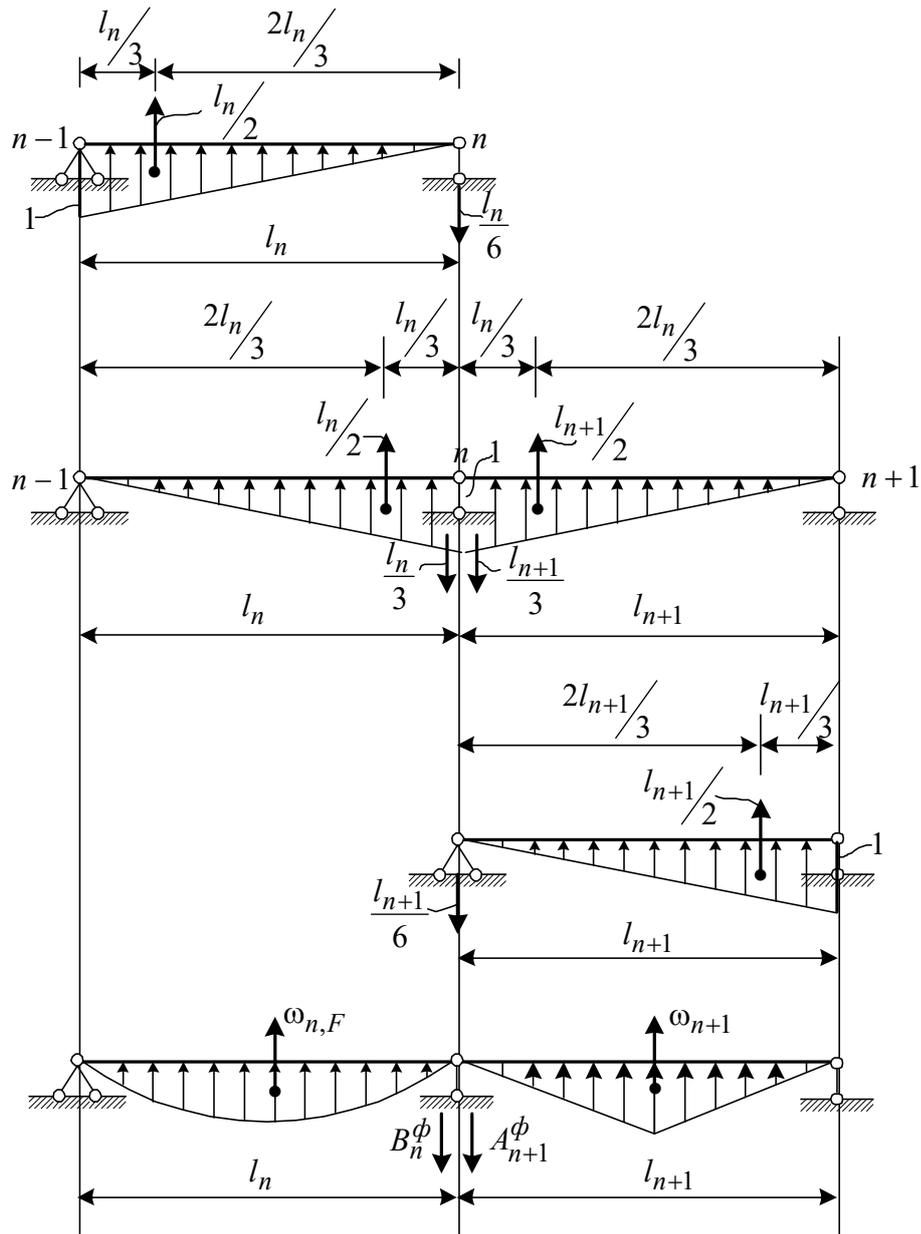


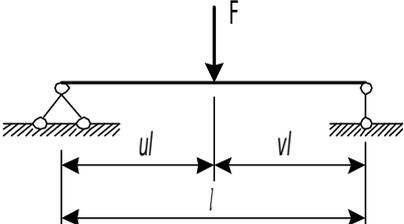
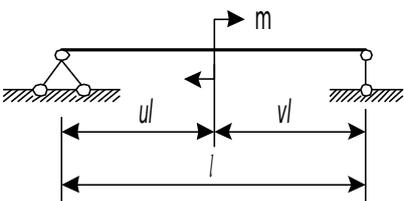
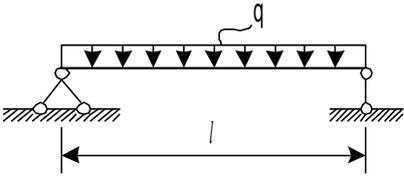
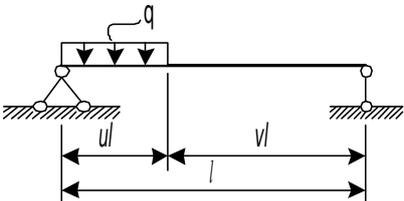
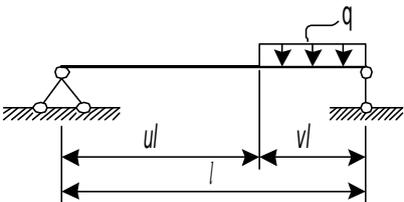
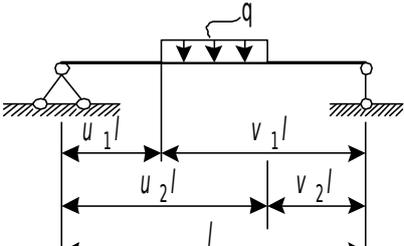
Рис. 7.4. К определению взаимных углов поворота $\delta_{n,n-1}$, δ_{nn} , $\delta_{n,n+1}$, Δ_{nF} методом фиктивной нагрузки

Следует обратить внимание на то, что опорный момент M_4 здесь известен и равен $M_4 = -F_1 l_k$, а защемление представлено как дополнительный ненагруженный пролет с $l_0 = 0$.

Величины фиктивных опорных реакций для наиболее часто встречаемых нагрузок представлены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Формулы для определения фиктивных опорных реакций

№№ ПП	Схема нагружения балки	Фиктивная реакция
1		$A^{\Phi} = \frac{F l^2}{6} u v (1 + v),$ $B^{\Phi} = \frac{F l^2}{6} u v (1 + u)$
2		$A^{\Phi} = -\frac{m l}{6} (1 - 3v^2), B^{\Phi} = \frac{m l}{6} (1 - 3u^2)$
3		$A^{\Phi} = \frac{q l^3}{24},$ $B^{\Phi} = \frac{q l^3}{24}$
4		$A^{\Phi} = \frac{q l^3}{24} u^2 (2 - u)^2,$ $B^{\Phi} = \frac{q l^3}{24} u^2 (2 - u^2)$
5		$A^{\Phi} = \frac{q l^3}{24} v^2 (2 - v^2),$ $B^{\Phi} = \frac{q l^3}{24} v^2 (2 - v)^2$
6		$A^{\Phi} = \frac{q l^3}{24} [1 - u_1^2 (2 - v_1)^2 - v_2^2 (2 - v_2)^2],$ $B^{\Phi} = \frac{q l^3}{24} [1 - u_1^2 (2 - v_1^2) - v_2^2 (2 - v_2)^2]$

После вычисления опорных моментов определение усилий и построение эпюр может производиться путем расчета отдельных балочек основной системы на действие внешних нагрузок и опорных моментов (рис. 7.5). Для вывода аналитического выражения изгибающих моментов предположим, что ординаты эпюры M^0 и оба момента имеют одинаковые знаки.

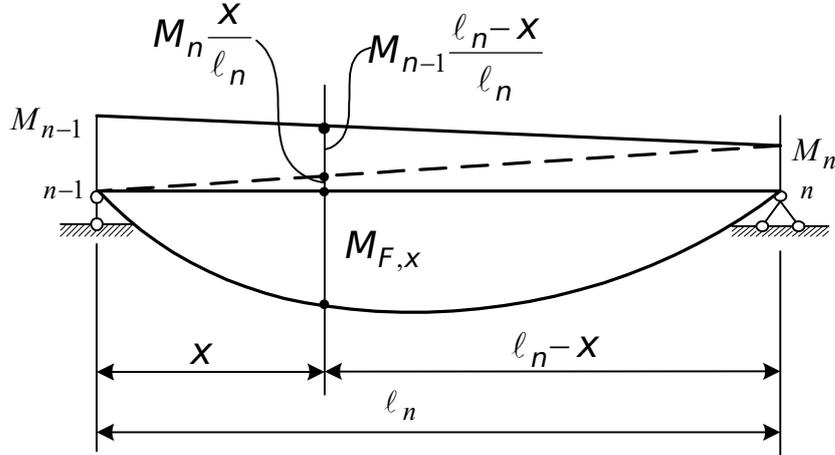


Рис. 7.5. К выводу аналитического выражения изгибающих моментов

Тогда получим

$$M_x = M_{F,x} + M_n \frac{x}{l_n} + M_{n-1} \frac{l_n - x}{l_n}. \quad (7.5)$$

Здесь $M_{F,x}$ – изгибающий момент в рассматриваемом сечении пролета от внешней нагрузки (рис. 7.3, д); M_n и M_{n-1} – опорные моменты; x – абсцисса сечения; l_n – длина пролета.

Формула (7.5) справедлива при любых комбинациях знаков величин M_F , M_n , M_{n-1} . Для определения поперечной силы воспользуемся зависимостью (1.5), которая гласит, что первая производная от изгибающего момента по абсциссе x равна поперечной силе в том же сечении:

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = Q_{F,x} + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}, \quad (7.6)$$

где $Q_{F,x}$ – поперечная сила в рассматриваемом сечении в основной системе неразрезной балки (рис. 7.6); M_n , M_{n-1} в формулу подставляются со своими знаками.

Опорная реакция на любой опоре n неразрезной балки получается следующим образом. Вырезаем двумя сечениями, расположенными по обе стороны от опоры, бесконечно малый участок балки (рис. 7.6).

Спроектируем на вертикаль все действующие на выделенный участок балки силы:

$$R_n = Q_{n+1} - Q_n.$$

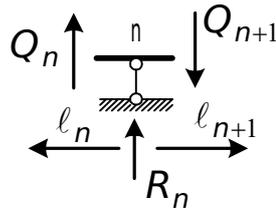


Рис. 7.6. К определению опорной реакции на n -й опоре неразрезной балки

Используя (7.6), найдем

$$R_n = R_{F,n} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}} + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n}, \quad (7.7)$$

где $R_{F,n}$ – реакция опоры n , которая получается в основной системе от заданной внешней нагрузки, расположенной на пролетах l_n и l_{n+1} (рис. 7.3, д).

Для проверки правильности решения задачи следует вспомнить, что изогнутая ось неразрезной балки непрерывна на опорах, т. е. взаимный угол поворота сечений левее и правее данной опоры равен нулю. Следовательно, эпюра M в пределах двух смежных пролетов неразрезной балки верна, если алгебраическая сумма фиктивных реакций на средней опоре равна нулю:

$$B_n^\phi + A_{n+1}^\phi = 0. \quad (7.8)$$

7.2.1. Пример расчета неразрезной балки

Схема нагружения неразрезной балки показана на рис. 7.7, а.

Установим степень статической неопределимости балки. На нее наложено шесть опорных связей (три – осуществляющие заделку левой опоры, и три – являющиеся шарнирно подвижными опорами), поэтому согласно (7.1) имеем

$$L = C_0 - 3 = 6 - 3 = 3.$$

Балка трижды статически неопределима.

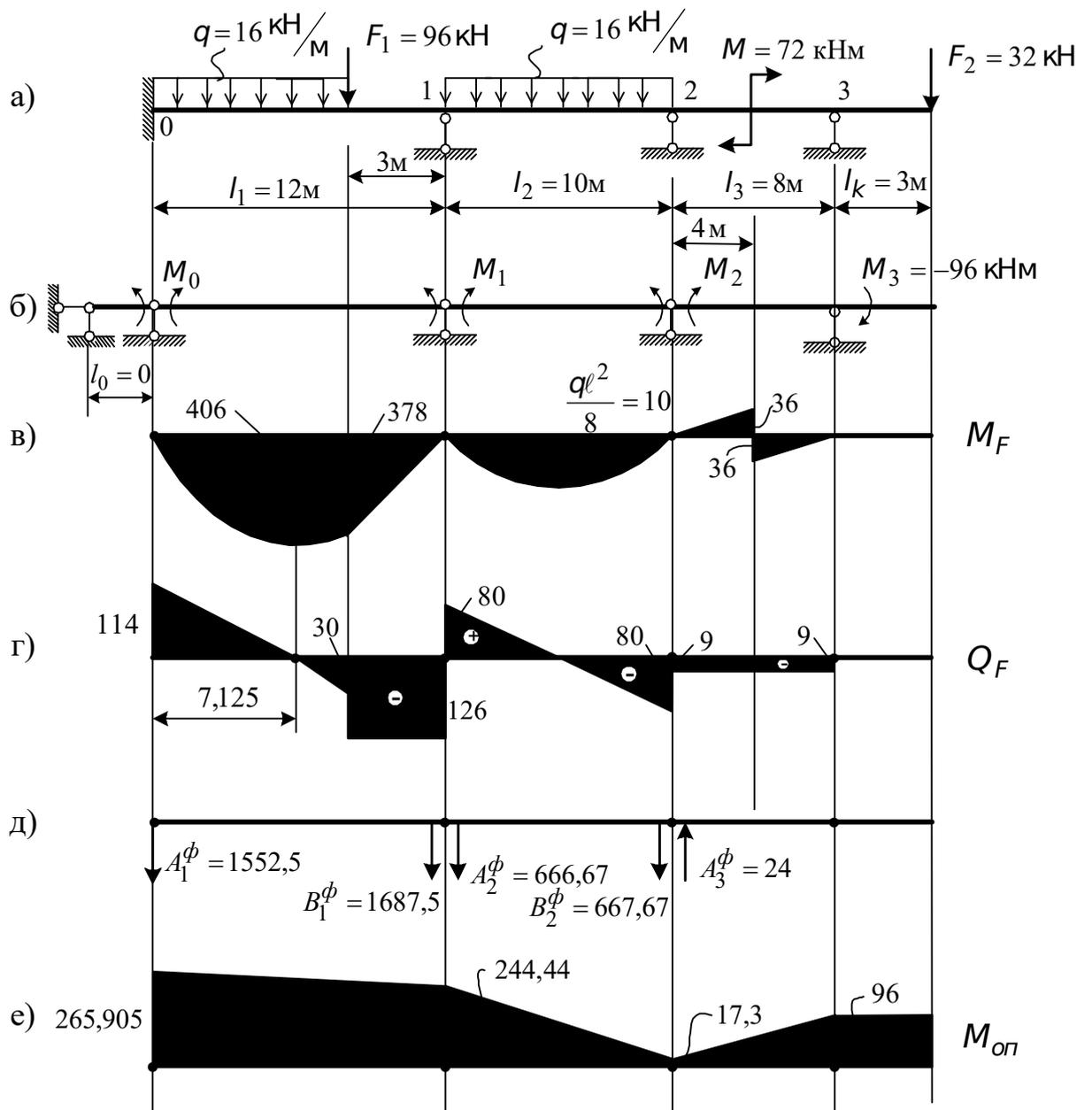


Рис. 7.7. Расчетная схема неразрезной балки (а), основная система (б), эпюры M_F и Q_F в основной системе (в), (г), фиктивные реакции (д), эпюра опорных моментов (е)

Выберем основную систему путем постановки в опорные сечения балки шарниров. Заделку заменяем дополнительным пролетом с нулевой длиной. На третьей опоре изгибающий момент равен

$$M_3 = -F_2 \cdot l_k = -32 \cdot 3 = -96 \text{ кНм.}$$

Основная система показана на рисунке 7.7, б. Она состоит из четырех однопролетных балок. Первая – с нулевым пролетом (вообще, нулевой пролет добавлен исключительно для удобства записи разрешающего уравнения (7.2)), вторая и третья, соответственно – с

пролетами $l_1 = 12$ м и $l_2 = 10$ м. Четвертая балка – с консолью и пролетом $l_3 = 8$ м. Эпюры моментов M_F и Q_F (рис. 7.7, в, г) построены в основной системе, т. е. для каждой балки отдельно от нагрузки, приложенной в пределах пролетов. Следует обратить внимание, что для четвертой балки эпюры построены только от $M = 72$ кНм. Сила $F_2 = 32$ кН, действующая на конце консоли, перенесена в точку 3 с моментом $M_3 = -96$ кНм, который войдет в уравнение (7.2) в качестве известной величины. Фиктивные опорные реакции найдены при помощи формул, содержащихся в табл. 7.1. При этом нужно учитывать, что если на пролете приложены нагрузки двух видов (например, на первом пролете q и F_1), то применим принцип наложения (суперпозиции), т. е. для нахождения фиктивных реакций нужно использовать схемы 1 и 4 табл. 7.1. При этом нужно также помнить, что фиктивные опорные реакции считаются положительными, если они направлены сверху вниз. На рис. 7.7, д показаны величины и направления найденных фиктивных опорных реакций.

Для нахождения неизвестных моментов M_0 , M_1 и M_2 записываем систему уравнений (7.2):

$$\begin{aligned} 2M_0 l_1 + M_1 l_1 &= -6(A_1^\phi) ; \\ M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 &= -6(B_1^\phi + A_2^\phi) ; \\ M_1 l_1 + 2M_2(l_2 + l_3) - 96 l_3 &= -6(B_2^\phi - A_3^\phi) . \end{aligned}$$

Решаем систему уравнений. В результате получаем

$$M_0 = -265,905 \text{ кНм}; M_1 = -244,44 \text{ кНм}; M_2 = -17,3 \text{ кНм}.$$

Эпюра опорных моментов построена на рис. 7.7, е.

Применяя зависимости (7.5) и (7.6), для неразрезной балки (рис. 7.8, а) построим эпюры M и Q (рис. 7.8, б, в); используя (7.7), найдем реакции (рис. 7.8, а).

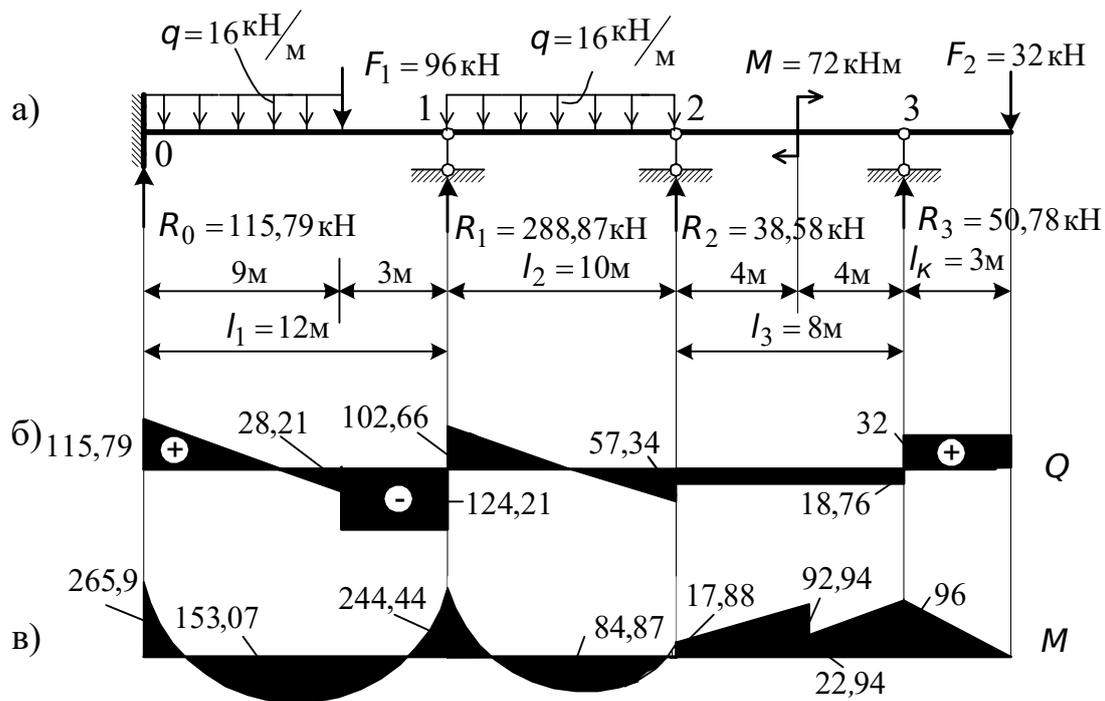


Рис. 7.8. Расчетная схема неразрезной балки (а), эпюра поперечных сил (б), эпюра моментов (в)

7.3. Расчет балки на упругом основании

Упругим основанием называется такое основание балки, которое деформируется под действием массы балки и расположенной на ней нагрузки и при этом оказывает упругое противодействие прогибу. Например, железнодорожные шпалы, рельсы, ленточные фундаменты различных сооружений, передающие нагрузку на грунт.

Балка, лежащая на упругом основании, испытывает со стороны основания реактивное сопротивление. Но характер распределения реакции по ее длине неизвестен и не может быть определен из уравнений статики. Поэтому и эта задача расчета балки является статически неопределимой. Степень статической неопределимости такой балки теоретически можно считать равной бесконечности, поскольку эпюра сопротивления имеет бесконечно большое число неизвестных ординат по длине балки. Относительно характера распределения реактивного сопротивления по длине балки существует несколько гипотез. Простейшая из них была сформулирована проф. Э. Винклером* в 1867 г. Согласно этой гипотезе реакция основания q_0 в каждой точке пропорциональна упругой осадке u в этой точке, т. е.

$$q_0 = -kby, \quad (7.9)$$

* Немецкий ученый Эмиль Винклер (1835-1888) – одним из первых ввел гипотезу о распределении реактивного сопротивления в расчетную практику.

где k – коэффициент, характеризующий жесткость основания (коэффициент постели); b – ширина подошвы балки.

Коэффициент жесткости основания определяется экспериментально путем вдавливания в грунт жесткого штампа. Коэффициент постели K – это сила, необходимая для вдавливания в грунт штампа с площадью, равной единице, на прогиб $y = 1$; размерность коэффициента K – Н/м³, кН/м³. Значения K для некоторых оснований приведены в табл. 7.2.

Таблица 7.2

Значения коэффициента k

Материал основания	k , кН/м ³
Плывун, песок свеженасыпанный, глина мокрая, размягченная	$(0,1 - 0,5) \cdot 10^4$
Песок слежавшийся, балластный; гравий насыпной; глина влажная	$(0,5 - 5) \cdot 10^4$
Песок, гравий, плотнослежавшийся щебень, хрящ; глина малой влажности	$(5 - 10) \cdot 10^4$
Песчано-глинистый грунт, искусственно уплотненный, глина твердая	$(10 - 20) \cdot 10^4$
Мягкая скала, известняк, песчаник	$(20 - 100) \cdot 10^4$

Моделью основания Винклера может служить ряд пружин одинаковой жесткости, помещенных на абсолютно жестком основании, действующих независимо одна от другой. К недостаткам этой модели следует отнести следующее:

– основание оседает лишь в тех точках, которые находятся непосредственно под балкой, и остается совершенно недеформированным вне балки, т. е. поверхность основания претерпевает разрыв у концов балки;

– гипотеза Винклера предполагает, что реакция основания возникает и на тех участках, где балка поднимается под основанием ("отлипает"), т. е. считается, что подошва балки склеена с поверхностью основания. Тем не менее для многих практических задач, когда отлипание не возникает и нет необходимости исследовать прогибы основания за балкой, рассматриваемая гипотеза дает приемлемые результаты.

Выведем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки. Для нахождения изогнутой оси балки на упругом основании используем дифференциальное уравнение (6.39):

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q.$$

Нагрузка q , входящая в это уравнение, для балки на упругом основании складывается из заданной нагрузки $q(x)$ и реакции основания (см. (7.9)):

$$q_0 = -kby.$$

Поэтому

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x) - kby.$$

Разделив обе части уравнения на EJ и обозначив

$$s = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EJ}}, \quad (7.10)$$

получаем

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4s^4 y = \frac{q(x)}{EJ}. \quad (7.11)$$

Уравнение (7.11) неоднородное, линейное, четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение неоднородного уравнения (7.11) складывается из общего решения однородного:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4s^4 y = 0 \quad (7.12)$$

и частного решения неоднородного

$$y_{\text{част}} = \frac{q(x)}{4s^4 EJ}. \quad (7.13)$$

Решение уравнения (7.11) имеет следующий вид:

$$y_x = A \operatorname{ch} s x \cos s x + B \operatorname{sh} s x \cos s x + C \operatorname{ch} s x \sin s x + D \operatorname{sh} s x \sin s x + \frac{q(x)}{4s^4 EJ}, \quad (7.14)$$

где A, B, C, D – произвольные постоянные;

$\operatorname{ch} s x, \operatorname{sh} s x$ – гиперболические функции (соответственно гиперболический косинус $\operatorname{ch} s x = \frac{e^{s x} + e^{-s x}}{2}$ и гиперболический синус $\operatorname{sh} s x = \frac{e^{s x} - e^{-s x}}{2}$).

Отметим, что обе функции определены для всех значений $s x$, так что $\operatorname{sh} 0 = 0$, $\operatorname{ch} 0 = 1$, $\operatorname{sh} s x$ – нечетная функция, $\operatorname{ch} s x$ – четная функция;

$$\operatorname{ch}^2 s x - \operatorname{sh}^2 s x = 1, \\ \frac{d \operatorname{sh} s x}{dx} = s \operatorname{ch} s x, \quad \frac{d \operatorname{ch} s x}{dx} = s \operatorname{sh} s x.$$

Предположим, что действующая на балку нагрузка равномерно распределена по некоторому участку. Тогда, продифференцировав уравнение (7.14) один, два и три раза по x , найдем:

$$y'_x = A[s \operatorname{sh} s x \cos s x - \operatorname{ch} s x \sin s x] + B[s \operatorname{ch} s x \cos s x - \operatorname{sh} s x \sin s x] + \\ + C[s \operatorname{sh} s x \sin s x + \operatorname{ch} s x \cos s x] + D[s \operatorname{ch} s x \sin s x + \operatorname{sh} s x \cos s x]; \quad (7.15)$$

$$y''_x = -2A s^2 \operatorname{sh} s x \sin s x - 2B s^2 \operatorname{ch} s x \sin s x + 2C s^2 \operatorname{sh} s x \cos s x + \\ + 2D s^2 \operatorname{ch} s x \cos s x; \quad (7.16)$$

$$y_x''' = -2As^3[chsx \sin sx + shsx \cos sx] - 2Bs^3[shsx \sin sx + chsx \cos sx] + 2Cs^3[chsx \cos sx - shsx \sin sx] + 2Ds^3[shsx \cos sx - chsx \sin sx]. \quad (7.17)$$

Выразим произвольные постоянные A, B, C, D через прогиб y_0 , угол поворота y_0' , изгибающий момент $y_0'' = -\frac{M_0}{EJ}$ и поперечную силу $y_0''' = -\frac{Q_0}{EJ}$ в начале координат.

При $x = 0$

$$\begin{aligned} y_0 &= A + \frac{q_0}{4s^4EJ}, \\ y_0' &= s(B+C), \\ y_0'' &= -\frac{M_0}{EJ} = 2Ds^2, \\ y_0''' &= -\frac{Q_0}{EJ} = 2s^3(C-B). \end{aligned} \quad (7.18)$$

Отсюда найдем

$$A = y_0 - \frac{q_0}{4s^4EJ}; \quad (7.19)$$

$$B = \frac{y_0'}{2s} + \frac{Q_0}{4s^3EJ}; \quad (7.20)$$

$$C = \frac{y_0'}{2s} - \frac{Q_0}{4s^3EJ}; \quad (7.21)$$

$$D = -\frac{M_0}{2s^2EJ}. \quad (7.22)$$

Теперь подставим (7.19) – (7.22) в уравнения (7.14) – (7.17), введем обозначения

$$\begin{aligned} Y_1 &= chsx \cdot \cos sx; \\ Y_2 &= \frac{1}{2}(shsx \cos sx + chsx \sin sx); \\ Y_3 &= \frac{1}{2}(shsx \sin sx); \\ Y_4 &= \frac{1}{4}(chsx \sin sx - shsx \cos sx) \end{aligned} \quad (7.23)$$

(эти функции носят название функций А.Н. Крылова*, числовые значения этих функций в зависимости от безразмерного аргумента sX даны в табл. 7.3) и получим

$$y_x = y_0 Y_1 + \frac{y'_0}{s} Y_2 - \frac{M_0}{s^2 EJ} Y_3 - \frac{Q_0}{s^3 EJ} Y_4 - \frac{q_0}{4s^4 EJ} (Y_1 - 1); \quad (7.24)$$

$$y'_x = -4sy_0 Y_4 + y'_0 Y_1 - \frac{M_0}{s EJ} Y_2 - \frac{Q_0}{s^2 EJ} Y_3 + \frac{q_0}{s^3 EJ} Y_4; \quad (7.25)$$

$$M_x = 4s^2 EJ y_0 Y_3 + 4s EJ y'_0 Y_4 + M_0 Y_1 + \frac{Q_0}{s} Y_2 - \frac{q_0}{s^2} Y_3; \quad (7.26)$$

$$Q_x = 4s^3 EJ y_0 Y_2 + 4s^2 EJ y'_0 Y_3 - 4M_0 s Y_4 + Q_0 Y_1 - \frac{q_0}{s} Y_2. \quad (7.27)$$

Таблица 7.3

Значения функций А.Н. Крылова

$$Y_1 = chsX \cos sX;$$

$$Y_2 = \frac{1}{2} (shsX \cos sX + chsX \sin sX);$$

$$Y_3 = \frac{1}{2} shsX \sin sX;$$

$$Y_4 = \frac{1}{4} (chsX \sin sX - shsX \cos sX)$$

$s \cdot X$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
1	2	3	4	5
0	1,0	0	0	0
0,1	1,0	0,10	0,0050	0,00015
0,2	0,9997	0,20	0,0200	0,00135
0,3	0,9987	0,2999	0,0450	0,00450
0,4	0,9957	0,39965	0,0800	0,0107

Продолжение табл. 7.3

1	2	3	4	5
0,5	0,9895	0,49895	0,1249	0,0208
0,6	0,9784	0,59745	0,17975	0,0360
0,7	0,9600	0,69440	0,24435	0,0571
0,8	0,9318	0,7891	0,31855	0,08515
0,9	0,8931	0,88035	0,40205	0,1211
1,0	0,8337	0,96675	0,49445	0,1659
1,1	0,7568	1,04645	0,59515	0,2203
1,2	0,6561	1,1173	0,70345	0,28515

*Академик Алексей Николаевич Крылов (1863-1945) – русский кораблестроитель, разработал метод начальных параметров в динамике сооружений, дал решение задачи о движении груза с равномерной скоростью по балке на двух опорах и многих других задач строительной механики.

1,3	0,5272	1,1767	0,81825	0,3612
1,4	0,3656	1,22165	0,9383	0,4490
1,5	0,1664	1,24855	1,06195	0,5490
1,6	-0,0753	1,2535	1,18725	0,66145
1,7	-0,3644	1,2319	1,3118	0,7864
1,8	-0,7060	1,17885	1,4326	0,9237
1,9	-1,1049	1,0888	1,54635	1,0727
2,0	-1,5656	0,95575	1,64895	1,2325
2,1	-2,09223	0,7735	1,73585	1,40195
2,2	-2,6882	0,5351	1,80180	1,57905
2,3	-3,3562	0,23345	1,84075	1,7614
2,4	-4,0976	-0,1386	1,8461	1,94605
2,5	-4,9128	-0,5885	1,81045	2,12925
2,6	-5,8003	-1,1236	1,72555	2,3065
2,7	-6,7565	-1,7509	1,58265	2,47245
2,8	-7,7759	-2,4770	1,3721	2,6208
2,9	-8,8471	-3,3079	1,08375	2,7443
3,0	-9,9669	-4,24845	0,70685	2,8346
3,1	-11,1119	-5,30225	0,2303	2,8823
3,2	-12,2656	-6,47105	-0,3574	2,8769
3,3	-13,4048	-7,7549	-1,0678	2,80675
3,4	-14,5008	-9,15065	-1,9121	2,6589
3,5	-15,5198	-10,65245	-2,9014	2,4195
3,6	-16,4218	-12,25075	-4,04585	2,0735
3,7	-17,1622	-13,9315	-5,35435	1,60485
3,8	-17,6875	-15,67605	-6,8343	0,9969
3,9	-17,9387	-17,45985	-8,4909	0,2321
4,0	-17,8498	-19,25235	-10,3265	-0,7073
4,1	-17,3472	-21,0160	-12,3404	-1,8392
4,2	-16,3505	-22,70545	-14,52735	-3,1812
4,3	-14,7722	-24,26685	-16,8773	-4,7501
4,4	-12,5180	-25,63725	-19,37425	-6,5615

Продолжение табл. 7.3

1	2	3	4	5
4,5	-9,4890	-26,74465	-21,9959	-8,6290
4,6	-5,5791	-27,50565	-24,71165	-10,96380
4,7	-0,6812	-27,8274	-27,4823	-13,57323
4,8	5,3164	-27,60515	-30,2589	-16,4604
4,9	12,5239	-26,72385	-32,9814	-19,6232
5,0	21,0504	-25,05645	-35,57745	-23,0525
5,1	30,9997	-22,46605	-37,96185	-26,7317
5,2	42,4661	-18,8057	-40,0350	-30,6346
5,3	55,5317	-13,9201	-41,68255	-34,72455

5,4	70,2637	-7,6440	-42,77265	-38,9324
5,5	86,7044	0,19005	-43,15925	-43,2557
5,6	104,8687	9,75435	-42,67745	-47,5558
5,7	124,7352	21,2199	-41,14535	-51,75625
5,8	146,2478	34,7564	-38,36395	-55,74285
5,9	169,2837	50,5203	-34,1198	-59,38045
6,0	193,6813	68,65775	-28,2116	-62,5106
6,1	219,2004	89,29465	-20,30425	-64,9518
6,2	245,5231	112,5249	-10,2356	-66,4981
6,3	272,2487	138,4120	2,28855	-66,91745
6,4	298,8909	166,9722	17,5362	-65,9486
6,5	324,7861	198,1637	35,77125	-63,21045
6,6	349,2554	231,88005	57,2528	-58,6871
6,7	371,4244	267,9374	82,2255	-51,74295
6,8	390,2947	306,0558	110,9087	-42,11895
6,9	404,7145	347,34985	143,4927	-30,1819
7,0	413,3762	386,80715	180,1191	-13,2842
7,1	414,8263	428,2849	220,87175	6,7296
7,2	407,4216	469,4772	265,76635	31,02805
7,3	389,3783	509,41565	314,72645	60,0189
7,4	358,7306	546,93425	367,56875	94,1019
7,5	313,3700	580,67095	423,9858	133,6506
7,6	251,0334	609,0402	483,5233	179,00345
7,7	169,3472	630,22945	545,5557	230,4412
7,8	65,8475	642,1835	609,25955	288,16805
7,9	-62,0375	642,58715	673,6057	352,3123
8,0	-216,8647	628,8779	737,31005	422,8713
8,1	-401,1674	598,23435	798,81785	499,7008
8,2	-617,4142	547,5808	856,28775	582,49745
8,3	-867,9091	473,5998	907,5542	670,7544
8,4	-1154,6587	372,78655	950,11575	763,7226

Продолжение табл. 7.3

1	2	3	4	5
8,5	-1479,3701	241,41355	981,0984	860,3917
8,6	-1843,2880	75,6088	997,25265	959,44835
8,7	-2247,0402	-128,58235	994,93765	1059,2289
8,8	-2690,4845	-375,1167	970,1255	1157,69385
8,9	-3172,6917	-667,9794	818,86635	1252,35605
9,0	-3691,4815	-1010,87995	834,8607	1340,3007
9,1	-4243,5551	-1407,3690	714,40845	1418,0930
9,2	-4824,0587	-1860,5365	551,49275	1481,76105
9,3	-5426,5154	-2372,94855	340,3091	1526,7834
9,4	-6042,3167	-2946,2708	74,8875	1548,0229

9,5	-6660,9594	-3581,47555	-250,99585	1539,7419
9,6	-7269,3664	-4278,16925	-643,4861	1495,5985
9,7	-7851,7063	-5034,47135	-1108,61825	1408,6174
9,8	-8389,5687	-5847,0360	-1652,2517	1271,2663
9,9	-8860,9431	-6710,20695	-2279,7354	1075,3680
10,0	-9240,8733	-7616,14615	-2995,70945	812,3636

Расчет балки начинают с определения начальных параметров, исходя из граничных условий, т. е. условий закрепления левого и правого концов балки (рис. 7.9).

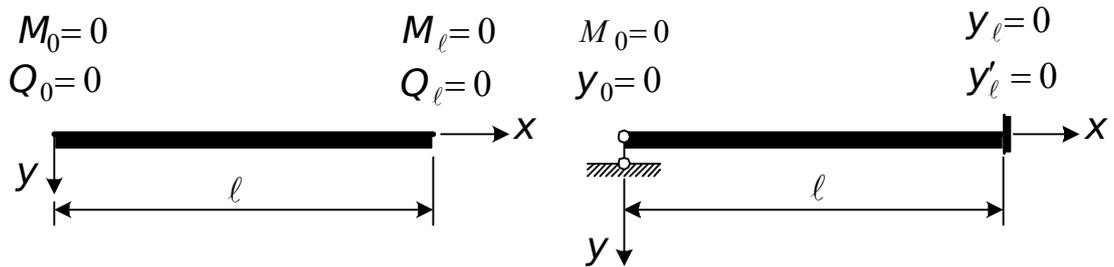


Рис. 7.9. Граничные условия балок

Как видно из рис. 7.9, два начальных параметра находятся сразу из условий закрепления балки на левом конце. Условия для определения двух других начальных параметров записаны на противоположном конце балки, т. е. при $x = l$. Они показывают, какие уравнения надо составить на основе зависимостей (7.24) – (7.27), чтобы определить эти параметры.

В табл. 7.4 приведены готовые выражения, с помощью которых можно найти начальные параметры для различных граничных условий и различных нагрузок. Когда начальные параметры определены, используя выражения (7.24) – (7.27), вычисляем любые факторы в любых сечениях балок.

Таблица 7.4

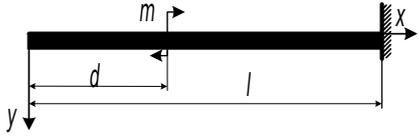
Нахождение начальных параметров

№ № ПП	Схема балки	Значения начальных параметров
1	2	3
1		$Q(0) = \frac{q Y_{2l} (Y_{3(\ell-a)} - Y_{3(\ell-b)}) - Y_{4l} (Y_{1(\ell-a)} - Y_{1(\ell-b)})}{Y_{2l}^2 + 4 Y_{4l}^2}$ $y'(0) = \frac{q}{4s^3 EJ} \times \frac{Y_{2l} (Y_{1(\ell-a)} - Y_{1(\ell-b)}) + 4 Y_{4l} (Y_{3(\ell-a)} - Y_{3(\ell-b)})}{Y_{2l}^2 + 4 Y_{4l}^2}$

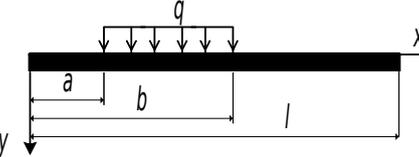
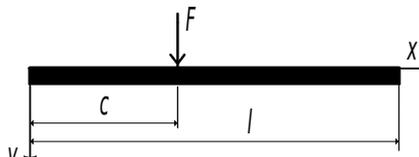
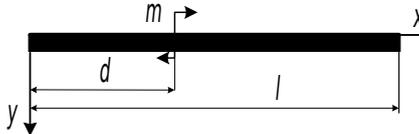
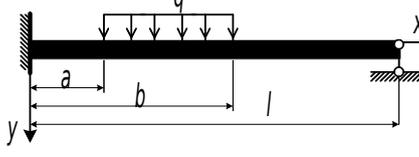
2		$Q(0) = F \frac{Y_{2l} Y_{2(l-c)} + 4Y_{4l} Y_{4(l-c)}}{Y_{2l}^2 + 4Y_{4l}^2},$ $y'(0) = \frac{F}{s^2 EJ} \frac{Y_{4l} Y_{2(l-c)} - Y_{2l} Y_{4(l-c)}}{Y_{2l}^2 + 4Y_{4l}^2}$
3		$Q(0) = -m \cdot s \cdot \frac{Y_{2l} Y_{1(l-d)} + 4Y_{4l} Y_{3(l-d)}}{Y_{2l}^2 + 4Y_{4l}^2},$ $y'(0) = \frac{m}{s EJ} \frac{Y_{2l} Y_{3(l-d)} - Y_{4l} Y_{1(l-d)}}{Y_{2l}^2 + 4Y_{4l}^2}$
4		$Q(0) =$ $= \frac{q}{s} \frac{Y_{1l} (Y_{2(l-a)} - Y_{2(l-b)}) + 4Y_{4l} (Y_{3(l-a)} - Y_{3(l-b)})}{Y_{1l}^2 + 4Y_{2l} Y_{4l}}$ $M(0) =$ $= \frac{q}{s^2} \frac{Y_{1l} (Y_{3(l-a)} - Y_{3(l-b)}) - Y_{2l} (Y_{2(l-a)} - Y_{2(l-b)})}{Y_{1l}^2 + 4Y_{2l} Y_{4l}}$

Продолжение табл. 7.4

1	2	3
5		$Q(0) = F \cdot \frac{Y_{1l} Y_{1(l-c)} + 4Y_{4l} Y_{2(l-c)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{2l} Y_{4l}},$ $M(0) = \frac{F}{s} \cdot \frac{Y_{1l} Y_{2(l-c)} - Y_{2l} Y_{1(l-c)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{2l} Y_{4l}}$
6		$Q(0) = 4m \cdot s \cdot \frac{Y_{1l} Y_{4(l-d)} - Y_{4l} Y_{1(l-d)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{2l} Y_{4l}},$ $M(0) = -m \cdot \frac{Y_{1l} Y_{1(l-d)} + 4Y_{2l} Y_{4(l-d)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{2l} Y_{4l}}$
7		$y'(0) = \frac{q}{s^3 EJ} \times$ $\times \frac{Y_{4l} (Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) - Y_{1l} (Y_{4(l-a)} - Y_{4(l-b)})}{Y_{1l}^2 + 4Y_{4l} Y_{2l}}$ $y(0) = \frac{q}{4s^4 EJ} \times$ $\times \frac{Y_{1l} (Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) + 4Y_{2l} (Y_{4(l-a)} - Y_{4(l-b)})}{Y_{1l}^2 + 4Y_{4l} Y_{2l}}$
8		$y'(0) = -\frac{F}{s^2 EJ} \frac{Y_{1l} Y_{3(l-c)} + 4Y_{4l} Y_{4(l-c)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{4l} Y_{2l}},$

		$y(0) = -\frac{F}{s^3 EJ} \cdot \frac{Y_{1l} Y_{4(l-c)} - Y_{2l} Y_{3(l-c)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{4l} Y_{2l}}$
9		$y'(0) = \frac{m}{s EJ} \cdot \frac{Y_{1l} Y_{2(l-d)} + 4Y_{4l} Y_{3(l-d)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{4l} Y_{2l}},$ $y(0) = \frac{m}{s^2 EJ} \cdot \frac{Y_{1l} Y_{3(l-d)} - Y_{2l} Y_{2(l-d)}}{Y_{1l}^2 + 4Y_{4l} Y_{2l}}$

Продолжение табл. 7.4

1	2	3
10		$y'(0) = \frac{q}{4s^3 EJ} \times$ $\times \frac{Y_{3l} (Y_{2(l-a)} - Y_{2(l-b)}) - Y_{2l} (Y_{3(l-a)} - Y_{3(l-b)})}{Y_{3l}^2 - Y_{2l} Y_{4l}}$ $y(0) = -\frac{q}{4s^4 EJ} \times$ $\times \frac{Y_{4l} (Y_{2(l-a)} - Y_{2(l-b)}) - Y_{3l} (Y_{3(l-a)} - Y_{3(l-b)})}{Y_{3l}^2 - Y_{2l} Y_{4l}}$
11		$y'(0) = \frac{F}{4s^2 EJ} \cdot \frac{Y_{3l} Y_{1(l-c)} - Y_{2l} Y_{2(l-c)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l} Y_{4l}},$ $y(0) = -\frac{F}{4s^3 EJ} \cdot \frac{Y_{4l} Y_{1(l-c)} - Y_{3l} Y_{2(l-c)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l} Y_{4l}}$
12		$y'(0) = \frac{m}{4s EJ} \cdot \frac{Y_{2l} Y_{1(l-d)} + 4Y_{3l} Y_{4(l-d)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l} Y_{4l}},$ $y(0) = -\frac{m}{4s^2 EJ} \cdot \frac{Y_{3l} Y_{1(l-d)} + 4Y_{4l} Y_{4(l-d)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l} Y_{4l}}$
13		$Q(0) = -\frac{q}{4s} \times$ $\times \frac{Y_{1l} (Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) + 4Y_{3l} (Y_{3(l-a)} - Y_{3(l-b)})}{Y_{1l} Y_{4l} - Y_{2l} Y_{3l}}$ $M(0) = \frac{q}{4s^2} \times$ $\times \frac{Y_{2l} (Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) + 4Y_{4l} (Y_{3(l-a)} - Y_{3(l-b)})}{Y_{1l} Y_{4l} - Y_{2l} Y_{3l}}$
14		$Q(0) = F \cdot \frac{Y_{1l} Y_{4(l-c)} - Y_{3l} Y_{2(l-c)}}{Y_{1l} Y_{4l} - Y_{2l} Y_{3l}},$

	$M(0) = -\frac{F}{s} \cdot \frac{Y_{2l} Y_{4(l-c)} - Y_{4l} Y_{2(l-c)}}{Y_{1l} Y_{4l} - Y_{2l} Y_{3l}}$
--	---

Продолжение табл. 7.4

1	2	3
15		$Q(0) = m \cdot s \cdot \frac{Y_{3l} Y_{1(l-d)} - Y_{1l} Y_{3(l-d)}}{Y_{1l} Y_{4l} - Y_{2l} Y_{3l}},$ $M(0) = m \cdot \frac{Y_{2l} Y_{3(l-d)} - Y_{4l} Y_{1(l-d)}}{Y_{1l} Y_{4l} - Y_{2l} Y_{3l}}$
16		$Q(0) = \frac{q}{4s} \times$ $\times \frac{Y_{1l}(Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) + 4Y_{2l}(Y_{4(l-a)} - Y_{4(l-b)})}{Y_{2l} Y_{3l} - Y_{1l} Y_{4l}}$ $y_0 = \frac{q}{4s^3 EJ} \times$ $\times \frac{Y_{3l}(Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) + 4Y_{4l}(Y_{4(l-a)} - Y_{4(l-b)})}{Y_{2l} Y_{3l} - Y_{1l} Y_{4l}}$
17		$Q(0) = F \cdot \frac{Y_{2l} Y_{3(l-c)} - Y_{1l} Y_{4(l-c)}}{Y_{2l} Y_{3l} - Y_{1l} Y_{4l}},$ $y'(0) = \frac{F}{s^2 EJ} \cdot \frac{Y_{4l} Y_{3(l-c)} - Y_{3l} Y_{4(l-c)}}{Y_{2l} Y_{3l} - Y_{1l} Y_{4l}}$
18		$Q(0) = s \cdot m \cdot \frac{Y_{1l} Y_{3(l-d)} - Y_{2l} Y_{2(l-d)}}{Y_{2l} Y_{3l} - Y_{1l} Y_{4l}},$ $y'(0) = \frac{m}{sEJ} \cdot \frac{Y_{3l} Y_{3(l-d)} - Y_{4l} Y_{2(l-d)}}{Y_{2l} Y_{3l} - Y_{1l} Y_{4l}}$
19		$Q(0) = \frac{q}{4s} \times$ $\times \frac{Y_{2l}(Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) + 4Y_{3l}(Y_{4(l-a)} - Y_{4(l-b)})}{Y_{3l}^2 - Y_{2l} Y_{4l}}$ $M(0) = -\frac{q}{4s^2} \times$ $\times \frac{Y_{3l}(Y_{1(l-a)} - Y_{1(l-b)}) + 4Y_{4l}(Y_{4(l-a)} - Y_{4(l-b)})}{Y_{3l}^2 - Y_{2l} Y_{4l}}$

Продолжение табл. 7.4

1	2	3
20		$Q(0) = F \cdot \frac{Y_{3l} Y_{3(l-c)} - Y_{2l} Y_{4(l-c)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l} Y_{4l}},$ $M(0) = \frac{F}{s} \cdot \frac{Y_{3l} Y_{4(l-c)} - Y_{4l} Y_{3(l-c)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l} Y_{4l}}$

21		$Q(0) = m \cdot s \cdot \frac{Y_{2l} Y_{3(l-d)} - Y_{3l} Y_{2(l-d)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l} Y_{4l}},$ $M(0) = m \cdot \frac{Y_{4l} Y_{2(l-d)} - Y_{3l} Y_{3(l-d)}}{Y_{3l}^2 - Y_{2l} Y_{4l}}$
----	--	--

В заключение подраздела запишем уравнения (7.24) – (7.27) для балки, нагруженной сосредоточенной моментной и равномерно распределенной нагрузками (рис. 7.10).

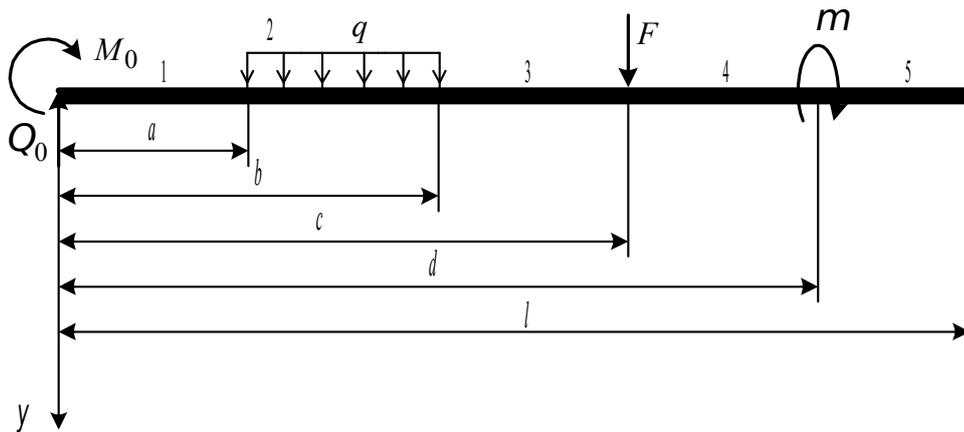


Рис. 7.10. Схема нагружения балки

$$y_x = y_0 Y_1 + \frac{y'_0}{s} Y_2 - \frac{M_0}{s^2 EJ} Y_3 - \frac{Q_0}{s^3 EJ} Y_4 \Big|_1 - \frac{q}{4s^4 EJ} [Y_{1(x-a)} - 1] \Big|_2 +$$

$$+ \frac{q}{4s^4 EJ} [Y_{1(x-b)} - 1] \Big|_3 + \frac{F}{s^3 EJ} Y_{4(x-c)} \Big|_4 - \frac{m}{s^2 EJ} Y_{3(x-d)} \Big|_5 ; \quad (7.28)$$

$$y'_x = -4s y_0 Y_4 + y'_0 Y_1 - \frac{M_0}{s EJ} Y_2 - \frac{Q_0}{s^2 EJ} Y_3 \Big|_1 + \frac{q}{s^3 EJ} Y_{4(x-a)} \Big|_2 -$$

$$- \frac{q}{s^3 EJ} Y_{4(x-b)} \Big|_3 + \frac{F}{s^2 EJ} Y_{3(x-c)} \Big|_4 - \frac{m}{s EJ} Y_{2(x-d)} \Big|_5 ; \quad (7.29)$$

$$M_x = 4s^2 EJ y_0 Y_3 + 4s EJ y'_0 Y_4 + M_0 Y_1 + \frac{Q_0}{s} Y_2 \Big|_1 - \frac{q}{s^2} Y_{3(x-a)} \Big|_2 +$$

$$+ \frac{q}{s^2} Y_{3(x-b)} \Big|_3 - \frac{F}{s} Y_{2(x-c)} \Big|_4 + m Y_{1(x-d)} \Big|_5 ; \quad (7.30)$$

$$Q_x = 4s^3 EJ y_0 Y_2 + 4s^2 EJ y'_0 Y_3 - 4sM_0 Y_4 + Q_0 Y_1 \Big|_1 - \frac{q}{s} Y_{2(x-a)} \Big|_2 + \\ + \frac{q}{s} Y_{2(x-b)} \Big|_3 - F Y_{1(x-c)} \Big|_4 - 4sm Y_{4(x-d)} \Big|_5. \quad (7.31)$$

7.3.1. Пример расчета балки на упругом (винклеровском) основании

Для заданной балки (рис. 7.11) требуется построить эпюры M и Q и эпюру прогибов U при следующих исходных данных:

$$E = 1 \cdot 10^7 \text{ кН/м}^2;$$

$$J = 0,256 \text{ м}^4;$$

$$K = 3,2 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^3;$$

$$b = 1,25 \text{ м.}$$

Вычисляем характеристическое число:

$$s = \sqrt[4]{\frac{Kb}{4EJ}} = \sqrt[4]{\frac{3,2 \cdot 10^4 \cdot 1,25}{4 \cdot 1 \cdot 10^7 \cdot 0,256}} = 0,25 \text{ м}^{-1}.$$

По табл. 7.3 определяем значение функций:

$$s \cdot l = 0,25 \cdot 10 = 2,5;$$

$$Y_{1s\ell} = -4,9128, \quad Y_{2s\ell} = -0,5885, \quad Y_{3s\ell} = 1,81045, \quad Y_{4s\ell} = 2,12925;$$

$$s(\ell - a) = 0,25(10 - 2) = 2;$$

$$Y_{1s(\ell-a)} = -1,5656, \quad Y_{2s(\ell-a)} = 0,95575, \quad Y_{3s(\ell-a)} = 1,64895,$$

$$Y_{4s(\ell-a)} = 1,2325;$$

$$s(\ell - b) = 0,25(10 - 6) = 1;$$

$$Y_{1s(\ell - b)} = 0,8337, \quad Y_{2s(\ell - b)} = 0,96675, \quad Y_{3s(\ell - b)} = 0,49445,$$

$$Y_{4s(\ell - b)} = 0,1659;$$

$$s(\ell - c) = 0,25(10 - 8) = 0,5;$$

$$Y_{1s(\ell - c)} = 0,9895, \quad Y_{2s(\ell - c)} = 0,49895, \quad Y_{3s(\ell - c)} = 0,1249,$$

$$Y_{4s(\ell - c)} = 0,0208.$$

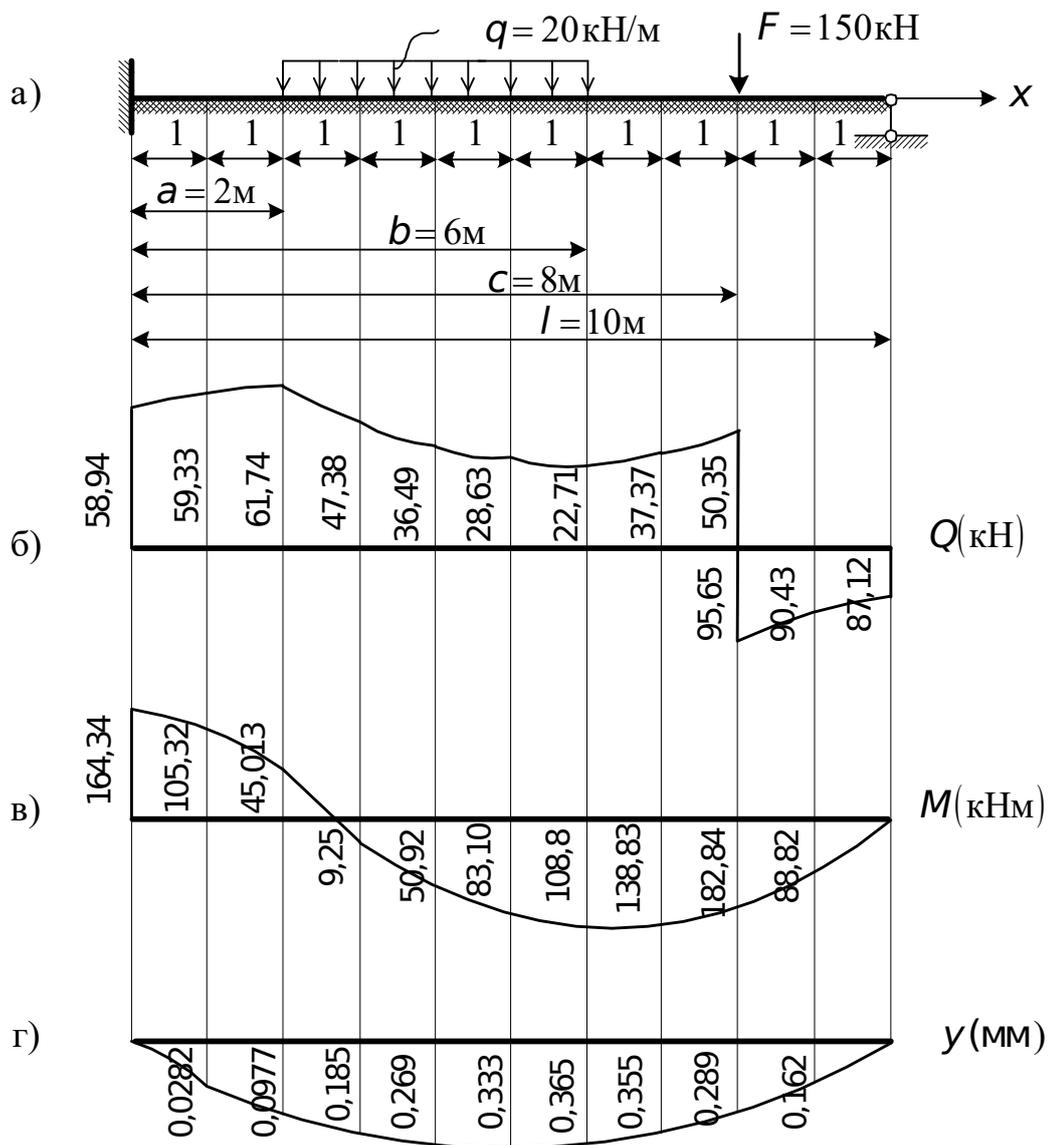


Рис. 7.11. Расчетная схема балки (а) и эпюры Q (б), M (в), y (г)

Левый край балки заземлен (рис. 7.11, а), следовательно,

$$y_0 = 0 \text{ и } y'_0 = 0.$$

Остальные два параметра Q_0 и M_0 найдем по формулам табл. 7.4 (схемы 13 и 14). После вычислений

$$Q_0 = 58,944 \text{ кН},$$

$$M_0 = -164,379 \text{ кНм}.$$

Теперь запишем уравнения для нахождения прогибов, изгибающих моментов и поперечных сил:

$$y_x = -\frac{M_0}{s^2 EJ} Y_{3sx} - \frac{Q_0}{s^3 EJ} Y_{4sx} \Big|_1 - \frac{q}{4s^4 EJ} [Y_{1s(x-a)} - 1] \Big|_2 + \\ + \frac{q}{4s^4 EJ} [Y_{1s(x-b)} - 1] \Big|_3 + \frac{F}{s^3 EJ} Y_{4s(x-c)} \Big|_4 ;$$

$$M_x = M_0 Y_{1sx} + \frac{Q_0}{s} Y_{2sx} \Big|_1 - \frac{q}{s^2} Y_{3s(x-a)} \Big|_2 + \\ + \frac{q}{s^2} Y_{3s(x-b)} \Big|_3 - \frac{F}{s} Y_{2s(x-c)} \Big|_4 ;$$

$$Q_x = -4M_0 s Y_{4sx} + Q_0 Y_{1sx} \Big|_1 - \frac{q}{s} Y_{2s(x-a)} \Big|_2 + \frac{q}{s} Y_{2s(x-b)} \Big|_3 - \\ - F Y_{1s(x-c)} \Big|_4 .$$

Результаты вычислений приведены на рис. 7.11, б, в, г.

7.4. Расчет бесконечно длинной балки на упругом основании

В тех случаях, когда нагрузка, действующая на балку, занимает незначительный по сравнению с длиной балки участок, достаточно удаленный от ее концов, балку можно считать бесконечно длинной. Примером может служить длинная балка, нагруженная сосредоточенной силой (рис. 7.12).

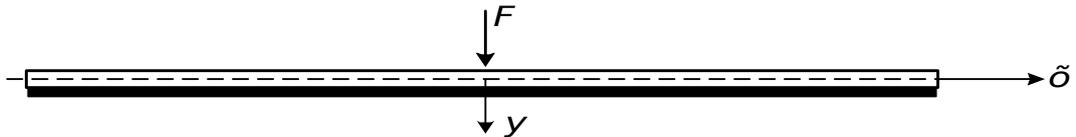


Рис. 7.12. Длинная балка, нагруженная сосредоточенной силой

В этом случае изогнутая ось будет симметричной относительно поперечного сечения, проведенного по линии действия силы. Поэтому будем рассматривать только одну ее половину (рис. 7.13).

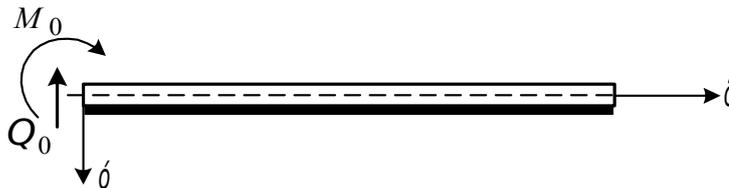


Рис. 7.13. К расчету бесконечно длинной балки на упругом основании

Действие отброшенной части заменяем поперечной силой Q_0 и изгибающим моментом M_0 . Так как рассматриваемая правая половина свободна от нагрузки, т.е. $q_x = 0$, то дифференциальное уравнение изогнутой оси (7.11) принимает вид

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4s^4 y = 0. \quad (7.32)$$

Решение этого однородного уравнения, как известно (7.14), будет следующим:

$$y_x = A chsx \cos sx + B shsx \cos sx + C chsx \sin sx + D shsx \sin sx. \quad (7.33)$$

Для определения произвольных постоянных A, B, C, D сформулируем граничные условия:

при $x \rightarrow \infty$ $y_\infty = 0$ и $\varphi_\infty = 0$.

Заменим гиперболические функции в (7.33) их значениями:

$$chsx = \frac{e^{sx} + e^{-sx}}{2}, \quad shsx = \frac{e^{sx} - e^{-sx}}{2}.$$

В результате получим

$$y_x = \frac{e^{sx}}{2} \cos sx (A + B) + \frac{e^{sx}}{2} \sin sx (C + D) + \frac{e^{-sx}}{2} \cos sx (A - B) + \frac{e^{-sx}}{2} \sin sx (C - D). \quad (7.34)$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} A + B &= C_1, \\ C + D &= C_2, \\ A - B &= C_3, \\ C - D &= C_4. \end{aligned}$$

С учетом обозначений уравнение (7.34) принимает следующий вид:

$$y_x = \frac{e^{sx}}{2} (C_1 \cos sx + C_2 \sin sx) + \frac{e^{-sx}}{2} (C_3 \cos sx + C_4 \sin sx). \quad (7.35)$$

При $x \rightarrow \infty$ первое слагаемое (7.35) неограниченно возрастает, а второе обращается в нуль. Следовательно, чтобы удовлетворить граничному условию (при $x \rightarrow \infty$ $y = 0$), нужно положить $C_1 = C_2 = 0$.

Тогда

$$y_x = \frac{e^{-sx}}{2} (C_3 \cos sx + C_4 \sin sx). \quad (7.36)$$

Продифференцируем (7.36) один, два и три раза по x . В результате получим

$$\frac{dy}{dx} = s \frac{e^{-sx}}{2} (C_4 - C_3) \cos sx - s \frac{e^{-sx}}{2} (C_3 + C_4) \sin sx; \quad (7.37)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = s^2 e^{-sx} (C_3 \sin sx - C_4 \cos sx); \quad (7.38)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = s^3 e^{-sx} (C_4 - C_3) \sin sx + s^3 e^{-sx} (C_3 + C_4) \cos sx. \quad (7.39)$$

Теперь используем условие, что касательная к упругой линии в начале координат параллельна оси абсцисс, т. е.

$$\text{при } x = 0 \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

Тогда из (7.37) получаем

$$C_3 = C_4. \quad (7.40)$$

С учетом (7.40) перепишем выражения (7.37) – (7.39):

$$\frac{dy}{dx} = -s e^{-sx} C_3 \sin sx; \quad (7.41)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = s^2 e^{-sx} C_3 (\sin sx - \cos sx); \quad (7.42)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2s^3 e^{-sx} C_3 \cos sx. \quad (7.43)$$

Для определения постоянной C_3 воспользуемся следующим условием: при $x = 0 \quad Q = -\frac{F}{2}$.

Учитывая, что (6.38)

$$EJ y_x''' = -Q,$$

из (7.43) найдем

$$C_3 = \frac{F}{4s^3 EJ}. \quad (7.44)$$

С учетом (7.44) из (7.36) получаем

$$y_x = \frac{F}{8s^3 EJ} e^{-sx} (\cos sx + \sin sx). \quad (7.45)$$

Аналогично из (7.41) угол поворота

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_x = -\frac{F}{4s^2 EJ} e^{-sx} \sin sx. \quad (7.46)$$

Изгибающий момент получаем из (7.42) с учетом (7.44) и (6.37):

$$M_x = -\frac{F}{4s} e^{-sx} (\sin sx - \cos sx). \quad (7.47)$$

И, наконец, из (7.43) получим

$$Q_x = -\frac{F}{2} e^{-sx} \cos sx. \quad (7.48)$$

По полученным формулам (7.45), (7.47) и (7.48) построим эпюры y , M и Q (рис. 7.14).

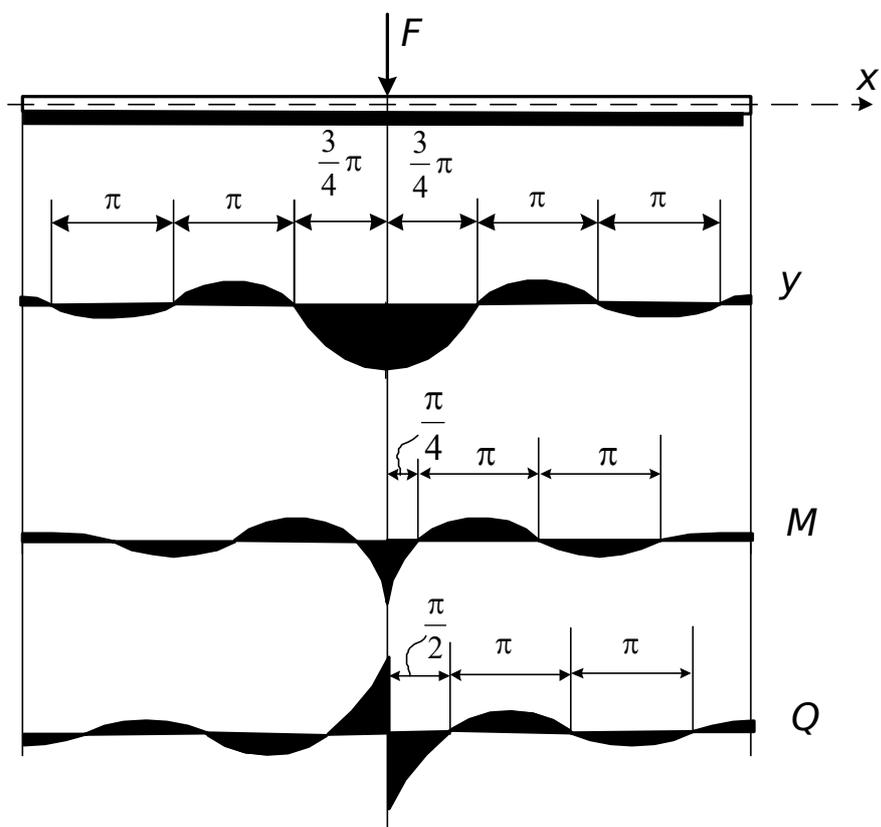


Рис. 7.14. Действие сосредоточенной силы на бесконечную балку

Раздел 8 КРУЧЕНИЕ

8.1. Кручение стержней с круглым поперечным сечением

Кручение возникает, когда на стержень действуют пары сил, перпендикулярные его оси. Рассмотрим круглый стержень AB , который на одном конце заделан в плоскости MN , а к другому концу приложена пара сил, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси стержня (рис. 8.1).

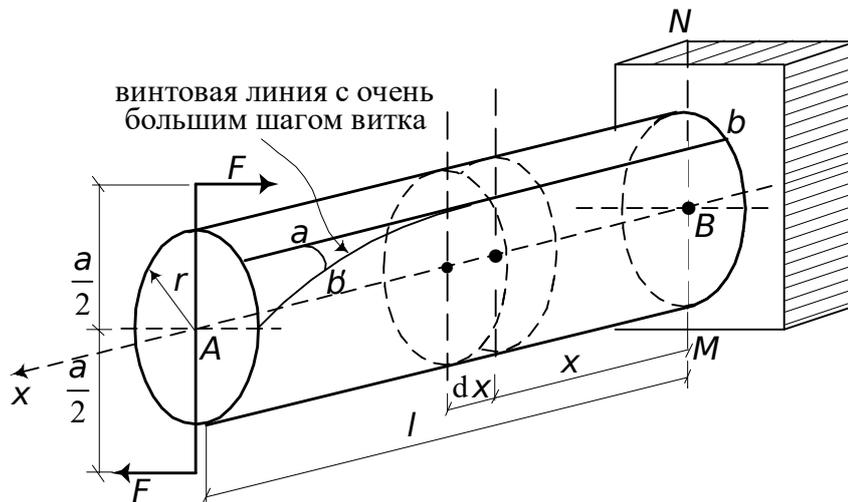


Рис. 8.1. Схема круглого стержня, подверженного кручению

Эта пара сил создает момент $M_K = Fa$, который скручивает стержень. Напомним правило знаков для момента (см. п. 1.7.2): при взгляде на торцевое сечение элемента стержня dx со стороны его внешней нормали видим, что положительный момент M_K направлен по ходу часовой стрелки. Угол поворота $\varphi > 0$, если при взгляде на сечение в положительном направлении оси X видим поворот против хода часовой стрелки.

Опыт показывает, что при закручивании на небольшой угол в пределах пропорциональности материала диаметр стержня и его длина не меняются, ось остается прямой, поперечное сечение – плоским. Изменение формы отмечается образующими ab стержня, которые из прямых линий становятся винтовыми bb' (рис. 8.1). Это указывает на то, что при кручении происходит смещение поперечных сечений стержня. Другими словами, каждое поперечное сечение поворачивается вокруг оси X как жесткий тонкий диск.

С использованием указанных допущений на рис. 8.2 изображена деформация элемента стержня длиной dx радиуса ρ , выделенного из закручиваемого стержня радиуса r при произвольном значении X (рис. 8.1).

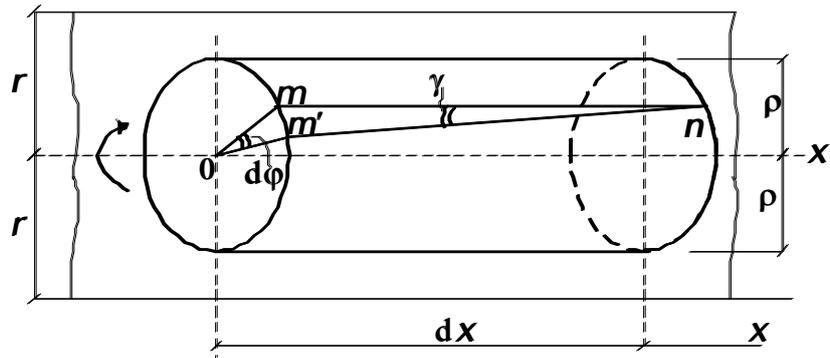


Рис. 8.2. Деформация элемента стержня при кручении

На рис. 8.2 условно принято, что правое сечение элемента dx остается неподвижным, а левое поворачивается на угол $d\varphi$, создаваемый за счет закручивания на длине dx .

Один из радиусов сечения Om поворачивается вместе с сечением на угол $d\varphi$, а образующая mn произвольной точки m этого радиуса переходит в положение nm' , поворачиваясь на угол γ – угол сдвига в этой точке. Здесь mm' – разность абсолютных перемещений для двух точек, лежащих на одной образующей. Относительный сдвиг

$$\gamma = \frac{mm'}{mn}.$$

Учитывая, что $mm' = \rho d\varphi$, $mn = dx$, найдем

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx}. \quad (8.1)$$

Полученная формула (8.1) показывает, что для каждой точки сечения относительный сдвиг пропорционален расстоянию этой точки от оси стержня.

Переходим к физической стороне задачи. На основании закона Гука при сдвиге (см. п. 1.8.3)

$$\tau = G\gamma$$

получим

$$\tau_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dx}, \quad (8.2)$$

где τ_ρ – напряжение для произвольного элемента внутри сечения; ρ – расстояние от этого элемента до центра сечения; G (модуль сдвига) и $\frac{d\varphi}{dx}$ (угол поворота) – константы для всех точек сечения.

Приступим к рассмотрению статической стороны задачи. Сумма всех внутренних сил в каждом поперечном сечении должна составить момент, равный моменту, скручивающему рассматриваемый стержень в этом сечении. Закон распределения напряжений τ , согласно формуле (8.2), вдоль произвольного радиуса в сечении изображен на рис. 8.3.

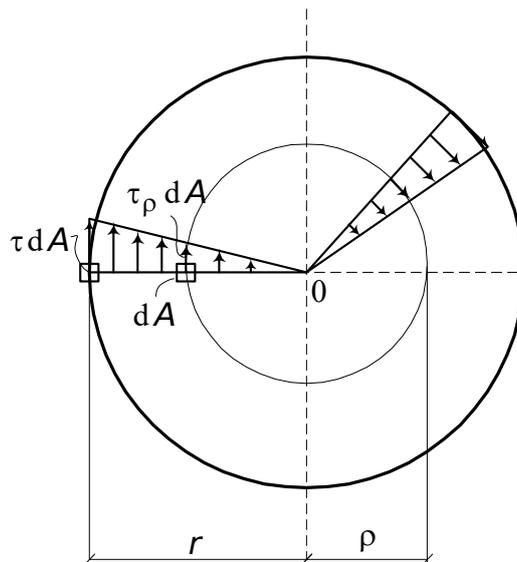


Рис. 8.3. Распределение касательных напряжений в сечении при кручении

Как было отмечено выше, напряжения τ в сечении (рис. 8.3) сводятся к крутящему моменту M_K , поэтому

$$M_K = \int_A \tau_\rho \rho dA = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA. \quad (8.3)$$

Интеграл по площади поперечного сечения

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA$$

представляет собой полярный момент инерции сечения (см. п. 2.3).

С учетом этого из (8.3) находим

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_K}{GJ_\rho}. \quad (8.4)$$

Соотношение (8.4) далее используется для вычисления углов закручивания. Произведение GJ_ρ называется жесткостью сечения при кручении ($\text{Н} \cdot \text{см}^2$).

Подставив в эту формулу вместо $\frac{d\varphi}{dx}$ выражение (см. формулу (8.2))

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\tau_\rho}{G\rho},$$

получим

$$\tau_\rho = \frac{M_K \rho}{J_\rho}. \quad (8.5)$$

Эта формула дает возможность определить касательные напряжения при кручении в произвольной точке поперечного сечения круглого стержня.

При $\rho = r$

$$\tau_{\max} = \frac{M_K r}{J_\rho}. \quad (8.6)$$

Запишем формулу (8.6) в преобразованном виде:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p}, \quad (8.7)$$

где $W_p = \frac{J_p}{r}$ – геометрическая характеристика, называемая моментом сопротивления сечения при кручении, м³. Для сплошного круглого сечения

$$W_p = \frac{\pi d^4 \cdot 2}{32 \cdot d} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi r^3}{2}.$$

Для полого толстостенного цилиндра (рис. 8.4, а)

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right],$$

а для тонкостенного кольцевого сечения (рис. 8.4, б) –

$$W_p = \frac{\pi d^2 \delta}{2}.$$

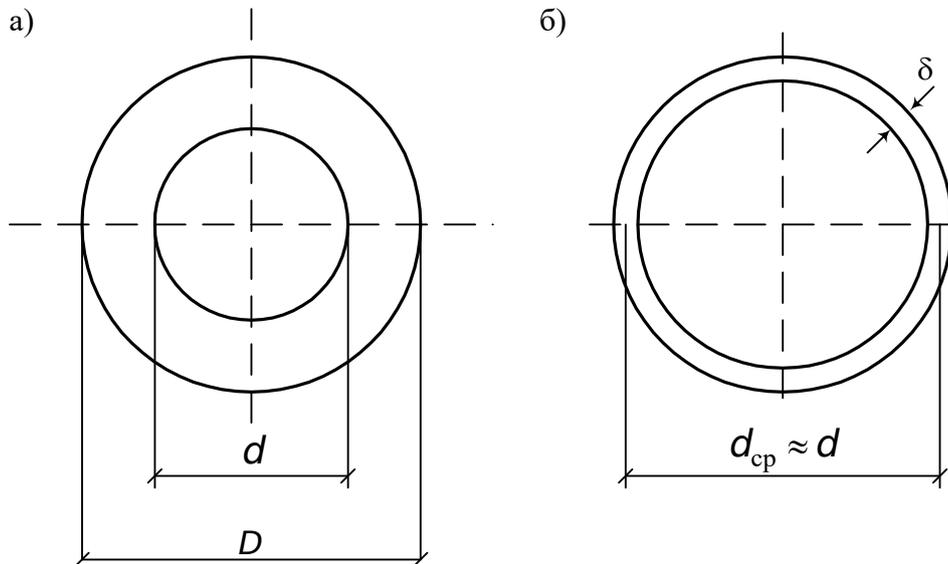


Рис. 8.4. Типы сечений круглого стержня:

а – полый толстостенный цилиндр; б – тонкостенное кольцевое сечение ($\delta \ll d$)

Обеспечение прочности при кручении элементов конструкций круглого сечения производится по методу допускаемых напряжений:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p} \leq [\tau], \quad (8.8)$$

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение материала, или по методу предельных состояний:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p} \leq R, \quad (8.9)$$

где R – расчетное сопротивление материала стержня при сдвиге, а крутящий момент M_K определяется по расчетным нагрузкам с учетом возможных перегрузок.

8.1.1. Определение углов закручивания

Для определения углов закручивания воспользуемся уравнением (8.4), из которого, интегрируя обе части равенства, найдем

$$\int_0^x \frac{d\varphi}{dx} dx = \varphi = \int_0^x \frac{M_K}{GJ_\rho} dx + \varphi_0, \quad (8.10)$$

где φ_0 – угол поворота, определяемый из граничных условий.

В частном случае при $M_K = \text{const}$, $GJ_\rho = \text{const}$ получаем

$$\varphi = \frac{M_K x}{GJ_\rho} + \varphi_0. \quad (8.11)$$

Если начало координат расположено так, как на рис. 8.1, т. е. в точке B , то

$$\text{при } x=0 \quad \varphi=0, \varphi_0=0;$$

при расположении начала координат в точке A

$$\varphi_0 = -\frac{M_K l}{GJ_\rho}.$$

Рассмотрим пример использования формулы (8.11). Пусть требуется построить эпюру углов закручивания для вала, показанного на рис. 8.5, а. Предварительно построим эпюру крутящих моментов (рис. 8.5, б).

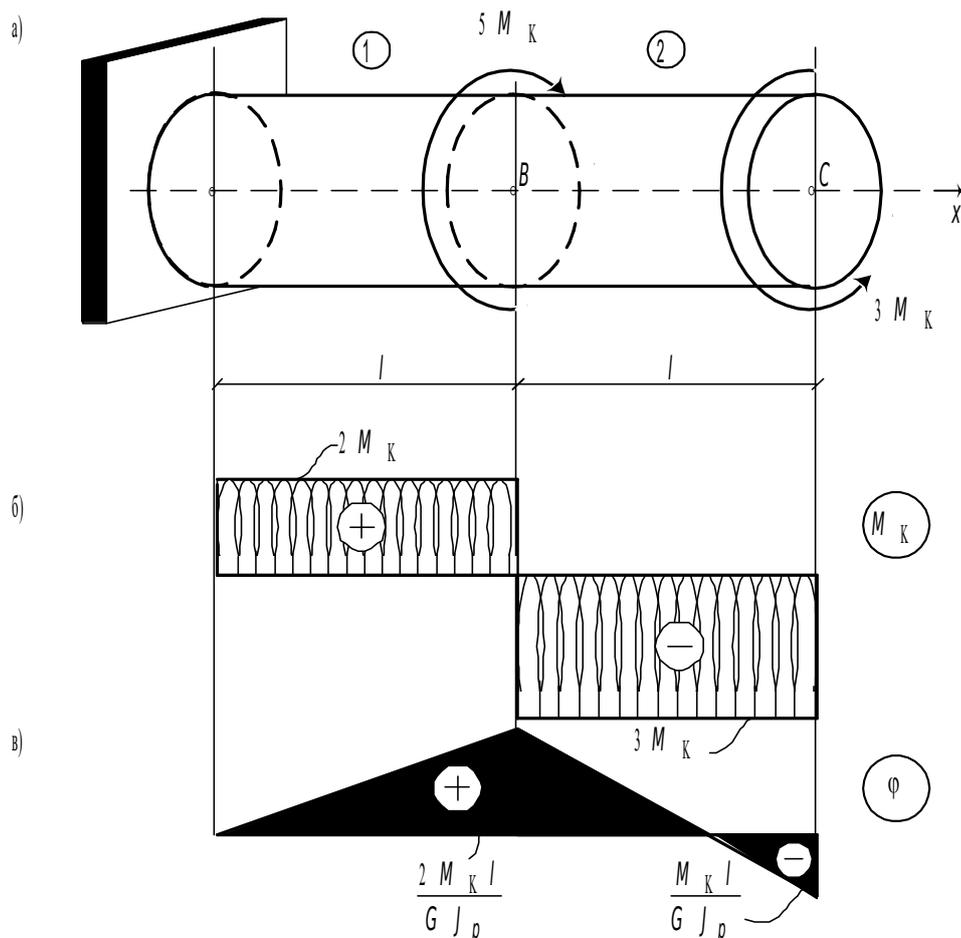


Рис. 8.5. Схема закручивания стержня и эпюры M_K и Φ

Запишем формулу (8.11) для определения углов закручивания вала на первом и втором участках:

$$\varphi_1 = \frac{2M_K x}{GJ_p} + \varphi_{01}, \quad l \geq x \geq 0; \quad \varphi_2 = -\frac{3M_K x}{GJ_p} + \varphi_{02}, \quad 2l \geq x \geq l.$$

Угол поворота в точке **A** (заделке) равен нулю. Следовательно,

$$\text{при } x=0 \quad \varphi_1=0,$$

отсюда

$$\varphi_{01} = 0.$$

Угол поворота φ_{02} найдем из условия непрерывности перемещений, т. е. отсутствия разрывов функции Φ на границе участков **AB** и **BC** (рис. 8.5, а).

На основании этого имеем

$$\text{при } x=l \quad \varphi_1 = \varphi_2: \quad \frac{2M_K l}{GJ_\rho} = -\frac{3M_K l}{GJ_\rho} + \varphi_{02}.$$

Отсюда

$$\varphi_{02} = \frac{5M_K l}{GJ_\rho}.$$

Теперь найдем ординаты углов закручивания и построим эпюру φ (рис. 8.5, в):

$$\varphi_{01} = \varphi_A = 0;$$

$$\varphi_B = \frac{2M_K l}{GJ_\rho};$$

$$\varphi_C = -\frac{6M_K l}{GJ_\rho} + \frac{5M_K l}{GJ_\rho} = -\frac{M_K l}{GJ_\rho}.$$

Аналогично производится расчет и при более сложной нагрузке и большем количестве участков.

Иногда при расчетах на кручение нужно выполнить условие жесткости, ограничивающее угол закручивания. По этому условию угол закручивания на единицу длины вала (погонный угол закручивания) не должен превышать задаваемую техническими условиями величину $[\varphi]$, т. е.

$$\varphi_{\max} = \frac{M_K}{GJ_\rho} \leq [\varphi]. \quad (8.12)$$

Из двух диаметров вала, полученных из условия прочности (8.8) или (8.9) и из условия жесткости (8.12), принимается большее значение.

8.1.2. Напряжения в продольных и наклонных сечениях, проходящих через ось стержня

В поперечных сечениях круглого стержня возникают только касательные напряжения, лежащие в плоскости поперечного сечения и направленные перпендикулярно к соответствующим радиусам (см. рис. 8.3). По закону парности (см. п. 1.8), касательные напряжения возникают также в перпендикулярной плоскости (рис. 8.6). Эти напряжения параллельны оси стержня. Отсюда следует, что при достаточно больших касательных напряжениях в стержне из хрупкого материала, слабо сопротивляющегося сдвигу, может появиться трещина и начаться разрушение не только по поперечному сечению, но и по продольному.

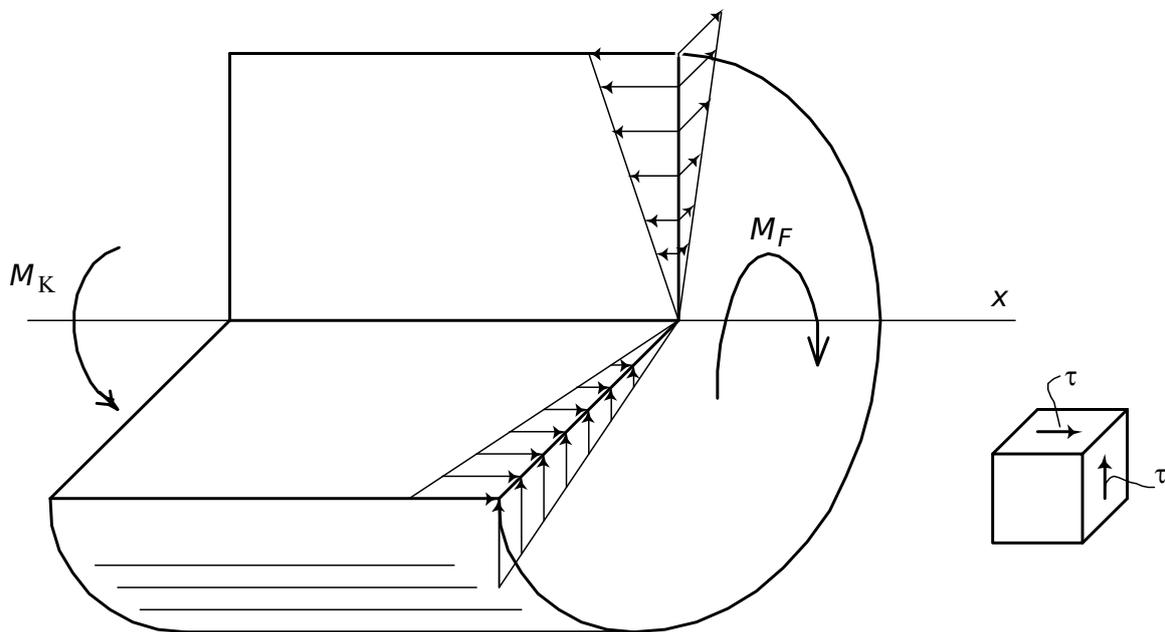


Рис. 8.6. Распределение касательных напряжений в сечениях круглого стержня

Рассмотрим теперь напряжения по площадкам, наклонным к оси стержня (рис. 8.7). Выделенный элемент испытывает напряженное состояние чистого сдвига. Поэтому на наклонных площадках, кроме касательных напряжений, возникают и нормальные (см. п. 1.8.3):

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha ;$$

при

$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

$$\sigma_{\alpha} = \tau \sin 2\alpha .$$

Очевидно, что наибольшие главные напряжения будут при $\sin 2\alpha = \pm 1$, т. е. при $\alpha = 45^\circ$ и $\alpha = 135^\circ$:

$$\sigma_1 = \tau , \quad \sigma_2 = -\tau .$$

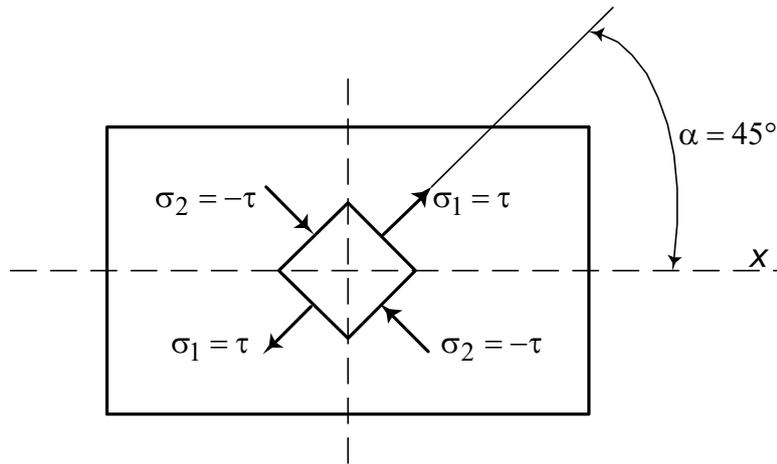


Рис. 8.7. К определению напряжений на наклонных площадках скручиваемого стержня

Состояние чистого сдвига эквивалентно растяжению в одном направлении и равному ему сжатию в перпендикулярном направлении. Прямоугольный элемент со сторонами, расположенными под углом 45° к оси, вырезанный из внешнего слоя скручиваемого стержня, будет подвергнут напряжениям, показанным на рис. 8.7.

Полученные результаты могут быть использованы также при определении касательных напряжений опытным путем. Деформации ε_1 и ε_2 на основании закона Гука при плоском напряженном состоянии (см. п. 4.1), а также с учетом предшествующих выкладок равны

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} = \frac{\tau}{E}(1 + \nu),$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E} = -\frac{\tau}{E}(1 + \nu).$$

Отсюда можно выразить касательные напряжения через деформации, полученные в эксперименте:

$$\tau = \frac{E \varepsilon_1}{1 + \nu} = -\frac{E \varepsilon_2}{1 + \nu}.$$

8.1.3. Статически неопределимые задачи при кручении

Как известно, задачу, в которой для определения опорных реакций и внутренних усилий требуется, кроме уравнений равновесия, привлекать условия деформации, называют статически неопределимой (см. п. 3.5). Рассмотрим специфику решения таких задач при кручении.

Пусть задан стержень, имеющий неподвижные закрепления (заделку) двух торцевых сечений (рис. 8.8, а).

Составим уравнение равновесия:

$$\sum m_x = M_K - M_A - M_B = 0.$$

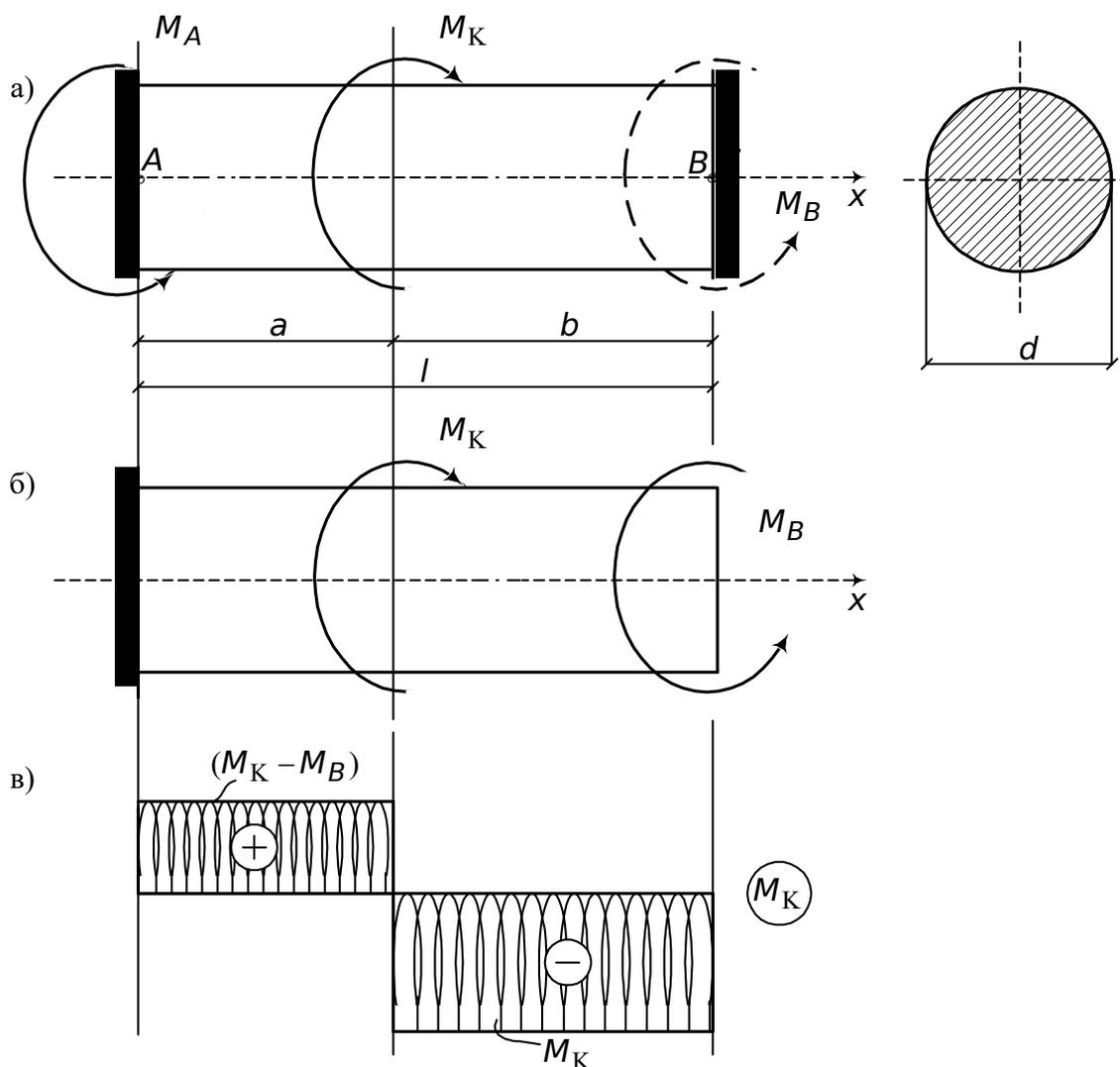


Рис. 8.8. К определению крутящих моментов и углов закручивания в статически неопределимом стержне (вале)

Этого уравнения недостаточно для определения двух неизвестных опорных моментов.

Для обеспечения равновесия вала достаточно иметь одну заделку, поэтому задача статически неопределимая.

Составим недостающие условия деформаций, отбросив одну заделку (например, правую) и потребовав, чтобы в этой новой, статически определимой, расчетной схеме соблюдалось условие отсутствия угла закручивания у отброшенной заделки: $\varphi_B = 0$ (рис. 8.8, б). Для составления выражения φ_B применим принцип суперпозиции (независимости действия сил). С использованием формулы (8.11) составляем выражение для φ_B в виде

$$\varphi_B = -\frac{M_B l}{GJ_\rho} + \frac{M_K a}{GJ_\rho} = 0.$$

Отсюда определяем неизвестный момент M_B :

$$M_B = \frac{M_K a}{l}$$

и из уравнения равновесия – крутящий момент

$$M_A = M_K \frac{b}{l}.$$

Далее найденный опорный момент отнесем к внешней нагрузке в принятой расчетной схеме (рис. 8.8, б) и произведем расчет, как это выполнено в п. 8.1.1 (рис. 8.8, в).

8.1.4. Потенциальная энергия при кручении круглого стержня

Будем считать, что материал стержня при кручении работает при напряжениях, не превышающих предел упругости. В этом случае работа внешних сил, затрачиваемая на кручение стержня, равна количеству потенциальной энергии, накопленной в стержне. В дальнейшем нам потребуются формулы, позволяющие вычислить эту энергию при кручении.

Представим себе отрезок вала длиной dx , получивший угол закручивания $d\varphi$ от момента M_K . Момент упруго возрастает пропорционально углу $d\varphi$ (рис. 8.9).

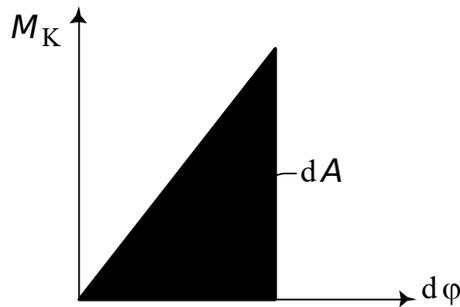


Рис. 8.9. К определению потенциальной энергии деформации при кручении

Поэтому элементарная работа этого момента равна площади заштрихованного треугольника:

$$dA = \frac{1}{2} M_K d\varphi.$$

Энергия, накопленная в элементах стержня,

$$dU = dA,$$

или с учетом (8.4)

$$dU = \frac{1}{2} M_K d\varphi = \frac{1}{2} \frac{M_K^2}{GJ_\rho} dx. \quad (8.13)$$

Интегрируя (8.13) по длине стержня, получим

$$U = \int_0^l dU = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_K^2}{GJ_\rho} dx. \quad (8.14)$$

Если $GJ_{\rho} = \text{const}$ и крутящий момент M_K постоянен по длине стержня, то выражение для энергии деформирования приобретает вид

$$U = \frac{M_K^2 l}{2GJ_{\rho}}. \quad (8.15)$$

Чтобы получить выражение удельной потенциальной энергии, разделим (8.15) на объем образца:

$$U^* = \frac{M_K^2 l \cdot 32}{2G\pi d^4} \cdot \frac{4}{\pi d^2 \cdot l} = \frac{64M_K^2}{G\pi^2 d^6}. \quad (8.16)$$

8.1.5. Расчет цилиндрических пружин с малым шагом витка

Пружины имеют широкое распространение в машиностроении. Рассмотрим теорию расчета винтовых цилиндрических пружин с малым шагом витка, т. е. таких, у которых угол наклона витка α к плоскости, перпендикулярной оси пружины (рис. 8.10, а), мал, и поэтому можно принять, что витки лежат в этой плоскости.

На рис. 8.10, а показана пружина, растягиваемая силой F .

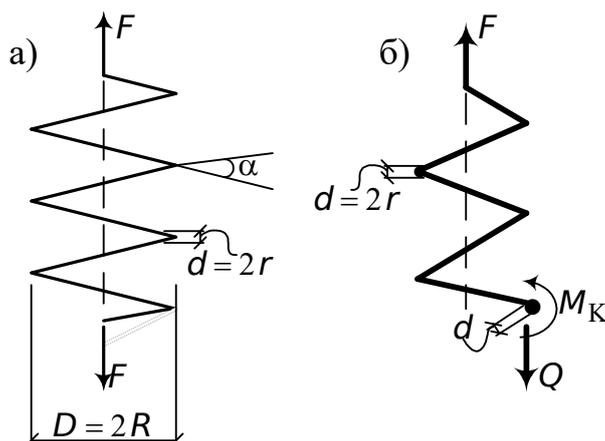


Рис. 8.10. К расчету цилиндрических пружин с малым шагом витка

Покажем, что пруток, из которого свита цилиндрическая пружина, при малом угле наклона витков работает главным образом на кручение. Для этого отсечем часть пружины сечением, проходящим через ее ось (рис. 8.10, б). Отбрасывая нижнюю часть пружины, заменим ее воздействие поперечной силой $Q = F$ и крутящим моментом $M_K = FR$. Если пренебречь углом поворота витка α , положив $\alpha = 0$, то сечение витка можно считать нормальным к оси витка. Тогда Q будет поперечной силой, вызывающей деформацию среза, а M_K – крутящим моментом в сечении витка. Оценим значение вызываемых ими напряжений:

– от крутящего момента

$$\tau_1 = \frac{M_K}{W_{\rho}} = \frac{R \cdot F \cdot 2}{\pi r^3} = \frac{2FR}{\pi r^3}, \quad (8.17)$$

где R – радиус навивки пружины; r – радиус сечения прутка;
 – от среза

$$\tau_2 = \frac{Q}{A} = \frac{F}{\pi r^2}. \quad (8.18)$$

Наибольшие напряжения возникают в точке K витков, где напряжения τ_1 и τ_2 суммируются (рис. 8.11).

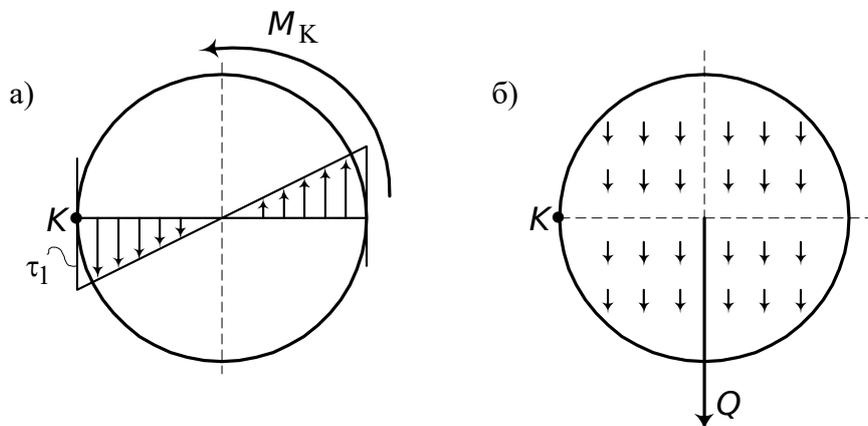


Рис. 8.11. Касательные напряжения в сечении прутка пружины от кручения и среза

Складывая (8.17) и (8.18), получим

$$\tau_{\max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{2FR}{\pi r^3} (1 + \beta), \quad (8.19)$$

где $\beta = \frac{r}{2R}$.

Так как величина β очень мала (например, при $R = 10r$ $\beta = 0,05$), то основную роль в деформации пружины будут играть деформации кручения. Поэтому во многих случаях полагают $\beta = 0$ и расчетные напряжения в пружине определяют только по формуле (8.17).

Определим деформацию пружины. Работа силы F на перемещениях пружины λ равна (см. п. 8.1.4)

$$A = \frac{1}{2} F \lambda.$$

Потенциальная энергия в пружине от кручения определяется формулой (8.15), где $l = 2\pi R \cdot n$ – длина проволоки, n – число витков пружины.

Подставляя указанные величины в формулу (8.15), а также заменяя $M_K = FR$, найдем

$$U = \frac{\pi R^3 n F^2}{G J_\rho}. \quad (8.20)$$

Теперь, приравняв работу A потенциальной энергии U (8.20) и учитывая, что $J_\rho = \frac{\pi r^4}{2}$, получим

$$\lambda = \frac{4FR^3n}{Gr^4}. \quad (8.21)$$

Полагая в (8.21) $\lambda = 1$, найдем жесткость пружины $C = F$ (сила F , которая вызывает удлинение пружины на $\lambda = 1$):

$$C = \frac{Gr^4}{4R^3n}. \quad (8.22)$$

8.1.6. Расчет на кручение круглых стержней с учетом пластических деформаций

В предыдущих разделах предполагалось, что материал скручиваемого стержня деформируется линейно-упруго в соответствии с законом Гука. Заменяем реальную диаграмму сдвига условной – диаграммой Прандтля (рис. 8.12).

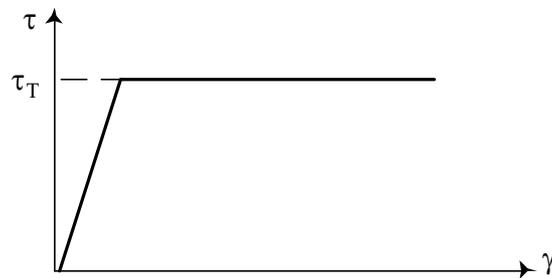


Рис. 8.12. Диаграмма Прандтля при сдвиге

Из этой диаграммы следует, что наибольшие напряжения, возникающие при сдвиге, равны пределу текучести при сдвиге τ_T , при этом величина деформаций не ограничена.

С использованием указанного упрощения выясним, как будет видоизменяться эпюра касательных напряжений в сечении при постепенном возрастании крутящего момента M_K (рис. 8.13).

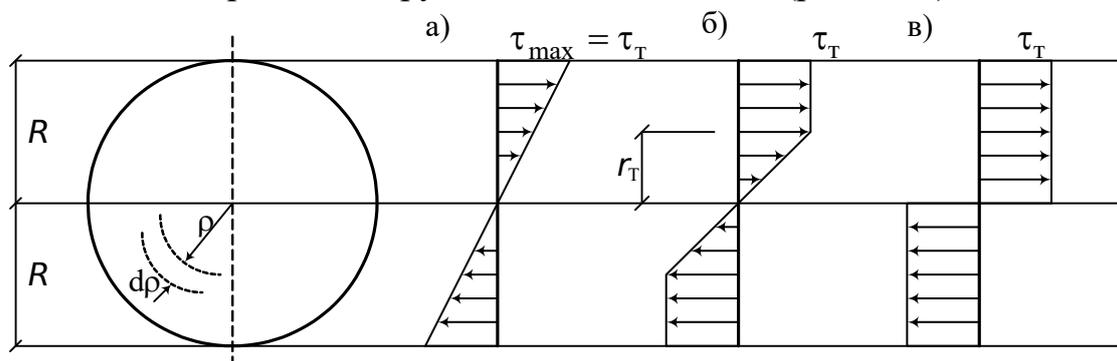


Рис. 8.13. Стадии работы круглого стержня при кручении

В упругой стадии напряжения τ распределены вдоль диаметра вала по линейному закону. При возрастании момента M_K пропорционально

возрастают и напряжения. Конец этой стадии (рис. 8.13, а) определяет равенство

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{W_\rho} = \tau_T.$$

Соответствующий крутящий момент равен

$$M_T = \tau_T \cdot W_\rho = \tau_T \frac{\pi R^3}{2}.$$

При дальнейшем возрастании момента пластическая зона будет все больше проникать вглубь вала (рис. 8.13, б), а все сечение разделится на две зоны: упругое ядро, где $\tau \leq \tau_T$, с радиусом r_T и пластическую кольцевую зону $r_T \leq \rho \leq R$, где $\tau = \tau_T$.

Состояние стержня, когда во всех точках его поперечного сечения возникают пластические деформации, называют пластическим шарниром (рис. 8.13, в).

Предельный момент, соответствующий этой стадии, равен

$$M_{\text{пр}} = \tau_T \int_0^R \rho dA = \tau_T \int_0^R 2\pi\rho^2 d\rho = \frac{2\pi R^3}{3} \cdot \tau_T. \quad (8.23)$$

При вычислении этого момента элементарная площадь dA принята в виде тонкого кольца: $dA = 2\pi\rho d\rho$ (рис. 8.13).

Соотношение $\frac{M_{\text{пр}}}{M_T} = \frac{4}{3} \approx 1,33$ показывает, что от момента первого появления пластических деформаций в наиболее напряженных точках вала до полного исчерпания несущей способности крутящий момент должен возрасти в 1,33 раза. Это резерв несущей способности стержня за счет упруго-пластических свойств металла.

8.2. Кручение стержней прямоугольного сечения

8.2.1. Общие положения

При рассмотрении деформации кручения стержней круглого сечения (см. п. 8.1) мы пользовались гипотезой плоских сечений. Однако оказывается, что круглое сечение – это редкое, хотя и важное, исключение, когда сечения при закручивании, не искривляясь, поворачиваются, как плоские диски, вокруг оси X . При этом угол сдвига γ образуется только за счет наклона образующих (рис. 8.1), и формула для касательных напряжений имеет простой вид (8.5).

При кручении стержня прямоугольного сечения поперечные сечения не остаются плоскими: они искривляются по некоторой поверхности $u = u(z, y)$, что называется депланацией сечения (см. п. 2.4), рис. 8.14.

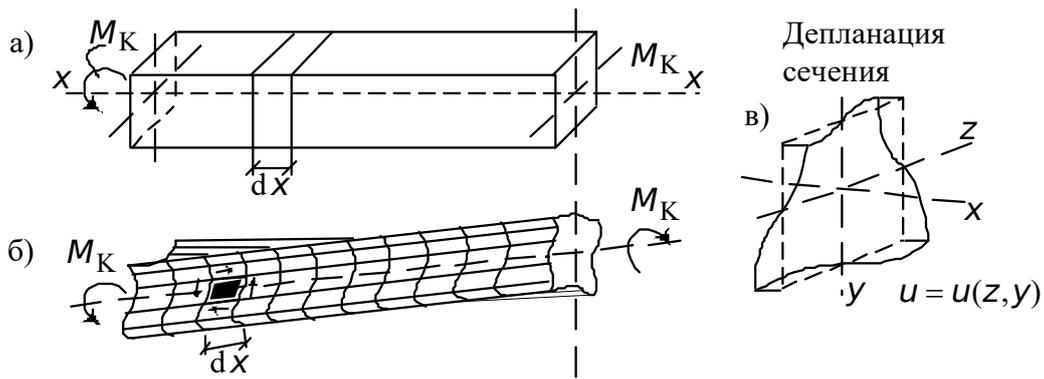


Рис. 8.14. Кручение стержней прямоугольного сечения

Изменение прямого угла элемента, выделенного на поверхности (рис. 8.14, б), происходит как за счет наклона образующих, так и из-за наклона сторон, лежащих в поперечных сечениях. Последнее является следствием депланации сечения. Поэтому распределение касательных напряжений по сечению получается значительно более сложным, чем дает формула (8.5). Строго эта задача решается методами теории упругости, с результатами которой мы познакомимся ниже.

В связи с развитием депланаций различают два типа кручения стержней: свободное и стесненное.

Кручение называется свободным, если депланации всех поперечных сечений одинаковы по длине стержня. На рис. 8.14, а, б, в изображено свободное кручение, когда функция депланации зависит только от Y и Z и не зависит от X . Каждое волокно за счет одинаковой депланации всех сечений переместится в продольном направлении на расстояние U как жесткое целое. Так как его удлинение отсутствует, то

$$\sigma_x = 0,$$

т. е. при свободном кручении в поперечных сечениях возникают только касательные напряжения, а $\sigma_x = 0$.

Примером конструкции, испытывающей стесненное кручение, является консольный стержень, у которого стеснение развития депланаций создается наличием заделки. Здесь функция U изменяется вдоль координаты X , поэтому продольные волокна изменяют длину и в сечениях возникают нормальные напряжения σ_x .

Таким образом, стесненное кручение характерно тем, что в поперечных сечениях возникают, помимо касательных напряжений, нормальные напряжения σ_x .

На рис. 8.15 изображено распределение напряжений σ_x по сечению.

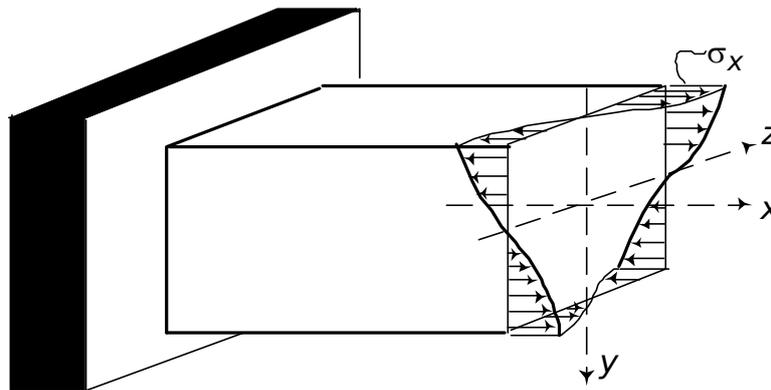


Рис. 8.15. Распределение напряжений σ_x по сечению стержня при стесненном кручении

8.2.2. Свободное кручение стержней прямоугольного сечения и тонкостенных стержней открытого профиля

Решение задачи об определении напряжений при кручении стержня прямоугольного сечения в строгой математической постановке получено Сен-Венаном.

Наибольшие касательные напряжения, согласно этой теории, можно получить по следующей формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K} = \frac{M_K}{\alpha b h^2}, \quad (8.24)$$

где α – коэффициент, зависящий от соотношения длин сторон прямоугольника (табл. 8.1).

Таблица 8.1

Коэффициенты для расчета прямоугольных сечений на кручение

b/h	1	1,5	1,75	2	2,5	3	6	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,299	0,313	$1/3$
β	0,141	0,156	0,214	0,229	0,249	0,263	0,299	0,313	$1/3$
γ	1,0	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,743	0,742	0,742

Наибольшие касательные напряжения, найденные по формуле (8.24), возникают в серединах длинных сторон контура (рис. 8.16, точки 1).

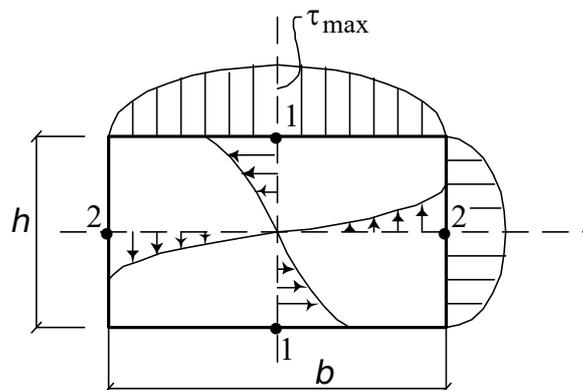


Рис. 8.16. Напряжения в прямоугольном сечении при свободном кручении

В серединах коротких сторон в точках 2 возникают несколько меньшие касательные напряжения. Их можно выразить через τ_{\max} следующим образом:

$$\tau_2 = \gamma \tau_{\max}, \quad (8.25)$$

где γ – коэффициент, зависящий от отношения сторон прямоугольника (см. табл. 8.1).

Погонный угол закручивания единицы длины рассматриваемого стержня φ , рад/м, может быть найден по следующей формуле:

$$\varphi = \frac{M_K}{GJ_{кр}} = \frac{M_K}{G\beta bh^3}, \quad (8.26)$$

где β – коэффициент, определяемый по табл. 8.1, так же, как α и γ , зависящий от отношения сторон прямоугольника; G – модуль сдвига.

Приведенных в этом подразделе данных в основном достаточно для расчета на прочность и жесткость стержней прямоугольного сечения.

Распространим полученные формулы на сечения, составленные из одного или нескольких узких прямоугольников.

Для стержней с поперечным сечением в виде узкого вытянутого прямоугольника $b \times h$, где $h \ll b$ (рис. 8.17, а), как следует из табл. 8.1, коэффициенты $\alpha = \beta = 1/3$.

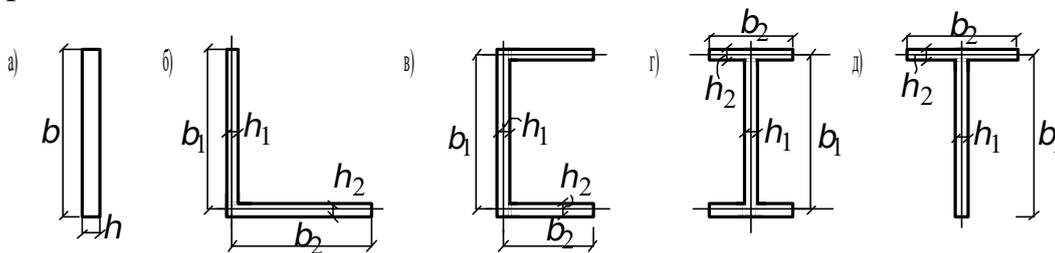


Рис. 8.17. Сечения стержней в виде узких прямоугольников

Тогда моменты инерции при кручении узкого прямоугольника и тонкостенных сечений, составленных из отдельных прямоугольников (пластин), как на рис. 8.17, б, в, г, д, могут быть найдены так:

$$J_{кр} = J_d = \frac{1}{3} \delta \sum b_i h_i^3, \quad (8.27)$$

где δ – экспериментальный коэффициент, учитывающий возрастание жесткости сечения за счет областей пересечения составляющих его прямоугольников и переходных скруглений в прокатных стержнях (табл. 8.2).

Таблица 8.2

Коэффициент δ для расчета сечений,
составленных из узких прямоугольников

Тип сечения	δ
-------------	----------

Уголок, полоса	1,0
Швеллер	1,12
Тавр	1,15
Двутавр	1,20

Погонный угол закручивания рассматриваемых сечений может быть определен по формуле

$$\varphi = \frac{M_K}{GJ_d} \cdot \quad (8.28)$$

Для определения касательных напряжений в каждой из пластинок (узких прямоугольников) находим с привлечением (8.27) жесткость всего сечения GJ_d , а также жесткость каждой пластинки GJ_{d_i} .

Далее воспользуемся гипотезой о недеформируемости контура, т. е. будем считать, что каждая пластинка при скручивании поворачивается на тот же угол, что и все сечение:

$$\varphi_i = \frac{M_i}{GJ_{d_i}}, \quad (8.29)$$

где M_i – неизвестный крутящий момент в i -й пластинке.

Приравняв (8.28) к (8.29), найдем

$$M_i = \frac{GJ_{d_i}}{GJ_d} \cdot M_K. \quad (8.30)$$

Определив крутящий момент, воспринимаемый каждой пластинкой, найдем по (8.24) касательные напряжения в каждой пластинке:

$$\tau_{i,\max} = \frac{M_i}{\frac{1}{3}b_i h_i^2}. \quad (8.31)$$

8.2.2.1. Деформация незамкнутого тонкостенного сечения

Рассмотрим тонкостенный стержень открытого профиля с произвольной формой сечения (п. 2.4, рис. 8.18).

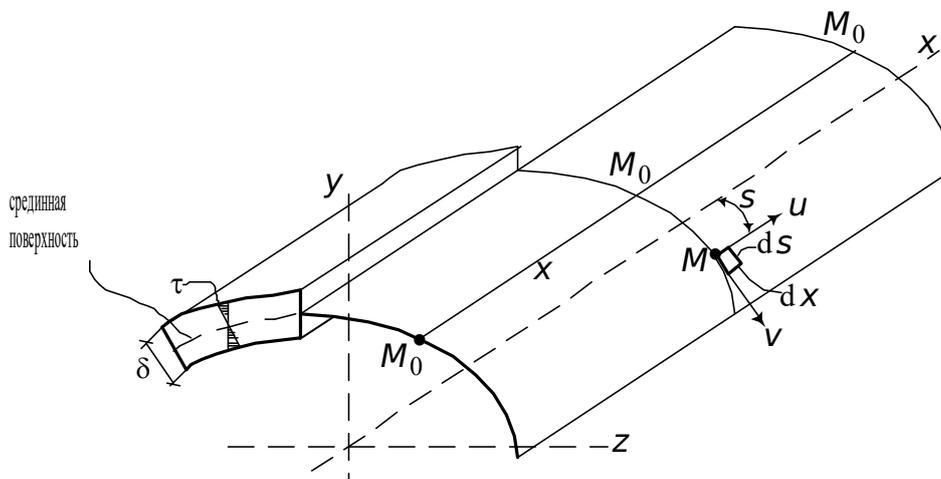


Рис. 8.18. Схема тонкостенного стержня открытого профиля

Положение произвольной точки $M(x, s)$ на срединной поверхности задано двумя координатами X и S , причем дуга S отсчитывается от некоторой начальной точки M_0 , подлежащей определению (см. п. 2.4). В точке M проведем плоскость, касательную к срединной поверхности, и обозначим перемещения точки в этой плоскости U и V , где V – перемещения в тангенциальном к контуру сечения направлении. На рис. 8.19 показано, что в результате поворота сечения и его депланации точка M переместилась в положение M_1 вместе с элементом срединной поверхности $dx \times ds$.

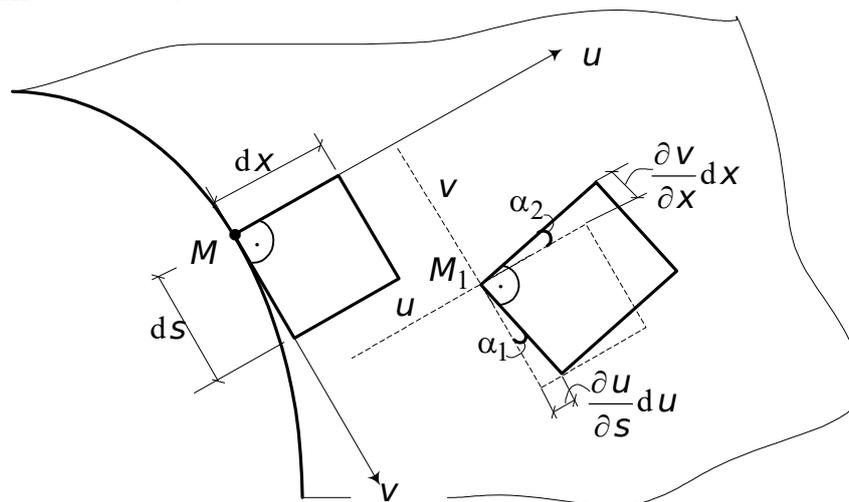


Рис. 8.19. Перемещения элемента $dx \times ds$ срединной поверхности в тангенциальной плоскости

Запишем условие отсутствия угла сдвига (касательные напряжения на уровне срединной поверхности равны нулю) элемента срединной поверхности $dx \times ds$:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (8.32)$$

Знак минус в (8.32) поставлен потому, что приращение перемещения $(\partial v / \partial x) dx$ направлено в сторону, противоположную направлению отсчета координаты S . В уравнении (8.32) использованы обозначения для частных производных, так как перемещения U и V точки $M(x, s)$ зависят от двух координат: X и S .

Выразим тангенциальное перемещение V через угол закручивания $\varphi(x)$. На рис. 8.20 изображен поворот сечения на угол φ относительно полюса, или центра кручения A (см. п. 2.4). Угол φ будем считать положительным, если он направлен против хода часовой стрелки при взгляде на сечение в положительном направлении оси X .

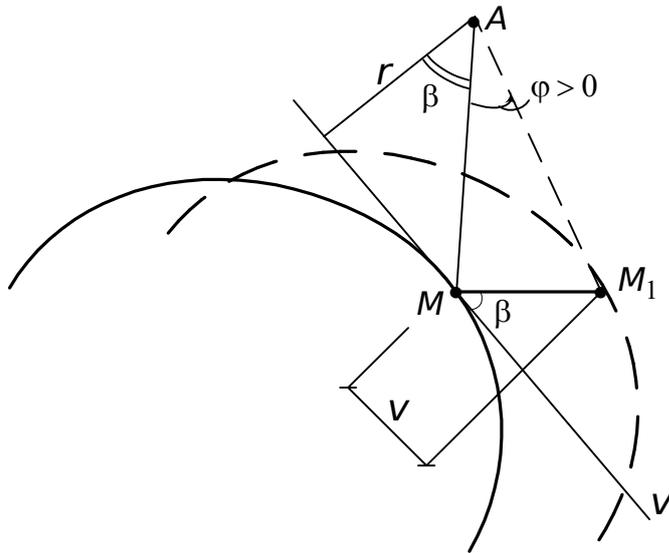


Рис. 8.20. Перемещение точки M , вызванное поворотом сечения вокруг полюса A

Как видно из рис. 8.20,

$$MM_1 = AM \cdot \varphi,$$

$$v = MM_1 \cos \beta = \varphi \cdot AM \cdot \cos \beta.$$

Но так как $AM \cdot \cos \beta = r$, то

$$v = r \varphi. \quad (8.33)$$

Подставим (8.33) в (8.32) и проинтегрируем по дуге S . В результате получим

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \int_{M_0}^M r ds + w_0, \quad (8.34)$$

где w_0 – перемещение начальной точки M_0 .

Произведение $r ds = d\omega$ геометрически представляет удвоенную площадь элементарного треугольника с основанием ds , а весь интеграл вдоль дуги S от M_0 до M дает так называемую секториальную площадь ω (рис. 8.21).

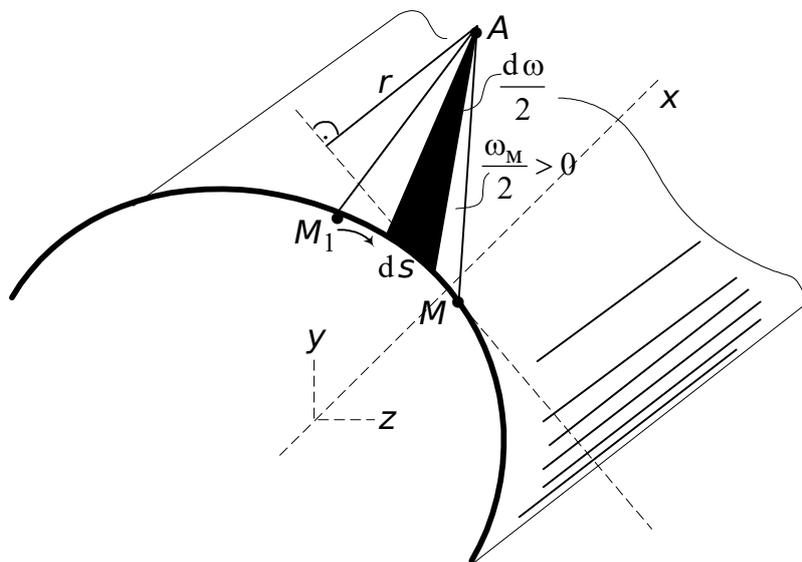


Рис. 8.21. К определению секториальных координат ω тонкостенного сечения

Секториальная площадь $\omega > 0$, если радиус вращается против хода часовой стрелки (при взгляде на сечение в положительном направлении оси X).

В дальнейшем примем в (8.34) $w_0 = 0$. Тогда эта формула примет вид

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \omega = -\varphi' \cdot \omega. \quad (8.35)$$

Эта зависимость выражает закон изменения перемещения U вдоль контура сечения вследствие депланации сечения в срединной поверхности.

Перемещение U пропорционально ω , это значит, что в тонкостенном стержне открытого профиля депланация происходит по закону секториальных площадей. Между положением точки на дуге S и площадью ω существует однозначное соответствие. Поэтому секториальную площадь ω называют секториальной координатой точки. Если ее линейные координаты Z и Y имеют размерность m , то размерность ω – это m^2 .

8.2.3. Стесненное кручение тонкостенных стержней открытого профиля

8.2.3.1. Основные допущения

Само понятие о стесненном кручении стержня было дано выше (см. п. 8.2.1). Здесь добавим, что развитие инженерной теории стесненного кручения оказалось особенно необходимым для стержней с незамкнутым контуром сечения, которые находят широкое применение в строительстве, кораблестроении, авиастроении и т. д. Возникающие при стесненном кручении нормальные напряжения в таких стержнях могут иметь большие значения и оказывают существенное влияние на их прочность и жесткость. Общая теория деформирования тонкостенных стержней открытого профиля создана членом-корреспондентом АН СССР В.З. Власовым.

При стесненном кручении общий крутящий момент M_K является суммой крутящего момента $M_{св}$, воспринимаемого касательными напряжениями при свободном кручении, и крутящего момента M_{ω} , связанного с депланацией:

$$M_K = M_{св} + M_{\omega}, \quad (8.36)$$

где $M_{св}$ – момент свободного кручения;

M_{ω} – изгибно-крутящий момент.

Для определения момента свободного кручения $M_{св}$ запишем по аналогии с (8.11), приняв $\varphi_0 = 0$, угол закручивания для тонкостенного стержня

$$\varphi = \frac{M_{св} \cdot x}{GJ_d}. \quad (8.37)$$

Дифференцируя (8.37) по X , найдем

$$M_{\text{св}} = \frac{d\varphi}{dx} \cdot GJ_d = \varphi' \cdot GJ_d, \quad (8.38)$$

где J_d – момент инерции при кручении тонкостенных стержней, определяемый по (8.27).

Изгибно-крутящий момент M_ω вызывает появление касательных τ_ω и нормальных σ_ω напряжений. Покажем распределения этих напряжений для двутаврового сечения (рис. 8.22).

Как уже отмечалось, при стесненном кручении депланация по длине стержня переменна и, как следствие, в поперечных сечениях возникают нормальные напряжения, которые обозначаем σ_ω . Их распределение показано на рис. 8.22, б. Связано такое распределение с поверхностью депланации $u(z, y)$ (см. п. 8.2.1). Эти напряжения в данном случае приводятся к бипаре, т. е. двум противоположно направленным моментам M , действующим в параллельных плоскостях. Вообще же в поперечных сечениях при стесненном кручении возникает система взаиморавновешенных продольных сил и напряжений (см. рис. 8.22, а, б).

Эпюра нормальных напряжений σ_ω удовлетворяет следующим статическим условиям:

$$N = \int_A \sigma_\omega dA = 0; \quad (8.39)$$

$$M_z = \int_A (\sigma_\omega dA) y = 0, \quad M_y = \int_A (\sigma_\omega dA) z = 0. \quad (8.40)$$

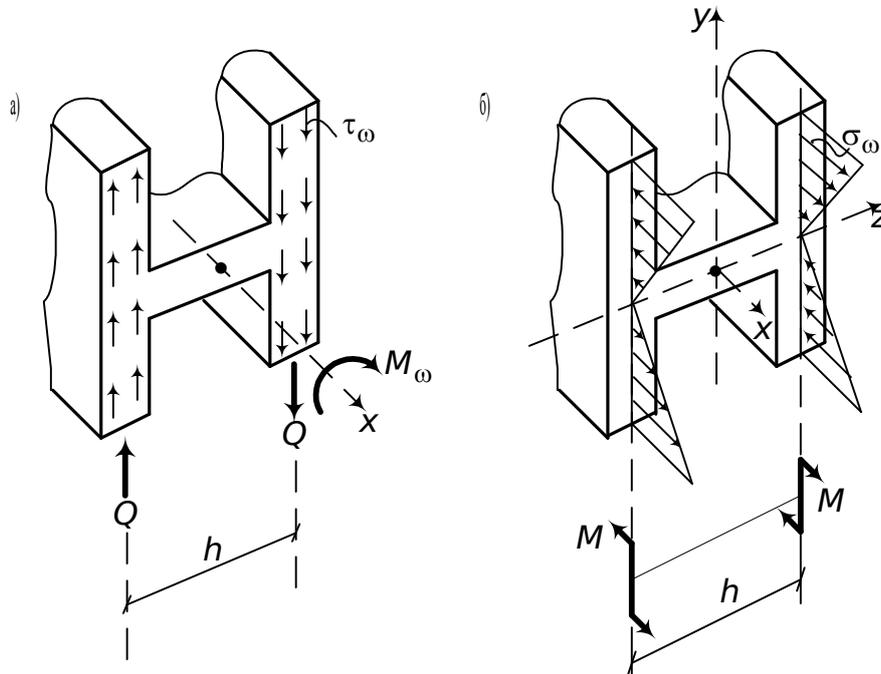


Рис. 8.22. Распределения напряжений, вызываемых изгибно-крутящим моментом, по сечению

Выразим M_ω , σ_ω и τ_ω через функцию углов закручивания $\varphi(x)$.

8.2.3.2. Нормальные напряжения σ_ω

Ранее был получен закон изменения перемещения U вдоль контура сечения ((8.35))

$$u = -\varphi' \omega .$$

По закону Гука

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_\omega}{E} - \nu \frac{\sigma_s}{E} . \quad (8.41)$$

Принимая гипотезу о ненадавливании продольных волокон друг на друга в поперечном направлении, имеем $\sigma_s = 0$ и, следовательно,

$$\sigma_\omega = \varepsilon_x E = \frac{\partial U}{\partial x} E . \quad (8.42)$$

Подставим (8.41) в (8.42) и найдем

$$\sigma_\omega = -\varphi'' E \omega . \quad (8.43)$$

Полученная формула показывает, что нормальные напряжения σ_ω распределены в поперечном сечении по закону секториальных площадей.

Определим работу элементарных сил $\sigma_\omega dA$ в сечении на единичной деформации $1 \cdot \omega$.

Эта работа будет следующей:

$$B_\omega = \int_A (\sigma_\omega dA) \omega . \quad (8.44)$$

Подставим сюда вместо σ_ω его значение по (8.43), при этом величины, не зависящие от площади сечения, вынесем за знак интеграла:

$$B_\omega = -\varphi'' E \int_A \omega^2 dA , \quad (8.45)$$

где $\int_A \omega^2 dA = J_\omega$ – секториальный момент инерции поперечного сечения (см. п. 2.4.2).

Поэтому

$$B_\omega = -\varphi'' E J_\omega . \quad (8.46)$$

Произведение $E J_\omega$ называется секториальной жесткостью тонкостенного поперечного сечения.

B_ω является новым силовым фактором в сечении, который называется бимоментом. Так, для двутавра (рис. 8.22, б) $B_\omega = M \cdot h$, т.е. он представляет бипару с плечом h .

Подставив из (8.46) значения φ'' в выражение (8.43), получим окончательную формулу для напряжений:

$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega}{J_\omega} \omega , \quad (8.47)$$

аналогичную формуле из п. 6.1. Напряжение $\sigma_\omega > 0$, получаемое по этой формуле, является растягивающим.

8.2.3.3. Касательные напряжения τ_ω

Для определения касательных напряжений τ_{ω} составим условия равновесия отсеченной части стержня, спроектировав все силы на ось X (рис. 8.23):

$$\tau_{\omega} dX \cdot \delta - dN^{\text{отс}} = 0 .$$

Отсюда

$$\tau_{\omega} = \frac{1}{\delta} \frac{dN^{\text{отс}}}{dX} . \quad (8.48)$$

Известно, что

$$N^{\text{отс}} = \int_{A^{\text{отс}}} \sigma_{\omega} dA = \frac{B_{\omega}}{J_{\omega}} S_{\omega}^{\text{отс}} , \quad (8.49)$$

где

$$S_{\omega}^{\text{отс}} = \int_{A^{\text{отс}}} \omega dA \quad (8.50)$$

секториальный статический момент отсеченной части сечения, м^4 .

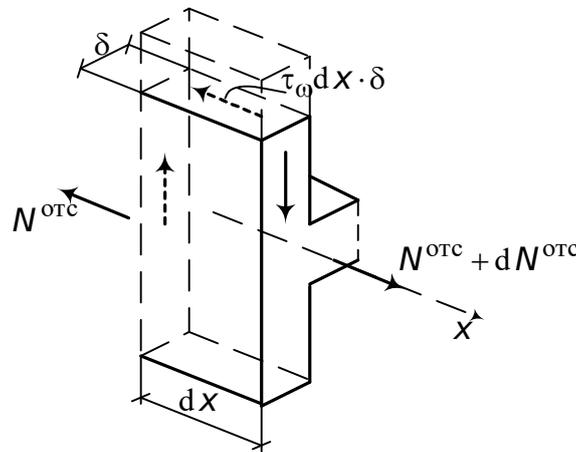


Рис. 8.23. Определение τ_{ω} из условия равновесия отсеченной части стержня

Примем поперечное сечение постоянным по длине. Следовательно, в выражении (8.49) J_{ω} и $S_{\omega}^{\text{отс}}$ не будут зависеть от X . Тогда, подставив (8.49) в (8.48), получим

$$\tau_{\omega} = \frac{dB_{\omega}}{dX} \frac{S_{\omega}^{\text{отс}}}{J_{\omega} \delta} . \quad (8.51)$$

Найдем производную $\frac{dB_{\omega}}{dX}$. Для этого составим условие равновесия элемента стержня длиной dX (рис. 8.24):

$$M_{\omega} d\varphi - dB_{\omega} \varphi' = 0 , \quad (8.52)$$

где $d\varphi$ – угол закручивания элемента стержня, $d\varphi = \varphi' dX$.

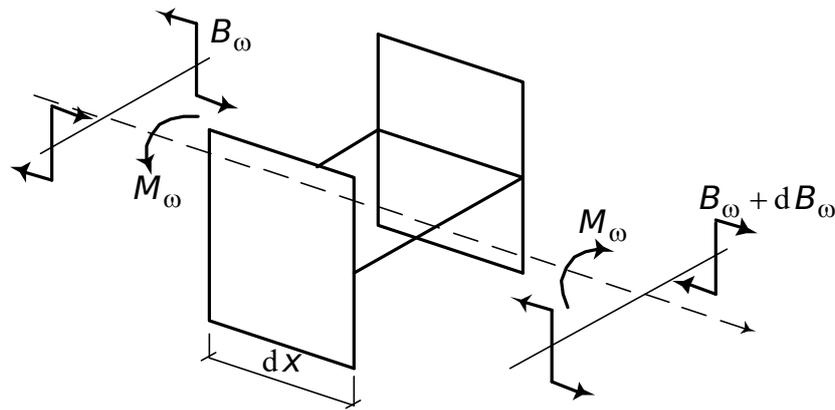


Рис. 8.24. К определению производной $\frac{dB_\omega}{dx}$

Подставив сюда $d\varphi = \varphi' dx$ и сократив на φ' , получим

$$M_\omega = B'_\omega = -EJ_\omega \varphi'''. \quad (8.53)$$

Окончательно формула (8.51) принимает следующий вид:

$$\tau_\omega = \frac{M_\omega S_\omega^{\text{отс}}}{J_\omega \delta}. \quad (8.54)$$

Напряжения в продольном сечении рассматриваемой отсеченной части $\tau_\omega > 0$, если они направлены в сторону, противоположную оси X .

Теперь для того, чтобы можно было использовать формулы для напряжений σ_ω и τ_ω , необходимо найти функцию углов закручивания $\varphi(x)$, через которую выражены внутренние усилия B_ω (8.46) и M_ω (8.53).

8.2.3.4. Дифференциальные уравнения углов закручивания

Дифференциальное уравнение для $\varphi(x)$ получим, исходя из условия равновесия (8.36):

$$M_K = M_{\text{св}} + M_\omega.$$

Подставив сюда выражения (8.38) и (8.53), получим

$$M_K = \varphi' \cdot GJ_d - EJ_\omega \varphi''.$$

Дифференцируя эти выражения по X и учитывая, что $\frac{dM_K}{dx} = -m$ (см. разд. 1), приводим его к следующему виду:

$$\varphi^{IV} - \kappa^2 \varphi'' = \frac{m}{EJ_\omega}, \quad (8.55)$$

где $\kappa = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$, м^{-1} .

Рассмотрим случай однородного уравнения, когда $m = 0$:

$$\varphi^{IV} - \kappa^2 \varphi'' = 0. \quad (8.56)$$

Решением этого уравнения является функция

$$\varphi_x = A \operatorname{sh} \kappa x + B \operatorname{ch} \kappa x + Cx + D, \quad (8.57)$$

где A, B, C, D – постоянные интегрирования.

Выразим постоянные интегрирования через начальные параметры. Для этого продифференцируем (8.57) трижды по x :

$$\begin{aligned} \varphi'_x &= A \kappa \operatorname{ch} \kappa x + B \kappa \operatorname{sh} \kappa x + C, \\ \varphi''_x &= A \kappa^2 \operatorname{sh} \kappa x + B \kappa^2 \operatorname{ch} \kappa x, \\ \varphi'''_x &= A \kappa^3 \operatorname{ch} \kappa x + B \kappa^3 \operatorname{sh} \kappa x. \end{aligned} \quad (8.58)$$

Подставим в уравнения (8.57) и (8.58) $x = 0$. В результате получим

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= B + D, \\ \varphi'_0 &= A \kappa + C, \\ \varphi''_0 &= B \kappa^2, \\ \varphi'''_0 &= A \kappa^3. \end{aligned} \quad (8.59)$$

Отсюда найдем

$$B = \frac{\varphi''_0}{\kappa^2}, \quad A = \frac{\varphi'''_0}{\kappa^3}, \quad D = \varphi_0 - \frac{\varphi''_0}{\kappa^2}, \quad C = \varphi'_0 - \frac{\varphi'''_0}{\kappa^2}.$$

Найденные значения произвольных постоянных подставим в (8.57):

$$\varphi_x = \frac{\varphi'''_0}{\kappa^3} \operatorname{sh} \kappa x + \frac{\varphi''_0}{\kappa^2} \operatorname{ch} \kappa x + \left(\varphi'_0 - \frac{\varphi'''_0}{\kappa^2} \right) x + \left(\varphi_0 - \frac{\varphi''_0}{\kappa^2} \right). \quad (8.60)$$

Сгруппируем члены и запишем уравнение (8.60) в следующем виде:

$$\varphi_x = \varphi_0 + \varphi'_0 x + \frac{\varphi''_0}{\kappa^2} (\operatorname{ch} \kappa x - 1) + \frac{\varphi'''_0}{\kappa^3} (\operatorname{sh} \kappa x - \kappa x). \quad (8.61)$$

Из уравнения (8.46) при $x = 0$ найдем

$$\varphi''_0 = -\frac{B_{\omega,0}}{EJ_{\omega}}. \quad (8.62)$$

Из уравнения (8.36) с учетом (8.38), (8.53) и (8.55) получим

$$\varphi'''_0 = -\frac{M_{\kappa,0}}{EJ_{\omega}} + \kappa^2 \varphi'_0. \quad (8.63)$$

Найденные значения второй и третьей производных (8.62) и (8.63) подставляем в (8.61). В результате имеем

$$\varphi_x = \varphi_0 + \frac{\varphi'_0}{\kappa} \operatorname{sh} \kappa x + \frac{B_{\omega,0}}{GJ_d} (1 - \operatorname{ch} \kappa x) + \frac{M_{\kappa,0}}{\kappa GJ_d} (\kappa x - \operatorname{sh} \kappa x). \quad (8.64)$$

По полученному уравнению (8.64) составляем формулы для внутренних усилий:

$$M_{\text{св}} = \varphi' G J_d = \varphi'_0 G J_d \operatorname{ch} \kappa x - \kappa B_{\omega,0} \operatorname{sh} \kappa x + M_{\text{к},0} (1 - \operatorname{ch} \kappa x); \quad (8.65)$$

$$B_{\omega} = -E J_{\omega} \varphi'' = -E J_{\omega} \kappa \varphi'_0 \operatorname{sh} \kappa x + B_{\omega,0} \operatorname{ch} \kappa x + \frac{M_{\text{к},0}}{\kappa} \operatorname{sh} \kappa x; \quad (8.66)$$

$$M_{\omega} = -E J_{\omega} \varphi''' = -G J_d \varphi'_0 \operatorname{ch} \kappa x + B_{\omega,0} \kappa \operatorname{sh} \kappa x + M_{\text{к},0} \operatorname{ch} \kappa x. \quad (8.67)$$

Поясним вычисление начальных параметров M_0 и B_0 . Пусть задано сечение и сосредоточенные силы в нем (рис. 8.25).

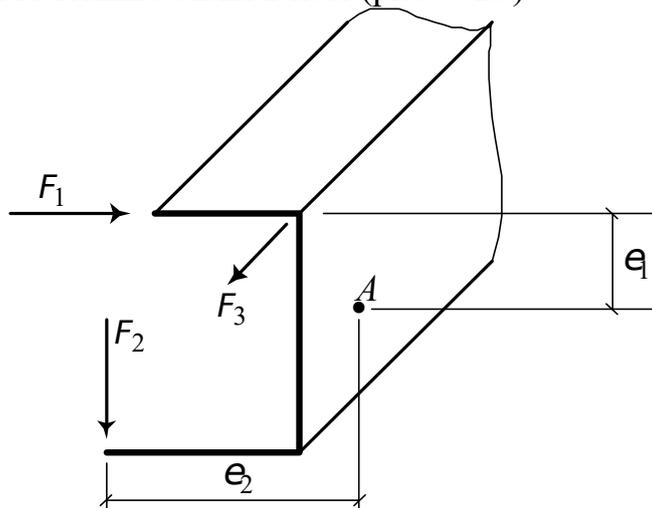


Рис. 8.25. Определение крутящего момента и бимоента в сечении

С учетом правила знаков для крутящего момента составляем выражение момента относительно точки A (центр изгиба):

$$M_{\text{к},0} = F_1 e_1 - F_2 e_2.$$

Продольная сила F_3 порождает бимомент B_0 . Так как в тонкостенном стержне открытого профиля перемещения происходят по закону секториальных площадей (см. п. 8.2.2), то

$$B_0 = F_3 \omega_j,$$

где ω_j – секториальная координата в месте приложения силы.

При наличии нескольких продольных сил в сечении бимомент определяется путем суммирования.

Итак, мы получили решение однородного уравнения (8.57). Если к тонкостенному стержню приложим распределенный момент $m = \text{const}$, направленный против часовой стрелки (если смотреть с торца в сторону положительного направления оси Ox), то к решению однородного уравнения (8.64) необходимо добавить частное решение, имеющее вид

$$\varphi_{\text{част}} = \frac{m}{\kappa^2 G J_d} \left(1 + \frac{\kappa^2 x^2}{2} - \operatorname{ch} \kappa x \right). \quad (8.68)$$

Соответственно в формулы (8.65), (8.66), (8.67) добавляются следующие выражения:

$$M_{\text{св, част}} = \frac{m}{\kappa} (\kappa x - \text{sh } \kappa x) ; \quad (8.69)$$

$$B_{\omega, \text{ част}} = -\frac{m}{\kappa^2} (1 - \text{ch } \kappa x) ; \quad (8.70)$$

$$M_{\omega, \text{ част}} = \frac{m}{\kappa} \text{sh } \kappa x . \quad (8.71)$$

Если тонкостенный стержень имеет несколько участков, то следует воспользоваться приемом продолжения решения (см., например, п. 6.6.3).

8.2.3.5. Общий случай нагружения тонкостенного стержня открытого профиля. Пример расчета

В общем случае нагружения нормальные и касательные напряжения определяются по принципу суперпозиции как алгебраическая сумма напряжений, вызываемых отдельными составляющими деформации. Так, нормальные напряжения будут определяться по четырехчленной формуле

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{B_{\omega}}{J_{\omega}}, \quad (8.72)$$

а касательные напряжения – по трехчленной формуле

$$\tau = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{J_z \delta} + \frac{Q_z S_y^{\text{отс}}}{J_y \delta} + \frac{M_{\omega} S_{\omega}^{\text{отс}}}{J_{\omega} \delta}. \quad (8.73)$$

Кроме того, в сечении возникают касательные напряжения от свободного кручения, которые определяются по формуле (8.31).

Для иллюстрации сказанного рассмотрим пример расчета консольного стержня, изображенного на рис. 8.26.

Ранее (см. пример в п. 2.4.4) были определены положение центра тяжести сечения, осевые и центробежные моменты инерции, построена эпюра главной секториальной площади, найден секториальный момент инерции поперечного сечения, координаты центра изгиба, положение главных центральных осей сечения (рис. 8.26).

Перенесем действующую силу в центр изгиба и разложим ее на составляющие по главным осям:

$$F_y = F \cos \alpha = 1 \cdot 0,9583 = 958,3 \text{ Н} ,$$

$$F_z = F \sin \alpha = 1 \cdot 0,2823 = 282,3 \text{ Н} .$$

Построим эпюры изгибающих моментов M_z и M_y (рис. 8.26). Найдем начальные параметры (см. уравнения (8.64) – (8.67)):

$$\text{при } x = 0: \quad B_{\omega, 0} = 0 , \quad M_{\kappa, 0} = F \cdot 17,86 \text{ см} = 178,6 \text{ Н} \cdot \text{м} ;$$

при $x = l$: $\varphi_x = 0$ и $\varphi'_x = 0$

(в защемлении угол закручивания равен нулю и момент свободного кручения, отнесенный к жесткости при кручении GJ_d , также равен нулю).

Исходные данные:

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$G = 0,81 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$J_d = 3,387 \text{ см}^4;$$

$$J_\omega = 12733,58 \text{ см}^6;$$

$$J_{\max} = 1737,85 \text{ см}^4;$$

$$J_{\min} = 366,18 \text{ см}^4$$

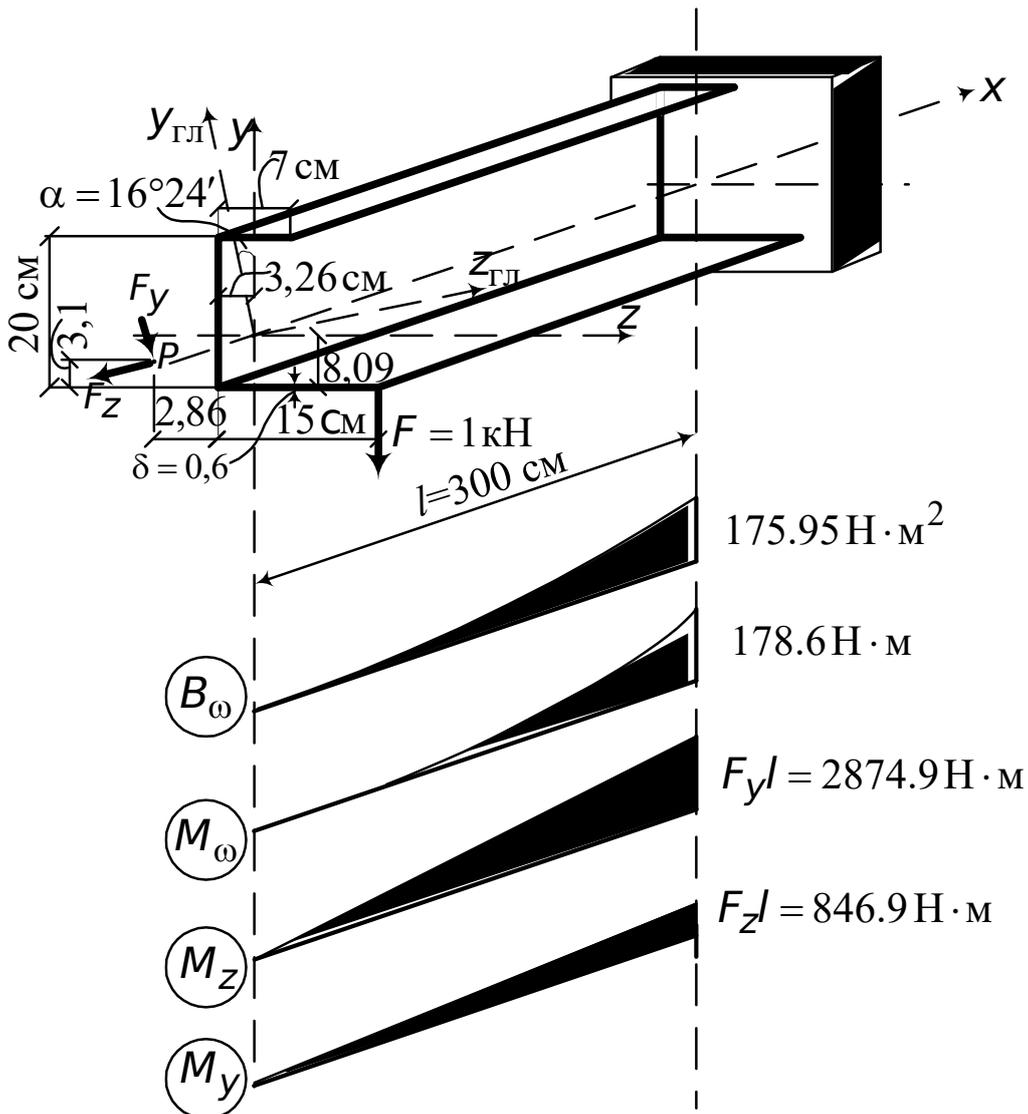


Рис. 8.26. Схема тонкостенного стержня и эпюры моментов

Используем эти условия и находим

$$\varphi_0 = \frac{M_{K,0}}{\kappa G J_d} (\operatorname{th} \kappa l - \kappa l),$$

$$\varphi'_0 = \frac{M_{K,0}}{G J_d} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \kappa l} \right).$$

Подставляем найденные значения начальных параметров $B_{\omega,0}$, $M_{K,0}$, φ_0 и φ'_0 в уравнения (8.66) и (8.67) и получаем

$$B_{\omega} = \frac{M_{K,0}}{\kappa} \frac{\operatorname{sh} \kappa x}{\operatorname{ch} \kappa l},$$

$$M_{\omega} = M_{K,0} \frac{\operatorname{ch} \kappa x}{\operatorname{ch} \kappa l}.$$

Вычисляем изгибно-крутильную характеристику

$$\kappa = \sqrt{\frac{G J_d}{E J_{\omega}}} = \sqrt{\frac{0,81 \cdot 10^5 \cdot 3,387}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 12733,58}} = 0,0101 \frac{1}{\text{см}}$$

и строим эпюры бимоента B_{ω} и изгибно-крутильного момента M_{ω} (рис. 8.26).

По формуле (8.47) определяем нормальные напряжения при кручении в заземлении, МПа,

$$\sigma = \frac{B_{\omega}}{J_{\omega}} \omega = \frac{1759500}{12733,58} \omega = 138,18 \cdot 10^{-2} \omega,$$

где B_{ω} – значение бимоента в заземлении (рис. 8.26);

J_{ω} – секториальный момент инерции поперечного сечения (рис. 8.26: исходные данные);

ω – эпюра главной секториальной площади.

Построим эпюру σ_{ω} (рис. 8.27).

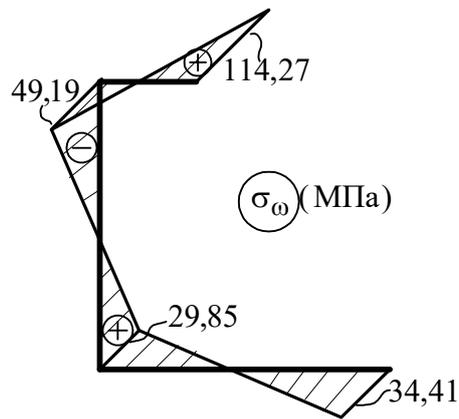


Рис. 8.27. Эпюра нормальных напряжений σ_ω

Определим касательные напряжения в том же сечении, что и нормальные, т. е. в заземлении. Для этого используем формулу (8.54):

$$\tau_\omega = \frac{M_\omega S_\omega^{\text{отс}}}{J_\omega \delta} = \frac{178600}{12733,58 \cdot 0,6} S_\omega^{\text{отс}} = 23,38 S_\omega^{\text{отс}} \cdot 10^{-2}.$$

В данном случае при $\delta = \text{const}$ эпюра τ_ω подобна эпюре $S_\omega^{\text{отс}}$. Эпюру $S_\omega^{\text{отс}}$ строим, переходя последовательно от точки 4 профиля (рис. 8.28) к точке 3, затем – к точке 1 и к точке 2.

Составим уравнение секториального статического момента для нижней полки профиля (участок 4-3, рис. 8.28):

$$S_\omega^{\text{отс}} = \int_A \omega dA = \delta \int_0^{t_k} \omega dt.$$

Здесь $\omega = -24,90 + \frac{24,90 + 21,60}{15} t = -24,90 + 3,10 t$, t – расстояние от точки 4 до сечения.

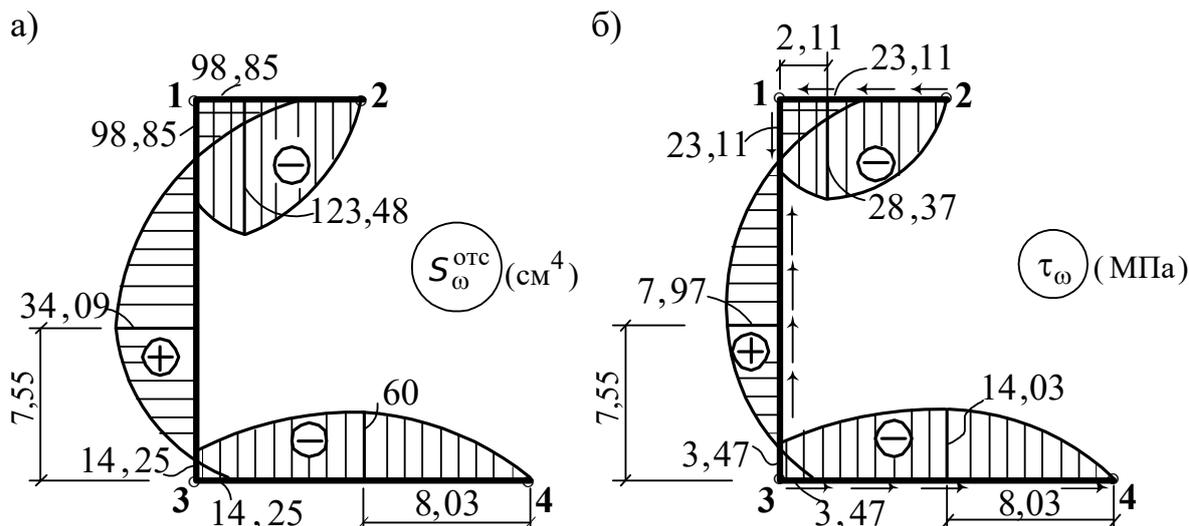


Рис. 8.28. Эпюры $S_{\omega}^{\text{отс}}$ и τ_{ω}

Теперь $S_{\omega}^{\text{отс}} = 0,6 \int_0^{t_k} (-24,90 + 3,10t) dt$. После интегрирования имеем

$$S_{\omega}^{\text{отс}} = -14,94t_k + 0,93t_k^2.$$

Определим t_k , при котором $S_{\omega}^{\text{отс}}$ достигает экстремального значения:

$$\frac{dS_{\omega}^{\text{отс}}}{dt_k} = 0, \quad -14,94 + 2 \cdot 0,93t_k = 0.$$

Отсюда $t_k = 8,03 \text{ см}$.

При $t_k = 0$ $S_{\omega}^{\text{отс}} = 0$, при $t_k = 8,03 \text{ см}$ $S_{\omega}^{\text{отс}} = -60 \text{ см}^4$, при $t_k = 15 \text{ см}$ $S_{\omega}^{\text{отс}} = -14,25 \text{ см}^4$.

Аналогично выполняя вычисления на остальных участках, построим эпюру $S_{\omega}^{\text{отс}}$ (рис. 8.28, а) и затем эпюру τ_{ω} (рис. 8.28, б).

Из двух систем касательных напряжений, соответствующих стесненному кручению (8.54) и (8.31), в рассматриваемом сечении возникают лишь напряжения τ_{ω} (8.54), которые мы и определили (рис. 8.28, б). Напряжения $\tau_{\text{кр}}$ равны нулю, так как момент $M_{\text{св}} = \varphi' G J_d = 0$ в защемлении.

Найдем теперь для сравнения с σ_{ω} нормальные напряжения от поперечного изгиба.

Нормальные напряжения, МПа,

$$\sigma_y = \frac{M_z}{J_{\max}} y = \frac{287490}{1737,85} \cdot y = 165,43 \cdot y \cdot 10^{-2},$$

$$\sigma_z = \frac{M_y}{J_{\min}} z = \frac{84690}{366,18} \cdot z = 231,28 \cdot z \cdot 10^{-2}.$$

Эпюры σ_y и σ_z показаны на рис. 8.29.

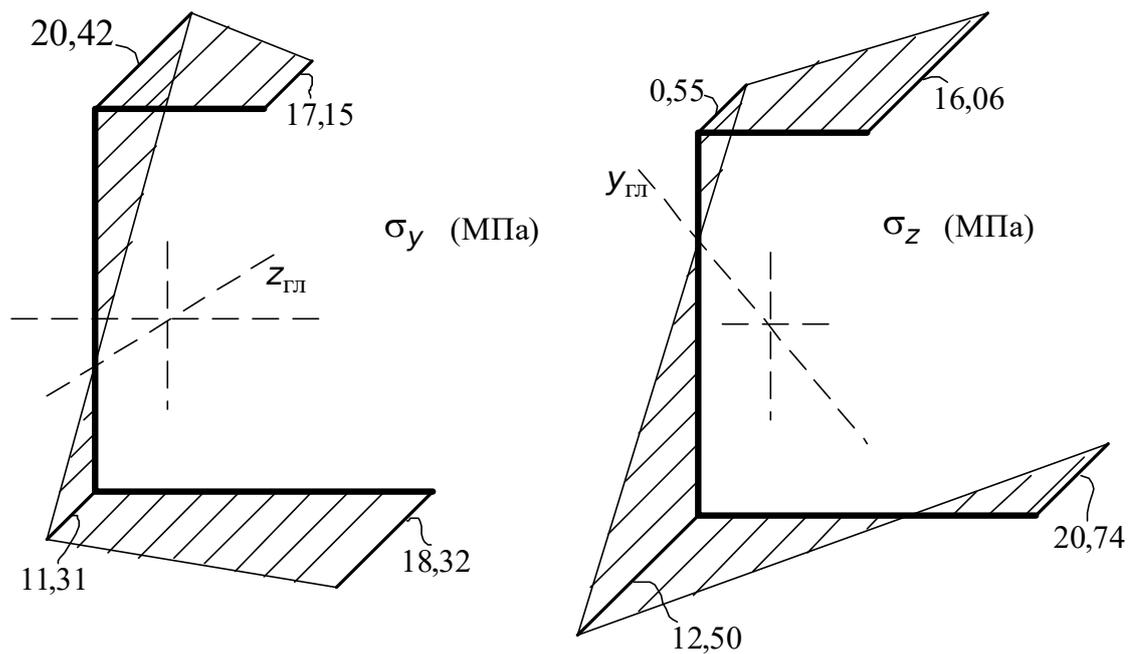


Рис. 8.29. Эпюры нормальных напряжений σ_y и σ_z от изгибающих моментов

Сравнивая эпюры σ_ω с σ_y и σ_z , видим, что максимальные напряжения, вызванные деформацией сечения, в три с половиной раза превышают суммарные напряжения от изгиба.

Раздел 9

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ

9.1. Общие положения и предпосылки

Под сложным сопротивлением подразумевают различные комбинации простейших видов деформации: осевого растяжения или сжатия, кручения, плоского поперечного изгиба и др. Как известно, в самом общем случае нагружения бруса в его поперечных сечениях возникает шесть компонентов внутренних сил: Q_y , Q_z , N , M_z , M_y , M_k (см. рис. 1.11).

В зависимости от комбинации этих усилий различают следующие основные виды сложного сопротивления: косой изгиб, характеризуемый тем, что в поперечных сечениях действуют изгибающие моменты и поперечные силы, а продольная сила и крутящий момент отсутствуют; изгиб с кручением – здесь напряженно-деформированные состояния создают в общем случае пять силовых факторов, а продольная сила равна нулю; внецентренное сжатие и растяжение, при которых $M_k = 0$, $Q_y = 0$, $Q_z = 0$, $M_y \neq 0$, $M_z \neq 0$, $N \neq 0$.

Примерами сооружений, в которых элементы испытывают сложное сопротивление, являются водонапорная башня, колонна которой сжимается весом бака с водой и изгибается давлением ветра; обрешетка кровли, где вертикальная нагрузка от веса кровли и собственного веса обрешетки наклонена к главной оси под некоторым углом; балка мостового крана при его торможении, вследствие которого груз отклоняется от вертикали; пролетное строение моста, балки которого изгибаются в горизонтальной и вертикальной плоскостях и скручиваются боковыми горизонтальными воздействиями от подвижного состава, и др.

При построении теории расчета конструкций, элементы которых испытывают сложное сопротивление, будем предполагать, что перемещения точек оси элемента (бруса) малы по сравнению с его поперечными размерами, а повороты малы по сравнению с единицей (см. п. 1.6). При этих предположениях применим принцип независимости действия сил. Таким образом, непосредственно могут быть использованы результаты теории элементарных видов деформации бруса с прямолинейной осью. Теория сложного сопротивления в этом случае при условии соблюдения закона Гука будет линейной.

В этом разделе, наряду с косым изгибом, внецентренным растяжением и сжатием, изгибом с кручением бруса, рассматриваются также вопросы устойчивости сжатых стержней.

В теории сопротивления материалов вопрос об устойчивости возникает при расчете длинных и тонких стержней. Опытные исследования и теория показывают, что если величина сжимающей силы, действующей на стержень, достигает некоторого критического значения, то начинается

искривление стержня. При незначительном превышении сжимающей силой критического значения очень сильно возрастают прогибы. Поэтому величина критической силы характеризует начало разрушения.

Вопрос об устойчивости упругих стержней приобретает особенно большое значение в металлических конструкциях, где благодаря применению высокопрочных сталей поперечные размеры элементов малы по сравнению с их длиной.

9.2. Косой изгиб

Косым изгибом называется такой вид деформации, когда силы, изгибающие балку, расположены в плоскости, проходящей через ось балки, но наклонно к главным плоскостям OxU и OxZ (см. рис. 9.1, а).

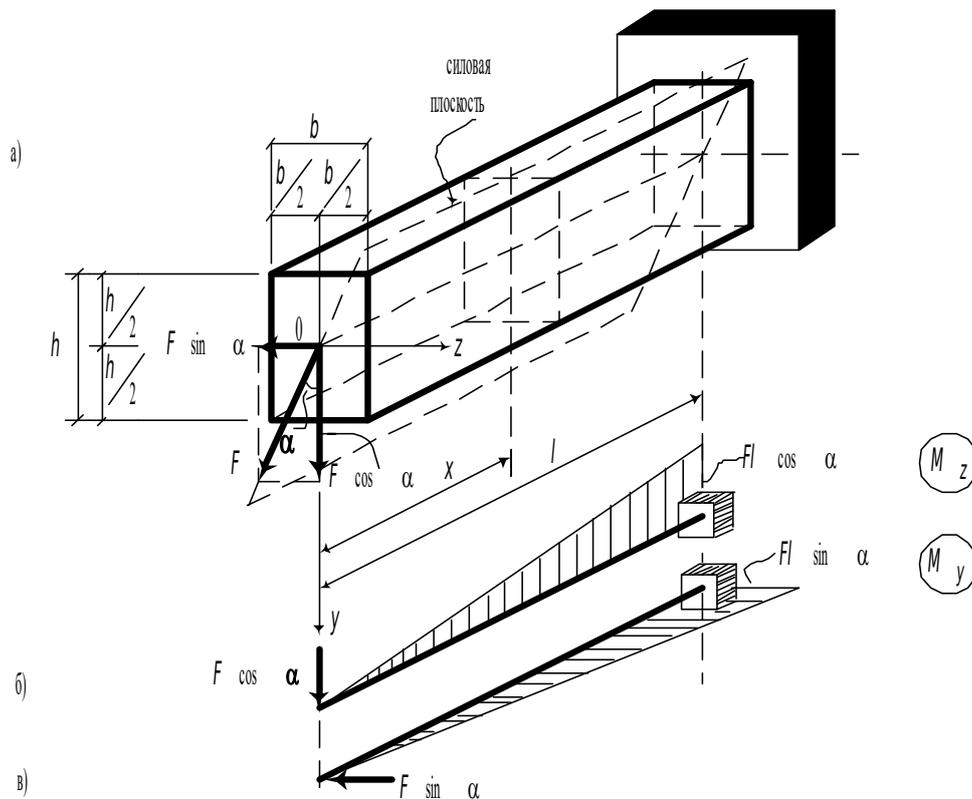


Рис. 9.1. Схема нагружения консольной балки и эпюры M_z и M_y

Рассмотрим консольную балку. Силу F , приложенную в центре тяжести сечения, разложим на две составляющие: вертикальную – $F \cos \alpha$ и горизонтальную – $F \sin \alpha$. Угол α между силовой линией и осью Y будем отсчитывать по часовой стрелке. В произвольном сечении X балки найдем изгибающие моменты в вертикальной OxU и горизонтальной OxZ плоскостях. При этом будем рассматривать часть балки, расположенную слева от сечения. Тогда в соответствии с правилом знаков для изгибающих

моментов (см. рис. 1.17) и условием, что наблюдатель расположен в начале координат со стороны положительного направления оси Z , имеем

$$M_z = -Fx \cos \alpha = -M \cos \alpha, \quad (9.1)$$

$$M_y = Fx \sin \alpha = M \sin \alpha, \quad (9.2)$$

где M – изгибающий момент в рассматриваемом сечении в силовой плоскости, наклоненной под углом α к оси Y .

Эпюры изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях показаны соответственно на рис. 9.1, б, в.

Найдем нормальные напряжения в поперечном сечении балки от изгибающих моментов M_z и M_y :

$$\sigma_1 = \frac{M_z y}{J_z} = -\frac{M \cdot y \cdot \cos \alpha}{J_z}, \quad (9.3)$$

$$\sigma_2 = \frac{M_y z}{J_y} = \frac{M \cdot z \cdot \sin \alpha}{J_y}. \quad (9.4)$$

Эпюры напряжений от каждого изгибающего момента показаны на рис. 9.2, а, б.

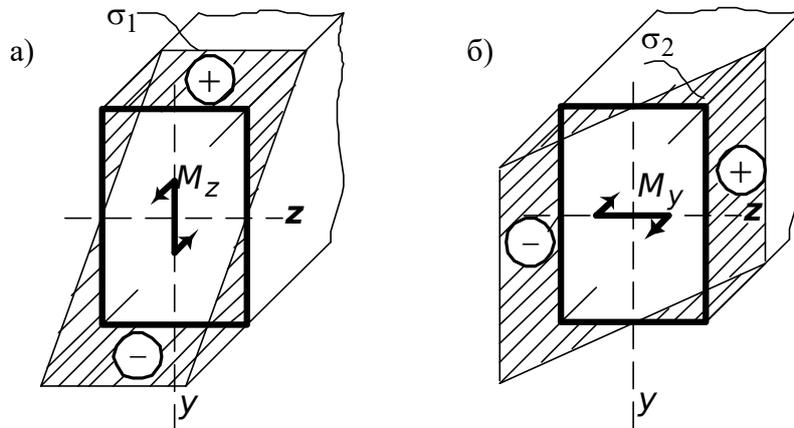


Рис. 9.2. Эпюры нормальных напряжений в сечении балки

На основании принципа суперпозиции нормальные напряжения в сечении балки от совместного действия моментов M_z и M_y равны

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = M \left(-\frac{y}{J_z} \cos \alpha + \frac{z}{J_y} \sin \alpha \right). \quad (9.5)$$

Соответствующая эпюра напряжений показана на рис. 9.3.

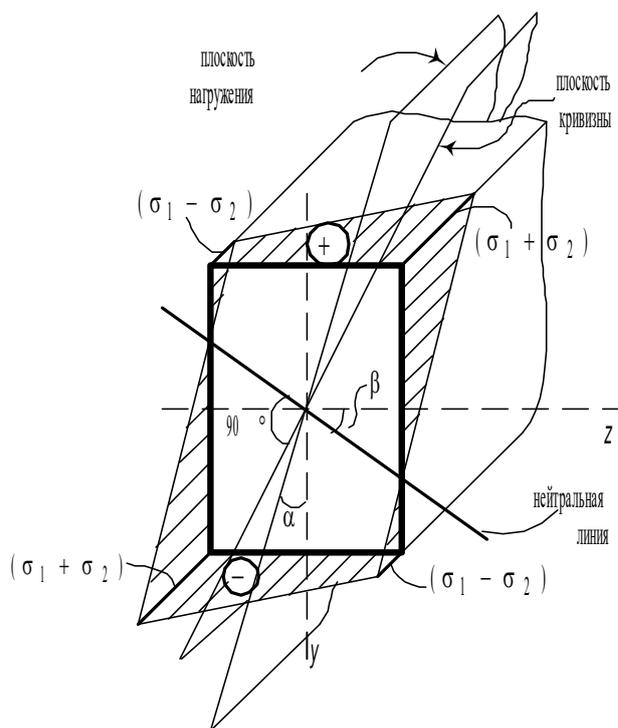


Рис. 9.3. Суммарная эпюра напряжений

Положение нейтральной линии найдем из уравнения (9.5), приравняв выражение в скобках нулю:

$$-\frac{y}{J_z} \cos \alpha + \frac{z}{J_y} \sin \alpha = 0. \quad (9.6)$$

Условие (9.6) – это математическая запись того факта, что нормальные напряжения в точках, лежащих на нейтральной оси, равны нулю.

Обозначив $\frac{y}{z} = \operatorname{tg} \beta$, из (9.6) найдем

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{J_z}{J_y}. \quad (9.7)$$

Как видно из полученной зависимости (9.7), нейтральная линия в общем случае ($J_z \neq J_y$) не перпендикулярна силовой линии. Плоскость кривизны (рис. 9.3), будучи ортогональной к нейтральной линии, не совпадает с силовой плоскостью и расположена “косо” по отношению к этой плоскости (под углом $\beta - \alpha$).

Интересно отметить, что для сечений, у которых $J_z = J_y$, нейтральная линия перпендикулярна силовой линии и искривление происходит в силовой плоскости. Такими сечениями являются круг, квадрат, равносторонний треугольник, составные сечения при $J_z = J_y$. В подобных случаях любая центральная ось является главной, и изгиб от любой наклонной силы (при произвольном угле α) превращается в главный плоский изгиб.

Для расчета на прочность балки при косом изгибе необходимо для опасного сечения (где M_z и M_y достигают одновременно своих наибольших значений, например, на рис. 9.1, б, в – в защемлении) построить, пользуясь формулой (9.5), эпюру суммарных напряжений (рис. 9.3). Далее найти положение нейтральной линии (9.7), определить максимальные растягивающие и сжимающие напряжения и составить условия прочности

$$\sigma_{\max,p} \leq [\sigma]_p, \quad \sigma_{\max,c} \leq [\sigma]_c \quad (9.8)$$

или при расчете по методу предельных состояний

$$\sigma_{\max,p} \leq R_p, \quad \sigma_{\max,c} \leq R_c.$$

Для балок из материалов, у которых $[\sigma]_p = [\sigma]_c$, используется лишь то из условий (9.8), которое соответствует большему по абсолютной величине напряжению. При $[\sigma]_p < [\sigma]_c$ (хрупкие материалы) первого из условий (9.8) достаточно, если $\sigma_{\max,p} \geq |\sigma_{\max,c}|$. В дополнение к сказанному подчеркнем, что при косом изгибе сечения, в которых M_z и M_y достигают своих наибольших значений, могут не совпадать, поэтому расчет на прочность следует выполнить для нескольких предположительно опасных сечений.

Перемещения в балке при косом изгибе равны геометрической сумме ее перемещений в направлениях главных центральных осей:

$$f = \sqrt{v^2 + w^2}, \quad (9.9)$$

где V – перемещение в направлении оси Y ; W – перемещение в горизонтальной плоскости (в направлении оси Z); f – перемещение в плоскости кривизны (см. рис. 9.3).

Покажем, что суммарное перемещение лежит в плоскости кривизны. Как известно, прогибы на конце консоли равны $F l^3 / 3EJ$ (см. разд. 6). Для рассматриваемой задачи

$$v = \frac{F \cos \alpha l^3}{3EJ_z}, \quad w = \frac{F \sin \alpha l^3}{3EJ_y}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{w}{v} = \operatorname{tg} \alpha \frac{J_z}{J_y}.$$

Последняя формула идентична формуле (9.7). Это позволяет сделать заключение, что $\varphi = \beta$.

Следовательно, направление прогибов перпендикулярно нейтральной линии, т. е. совпадает с плоскостью кривизны. Отметим, что в сечениях балки при косом изгибе возникают также и касательные напряжения. Они могут быть определены как геометрическая сумма касательных напряжений, направленных параллельно главным центральным осям:

$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2},$$

где τ_{xz} и τ_{xy} находятся по формуле Журавского (см. разд. 6). Напомним, что первый индекс в обозначении касательного напряжения показывает,

какой оси перпендикулярна площадка, на которой действует касательное напряжение, а второй индекс – какой оси параллельно касательное напряжение.

В заключение этого подраздела рассмотрим пример. Деревянная балка прямоугольного сечения (рис. 9.4, а) нагружена вертикальной силой $F = 10 \text{ кН}$ в точке A и горизонтальной силой такой же величины – в точке B (обе точки расположены на оси балки). Требуется подобрать размеры поперечного сечения b и h при допускаемом напряжении $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$.

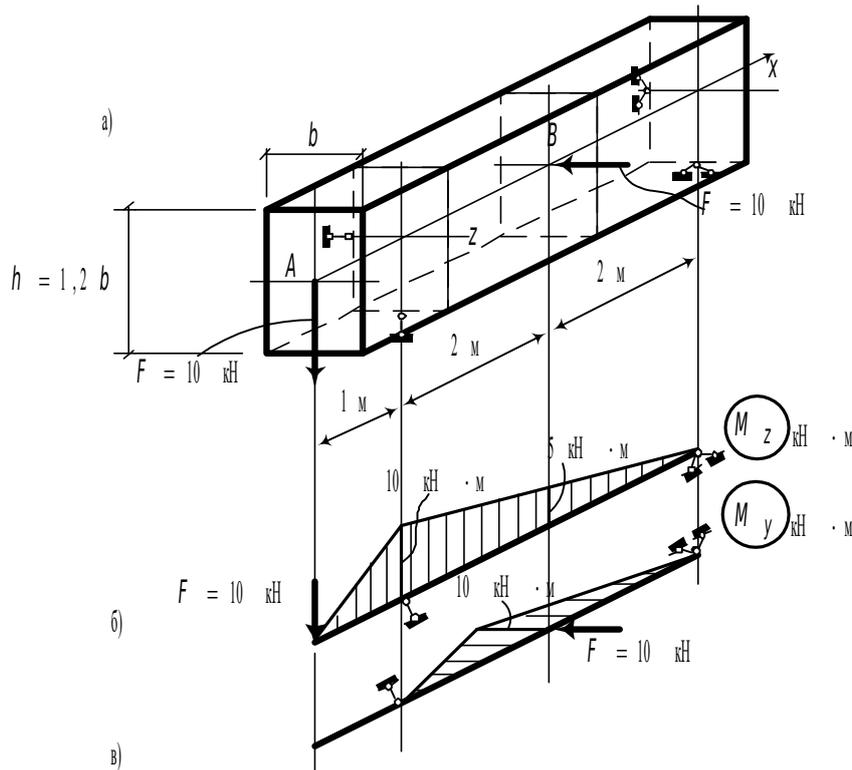


Рис. 9.4. Расчетная схема балки (а), эпюры моментов M_z в вертикальной (б) и M_y в горизонтальной (в) плоскостях

В соответствии с порядком расчета балок при косом изгибе, изложенным выше, построим эпюры моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рис. 9.4, б, в). Опасным будет сечение в котором $M_z = -5 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_y = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Определим геометрические характеристики сечения балки (рис. 9.4, а).

Момент инерции относительно оси Z

$$J_z = \frac{bh^3}{12} = 0,144b^4.$$

Момент сопротивления относительно той же оси

$$W_z = \frac{0,144b^4}{0,6b} = 0,24b^3.$$

Аналогично найдем геометрические характеристики сечения относительно оси Y :

$$J_y = \frac{b^3 h}{12} = 0,1b^4; \quad W_y = \frac{0,1b^4}{0,5b} = 0,2b^3.$$

Найдем максимальные напряжения в опасном сечении балки от изгибающих моментов M_z и M_y , МПа:

$$\sigma_1 = \pm \frac{M_z}{W_z} = \pm \frac{5}{0,24b^3} = \pm \frac{20,833 \cdot 10^3}{b^3};$$

$$\sigma_2 = \pm \frac{M_y}{W_y} = \pm \frac{10}{0,2b^3} = \pm \frac{50 \cdot 10^3}{b^3}.$$

Опишем теперь размер поперечного сечения b . По условию задачи допускаемое напряжение $[\sigma]$ одинаково при растяжении и сжатии. Поэтому используем одно из условий (9.8). Будем оперировать с максимальными растягивающими напряжениями. Запишем условие прочности:

$$\sigma_1 + \sigma_2 \leq [\sigma],$$

или

$$\frac{20,833 \cdot 10^3}{b^3} + \frac{50 \cdot 10^3}{b^3} = 10.$$

Отсюда $b = 19,2 \text{ см} \approx 20 \text{ см}$, $h = 20 \times 1,2 = 24 \text{ см}$.

9.3. Изгиб и кручение стержня кольцевого поперечного сечения

Одновременное действие кручения с изгибом чаще всего встречается в различных деталях машин. Например, коленчатый вал воспринимает значительные крутящие моменты и, кроме того, работает на изгиб. На изгиб с кручением работают валы моторных вагонов электропоезда, трамвайного вагона и других машиностроительных конструкций. Пример такого рода в строительных конструкциях приведен в п. 9.1.

Рассмотрим стержень, закрепленный на правом конце. На свободном конце стержня приложена сила F и крутящий момент M_K (рис. 9.5, а).

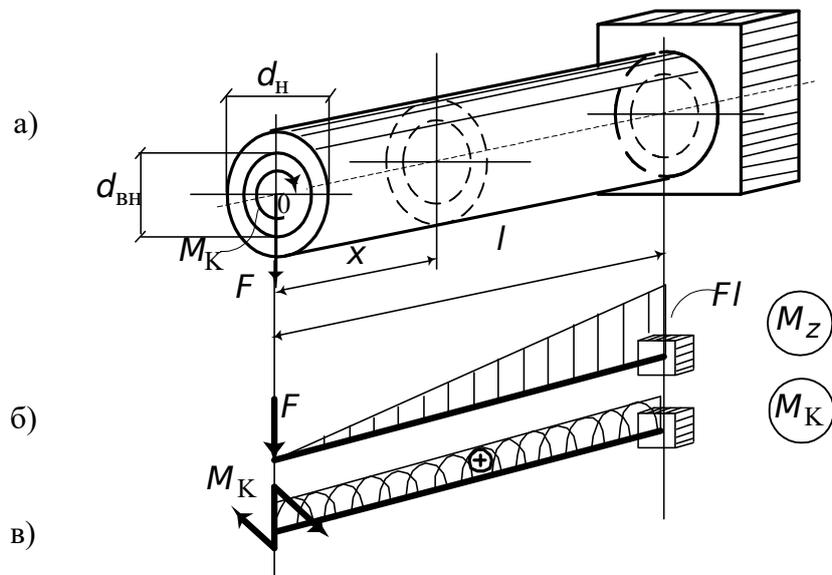


Рис. 9.5. Схема консольного стержня и эпюры M_Z и M_K

Рассматриваемый стержень относится к категории толстостенных цилиндров, поэтому к нему при кручении применимы все предпосылки и решения, полученные в п. 8.1.

Построим эпюры изгибающих (рис. 9.5, б) и крутящих моментов (рис. 9.5, в). Влиянием поперечной силы будем пренебрегать, так как соответствующие ей касательные напряжения невелики по сравнению с касательными напряжениями от кручения и нормальными напряжениями от изгиба. В любом поперечном сечении стержня возникают нормальные напряжения σ от изгиба и касательные напряжения τ от кручения. Нормальные напряжения, как известно (см. п. 6.1), определяются по формуле

$$\sigma = \pm \frac{M_Z y}{J_Z},$$

где J_Z – осевой момент инерции кольцевого сечения стержня, равный (см. п. 2.3.4)

$$J_Z = \frac{\pi d_H^4}{64} \cdot \beta, \quad \beta = \left(1 - \frac{d_{BH}^4}{d_H^4} \right).$$

Эпюра этих напряжений показана на рис. 9.6.

Наибольшие по абсолютной величине нормальные напряжения возникают в точках с $y = d_H/2$:

$$|\sigma| = \frac{M}{W_Z} = \frac{32M}{\pi d^3 \beta}, \quad (9.10)$$

где W_Z – осевой момент сопротивления поперечного сечения бруса,

$$W_Z = \frac{\pi d^3 \beta}{32}.$$

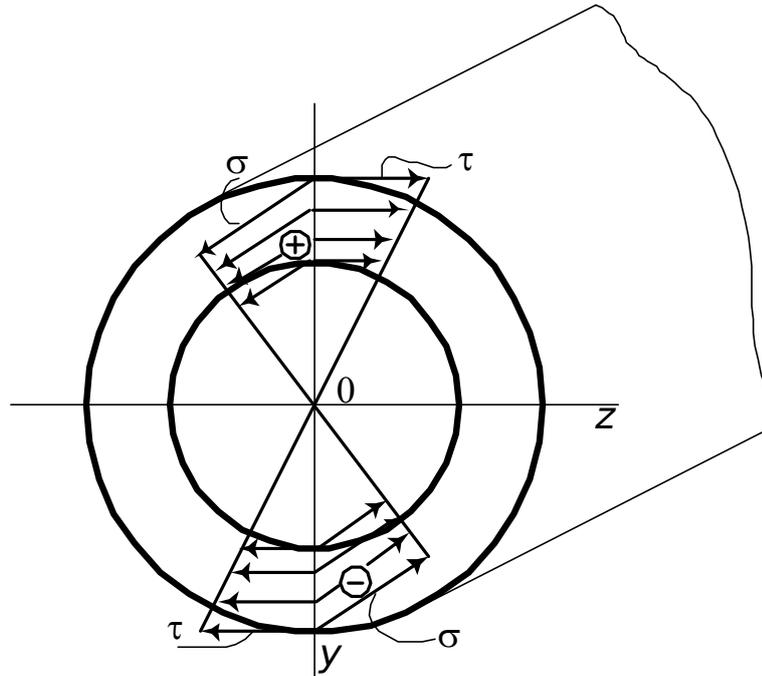


Рис. 9.6. Эпюры нормальных и касательных напряжений в сечении бруса

Касательные напряжения определяются по формуле (8.5):

$$\tau_\rho = \frac{M_K \rho}{J_\rho},$$

где ρ – расстояние от полюса (точка 0 на рис. 9.5, а, рис. 9.6) до той точки сечения, в которой находятся касательные напряжения; J_ρ – полярный момент инерции поперечного сечения бруса (см. п. 8.1),

$$J_\rho = \frac{\pi d_H^4}{32} \cdot \beta.$$

Эпюра касательных напряжений показана на рис. 9.6 и рис. 8.6. В каждой точке поперечного сечения касательные напряжения направлены по нормали к радиусу, соединяющему эту точку с центром сечения.

Наибольшие касательные напряжения возникают в точках, расположенных по наружному контуру ($\rho = d_H/2$). Они здесь равны

$$\tau = \frac{M_K}{W_\rho} = \frac{16M_K}{\pi d_H^3 \beta}, \quad (9.11)$$

где W_ρ – полярный момент сопротивления бруса,

$$W_\rho = \frac{\pi d_H^3 \beta}{16}.$$

Вырежем из бруса вблизи его боковой поверхности элементарный параллелепипед (рис. 9.7).

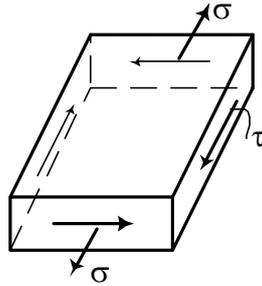


Рис. 9.7. Напряженное состояние элементарного параллелепипеда

По граням параллелепипеда, параллельным поперечным сечениям бруса, действуют нормальные σ и касательные τ напряжения. Остальные грани свободны от нормальных напряжений. Таким образом, в данном случае имеет место частный случай плоского напряженного состояния.

Следовательно, для расчетов на прочность необходимо оперировать главными напряжениями. Последние, как известно (см. п. 6.4), определяются по формуле

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

Знак “+” в этой формуле соответствует главным растягивающим напряжениям, а знак “-” – главным сжимающим напряжениям.

Расчет брусьев на прочность при изгибе с кручением производится с применением различных теорий прочности. Как известно (см. разд. 5), условия прочности по первой, второй, третьей и четвертой теориям будут соответственно следующими:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\leq [\sigma], \\ \sigma_1 - \nu \sigma_2 &\leq [\sigma], \\ \sigma_1 - \sigma_2 &\leq [\sigma], \\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 &\leq [\sigma]^2. \end{aligned}$$

Теперь, подставив (9.10) и (9.11) в формулу для определения главных напряжений и используя условия прочности, получим следующие значения:

– по теории максимальных нормальных напряжений (первая теория прочности)

$$d_n \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi[\sigma]\beta} \left(M_z + \sqrt{M_z^2 + M_k^2} \right)}; \quad (9.12)$$

– по теории максимальных относительных деформаций (вторая теория прочности) для стальных брусьев

$$d_n \geq \sqrt[3]{\frac{32}{\pi[\sigma]\beta} \left(0,35 M_z + 0,65 \sqrt{M_z^2 + M_k^2} \right)}; \quad (9.13)$$

– по теории максимальных касательных напряжений (третья теория прочности)

$$d_n \geq \sqrt[3]{\frac{32}{\pi[\sigma]\beta} \sqrt{M_z^2 + M_K^2}} ; \quad (9.14)$$

– по энергетической теории прочности

$$d_n \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi[\sigma]\beta} \sqrt{4M_z^2 + 3M_K^2}} . \quad (9.15)$$

Различия в диаметрах, вычисленных по этим теориям, зависят от соотношения между M_z и M_K . В большинстве случаев первая теория прочности дает наибольший диаметр, третья – наименьший. При малых значениях изгибающего момента по сравнению с крутящим это различие доходит примерно до 25%. С возрастанием изгибающего момента различие уменьшается и при $M_z = M_K$ составляет не более 5%.

Отметим, что если необходимо подобрать сечение сплошного круглого стержня, то в формулах (9.12) – (9.15) следует принять $\beta = 1$.

В заключение подраздела рассмотрим пример.

Требуется определить диаметр показанного на рис. 9.8, а консольного стержня рамы, используя все четыре теории прочности; $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$.

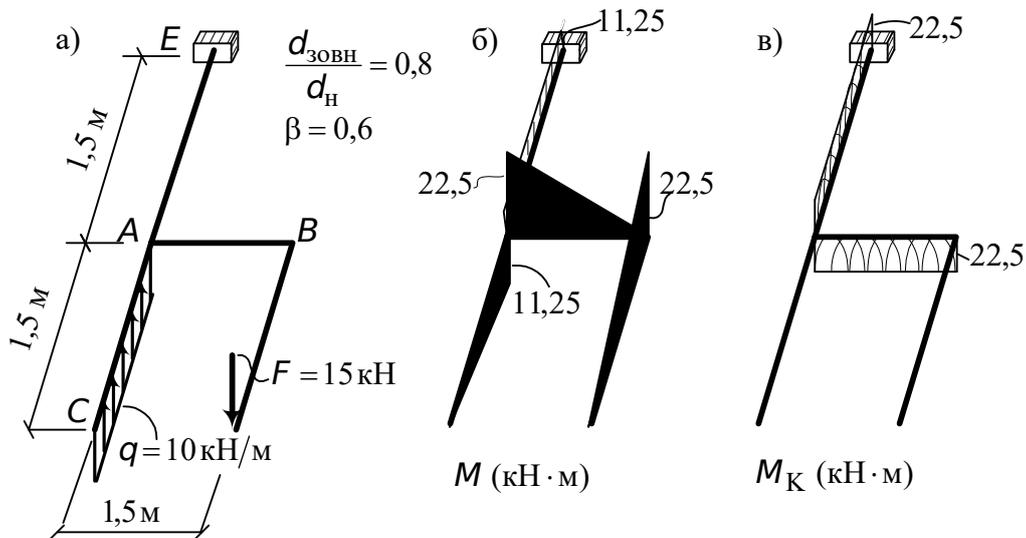


Рис. 9.8. Расчетная схема, эпюры изгибающих и крутящих моментов

Эпюры изгибающих и крутящих моментов показаны на рис. 9.8, б, в. Опасным будет сечение, где изгибающий и крутящий моменты одновременно достигают наибольших значений. Это сечение A (рис. 9.8, а). Здесь $M = 22,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_K = 22,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Далее воспользуемся формулами (9.12) – (9.15) и определим диаметр стержня:

– по теории максимальных нормальных напряжений

$$d_n \approx 18 \text{ см};$$

- по теории наибольших относительных деформаций
 $d_H \approx 18,3 \text{ см};$
- по теории максимальных касательных напряжений
 $d_H \approx 19 \text{ см};$
- по энергетической теории прочности
 $d_H \approx 18,5 \text{ см}.$

Разница в диаметрах не превышает 5 %. Это было отмечено ранее при $M_z = M_K$.

9.4. Внецентренное растяжение и сжатие

Пусть на брус действует сила F , которая параллельна продольной оси бруса, но точка ее приложения не находится ни на одной из главных осей сечения Z и Y (рис. 9.9, а).

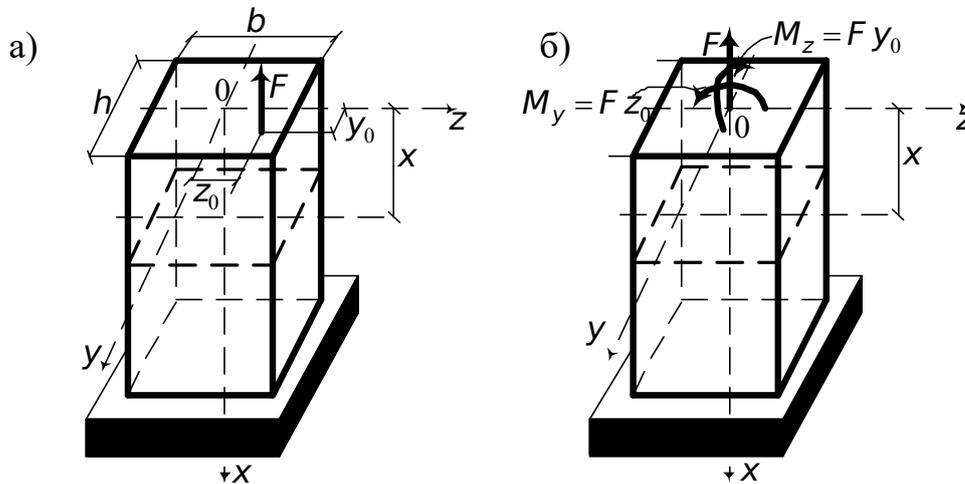


Рис. 9.9. Схемы воздействий на брус

Приведем эту силу к центру тяжести сечения O (рис. 9.9, б). Нормальные напряжения в произвольном сечении X определим, пользуясь принципом независимости действия сил, отдельно от каждого силового фактора: F , $M_y = F z_0$, $M_z = F y_0$.

Нормальные напряжения от центрально приложенной силы F равны (см. (3.1))

$$\sigma_1 = \frac{F}{A}, \quad (9.16)$$

где A – площадь поперечного сечения бруса.

Эпюра нормальных напряжений для этого случая показана на рис. 9.10, а.

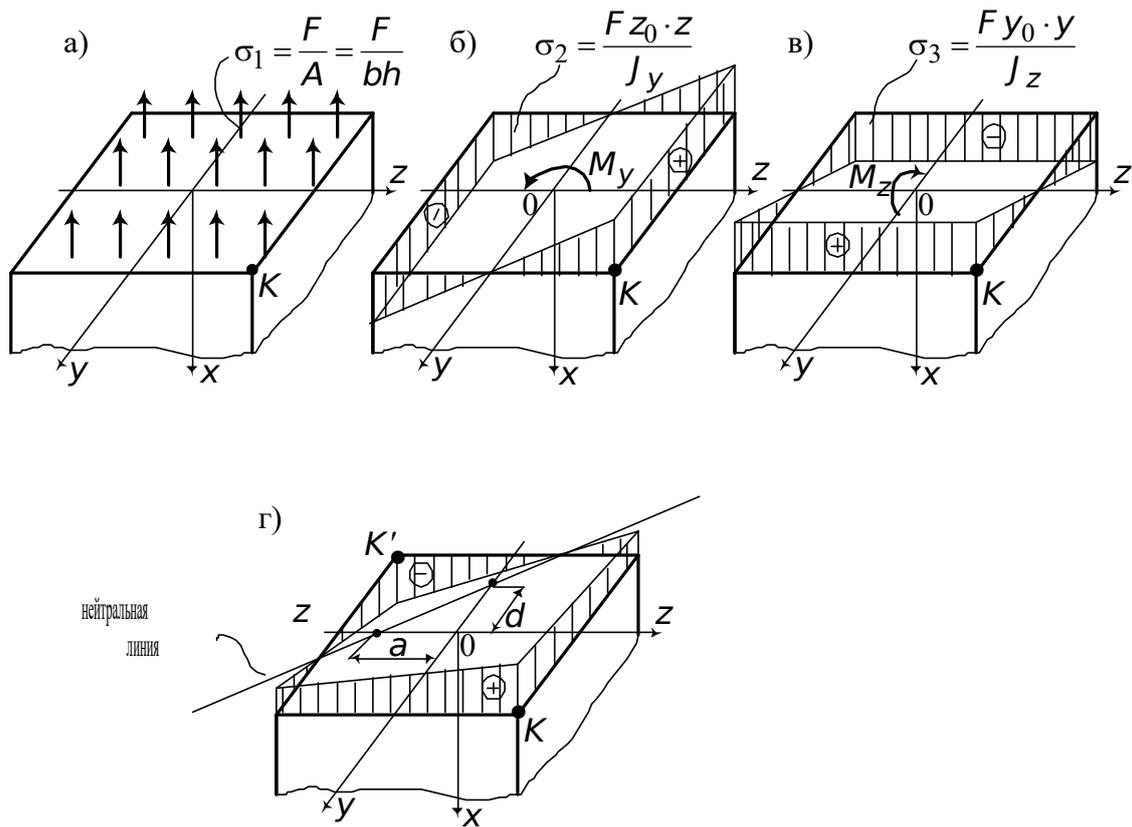


Рис. 9.10. Эпюры σ_1 , σ_2 , σ_3 и эпюра суммарных напряжений

Напряжения от изгиба в плоскости Oxz определяются следующим образом:

$$\sigma_2 = \frac{M_y z}{J_y} = \frac{F z_0 \cdot z}{J_y}, \quad (9.17)$$

где $-z$ – расстояние по оси Z от начала координат до той точки, в которой определяется нормальное напряжение; J_y – момент инерции поперечного сечения относительно оси Y .

Аналогично находим напряжение от изгиба в плоскости Oyx :

$$\sigma_3 = \frac{M_z y}{J_z} = \frac{F y_0 \cdot y}{J_z}, \quad (9.18)$$

где y – расстояние по оси Y от начала координат до той точки, в которой определяется напряжение; J_z – момент инерции поперечного сечения относительно оси Z .

Эпюры нормальных напряжений, вызванных M_y и M_z , показаны на рис. 9.10, б, в.

Суммарное напряжение в сечении бруса определяется как сумма напряжений, вызванных осевым растяжением (9.16) и изгибом (9.17) и (9.18).

Для точки K имеем

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_0 z}{J_y} A + \frac{y_0 y}{J_z} A \right). \quad (9.19)$$

Учитывая, что $J_y/A = i_y^2$, $J_z/A = i_z^2$ (см. п. 2.3.3), где i_y и i_z – радиусы инерции сечения, и вводя обозначения

$$i_y^2/z_0 = a, \quad i_z^2/y_0 = d,$$

получим

$$\sigma = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{z}{a} + \frac{y}{d} \right). \quad (9.20)$$

Суммарная эпюра напряжений, соответствующая формуле (9.20), показана на рис. 9.10, г.

Чтобы найти положение нейтральной линии, т. е. геометрическое место точек с нормальным напряжением, равным нулю, необходимо правую часть уравнения (9.20) приравнять нулю.

Тогда

$$\frac{z}{-a} + \frac{y}{-d} = 1. \quad (9.21)$$

Это уравнение прямой, отсекающей отрезки a и d от главных центральных осей:

a – отрезок, который нулевая линия отсекает от оси Z (рис. 9.10, г),

$$a = -\frac{i_y^2}{z_0}; \quad (9.22)$$

d – отрезок, который нулевая линия отсекает от оси Y (рис. 9.10, г),

$$d = -\frac{i_z^2}{y_0}. \quad (9.23)$$

Так как величины i_y^2 и i_z^2 положительные (квадраты), то произведения dy_0 и az_0 должны быть отрицательными (если a положительно, то z_0 отрицательно; если d положительно, то y_0 отрицательно). Положение нулевой линии зависит от размеров и формы сечения и от координаты точки приложения силы, но вовсе не зависит от величины силы. Если нулевая линия пересекает контур поперечного сечения (рис. 9.10, г), то она делит его на две части с разными знаками напряжений. Если не пересекает – напряжения во всех точках поперечного сечения будут одного знака. Затронутый вопрос имеет значение, например, при расчете сжатых кирпичных и бетонных колонн. Кирпичная кладка и бетон плохо сопротивляются растяжению. Поэтому желательно, чтобы напряжения при внецентренном сжатии были для всего сечения сжимающими, т. е. чтобы нулевая линия проходила за пределами сечения или касалась его. Найдем очертания такого контура, внутри которого должна находиться сжимающая сила, параллельная продольной оси. Область, заключенная внутри такого контура, называется ядром сечения. Чтобы определить ядро сечения, надо представить себе, что нейтральная линия “обкатывается” вокруг сечения, не пересекая его.

Координаты граничных точек ядра сечения определяются по формулам

$$z_{я} = -\frac{i_y^2}{a},$$

$$y_{я} = -\frac{i_z^2}{d}.$$
(9.24)

Если при “обкатывании” нейтральной линии вокруг сечения она поворачивается вокруг некоторой точки, то граница ядра сечения при этом очерчивается прямой линией.

Опасные напряжения в сечении возникают в точках, наиболее удаленных от нулевой линии (точки K и K' на рис. 9.10, г). Если допускаемые напряжения или расчетные сопротивления для материала стержня различны при растяжении и сжатии, то необходимо проверить два условия (9.8).

Рассмотрим пример. Бетонный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 9.11, сжимается силой F , приложенной в точке A . Требуется найти допускаемую нагрузку при заданных размерах сечения и расчетных сопротивлениях бетона: на сжатие $R_c = 30 \text{ МПа}$, на растяжение $R_p = 2 \text{ МПа}$. Требуется также построить ядро сечения.

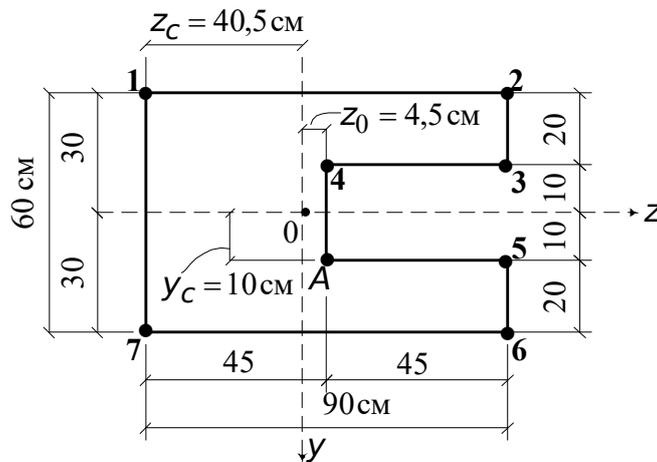


Рис. 9.11. Поперечное сечение бетонного стержня

Поперечное сечение имеет одну ось симметрии Z . Следовательно, координата центра тяжести Y_c известна (равна нулю). Найдем Z_c (см. п. 2.2). Она равна $z_c = 40,5 \text{ см}$ (рис. 9.11). Через точку 0 проведем вторую главную центральную ось инерции.

Найдем геометрические характеристики сечения:

$$A = 4500 \text{ см}^2;$$

$$J_z = 1590000 \text{ см}^4, W_z = 53000 \text{ см}^3;$$

$$J_y = 2946375 \text{ см}^4, W_y = 59522,73 \text{ см}^3;$$

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = 353,33 \text{ см}^2, \quad i_y^2 = \frac{J_y}{A} = 654,75 \text{ см}^2.$$

Действующую на стержень внецентренную силу F переносим в центр тяжести сечения. В результате на стержень теперь действуют три силовых фактора (рис. 9.12).

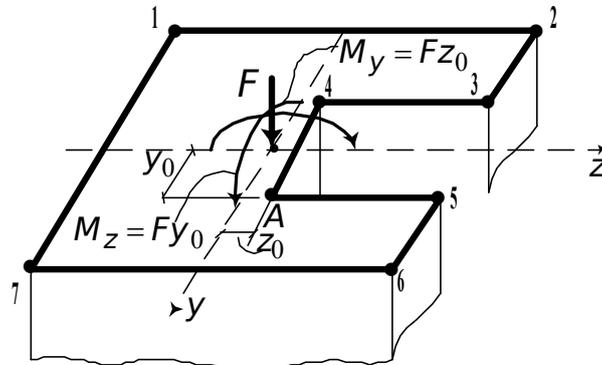


Рис. 9.12. Расчетная схема бетонного стержня

Определим нормальные напряжения от каждого силового фактора в отдельности:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{F}{A} = -\frac{F}{4500} = -2,22 \cdot 10^{-4} F; \\ \sigma_2 &= \frac{M_y z}{J_y} = -\frac{F z_0 \cdot z}{J_y} = -\frac{4,5 \cdot Fz}{2946375} = -1,53 \cdot 10^{-6} Fz; \\ \sigma_3 &= \frac{M_z y}{J_z} = -\frac{F y_0 \cdot y}{J_z} = -\frac{10 \cdot Fy}{1590000} = -6,29 \cdot 10^{-6} Fy. \end{aligned}$$

Анализ полученных формул показывает, что в точке 6 сечения (рис. 9.12) возникает максимальное сжимающее напряжение

$$|\sigma_{\max, c}| = F \left(\frac{4,5 \cdot 49,5}{2946375} + \frac{1}{4500} + \frac{10 \cdot 30}{1590000} \right) = 4,865 \cdot 10^{-4} F.$$

По условию задачи максимальное сжимающее напряжение не должно быть более расчетного сопротивления бетона на сжатие, т. е.

$$|\sigma_{\max, c}| \leq R_c.$$

Отсюда находим допускаемую силу F :

$$[F]_{c^=} = \frac{30}{4,865 \cdot 10^{-4}} = 6166,48 \text{ кН}.$$

Продолжая анализ полученных формул для определения напряжения, видим, что в точке 1 (рис. 9.12) возникает максимальное растягивающее напряжение

$$\sigma_{\max, \rho} = F \left(-\frac{1}{4500} + \frac{4,5 \cdot 40,5}{2946375} + \frac{10 \cdot 30}{1590000} \right) = 0,28316 \cdot 10^{-4} F.$$

Теперь определим допускаемую силу F , исходя из первого условия (9.8):

$$\sigma_{\max, \rho} \leq R_{\rho}.$$

Отсюда

$$[F]_{\rho} = 7063,1 \text{ кН}.$$

Допускаемой нагрузкой на стержень будет меньшая из двух найденных, т. е.

$$[F]_c = 6166,48 \text{ кН}.$$

Построим ядро сечения. В соответствии с ранее изложенным в этом подразделе, чтобы определить эту область, необходимо задаться положением нейтральной оси и по формулам (9.24) определить координаты граничных точек (рис. 9.13).

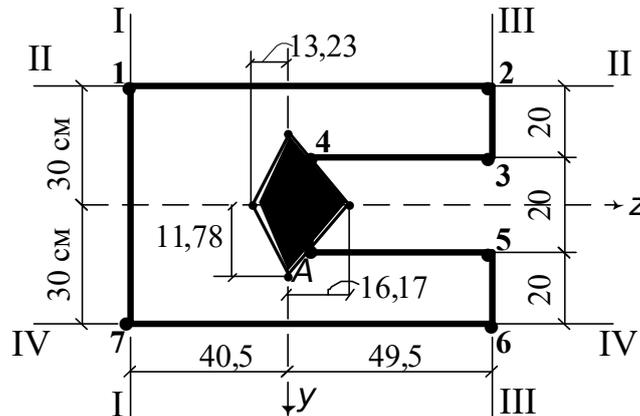


Рис. 9.13. К построению ядра сечения

I. Нейтральная линия проходит по грани 1-7;

$$a = -40,5 \text{ см}, \quad d = \infty;$$

$$z_{\text{я}} = -\frac{i_y^2}{a} = -\frac{654,75}{-40,5} = 16,17 \text{ см}; \quad y_{\text{я}} = 0.$$

II. Нейтральная линия проходит по грани 1-2;

$$a = \infty, \quad d = -30 \text{ см};$$

$$z_{\text{я}} = 0; \quad y_{\text{я}} = -\frac{i_z^2}{d} = -\frac{353,33}{-30} = 11,78 \text{ см}.$$

III. Нейтральная линия проходит по грани 2-3-5-6;

$$a = 49,5 \text{ см}, \quad d = \infty;$$

$$z_{я} = -\frac{654,75}{49,5} = -13,23 \text{ см}; \quad y_{я} = 0.$$

IV. Нейтральная линия проходит по грани 6-7;

$$a = \infty, \quad d = 30 \text{ см};$$

$$z_{я} = 0; \quad y_{я} = -\frac{353,33}{30} = -11,78 \text{ см}.$$

На рис. 9.13 показано ядро сечения.

9.5. Устойчивость сжатых стержней

9.5.1. Понятие об устойчивости и критической силе

Под устойчивостью понимается свойство системы сохранять свое состояние при внешних воздействиях. Например, балка AB (рис. 9.14, а) при действии заданной нагрузки прогибается во вполне определенном направлении на строго установленную величину, и ее изогнутая ось принимает единственно возможное (устойчивое) положение. Если система таким свойством не обладает, то она называется неустойчивой. Наиболее простым случаем является потеря устойчивости центрально сжатого стержня (рис. 9.14, б).

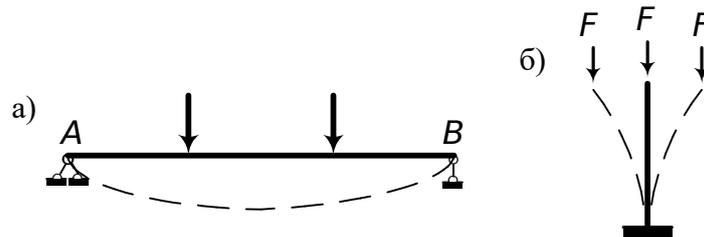


Рис. 9.14. К демонстрации устойчивого и неустойчивого положений

При небольшой нагрузке стойка остается прямой и испытывает простое сжатие. При постоянном возрастании нагрузки наступает такой момент, когда прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой и появляется возможность искривления стержня в любую из двух сторон в плоскости наименьшей жесткости.

Наименьшее значение сжимающей силы, при котором сжатый стержень теряет способность сохранять прямолинейную форму равновесия, называется *критическим*.

Система при потере устойчивости может вести себя по-разному. Обычно происходит переход к некоторому новому положению равновесия, что в подавляющем большинстве случаев сопровождается большими перемещениями, возникновением пластических деформаций или полным разрушением.

Наиболее ярко явление потери устойчивости проявляется в легких тонкостенных конструкциях. Поэтому при проектировании подобных конструкций одновременно с расчетом на прочность ведется и расчет на

устойчивость. Если не гарантирована устойчивость всего сооружения или его отдельных элементов, то теряет смысл и проверка на прочность, так как при потере устойчивости мгновенно меняется форма равновесия (прямая стойка искривляется), и почти всегда новая форма равновесия сопровождается быстрым нарастанием напряжений, которые в конечном счете и приводят к разрушению. Необходимо подчеркнуть, что потеря устойчивости может произойти и при напряжениях, значительно меньших тех, которые допустимы с точки зрения прочности конструкции.

Подтверждением этому является эксперимент с тонкой линейкой. При некотором сжимающем усилии линейка начинает изгибаться. Если усилие уменьшается, то она возвращается в исходное состояние.

Из многочисленных задач устойчивости конструкций в курсе сопротивления материалов обычно ограничиваются рассмотрением только задачи об устойчивости сжатого стержня, оставляя более сложные случаи для специального курса “Устойчивость и динамика сооружений”.

9.5.2. Формула Эйлера* для определения величины критической силы

Рассмотрим стержень AB , шарнирно опертый по концам (рис. 9.15). Предположим, что стержень под действием сжимающей силы немного изогнулся. Будем рассматривать бесконечно малые отклонения стойки от первоначального положения, при которых опускание точки A ничтожно мало, и им можно пренебречь.

Изгибающий момент в сечении X (рис. 9.15)

$$M_x = Fy. \quad (9.25)$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня имеет вид (см. п. 6.6)

$$EJ y'' = -M_x = -Fy. \quad (9.26)$$

* Леонард Эйлер (1707-1783) – родился в Базеле, в Швейцарии. Гениальный математик и механик, более 30 лет проработавший в России. Член Академий в Берлине и Санкт-Петербурге. Последние 13 лет работал при полной слепоте, диктуя свои работы ученикам.

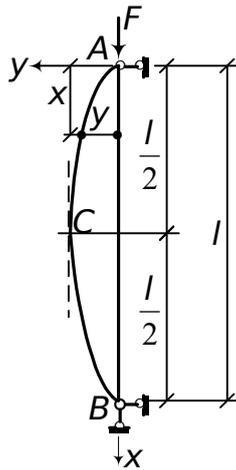


Рис. 9.15. К выводу формулы Эйлера

Обозначим $\kappa^2 = \frac{F}{EJ}$, тогда уравнение (9.26) принимает вид

$$y'' + \kappa^2 y = 0. \quad (9.27)$$

Решением этого уравнения является функция

$$y = C_1 \cos \kappa x + C_2 \sin \kappa x. \quad (9.28)$$

Продифференцируем (9.28) два раза по x :

$$y' = -\kappa C_1 \sin \kappa x + \kappa C_2 \cos \kappa x, \quad (9.29)$$

$$y'' = -\kappa^2 C_1 \cos \kappa x - \kappa^2 C_2 \sin \kappa x.$$

Если подставить (9.28) и второе уравнение (9.29) в уравнение (9.27), то можно убедиться, что (9.28) является решением (9.27).

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдем из граничных условий.

При $x=0$ $y=0$. Отсюда

$$C_1 = 0.$$

При $x=l$ $y=0$. Подставим это граничное условие в (9.28). В результате получим

$$y = C_2 \sin \kappa l = 0. \quad (9.30)$$

Если $C_2 = 0$, то y всегда равен нулю, а это противоречит принятому предположению, что стержень прогнулся, следовательно, $C_2 \neq 0$.

Тогда, чтобы удовлетворить условию (9.30), необходимо, чтобы

$$\sin \kappa l = 0.$$

Это будет в том случае, если

$$\kappa l = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi.$$

Случай $\kappa l = 0$ отбрасываем, так как здесь $l \neq 0$, а $\kappa = 0$. Но $\kappa^2 = \frac{F}{EJ}$. Чтобы было справедливо равенство $\kappa^2 = \frac{F}{EJ} = 0$, необходимо, чтобы $F = 0$, так как $E \neq 0$ и $J \neq 0$. Равенство $F = 0$ означает, что рассматриваемый стержень не имеет нагрузки, а это противоречит условиям задачи. Поэтому этот случай отбрасываем.

Возьмем $\kappa l = \pi$. Возведем в квадрат и подставим значение κ :

$$\frac{F}{EJ} l^2 = \pi^2.$$

Отсюда

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (9.31)$$

Это наименьшее значение силы F , называемое *критической силой*. Формула (9.31) была получена в 1744 г. великим математиком Леонардом Эйлером. Поэтому эту формулу называют формулой Эйлера, а определенную с ее помощью критическую силу – эйлеровой силой. Формула (9.31) показывает, что критическая сила пропорциональна наименьшей жесткости EJ и обратно пропорциональна квадрату длины стержня.

При выводе формулы (9.31) произвольная постоянная C_2 осталась неопределенной, т. е.

$$y = C_2 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (9.32)$$

Отсюда следует, что при потере устойчивости ось стержня искривляется по полуволне синусоиды, численные значения ординат которой неизвестны. Нас это не должно смущать, так как при расчете на устойчивость (см. п. 9.5.5) необходимо знать только величину критической нагрузки.

Рассмотрим другие случаи решений уравнения (9.30), а именно $\kappa l = 2\pi$, $\kappa l = 3\pi$, \dots , $\kappa l = n\pi$.

Для этих случаев

$$F_2 = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}, \quad F_3 = \frac{9\pi^2 EJ}{l^2}, \quad \dots, \quad F_n = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2}; \quad (9.33)$$

$$y_2 = C_2 \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad y_3 = C_2 \sin \frac{3\pi x}{l}, \quad \dots, \quad y_n = C_2 \sin \frac{n\pi x}{l},$$

т. е. второй критической силе соответствует форма потери устойчивости по двум полуволнам синусоиды, третьей – по трем полуволнам и т. д.

Таким образом, мы нашли целый ряд значений критических сил и соответствующие им формы потери устойчивости. Но если стойка теряет

устойчивость, изгибаясь по одной полуволне синусоиды (9.32) при наименьшей критической силе (9.31), то какой физический смысл имеют все прочие значения (9.33)? Причина несоответствия заключается в использовании приближенного выражения кривизны

$$\frac{1}{\rho} = y''.$$

Если воспользоваться точным ее выражением (см. п. 6.6)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}},$$

то получим нелинейное дифференциальное уравнение

$$EJ \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} = -Fu. \quad (9.34)$$

Решение этого уравнения показывает, что амплитуда искривления оси стержня меняется так, как показано на рис. 9.16.

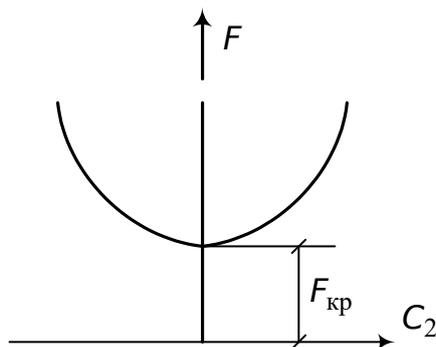


Рис. 9.16. Зависимость между амплитудой прогиба стержня и сжимающей силой

При $F < F_{кр}$ стержень имеет только одну – прямолинейную – форму равновесия, и эта форма равновесия устойчива.

При $F > F_{кр}$ наряду с прямолинейной имеет место другая – криволинейная – форма равновесия, и при этом прогибы стержня резко возрастают, возникают очень большие изгибающие моменты, которые в конечном счете вызовут его разрушение. Практическое значение имеет только сила, определяемая по (9.31), т. е. при $n = 1$, при которой возможна бифуркация равновесного положения. Все остальные критические силы отпадают, так как они являются следствием решения приближенного линейного уравнения устойчивости. Приближенное уравнение (9.27) пригодно для нахождения критического груза (9.31). Определять же изогнутую ось стержня и величины прогибов при нагрузке выше критической на основании этого уравнения нельзя.

9.5.3. Формула Эйлера при различных условиях закрепления концов стержня

Формула Эйлера получена в предположении шарнирного опирания стержня по концам. На практике встречаются и другие способы закрепления концов (рис. 9.17).

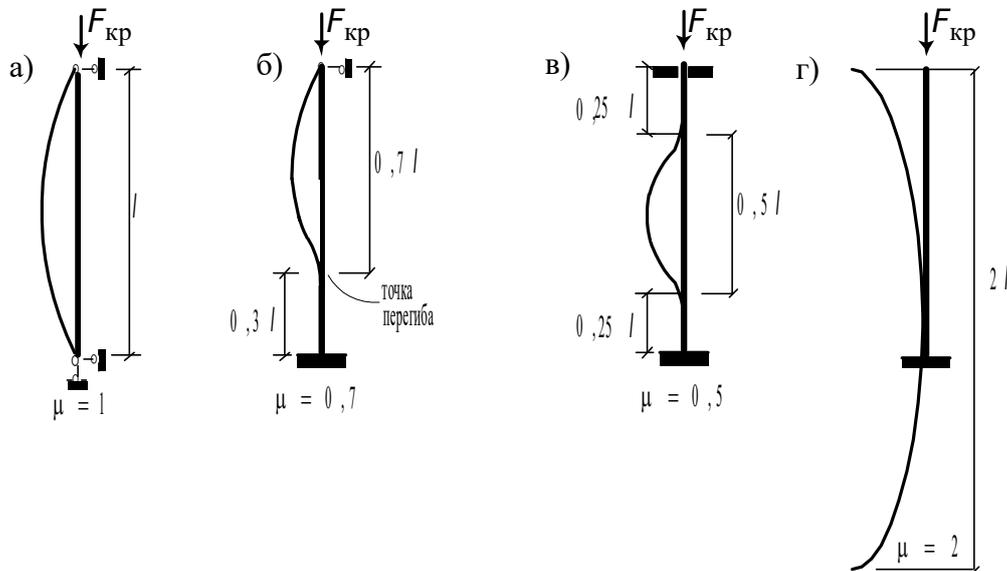


Рис. 9.17. Значение коэффициента приведенной длины для сжатых стержней при различных способах закрепления концов

Критическая сила для каждого из этих стержней может быть получена по обобщенной формуле

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l_{пр}^2}, \quad (9.35)$$

$$l_{пр} = l \cdot \mu, \quad (9.36)$$

где μ – коэффициент приведенной длины;

$l_{пр}$ – приведенная длина стержня.

Длину $l_{пр}$ можно интерпретировать как некоторую условную длину шарнирно опертого по концам стержня, для которого критическая сила определяется по (9.31).

Для случая, изображенного на рис. 9.17, б, изогнутая ось стержня имеет точку перегиба, расположенную на расстоянии $l/3$ от нижнего заземленного конца. Таким образом, чтобы свести рассматриваемый стержень к типу на рис. 9.17, а, нужно взять длину, равную $0,7l$.

Для стержня, показанного на рис. 9.17, в, при потере устойчивости упругая линия имеет две точки перегиба, расположенные в четвертях. Поэтому коэффициент приведенной длины равен $0,5$.

При потере устойчивости консольного стержня (рис. 9.17, г) верхний конец отклоняется на некоторую величину, нижний конец при этом остается вертикальным. Для получения полного соответствия со случаем рис. 9.17, а продолжим мысленно изогнутую ось стержня вниз. Тогда

форма потери устойчивости будет совпадать со случаем рис. 9.17, а, но $\mu = 2$.

9.5.4. Пределы применимости формулы Эйлера

Так как при действии критической нагрузки стержень все еще сохраняет первоначальную прямолинейную форму равновесия, то критические напряжения в нем можно найти как при простом сжатии, т. е.

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EJ}{l_{пр}^2 A}.$$

Упростим полученную формулу. Для этого заменим

$$J = i^2 A,$$

где i^2 – квадрат радиуса инерции (см. п. 2.3.3).

Тогда

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i^2}{l^2}.$$

Обозначим еще раз

$$\lambda = \frac{l_{пр}}{i} \tag{9.37}$$

и назовем эту величину гибкостью стержня. Окончательно формула для критических напряжений будет иметь вид

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \tag{9.38}$$

Формула Эйлера (9.31) была выведена в предположении, что деформирование материала подчиняется закону Гука (см. п. 3.9), т. е. напряжение (9.38), возникающее при критической нагрузке, не должно превышать предела пропорциональности, $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$.

Наименьшее значение гибкости стержня, при котором формулы (9.31) или (9.35) и (9.38) еще применимы, определяется следующим образом:

$$\lambda_{пред} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}. \tag{9.39}$$

Предельная гибкость, как видно из (9.39), зависит только от физико-механических свойств материалов стержня – его модуля упругости и предела пропорциональности. Значения предельных гибкостей для стержней, выполненных из некоторых наиболее часто встречающихся материалов, приведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Значения σ_T , $\sigma_{пц}$, a , b , $\lambda_{пред}$, λ_0

Материал	σ_T	$\sigma_{пц}$	a	b	$\lambda_{пред}$	λ_0
	МПа					
Сталь Ст2	220	190	264	0,7	105	62

Сталь Ст3	240	200	310	1,14	100	61
Сталь 20, Ст4	260	220	328	1,11	96	60
Сталь 25, Ст5, 36Л	280	240	350	1,15	92	57
Сталь 35, 45Л	320	270	398	1,43	90	55
Сталь 45	360	305	449	1,67	85	52
Сталь 50, 55Л	380	320	473	1,87	82	50
Сталь 10Г2СД, 14Г2, 15ГС, 14ХГС, 15ХСНД	350	300	429	1,52	83	50
Сталь 30ХНА, 35ХМФА, 30ГСА	850	700	1000	5,57	55	28
Дюралюминий Д16Т	320	255	406	2,83	53	30
Дюралюминий Д6Т	280	220	300	1,43	57	15
Сосна, ель	-	-	29,3	0,194	70	-
Чугун СЧ 12-28, СЧ 15-32 и др.	-	-	-	-	80	10

Итак, формулы (9.31), (9.35) для определения критической силы сжатого стержня применимы при условии $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$. Действительные критические силы и критические напряжения для стержней, гибкость которых ниже предельной, значительно меньше величин, определяемых по формуле Эйлера (9.31). Для таких стержней критические напряжения определяются по эмпирическим формулам. Так, критические напряжения для стальных, дюралюминиевых и деревянных стержней определяются по линейной эмпирической зависимости

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda, \quad (9.40)$$

которую называют формулой Ясинского*. Коэффициенты a и b , имеющие размерность напряжения, определяются экспериментально. Для некоторых материалов их значения даны в табл. 9.1.

При расчетах по формуле (9.40) приведенные длины стержней без большой погрешности можно принимать такими же, как и при расчетах по формуле Эйлера. Формула (9.40) применима при гибкости рассчитываемого стержня, лежащей в пределах $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{\text{пред}}$, где λ_0 – то значение гибкости, при котором критическое напряжение равно предельному (опасному) напряжению при чистом сжатии (без продольного изгиба). Для стержней из пластичных и хрупко-пластичных материалов указанное напряжение равно пределу текучести (физическому σ_T , или условному σ_{02} , см. разд. 3). Для хрупких материалов предельное напряжение равно пределу прочности при сжатии (σ_B , см. разд. 3). Значения $\lambda_{\text{пред}}$ и λ_0 даны в табл. 9.1.

* Феликс Станиславович Ясинский (1856-1899) – русский инженер и механик.

В специальной литературе по устойчивости есть и другие формулы для определения критической силы для стержней, работающих в упруго-пластической стадии. Эти формулы связаны с именами Ф.С. Ясинского, Ф. Энгессера, Т. Кармана, Ф. Шенли.

9.5.5. Практический расчет сжатых стержней

Как было показано ранее, сжатые стержни по методике их расчета делят на три группы:

- 1) стержни большой гибкости ($\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$), для которых критическое напряжение определяют по формуле (9.38);
- 2) стержни средней гибкости ($\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{\text{пред}}$), для них критическое напряжение определяют по эмпирической формуле (9.40);
- 3) стержни малой гибкости ($\lambda < \lambda_0$), для которых критические напряжения принимают постоянными, т.е. стержни рассчитывают не на устойчивость, а на прочность.

Как видно из табл. 9.1, для сжатых стержней большой гибкости применение стали с высокими механическими характеристиками не оправдано, так как величина модуля упругости E почти одинакова для сталей разных марок и, следовательно, применение стали более высокого качества не приводит к повышению $\sigma_{\text{кр}}$.

Нельзя допустить, чтобы в сжатых стойках возникли нормальные напряжения, равные критическим. Поэтому необходимо от критических напряжений, определяемых при большой гибкости по формуле (9.38), а при малой – по формуле Ясинского (9.40), перейти к допускаемым напряжениям при продольном изгибе. Для этого нужно критические напряжения разделить на коэффициент запаса K . Последний принимают равным: для металлов $K = 2 \dots 3$, для дерева $K = 3 \dots 4$. Этим коэффициентом запаса учитывается, кроме чистого продольного изгиба, еще целый ряд побочных факторов: небольшой возможный эксцентриситет приложения нагрузки, небольшое начальное искривление стержня, неоднородность материалов стержней и др. Сравнивая допускаемое напряжение при продольном изгибе с допускаемым напряжением при простом сжатии, отметим, что допускаемое напряжение при продольном изгибе составляет лишь некоторую долю от допускаемого напряжения при простом сжатии.

Обозначив $[\sigma]_{\text{уст}} = \varphi[\sigma]_c$, будем производить расчет стержней на продольный изгиб по той же формуле, что и на простое сжатие:

$$\sigma = \frac{F}{A \cdot \varphi} \leq [\sigma]_c. \quad (9.41)$$

Здесь σ – нормальное напряжение, возникающее в поперечном сечении стержня; F – сила, сжимающая стержень; A – площадь поперечного сечения стержня без учета местных ослаблений (брутто), так как местные ослабления (отверстия под заклепки или болты, канавки

и т. п.) не оказывают заметного влияния на значение критической силы; $[\sigma]_c$ – основное допускаемое напряжение на сжатие, т. е. установленное без опасности продольного изгиба; Φ – коэффициент продольного изгиба, величина которого зависит от материала и гибкости стержня (табл. 9.2). Он определяет степень снижения допускаемого напряжения при продольном изгибе.

При расчете по методу предельных состояний (см. разд. 3) условие прочности (9.41) приобретает вид

$$\sigma_{\text{расч}} = \frac{F}{\Phi^* A_{\text{бр}}} \leq R, \quad (9.42)$$

где $\sigma_{\text{расч}}$ – расчетное напряжение, $\sigma_{\text{расч}} = \frac{\sigma}{\Phi^*}$; R – расчетное сопротивление материала; Φ^* – коэффициент продольного изгиба при расчете по методу предельных состояний (устанавливается нормами (см. табл. 9.2) в зависимости от расчетного сопротивления).

Основные допускаемые напряжения на сжатие при расчете по формуле (9.41) приведены в табл. 9.3.

Таблица 9.2

Значения коэффициентов продольного изгиба

Гибкость $\lambda = \frac{l_{\text{пр}}}{i}$	Сталь марок			Чугун марок		Дюра- люминий Д16Т	Дерево (сосна, ель)	Сталь с расчетным сопротив- лением $R=240$ МПа СНИП II-23-81
	Ст3 Ст4	Ст5	14Г2, 15ГС, 10Г2С, 10Г2СД, 15ХСНД	СЧ 12-28 СЧ 15-32 СЧ 18-36 СЧ 21-40	СЧ 24-44 СЧ 28-48			
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95	0,999	0,99	0,987
20	0,97	0,96	0,95	0,91	0,87	0,998	0,97	0,962
30	0,95	0,93	0,92	0,81	0,75	0,835	0,93	0,931
40	0,92	0,90	0,89	0,69	0,60	0,700	0,87	0,894
50	0,89	0,85	0,84	0,57	0,43	0,568	0,80	0,852
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32	0,455	0,71	0,805
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23	0,353	0,61	0,754
80	0,75	0,67	0,63	0,26	0,18	0,269	0,49	0,686
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14	0,212	0,38	0,612
100	0,60	0,50	0,46	0,16	0,12	0,172	0,31	0,542
110	0,52	0,43	0,39			0,142	0,25	0,478
120	0,45	0,37	0,33			0,119	0,22	0,419
130	0,40	0,32	0,29			0,101	0,18	0,364
140	0,36	0,28	0,25			0,087	0,16	0,315
150	0,32	0,25	0,23			0,076	0,14	0,276
160	0,29	0,23	0,21				0,12	0,244
170	0,26	0,21	0,19				0,11	0,218

180	0,23	0,19	0,17				0,10	0,196
190	0,21	0,17	0,15				0,09	0,177
200	0,19	0,15	0,13				0,08	0,161
210	0,17	0,14	0,12					0,147
220	0,16	0,13	0,11					0,135

Таблица 9.3.

Значения допускаемых напряжений на сжатие

Материал	$[\sigma]_c$, МПа
Сталь Ст3, Ст4	160
Сталь Ст5	175
Сталь 14Г2, 15ГС, 10Г2СД, 15ХСНД	210
Дюралюминий Д16Т	170
Чугун СЧ 12-28, СЧ 15-32	130
Чугун СЧ 18-36, СЧ 21-40	150
Чугун СЧ 24-44, СЧ 28-48	170
Сосна, ель	100
Дуб	130

В формулы (9.41) и (9.42) входят две неизвестные величины φ и A . Они связаны между собой, однако зависимость между ними не выражается простой формулой, так что исключить одну из этих величин и выразить ее через другую невозможно. Поэтому если задана сжимающая сила, а также все геометрические характеристики стержня, то проверка прочности на сжатие с учетом продольного изгиба каких-либо затруднений не вызывает. А если необходимо подобрать сечение, то приходится применять последовательные приближения. Сущность этого подхода поясним на примере.

Задан стальной стержень из Ст3 длиной l , который сжимается силой F . Требуется найти размеры поперечного сечения, форма которого также задана (рис. 9.18); $[\sigma]_c=160$ МПа.

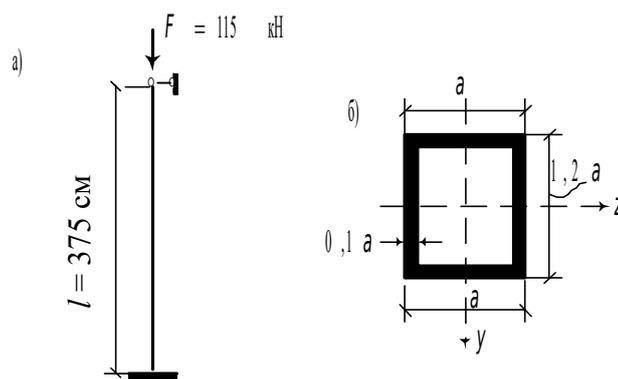


Рис. 9.18. Расчетная схема стержня (а) и схема его поперечного сечения (б)

Найдем геометрические характеристики сечения:

площадь $A = 0,4 a^2$;

минимальный момент инерции $J_{\min} = J_y = 0,0573 a^4$;

минимальный радиус инерции $i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = 0,379 a$.

Из формулы (9.41) найдем

$$a = \sqrt{\frac{F}{0,4 \varphi [\sigma]_c}}.$$

Здесь, как и отмечалось ранее, неизвестными являются φ и a . Для решения поставленной задачи применяем метод последовательных приближений.

1 приближение. Зададим $\varphi = 0,19$ (см. табл. 9.2). Можно было взять любое другое значение φ из этой таблицы. Во многих случаях для первого приближения рекомендуется принимать $\varphi = 0,5$.

$$\text{Вычисляем } a = 9,72 \text{ см}; \quad i_{\min} = 3,68 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{l_{\text{пр}}}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 375}{3,68} = 71.$$

По табл. 9.2 находим коэффициент $\varphi = 0,81$.

Найденное значение φ не равно принятому в первом приближении.

$$2 \text{ приближение. Принимаем } \varphi_{\text{II}} = \frac{\varphi_{\text{I}} + \varphi}{2} = \frac{0,19 + 0,81}{2} = 0,5.$$

$$\text{Повторяем расчет: } a = 5,99 \text{ см}; \quad i_{\min} = 2,27 \text{ см}; \quad \lambda = 115,6; \quad \varphi = 0,485.$$

$$3 \text{ приближение. Принимаем } \varphi_{\text{III}} = \frac{\varphi_{\text{II}} + \varphi}{2} = \frac{0,5 + 0,485}{2} = 0,49.$$

$$\text{Повторяем расчет: } a = 6,06 \text{ см}; \quad i_{\min} = 2,297 \text{ см}; \quad \lambda = 114; \quad \varphi = 0,49.$$

Так как принятое значение φ в третьем приближении ($\varphi_{\text{III}} = 0,49$) и найденное по табл. 9.2 в результате расчета ($\varphi = 0,49$) совпадают с наперед заданной точностью (обычно 1 %), то расчет считается законченным, и размер a подобраным.

9.5.6. Учет влияния сдвигов при определении критической силы

В строительной практике и особенно в мостостроении широко применяют стержни, состоящие из отдельных элементов, соединенных между собой решеткой или планками. Критическая сила для таких составных стержней зависит как от геометрических размеров ветвей, так и

от сечения элементов решетки. При определении деформаций в стержнях наряду с учетом изгиба иногда необходимо учитывать также влияние сдвигов.

Рассмотрим задачу об учете сдвигов в сплошном стержне.

Прогиб стержня (рис. 9.15) в любом сечении X представим как сумму прогибов:

$$y = y_1 + y_2, \quad (9.43)$$

где y_1 – прогиб, образовавшийся в результате изгиба; y_2 – прогиб, образовавшийся от сдвигов.

Продифференцируем уравнение (9.43) по X . В результате получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}. \quad (9.44)$$

Относительный угол сдвига равен (см. разд. 1)

$$\gamma = \frac{Q}{GA},$$

следовательно, с учетом того, что $\frac{dM}{dx} = Q$ (см. разд. 1), имеем

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{GA} \frac{dM}{dx}, \quad \frac{d^2y_2}{dx^2} = \frac{1}{GA} \frac{d^2M}{dx^2}. \quad (9.45)$$

Изгибающий момент в сечении стержня (рис. 9.15, (9.25)) равен

$$M_x = Fy.$$

Дифференцируя дважды по X , получим

$$\frac{d^2M}{dx^2} = F \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (9.46)$$

С учетом (9.46) уравнение (9.45) преобразовывается к виду

$$\frac{d^2y_2}{dx^2} = \frac{F}{GA} \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (9.47)$$

Известно (см. (9.26)), что

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -\frac{Fy}{EJ}. \quad (9.48)$$

Подставим (9.48) и (9.47) в (9.44), предварительно продифференцировав это выражение по X . Тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{d^2y_2}{dx^2} = -\frac{Fy}{EJ} + \frac{F}{GA} \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Отсюда получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$y'' + \kappa_1^2 y = 0, \quad (9.49)$$

где

$$\kappa_1^2 = \frac{F}{EJ \left(1 - \frac{F}{GA}\right)}. \quad (9.50)$$

Решением этого уравнения будет (9.28). Далее, следуя п. 9.5.2, получим

$$F = F_{кр} \frac{1}{1 + \frac{F_{кр}}{GA}}. \quad (9.51)$$

Обозначив

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{F_{кр}}{GA}},$$

преобразуем эту формулу к следующему виду:

$$F = \alpha F_{кр}. \quad (9.52)$$

Оценим величину коэффициента α для сплошного сечения. Согласно п. 9.5.4 $\frac{F_{кр}}{A}$ – критическое напряжение. Примем его равным пределу пропорциональности для стали, т. е. $\sigma_{пл} = 200$ МПа. Модуль сдвига примем равным $8 \cdot 10^4$ МПа. Тогда найдем

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{1}{400}}$$

и сделаем вывод о том, что для сплошного сечения сдвиги очень мало влияют на величину критической силы.

9.6. Расчет внецентренно сжатого гибкого стержня

Предположим, что прямой стержень нагружен двумя сжимающими силами, приложенными с эксцентриситетом e_0 (рис. 9.19).

Будем считать, что силы лежат в одной из главных плоскостей инерции и вызывают плоский изгиб стержня.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня имеет вид

$$EJ y'' = -M_x = -F(e_0 + y). \quad (9.53)$$

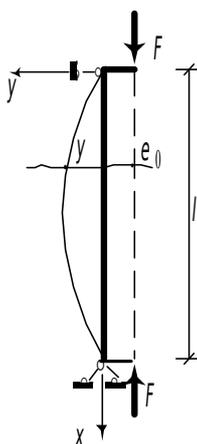


Рис. 9.19. Стержень, сжатый эксцентрично приложенными силами

Обозначив, как и ранее (см. п. 9.5.6),

$$\kappa^2 = \frac{F}{EJ},$$

получим вместо (9.53) следующее уравнение:

$$y'' + \kappa^2 y = -\kappa^2 e_0. \quad (9.54)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид (см. также п. 9.5.2)

$$y_x = C_1 \cos \kappa x + C_2 \sin \kappa x - e_0. \quad (9.55)$$

Постоянные C_1 и C_2 найдем из граничных условий:

при $x=0$ $y_0=0$.

Отсюда получаем

$$C_1 = e_0. \quad (9.56)$$

Второе граничное условие:

при $x=l$ $y_l=0$.

Отсюда находим

$$C_2 = \frac{e_0 (1 - \cos \kappa l)}{\sin \kappa l}. \quad (9.57)$$

Найденные значения C_1 и C_2 подставляем в (9.55). В результате имеем

$$y_x = e_0 \left[\cos \kappa x + \frac{1 - \cos \kappa l}{\sin \kappa l} \sin \kappa x - 1 \right]. \quad (9.58)$$

Максимальный прогиб будет посередине высоты стойки, т.е. при $x = l/2$:

$$y_{l/2} = f = e_0 \left[\cos \kappa \frac{l}{2} + \frac{1 - \cos \kappa l}{\sin \kappa l} \sin \kappa \frac{l}{2} - 1 \right].$$

Зависимость между прогибом f и сжимающей силой графически представлена на рис. 9.20. Отсюда видно, что по мере приближения силы

F к критическому значению прогиб стержня неограниченно увеличивается независимо от эксцентриситета e_0 .

Конечно, прогиб стержня не может быть бесконечно большим. Такой результат оказался возможным только благодаря тому, что при задании дифференциального уравнения (9.53) было использовано приближенное выражение для кривизны оси стержня (см. (6.36)). Если же воспользоваться точным выражением (9.34), то решение задачи сведется к решению нелинейного дифференциального уравнения, из которого следует, что прогиб стержня при любом значении сжимающей силы имеет конечное значение. Сравнение решений точного и приближенного уравнений показывает, что при значениях сжимающей силы, меньших $0,8F_{кр}$, указанные решения практически совпадают, и поэтому для таких случаев вполне оправданным является применение решения (9.58).

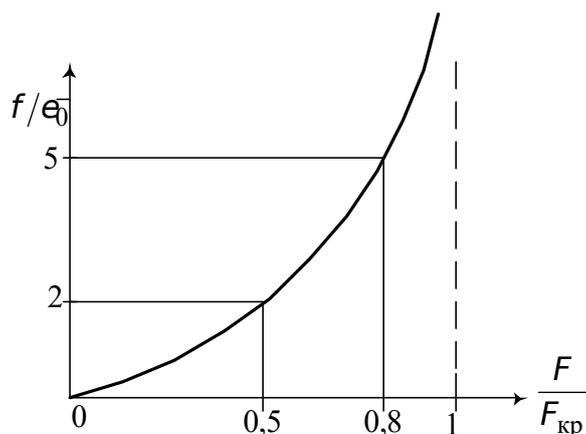


Рис. 9.20. Зависимость между безразмерной сжимающей силой и безразмерным максимальным прогибом эксцентрично сжатого стержня

При расчете на прочность стержней, сжимаемых внецентренно приложенными силами, сначала подбирается сечение, исходя из условий устойчивости (9.41):

$$A \geq \frac{F}{[\sigma]_{сф}}.$$

Затем при заданной величине сжимающей силы F при помощи уравнения (9.58) определяются наибольший прогиб и момент

$$M = F(f + e_0).$$

Проверку прочности осуществляют по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{F(f + e_0)}{W} \leq [\sigma].$$

9.7. Продольно-поперечный изгиб

Рассмотрим шарнирно опертую балку, нагруженную поперечной нагрузкой и продольными силами P (рис. 9.21). Начало координат примем в точке A . Ось Y направим вниз, а ось X – вправо.

Изгибающий момент в любом сечении балки равен

$$M_x = M_x^0 + Py, \quad (9.59)$$

где M_x^0 – изгибающий момент от поперечной нагрузки.

Продифференцируем уравнение (9.59) дважды по X :

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = \frac{d^2 M_x^0}{dx^2} + P \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (9.60)$$

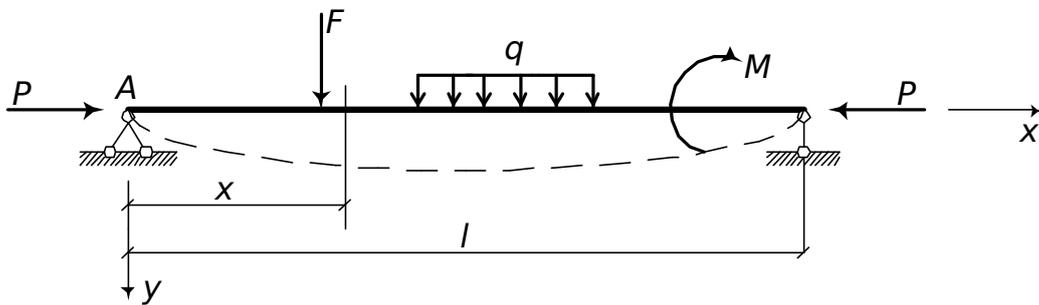


Рис. 9.21. Расчетная схема балки, находящейся под действием поперечных и продольных нагрузок

Будем предполагать, что поперечная нагрузка представлена сосредоточенными силами, равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q и сосредоточенным моментом. Тогда

$$\frac{d^2 M_x^0}{dx^2} = -q. \quad (9.61)$$

К этому результату мы пришли, записав уравнение для момента M_x^0 от перечисленных силовых факторов и взяв вторую производную от полученных функций. Формула (9.61) была получена нами ранее (см. п. 1.6).

С учетом (9.61) уравнение (9.60) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = P \frac{d^2 y}{dx^2} - q.$$

Учитывая, что $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EJ}$, найдем

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = -P \frac{M_x}{EJ} - q.$$

Введем обозначение

$$\kappa^2 = \frac{P}{EJ}.$$

Тогда приходим к следующему неоднородному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + \kappa^2 M = -q. \quad (9.62)$$

Общим решением этого дифференциального уравнения будет функция

$$M_x = C_1 \cos \kappa x + C_2 \sin \kappa x - \frac{q}{\kappa^2}. \quad (9.63)$$

В том, что эта функция является решением (9.62), можно убедиться, если взять вторую производную от (9.63) и вместе с (9.63) подставить в (9.62).

Постоянные интегрирования выразим через начальные параметры M_0 и Q_0 – изгибающий момент и поперечную силу в начале координат.

Вначале запишем уравнение для поперечной силы:

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = -\kappa C_1 \sin \kappa x + \kappa C_2 \cos \kappa x. \quad (9.64)$$

Граничные условия:

$$\text{при } x=0 \quad M_x = M_0;$$

$$\text{при } x=0 \quad Q_x = Q_0.$$

Отсюда найдем

$$\begin{aligned} C_1 &= M_0 + \frac{q}{\kappa^2}, \\ C_2 &= \frac{Q_0}{\kappa}. \end{aligned} \quad (9.65)$$

Подставим найденные постоянные интегрирования (9.65) в (9.63) и (9.64). В результате получим

$$M_x = M_0 \cos \kappa x + \frac{Q_0}{\kappa} \sin \kappa x - \frac{q}{\kappa^2} (1 - \cos \kappa x), \quad (9.66)$$

$$Q_x = -\kappa M_0 \sin \kappa x + Q_0 \cos \kappa x - \frac{q}{\kappa} \sin \kappa x. \quad (9.67)$$

Запишем уравнения (9.66) и (9.67) для общего случая нагружения балки (рис. 9.22) поперечной нагрузкой:

$$M_x = M_0 \cos \kappa x + \frac{Q_0}{\kappa} \sin \kappa x \Big|_1 - \frac{q}{\kappa^2} [1 - \cos \kappa(x-a)] \Big|_2 + \frac{q}{\kappa^2} [1 - \cos \kappa(x-b)] \Big|_3 - \frac{F}{\kappa} \sin \kappa(x-c) \Big|_4 + m \cos \kappa(x-d) \Big|_5; \quad (9.68)$$

$$Q_x = -\kappa M_0 \sin \kappa x + Q_0 \cos \kappa x \Big|_1 - \frac{q}{\kappa} \sin \kappa(x-a) \Big|_2 + \frac{q}{\kappa} \sin \kappa(x-b) \Big|_3 - F \cos \kappa(x-c) \Big|_4 - \kappa m \sin \kappa(x-d) \Big|_5. \quad (9.69)$$

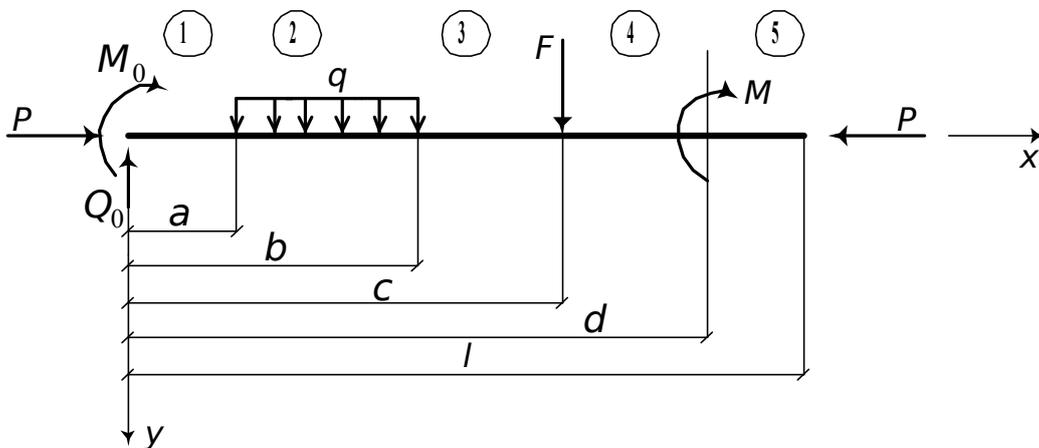


Рис. 9.22. Схема нагружения балки поперечной нагрузкой

После решения уравнений (9.66), (9.67) находим изгибающий момент и поперечную силу в любом сечении балки. При этом поперечные нагрузки и продольные силы, как и начальные параметры, предполагаются заданными.

Теперь можно из формулы (9.59) найти прогиб в любом сечении:

$$y_x = \frac{M_x - M_x^0}{P}.$$

Входящий в эту формулу изгибающий момент от поперечной нагрузки необходимо предварительно определить. Это не составляет затруднений. Проверку прочности балки следует производить по формуле внецентренного сжатия (см. п. 9.4), т. е.

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M_x}{W} \leq [\sigma].$$

При малых значениях сжимающей силы P (при малых κ) полученное решение совпадает с тем, которое дает поперечная нагрузка. По мере роста силы P изгибающий момент (9.68) резко возрастает.

При сложных видах поперечной нагрузки (рис. 9.22) определение

изгибающих моментов становится трудоемким. В таких случаях удобным оказывается применить приближенные, менее точные, но более простые приемы расчета.

Представим прогиб в виде суммы:

$$y = y_0 + \Delta y. \quad (9.70)$$

Здесь y_0 – прогиб, вызванный только поперечной нагрузкой (без учета силы P); Δy – дополнительный прогиб, появившийся в результате действия сжимающей силы P .

Обратимся к уравнению, которое мы ранее неоднократно использовали:

$$EJ \Delta y'' = -Py. \quad (9.71)$$

Предположим, что прогиб Δy описывается синусоидой (синусоида является формой потери устойчивости шарнирно опертого по концам центрально сжатого стержня):

$$\Delta y = f \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Тогда

$$\Delta y'' = -\frac{\pi^2}{l^2} f \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Из уравнения (9.71) имеем

$$\frac{\pi^2}{l^2} \Delta y = \frac{P}{EJ} y.$$

С учетом (9.70) найдем

$$y = \frac{y_0}{1 - \frac{P}{P_{кр}}}, \quad \text{где } P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Предполагая, что изгибающие моменты пропорциональны прогибам, можно записать

$$M_x = \frac{M_x^0}{1 - \frac{P}{P_{кр}}}. \quad (9.72).$$

Проверим полученную формулу (9.72) на примере шарнирно опертой балки с равномерно распределенной нагрузкой q . Пусть продольная сила $P = 0,5P_{кр}$. Тогда

$$M_{\max} = 0,25ql^2.$$

Теперь посмотрим, что дает точная формула (9.66):

$$k = \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \sqrt{\frac{P_{кр}}{2EJ}} = \frac{\pi}{l\sqrt{2}}, \quad M_{\max} = 0,252ql^2.$$

Сопоставляя полученные значения, видим, что они практически совпадают.

Раздел 10

РАСЧЕТ НЕКОТОРЫХ КОНСТРУКЦИЙ, ИСПЫТЫВАЮЩИХ ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Все тела имеют протяженность в трех измерениях, поэтому, казалось бы, плоская задача на практике не может встречаться. Однако это не так. Как показано в разд. 4, целый класс задач удается свести к плоским, которые характеризуются тем, что одну из осей координат можно отбросить и все явление рассматривать как бы происходящим в одной плоскости. Ниже будут рассмотрены такого рода задачи, имеющие важное практическое значение.

10.1. Дифференциальные уравнения равновесия

Как было показано в разд. 4, при плоском напряженном состоянии составляющие напряжений $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ равны нулю, другие три составляющие напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ не зависят от координаты Z , т. е. остаются постоянными по всей толщине элемента. Рассмотрим изменение составляющих этих напряжений с изменением положения точки. С этой целью выведем уравнения равновесия для малого прямоугольного параллелепипеда со сторонами dx, dy и l (рис. 10.1).

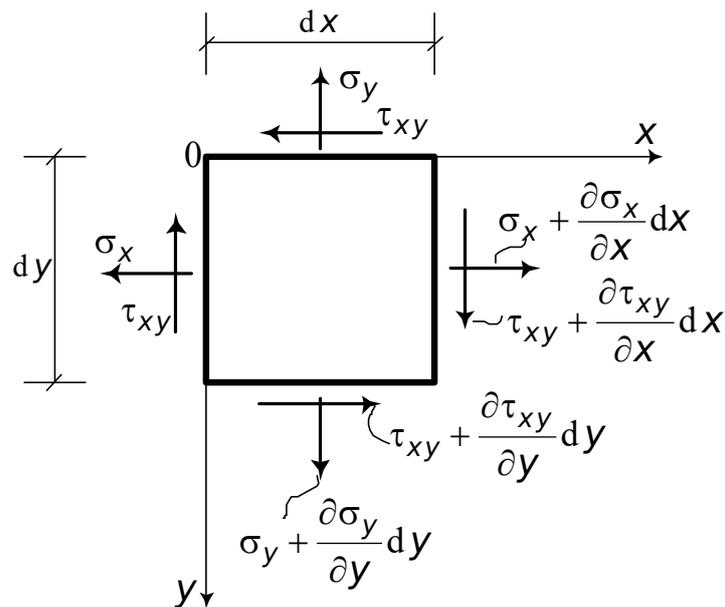


Рис. 10.1. Схема напряжений, действующих на малый прямоугольный параллелепипед

На левой и верхней гранях выделенного параллелепипеда нормальные и касательные напряжения являются, в общем случае, функциями трех координат X, Y, Z . При переходе, например, к правой грани координата X получает приращение dx . Тогда нормальное напряжение выразится следующим образом:

$$\sigma'_x = f(x + dx, y, z).$$

Последнее выражение разложим в ряд:

$$f(x + dx, y, z) = f(x, y, z) + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} dx^2 + \dots$$

Все члены с малыми величинами высших степеней, кроме первой, отбрасываем. В результате получаем

$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx.$$

Рассуждая подобным же образом, найдем нормальные и касательные напряжения на остальных гранях (рис. 10.1). Следует отметить, что объемная сила, действующая на элемент, которой мы пренебрегли при рассмотрении равновесия треугольной призмы (см. п. 4.2), должна быть теперь принята во внимание, так как она будет здесь величиной такого же порядка, что и члены, зависящие от рассматриваемых изменений составляющих напряжения. Обозначим составляющие этой силы, отнесенные к единице объема, через X и Y . Тогда проекции объемной силы, приходящейся на весь объем, равны $X dx dy$ и $Y dx dy$. Если объемной силой является лишь сила тяжести (именно этот случай мы будем рассматривать при практических расчетах) и ось Y направлена вниз (см. рис. 10.1), то

$$\begin{aligned} X &= 0, \\ Y &= \rho g, \end{aligned} \tag{10.1}$$

где ρ – плотность материала (количество массы, заключенной в единице объема); g – ускорение силы тяжести.

Спроектируем все силы, действующие на выделенный элемент, сначала на ось X , а затем на ось Y и учтем (10.1). В результате получим дифференциальные уравнения равновесия для плоской задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g &= 0. \end{aligned} \tag{10.2}$$

10.2. Условия на контуре

Уравнения (10.2) должны быть удовлетворены во всех точках внутри объема тела. Составляющие напряжений изменяются по объему тела и, когда мы подходим к контуру, они должны быть таковы, чтобы находиться в равновесии с внешними силами, приложенными к контуру плоского тела. Таким образом, внешние силы можно рассматривать как продолжение внутреннего распределения напряжений.

Из (4.21), (4.22) получаем условия на поверхности тела:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m, \\ \bar{Y} &= \sigma_y \cdot m + \tau_{xy} \cdot l, \end{aligned} \tag{10.3}$$

где \bar{X} и \bar{Y} – составляющие поверхностных сил, отнесенные к единице площади; $l = \cos(Nx)$, $m = \cos(Ny)$ – косинусы углов между нормалью N к рассматриваемой площадке и соответственно осями X и Y .

В случае прямоугольной пластинки (рис. 10.2) условия (10.3) упрощаются.

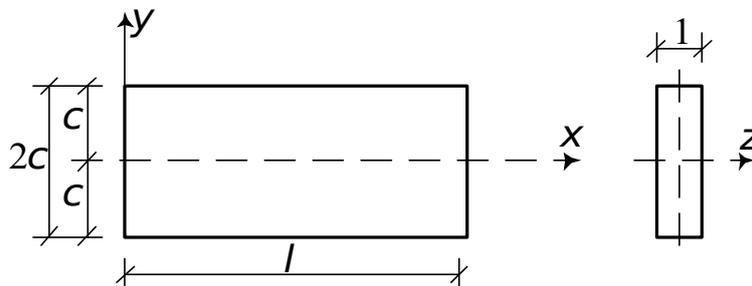


Рис. 10.2. Схема прямоугольной пластинки

Для горизонтальных сторон пластинки $l = 0$, $m = \pm 1$, силы равны

$$\bar{X} = \pm \tau_{xy}, \quad \bar{Y} = \pm \sigma_y.$$

Для вертикальных сторон $l = \pm 1$, $m = 0$, силы равны

$$\bar{X} = \pm \sigma_x, \quad \bar{Y} = \pm \tau_{xy}.$$

Положительный знак следует брать тогда, когда направление нормали совпадает с положительным направлением оси, и отрицательный знак – при противоположном направлении. Таким образом, на контуре составляющие напряжения становятся равными составляющим поверхностных сил, отнесенным к единице площади контура.

10.3. Условия совместности

Задачей теории упругости обычно является определение напряженного состояния в теле, подвергающемся воздействию данных сил. В случае плоской задачи необходимо решить дифференциальные уравнения (10.2), и решение должно быть таково, чтобы были удовлетворены условия на контуре (10.3). Указанных уравнений, содержащих три составляющих напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} , недостаточно для определения этих составляющих. Задача является статически неопределимой. Для того чтобы получить решение, следует рассмотреть, кроме того, и упругую деформацию. Математическое выражение условия совместности напряженного состояния с существованием непрерывных функций U и V , определяющих деформацию, получится на основании выражений (1.20), (1.21), (1.23):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Эти три составляющие деформации выражаются при помощи двух функций U и V . Следовательно, последние не могут быть взяты

произвольно, и имеется определенная зависимость между составляющими деформации, которую мы и получим.

Дифференцируя первое из этих выражений дважды по Y , второе – дважды по X , третье – один раз по Y и один раз по X , получим

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (10.4)$$

Полученная дифференциальная зависимость (10.4) называется условием совместности.

Выразим условие совместности через составляющие напряжения. Для этого подставим зависимости закона Гука при плоском напряженном состоянии (4.6), (4.7), (4.5) в (10.4). В результате найдем

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu \sigma_x) = \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} [2(1 + \nu)]. \quad (10.5)$$

Выразим правую часть уравнения (10.5) через функции от нормальных напряжений. Для этого дифференцируем первое из уравнений равновесия (10.2) по X , второе – по Y и складываем:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right). \quad (10.6)$$

Подставляем (10.6) в (10.5) и после простейших преобразований приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0. \quad (10.7)$$

Полученное уравнение можно записать и так:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (10.8)$$

где $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ – оператор Лапласа второго порядка, который показывает, что нужно взять вторые производные от $(\sigma_x + \sigma_y)$ отдельно по X и Y и сложить их.

Отметим, что уравнение совместности (10.8) справедливо и для плоской деформации. В этом можно убедиться, если подставить выражения для закона Гука при плоской деформации (4.2), (4.3), (4.4) в (10.4) и проделать те же преобразования. Однако это будет наблюдаться только для рассматриваемой постановки плоской задачи, когда единственной объемной силой является масса тела.

10.4. Функция напряжений

Решение плоских задач в двух измерениях сводится к интегрированию дифференциальных уравнений равновесия (10.2) вместе с уравнением совместности (10.8) и условиями на контуре (10.3). Этой

системы уравнений обычно достаточно для полного выяснения распределения напряжений в плоской задаче.

Обычным примером решения этих уравнений является введение новой функции, которая называется функцией напряжений:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \rho g x. \quad (10.9)$$

Нетрудно убедиться, что уравнения равновесия будут удовлетворены тождественно. Таким образом, мы получили целый ряд решений уравнений равновесия (10.2). Действительным решением будет то, которое удовлетворяет также уравнению совместности (10.8). Подставим функцию напряжений (10.9) в уравнение (10.8). В результате получим

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (10.10)$$

Уравнение (10.10) может быть записано в сокращенном виде с применением оператора Лапласа (см. (10.8)):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (10.11)$$

или

$$\nabla^2 (\nabla^2 \varphi) = 0.$$

Итак, у нас было сначала восемь совместно решаемых уравнений: два уравнения равновесия (10.2); три уравнения, связывающие деформации и перемещения (1.20), (1.21) и (1.23), и три физические уравнения (1.27). Далее, исключив перемещения, мы перешли к шести уравнениям (10.4), (10.8) и (1.27). Теперь же осталось только одно уравнение (10.10) или (10.11). Решая какую-нибудь задачу, мы должны подобрать функцию φ так, чтобы она удовлетворяла уравнению (10.10) и условиям на контуре (10.3). Подобрав функцию φ , мы можем получить соответствующие формулы для напряжений и найти напряжения в любой точке упругого тела.

Отметим также, что уравнение (10.10) носит название бигармонического уравнения.

10.5. Решение дифференциального уравнения плоской задачи при помощи полиномов

Как было показано в предыдущем подразделе, необходимо подобрать функцию φ , которая удовлетворяла бы дифференциальному уравнению (10.10) и условию на контуре. Обычно это бывает затруднительно, а иногда и вообще не удается сделать. Поэтому попробуем сначала решить обратную задачу. Будем задаваться видом функции φ и исследовать, какому случаю напряженного состояния она соответствует.

Зададимся функцией напряжений в виде следующего выражения:

$$\varphi = 2xy + \frac{4}{3}y^3 + 6x^3y - 3y^2. \quad (10.12)$$

Дифференциальное уравнение (10.10) тождественно удовлетворяется. Получим формулы для определения нормальных и касательных напряжений в любой точке пластинки без учета ее собственного веса (рис. 10.3):

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 36xy; \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 8y - 6; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -2(1 + 9x^2).$$

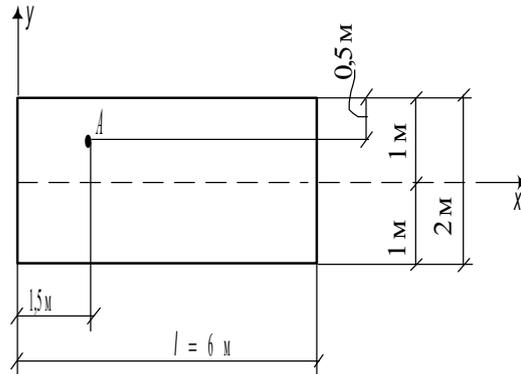


Рис. 10.3. Схема заданной пластинки

Определим внешние силы, приложенные к граням пластинки. При этом используем условия на поверхности тела (10.3). Принимая во внимание сказанное в п. 10.2, найдем внешние силы.

Левая грань: $x = 0$; $\sigma_x = 8y - 6$; $\sigma_y = 0$;
нормаль к площадке не совпадает с положительным направлением оси X , следовательно, $\tau_{xy} = -2$;

$$\bar{X} = -(8y - 6), \quad \bar{Y} = 2.$$

Верхняя грань: $y = 1$ м; $\sigma_y = 36x$; $\sigma_x = 2$; $\tau_{xy} = -2(1 + 9x^2)$;
нормаль к площадке совпадает с положительным направлением оси Y , следовательно, внешние силы

$$\bar{X} = -2(1 + 9x^2), \quad \bar{Y} = 36x.$$

Правая грань: $x = 6$ м; $\sigma_y = 216y$; $\sigma_x = 8y - 6$; $\tau_{xy} = -650$;
нормаль к площадке совпадает с положительным направлением оси X , следовательно, внешние силы равны

$$\bar{X} = 8y - 6, \quad \bar{Y} = -650.$$

Нижняя грань: $y = -1$ м; $\sigma_y = -36x$; $\sigma_x = -14$; $\tau_{xy} = -2(1 + 9x^2)$;
внешние силы:

$$\bar{X} = 2(1 + 9x^2), \quad \bar{Y} = 36x.$$

Эпюры внешних сил, действующих на грани пластинки, показаны на рис. 10.4.

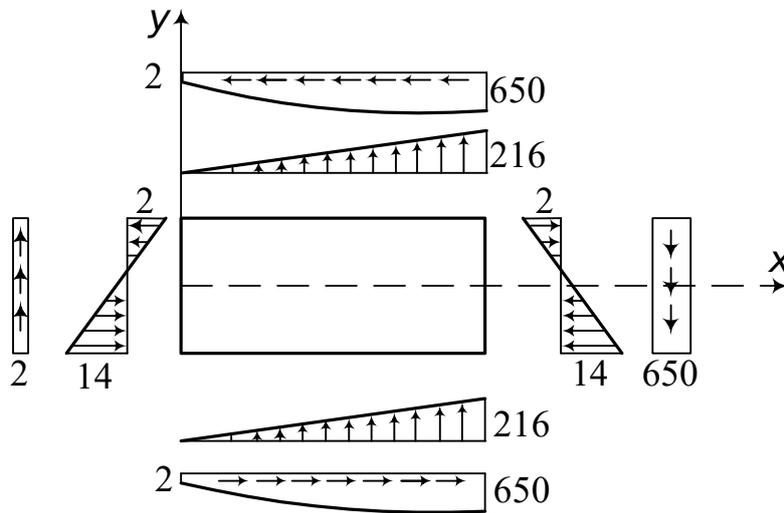


Рис. 10.4. Схема усилий, действующих на грани пластинки (МПа)

Проверим условия равновесия пластинки. Как видно из рис. 10.4, условие равновесия на горизонтали выполняется, т. к. эпюры \bar{X} на левой и правой гранях имеют одинаковые значения ординат, но разные знаки. То же самое можно сказать об эпюрах \bar{X} на верхней и нижней гранях. Составим сумму проекций всех сил, действующих на пластинку, на вертикальную ось:

$$\sum y = 0: 2 \frac{1}{2} \cdot 216 \cdot 6 - 650 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 0.$$

Таким образом, заданная пластинка под действием внешних сил находится в равновесии.

Прежде чем перейти к исследованию напряженного состояния в точке **A** (рис. 10.3), отметим, что уравнение (10.10) является линейным. Поэтому сумма нескольких решений этого уравнения также является его решением.

Мы можем наложить одно на другое элементарные решения, полученные здесь, и таким образом прийти к новым решениям, имеющим практическое значение. Ниже будет решена одна такая задача.

А сейчас определим напряженное состояние в точке **A** (рис. 10.3).

Итак, точка **A** имеет координаты $x = 1,5 \text{ м}$; $y = 0,5 \text{ м}$.

Здесь

$$\sigma_y = 36 \cdot 1,5 \cdot 0,5 = 27;$$

$$\sigma_x = 8 \cdot 0,5 - 6 = -2;$$

$$\tau_{xy} = -2(1 + 9 \cdot 2,25) = -42,5.$$

Схема напряжений, действующих в точке **A**, показана на рис. 10.5.

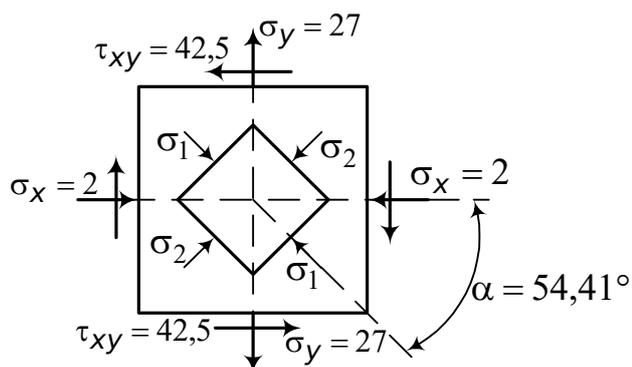


Рис. 10.5. Напряженное состояние в точке **A**

Определим главные напряжения по формуле (4.14):

$$\sigma_{1,2} = \frac{-2 + 27}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-2 - 27)^2 + 4(42,5)^2} = 12,5 \pm 44,91;$$

$$\sigma_1 = 57,41; \quad \sigma_2 = -32,41.$$

Угол наклона главных площадок найдем по (4.13):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-42,5}{57,41 - 27} = -1,397, \quad \alpha = -54,41^\circ.$$

10.5.1. Изгиб консольной балки

Рассмотрим консоль, имеющую узкое прямоугольное сечение шириной, равной единице. Консоль изгибается силой F , приложенной на конце. Верхний и нижний края свободны от нагрузки. Касательные усилия, равнодействующей которых является сила F , распределены по концу консоли (рис. 10.6).

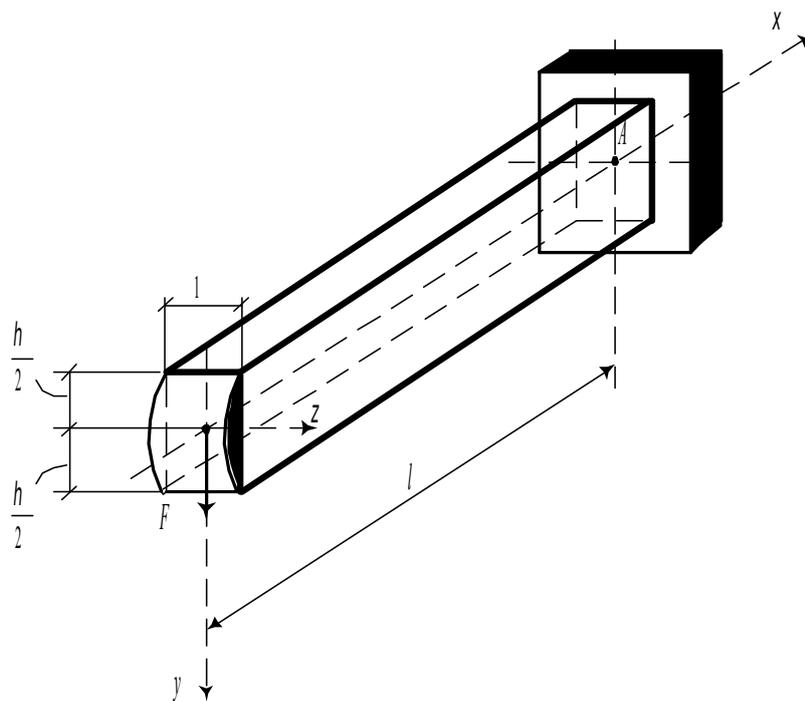


Рис. 10.6. Расчетная схема консольной балки

Отмеченные выше условия нагружения могут быть удовлетворены, если функцию напряжений представить в следующем виде:

$$\varphi = \frac{A}{6}xy^3 + Bxy. \quad (10.13)$$

Найдем напряжения по (10.9). При этом будем пренебрегать собственным весом балки. Тогда

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = Axy; \quad (10.14)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \quad (10.15)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{A}{2}y^2 - B. \quad (10.16)$$

Для того чтобы продольные стороны $y = \pm \frac{h}{2}$ были свободны от усилий, должно выполняться следующее условие:

$$\tau_{xy}|_{y=\pm \frac{h}{2}} = -\frac{A}{2} \frac{h^2}{4} - B = 0.$$

Отсюда

$$A = -\frac{8B}{h^2}. \quad (10.17)$$

Теперь для того, чтобы условие нагружения на торце балки было удовлетворено, необходимо потребовать равенство суммы касательных напряжений силе F , т. е.

$$-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dy - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{4B}{h^2} y^2 - B \right) dy = F.$$

Здесь минус перед интегралом связан с правилом знаков для касательных напряжений (см. п. 1.8). Отсюда найдем

$$B = \frac{3F}{2h}. \quad (10.18)$$

Подставив найденные значения коэффициентов A и B в выражения (10.14) и (10.16), получим

$$\sigma_x = -\frac{12F}{h^3}xy = -\frac{Fx}{J_z}y; \quad (10.19)$$

$$\sigma_y = 0;$$

$$\tau_{xy} = -\frac{F}{8J}(h^2 - 4y^2). \quad (10.20)$$

Полученные решения совпадают с элементарными решениями (см. (6.9) и (6.13)). Следует заметить, что это решение является точным только тогда, когда усилия по концам стержня распределены по законам (10.14) и (10.16). Если же усилия по концам распределены каким-либо другим образом, то полученное распределение напряжений (10.19) и (10.20) можно считать удовлетворительным для поперечных сечений, находящихся на некотором расстоянии от концов стержня ($\sim h$, см. разд. 3).

10.6. Плоская задача в полярных координатах

10.6.1. Общие уравнения в полярных координатах

При исследовании напряжений в круглых кольцах и дисках, в кривых брусках и т. п. представляется выгодным пользоваться полярными координатами.

Положение точки на срединной плоскости пластинки определяется расстоянием r от начала координат O и углом θ между направлением r и некоторой осью Ox , занимающей определенное положение на плоскости.

Рассмотрим равновесие малого элемента $abcd$, вырезанного из пластинки радиальными сечениями OC и ob , перпендикулярными пластинке, и двумя нормальными к пластинке цилиндрическими поверхностями ad и bc , радиусы которых равны r и $r + dr$ (рис. 10.7).

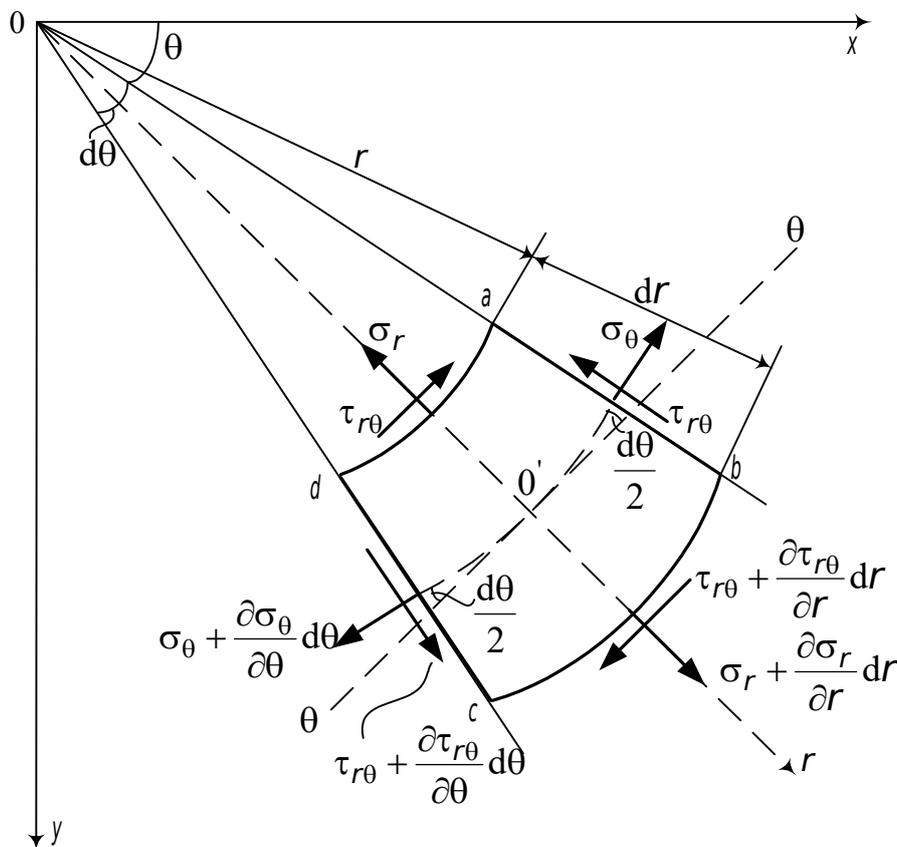


Рис. 10.7. Схема напряжений, действующих на малый элемент, вырезанный из пластинки

Составляющие нормальных напряжений в радиальном направлении будем обозначать σ_r , а составляющие нормальных напряжений в тангенциальном направлении – σ_θ . Для составляющей касательного напряжения будем пользоваться обозначением $\tau_{r\theta}$. Положительные направления составляющих напряжений указаны на рис. 10.7.

Предполагая, что напряжения равномерно распределяются по сторонам рассматриваемого элемента, найдем нормальное усилие в радиальном направлении (толщину пластинки принимаем равной единице):

$$\sigma_r r d\theta.$$

Нормальное усилие на стороне bc элемента с учетом изменения составляющей напряжения σ_r будет равно

$$\left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta.$$

Нормальные усилия, действующие на стороны ab и cd , будут соответственно такими:

$$\sigma_\theta dr \text{ и } \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr.$$

Аналогично запишем выражения для касательных усилий, действующих на стороны ad и bc :

$$\tau_{r\theta} \cdot r d\theta, \quad \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta$$

и касательных усилий на сторонах ab и cd :

$$\tau_{r\theta} dr \text{ и } \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr.$$

Полагаем также, что объемная сила отсутствует; кроме того, ввиду малости угла θ принимаем, что $\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$; $\cos \frac{d\theta}{2} = 1$.

Запишем уравнения равновесия элемента. Спроектируем усилия на оси r (радиальное направление) и θ (тангенциальное направление):

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \sigma_r r d\theta - \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr \cdot \frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta dr \frac{d\theta}{2} + \\ & + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \cdot 1 - \tau_{r\theta} dr = 0; \end{aligned} \quad (10.21)$$

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \sigma_{\theta} dr + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \cdot \frac{d\theta}{2} + \tau_{r\theta} dr \frac{d\theta}{2} + \\ & + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \tau_{r\theta} r d\theta = 0. \end{aligned} \quad (10.22)$$

Отбрасывая величины высших порядков малости и деля все члены на r , получим

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{r} = 0, \quad (10.23)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0.$$

Эти два уравнения заменяют собой уравнения равновесия для плоской задачи в декартовых координатах (10.2).

Уравнения (10.23) будут удовлетворены, если принять

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \quad (10.24)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \quad (10.25)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \quad (10.26)$$

Для того чтобы получить распределение напряжений, которое может иметь место в упругом теле, должно быть также удовлетворено условие совместности. При декартовых координатах это условие требует, чтобы функция напряжений удовлетворяла уравнению (10.10):

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

В рассматриваемом случае нам необходимо это уравнение представить в полярных координатах. Зависимости между полярными и декартовыми координатами определяются следующими формулами (рис. 10.8):

$$r^2 = x^2 + y^2; \quad (10.27)$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta; \quad (10.28)$$

$$x = r \cos \theta; \quad (10.29)$$

$$y = r \sin \theta. \quad (10.30)$$

Дифференцируем зависимость (10.27) по x :

$$2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x.$$

Отсюда с учетом (10.29)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta. \quad (10.31)$$

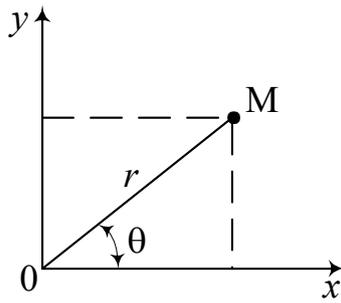


Рис. 10.8. К определению зависимостей между полярными и декартовыми координатами

Аналогично, дифференцируя (10.27) по \mathcal{Y} , найдем

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta. \quad (10.32)$$

Теперь дифференцируем (10.28) по \mathcal{X} :

$$-\frac{y}{x^2} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\cos^2 \theta \frac{y}{x^2} = -\frac{x^2}{r^2} \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}. \quad (10.33)$$

Точно так же, продифференцировав (10.28) по \mathcal{Y} , найдем

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}. \quad (10.34)$$

Пользуясь полученными выражениями (10.31)-(10.34) и рассматривая Φ как функцию от \mathbf{r} и θ , получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \sin \theta \right). \quad (10.35)$$

Чтобы получить вторую производную по \mathcal{X} , необходимо лишь повторить предыдущие действия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \sin \theta \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} + \\ &+ 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}. \end{aligned} \quad (10.36)$$

Таким же образом найдем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right), \quad (10.37)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right) = \\
&= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} - \\
&\quad - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2}. \quad (10.38)
\end{aligned}$$

Складывая выражения (10.37) и (10.38), получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}. \quad (10.39)$$

Пользуясь тождеством

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)$$

и выражением (10.39), найдем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (10.40)$$

Как и в случае решения плоской задачи в декартовых координатах (10.10), (10.11), здесь также подбирается функция φ , удовлетворяющая уравнению (10.40) и условиям на контуре, и находятся напряжения по (10.24) – (10.26).

10.6.2. Составляющие деформации в полярных координатах

При рассмотрении перемещений в полярных координатах обозначим через U и V составляющие перемещения соответственно в радиальном и тангенциальном направлениях (рис. 10.9).

Если U – радиальное перемещение стороны ad элемента $abcd$, то радиальное перемещение стороны bc (рис. 10.9) равно

$$u + \frac{\partial u}{\partial r} dr.$$

Тогда относительное удлинение элемента $abcd$ в радиальном направлении равно

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (10.41)$$

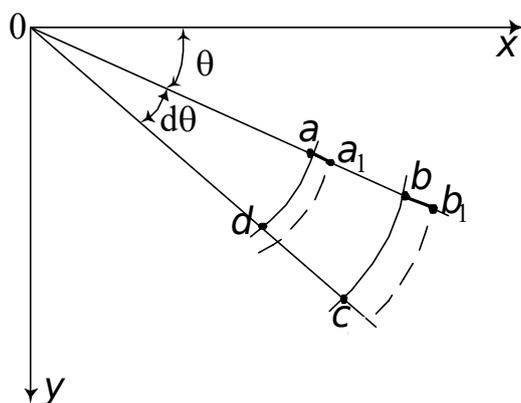


Рис. 10.9. К определению деформации ε_r

Что касается деформации в тангенциальном направлении, то следует заметить, что она зависит не только от перемещения V , но также и от радиального перемещения U (рис. 10.10).

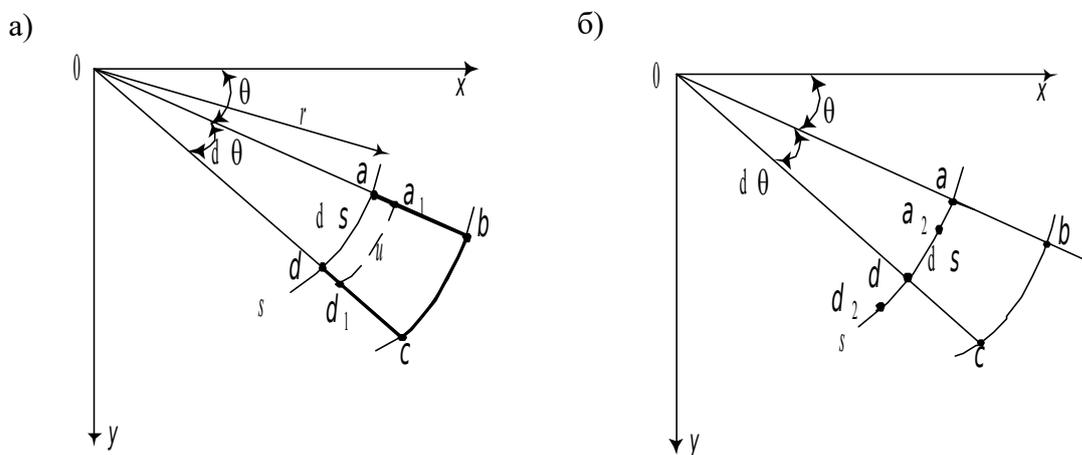


Рис. 10.10. К определению деформации ε_θ

Вследствие радиальных перемещений U элемент ad переходит на новую окружность. Первоначальная его длина

$$ad = r d\theta$$

становится равной (рис. 10.10, а)

$$a_1 d_1 = (r + u) d\theta.$$

Отсюда

$$\varepsilon'_\theta = \frac{a_1 d_1 - ad}{ad} = \frac{(r + u)d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r}.$$

Вследствие разницы в перемещениях точек a и d в направлении дуги S (рис. 10.10, б)

$$\varepsilon_{\theta}'' = \frac{a_2 d_2 - ad}{ad} = \frac{(v + \frac{\partial v}{\partial s} ds) - v}{ds} = \frac{dv}{ds} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} .$$

Таким образом, тангенциальная деформация равна

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\theta}' + \varepsilon_{\theta}'' = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} . \quad (10.42)$$

Рассмотрим теперь деформацию сдвига (рис. 10.11).

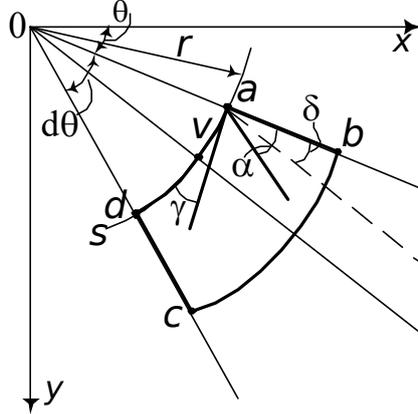


Рис. 10.11. К определению деформации сдвига

Если бы точка **a** (рис. 10.11) не перемещалась, то искажение угла *baa* обуславливалось бы поворотом сторон *ab* и *ad* и было бы равно

$$\gamma'_{r\theta} = \alpha + \gamma = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} .$$

Вследствие перемещения точки **a** по дуге *S* на величину *V* наклон грани *ab* изменится на угол $\delta = V/r$, который нужно вычесть из найденного выше искажения угла.

Следовательно, полное изменение угла *baa*, являющегося деформацией сдвига, равно

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} . \quad (10.43)$$

Подставив теперь выражения для составляющих деформаций (10.41) - (10.43) в формулы закона Гука, получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_{\theta}) , \\ \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\theta} - \nu \sigma_r) , \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} &= \frac{\tau_{r\theta}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta} , \end{aligned} \quad (10.44)$$

характеризующие связь между перемещениями и напряжениями в полярных координатах.

10.7. Толстая труба под действием равномерного давления

Рассмотрим толстостенный цилиндр, подверженный равномерному давлению по внутренней и внешней поверхностям (рис. 10.12).

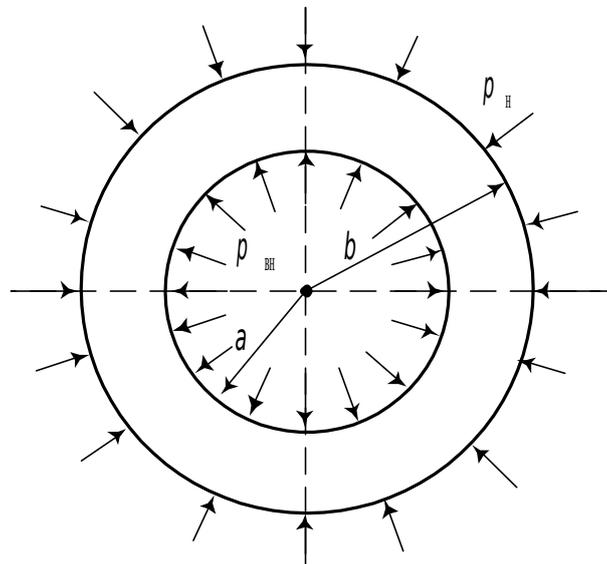


Рис. 10.12. К расчету трубы на действие внешнего и внутреннего давления

Через a и b обозначим радиусы внутренней и внешней поверхностей цилиндра, а через $p_{н}$ и $p_{вн}$ – наружное и внутреннее давления.

Граничные условия будут иметь вид:

$$\sigma_r = -p_{вн} \text{ при } r = a;$$

$$\sigma_r = -p_{н} \text{ при } r = b.$$

Судя по граничным условиям, напряжения в этом случае должны распределяться симметрично относительно центральной оси цилиндра, перпендикулярной плоскости сечения. Тогда составляющие напряжения не зависят от угла θ и являются функциями одного лишь r . Из условий симметрии следует также, что касательные напряжения $\tau_{r\theta}$ должны быть равны нулю.

Таким образом, из двух уравнений равновесия (10.23) остается лишь одно

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (10.45)$$

По той же причине уравнение (10.40) приобретает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) =$$

$$= \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \quad (10.46)$$

Уравнение (10.46) является линейным однородным дифференциальным уравнением, решением его будет функция

$$\varphi = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D. \quad (10.47)$$

Составляющие напряжения (10.24) – (10.26) будут иметь вид

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C; \quad (10.48)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C; \quad (10.49)$$

$$\tau_{r\theta} = 0.$$

В выражениях для напряжений (10.48), (10.49) имеется три постоянных интегрирования A, B, C . Граничные условия определяют только две постоянные. Для того чтобы однозначно найти эти постоянные, рассмотрим перемещения. Для рассматриваемой задачи уравнения (10.44) имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta); \quad (10.50)$$

$$\frac{u}{r} = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r). \quad (10.51)$$

Интегрируя первое уравнение, находим

$$Eu = -\frac{A}{r} (1 + \nu) + 2C(1 - \nu)r + B[(1 - 3\nu)r + 2(1 - \nu)(r \ln r - r)] + D_1. \quad (10.52)$$

Второе уравнение (10.51) дает

$$Eu = -\frac{A}{r} (1 + \nu) + 2C(1 - \nu)r + Br[(3 - \nu) + 2 \ln r(1 - \nu)]. \quad (10.53)$$

Для того, чтобы оба выражения (10.52) и (10.53) для U совпадали, должны быть выполнены условия

$$B = 0 \quad \text{и} \quad D_1 = 0. \quad (10.54)$$

С учетом (10.54)

$$\varphi = A \ln r + C r^2; \quad (10.55)$$

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C; \quad (10.56)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C. \quad (10.57)$$

Определим постоянные A и C . Граничные условия принимают вид

$$\frac{A}{a^2} + 2C = -p_{\text{вн}},$$

$$\frac{A}{b^2} + 2C = -p_H.$$

Решение этих уравнений дает

$$2C = \frac{p_{BH}a^2 - p_Hb^2}{b^2 - a^2}; \quad A = \frac{(p_H - p_{BH})a^2b^2}{b^2 - a^2}. \quad (10.58)$$

Компоненты напряжений оказываются равными

$$\sigma_r = \frac{(p_H - p_{BH})a^2b^2}{r^2(b^2 - a^2)} + \frac{p_{BH}a^2 - p_Hb^2}{b^2 - a^2}; \quad (10.59)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{(p_H - p_{BH})a^2b^2}{r^2(b^2 - a^2)} + \frac{p_{BH}a^2 - p_Hb^2}{b^2 - a^2}. \quad (10.60)$$

Интересно отметить, что сумма $\sigma_r + \sigma_\theta$ постоянна по всей толщине стенок цилиндра. Поэтому напряжения σ_r и σ_θ вызывают равномерное расширение или укорочение в направлении оси трубы. Деформация в элементе трубы, вырезанном двумя смежными поперечными сечениями, не препятствует деформации смежных элементов. Вследствие этого элемент находится в плоском напряженном состоянии (см. п. 4.1).

В частном случае, когда $p_{BH} = 0$,

$$\sigma_r = \frac{p_H b^2}{(b^2 - a^2)} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right); \quad (10.61)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{p_H b^2}{(b^2 - a^2)} \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right). \quad (10.62)$$

Эти выражения показывают, что напряжения σ_r и σ_θ всегда сжимающие. Напряжение σ_r достигает наибольшего значения на наружной поверхности, где оно равно наружному давлению. Напряжение $\sigma_{\theta, \max}$ больше, чем наружное давление. Оно приближается к величине последнего с увеличением радиуса b , но никогда не может оказаться ниже p_H , как бы мы ни увеличивали количество материала стержня (рис. 10.13).

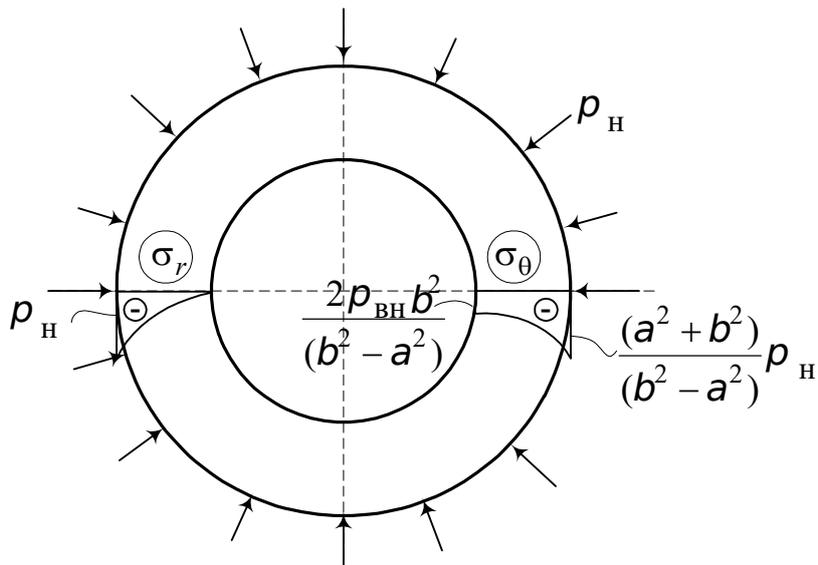


Рис. 10.13. Эпюры σ_r и σ_θ в толстостенной трубе при рассматриваемом воздействии

10.8. Растяжение пластинки с малым круглым отверстием

Если сплошная пластинка испытывает равномерное растяжение по направлению оси X (рис. 10.14), то

$$\sigma_x = p, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$

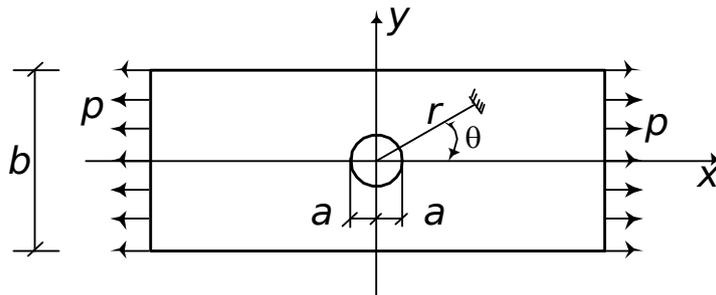


Рис. 10.14. К расчету пластинки с малым круглым отверстием

Рассмотрим, как изменяется напряженное состояние пластинки, если сделать в ней круглое отверстие, диаметр которого $2a$ мал по сравнению с шириной пластинки b .

Очевидно, что напряжения, вызванные наличием отверстия, имеют характер местных напряжений: на достаточно большом расстоянии от отверстия они останутся почти такими же, как и в сплошной пластинке.

Напряжениям в сплошной пластинке соответствует функция напряжений (см. п. 10.5)

$$\varphi_\theta = \frac{1}{2} p y^2,$$

которая в полярных координатах имеет вид

$$\varphi_\theta = \frac{1}{2} p r^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{4} p r^2 - \frac{1}{4} p r^2 \cos 2\theta = \frac{p}{4} (r^2 - r^2 \cos 2\theta). \quad (10.63)$$

Искомая функция напряжений Φ для пластинки с отверстием должна давать при достаточно больших значениях r те же напряжения, что и функция Φ_0 (10.63). Этим требованием отвечает следующая функция:

$$\Phi = \frac{\rho}{4} \left[r^2 - 2a^2 \ln r - \left(r^2 - 2a^2 + \frac{a^4}{r^2} \right) \cos 2\theta \right]. \quad (10.64)$$

Действительно, если a устремить к нулю, то (10.64) сводится к (10.63).

Определим напряжения по (10.25), так как наибольший интерес представляют напряжения у края отверстия ($r = a$) и в ослабленном поперечном сечении ($\theta = \pm \frac{\pi}{2}$). Итак,

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \frac{\rho}{2} \left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]. \quad (10.65)$$

Изобразим эпюру σ_θ у края отверстия (рис. 10.15).

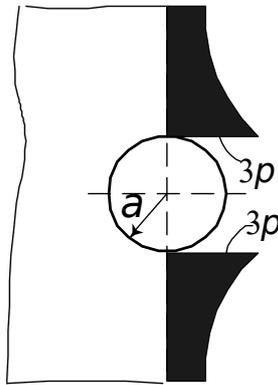


Рис. 10.15. Эпюра σ_θ у края отверстия

При $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ $\cos 2\theta = -1$. Тогда

$$\sigma_\theta = \rho \left(1 + \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^4}{2r^4} \right). \quad (10.66)$$

При

$$\begin{aligned} r = a & \quad \sigma_\theta = 3\rho; \\ r = 2a & \quad \sigma_\theta = 1,22\rho; \\ r = 3a & \quad \sigma_\theta = 1,07\rho; \\ r = 4a & \quad \sigma_\theta = 1,04\rho; \\ r = \infty & \quad \sigma_\theta = \rho. \end{aligned}$$

Полученные формулы (10.65), (10.66) верны в случае, когда ширина пластинки b велика по сравнению с отверстием $2a$. Если же ширина не очень велика, но все равно больше, чем $4a$, то для определения наибольшего растягивающего напряжения можно пользоваться приближенной формулой

$$\sigma_{\theta, \max} = 3p \frac{b}{b-a}. \quad (10.67)$$

Из приведенного решения можно сделать вывод о том, что в окрестностях отверстий, выточек и т. п. наблюдается резкое увеличение напряжений, называемое концентрацией напряжений (рис. 10.15). В случае хрупких материалов при растяжении в ослабленном сечении наибольшего напряжения, равного пределу прочности, образуется трещина, которая, быстро развиваясь, приводит к разрушению конструкции.

Особенно опасна концентрация напряжений при действии нагрузок, периодически меняющихся во времени (см. разд. 11). Возникает вопрос о том, каким образом можно снизить концентрацию напряжений. Для этого в различного рода трещинах, выточках, в местах резкого изменения площади поперечного сечения элемента конструкции следует заменить острые выточки плавными кривыми, т. е. увеличить радиус кривизны конца трещины или отверстия. Это неизменно приводит к снижению концентрации напряжений. Так, например, для прекращения развития трещины в пластинках иногда на конце трещины высверливается круглое отверстие.

10.9. Действие сосредоточенной силы, приложенной к прямолинейному краю бесконечно большой пластинки

Рассмотрим сосредоточенную вертикальную силу F , действующую на горизонтальный прямолинейный край AB бесконечно большой пластинки (рис. 10.16, а).

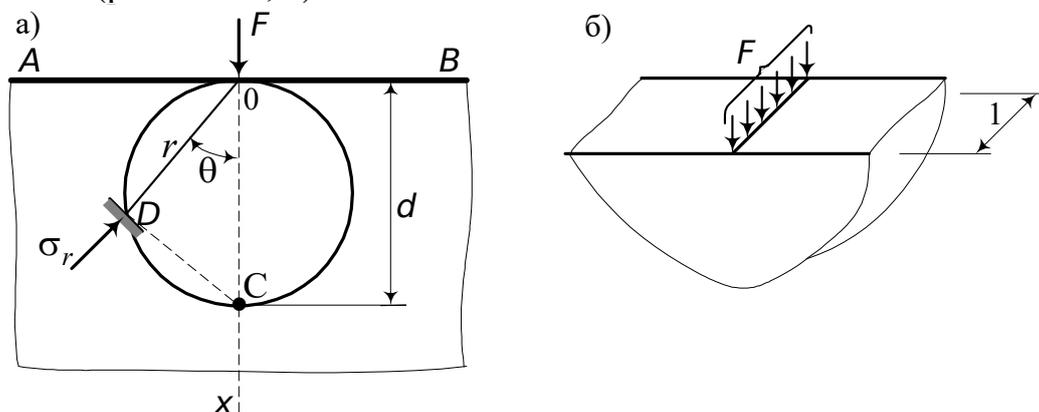


Рис. 10.16. Действие сосредоточенной силы на прямолинейный край бесконечно большой пластинки

Распределение груза по толщине пластинки – равномерное (рис. 10.16, б). Толщина пластинки принята равной единице, так что F – сила, приходящаяся на единицу толщины пластинки. Решение рассматриваемой задачи было получено Фламаном с использованием решения Я. Буссинеска в трех измерениях. Распределение напряжений можно установить из элементарных соображений. По мере удаления от

точки приложения силы напряжения будут убывать. Поэтому предположим, что σ_r изменяется обратно пропорционально радиусу r . Кроме того, предположим, что наибольшие напряжения σ_r будут возникать в направлении действия силы F . По мере отклонения влево или вправо от оси X они также будут убывать. Это соответствует тому, что σ_r изменяется прямо пропорционально $\cos \theta$. Таким образом, принимаем

$$\sigma_r = -K \frac{\cos \theta}{r}, \quad (10.68)$$

где K – коэффициент, подлежащий определению.

Полагаем также, что

$$\sigma_\theta = 0,$$

$$\tau_{r\theta} = 0.$$

Чтобы подтвердить правильность сделанных предположений, найдем функцию напряжений. Для этого запишем выражения для напряжений (10.24) – (10.26):

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = -K \frac{\cos \theta}{r};$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0;$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Это система дифференциальных уравнений с частными производными, в которых искомой функцией является функция φ . Решая систему, найдем

$$\varphi = -\frac{K}{2} r \theta \sin \theta. \quad (10.69)$$

Легко проверить подстановкой, что теперь дифференциальные уравнения равновесия (10.23) и уравнение совместности (10.40) удовлетворяются.

Остается определить коэффициент K из граничных условий. Верхний край пластинки (рис. 10.16) свободен от напряжений за исключением точки приложения силы. Здесь возникают очень большие напряжения, превышающие предел упругости материала, и в результате сила F оказывается распределенной по площадке конечной величины. Представим себе часть материала, испытывающего пластическую деформацию, вырезанную из пластинки по круглой цилиндрической поверхности малого радиуса (рис. 10.17). Тогда к оставшейся части пластинки можно применить уравнение упругости.

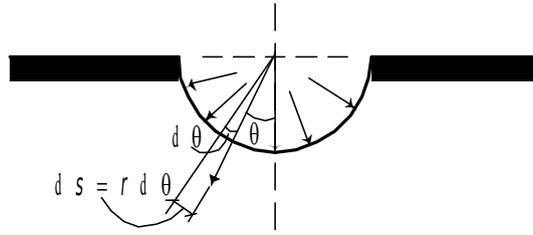


Рис. 10.17. Схема передачи сосредоточенной силы на прямолинейный край пластинки

Равнодействующая усилий, действующих по цилиндрической поверхности, должна уравнивать силу F :

$$\int_0^{\pi} \sigma_r \cdot r \cos \theta d\theta = F. \quad (10.70)$$

Подставим сюда σ_r по (10.68). Знак минус при подстановке выражения σ_r не вводим, так как он уже учтен при выборе направления усилий. В результате получим

$$K \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = F \quad \text{и}$$

$$K = \frac{2F}{\pi}.$$

Формула для напряжений принимает окончательный вид:

$$\sigma_r = -\frac{2F \cos \theta}{\pi r}. \quad (10.71)$$

Чтобы наглядно представить картину распределения напряжений, сделаем следующее построение. Возьмем произвольную точку D , покажем для нее нормальную к радиусу площадку и действующее на ней радиальное напряжение σ_r (рис. 10.16). Продолжим направление площадки до пересечения с осью X в точке C . Отрезок OC примем за диаметр d , на котором построим окружность. Из треугольника OCD найдем

$$\frac{\cos \theta}{r} = \frac{1}{d}.$$

Это соотношение справедливо для любой точки окружности, поэтому во всех ее точках по площадкам, нормальным к радиусу, будут действовать одинаковые нормальные напряжения

$$\sigma_r = -\frac{2F}{\pi d}. \quad (10.72)$$

Можно построить целый ряд таких окружностей. Они называются кругами равных напряжений, или кругами Буссинеска. Каждая из таких

окружностей является геометрическим местом точек с равными главными напряжениями (рис. 10.18).

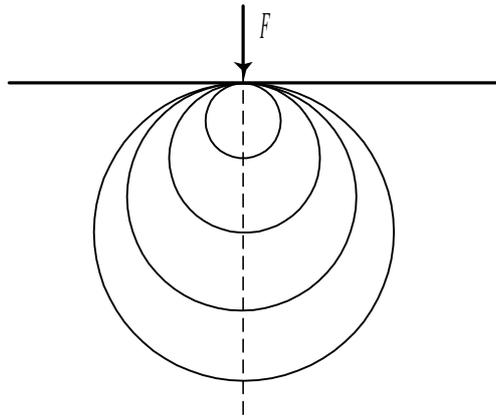


Рис. 10.18. Круги равных напряжений (круги Буссинеска)

Полученное представление о распределении напряжений чрезвычайно наглядно, но не вполне удобно для практического применения.

Чтобы судить о надежности сооружения, необходимо знать, как распределяются на заданной глубине нормальные и касательные напряжения по горизонтали и вертикали.

Определим напряжения в горизонтальном и вертикальном сечениях бесконечно большой пластинки (рис. 10.19).

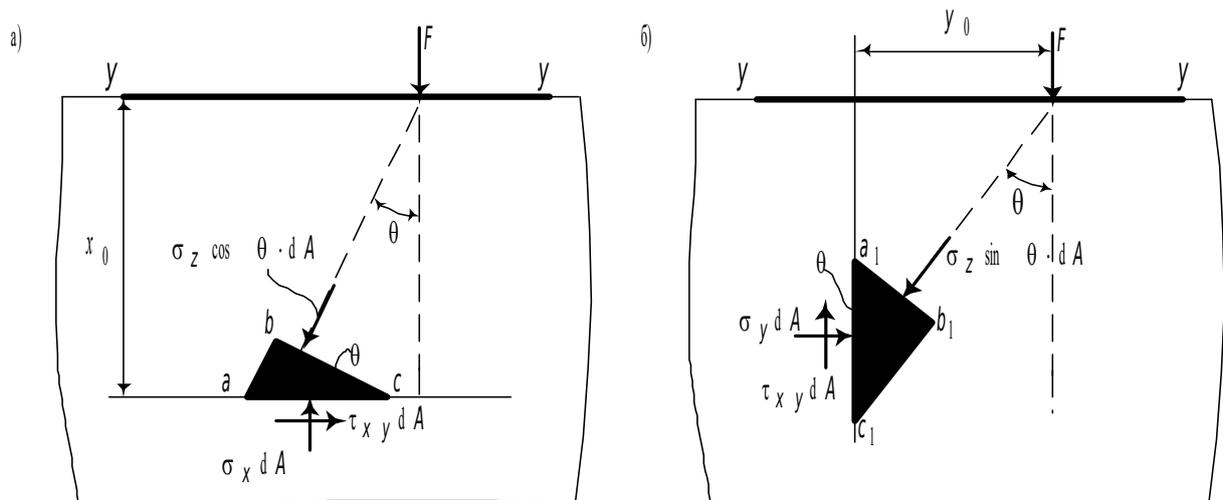


Рис. 10.19. Усилия в горизонтальных и вертикальных сечениях бесконечно большой пластинки

Выделим из тела пластинки элементарные призмы abc и $a_1b_1c_1$. Используя условия (10.27), (10.29), (10.30), из проекций уравнений равновесия на оси X и Y найдем

$$\sigma_x = -\frac{2F}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}; \quad (10.73)$$

$$\sigma_y = -\frac{2F}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad (10.74)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2F}{\pi} \frac{x^2y}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (10.75)$$

Для заданной постоянной глубины $x = x_0$ напряжения σ_x достигают максимального значения по линии действия силы F , т. е. при $y = 0$ (рис. 10.20, а). С удалением от места приложения груза напряжения убывают по величине и распределяются на все большую площадь (рис. 10.20, а). Напряжения σ_y у верхнего края пластинки равны нулю, с увеличением X возрастают, на некоторой глубине достигают наибольших значений и затем убывают. С удалением сечения от линии действия силы численные значения напряжений убывают, а максимум смещается вниз (рис. 10.20, в). Разные знаки эпюры τ_{xy} (рис. 10.20, б) справа и слева от оси X показывают на различия в направлении напряжений.

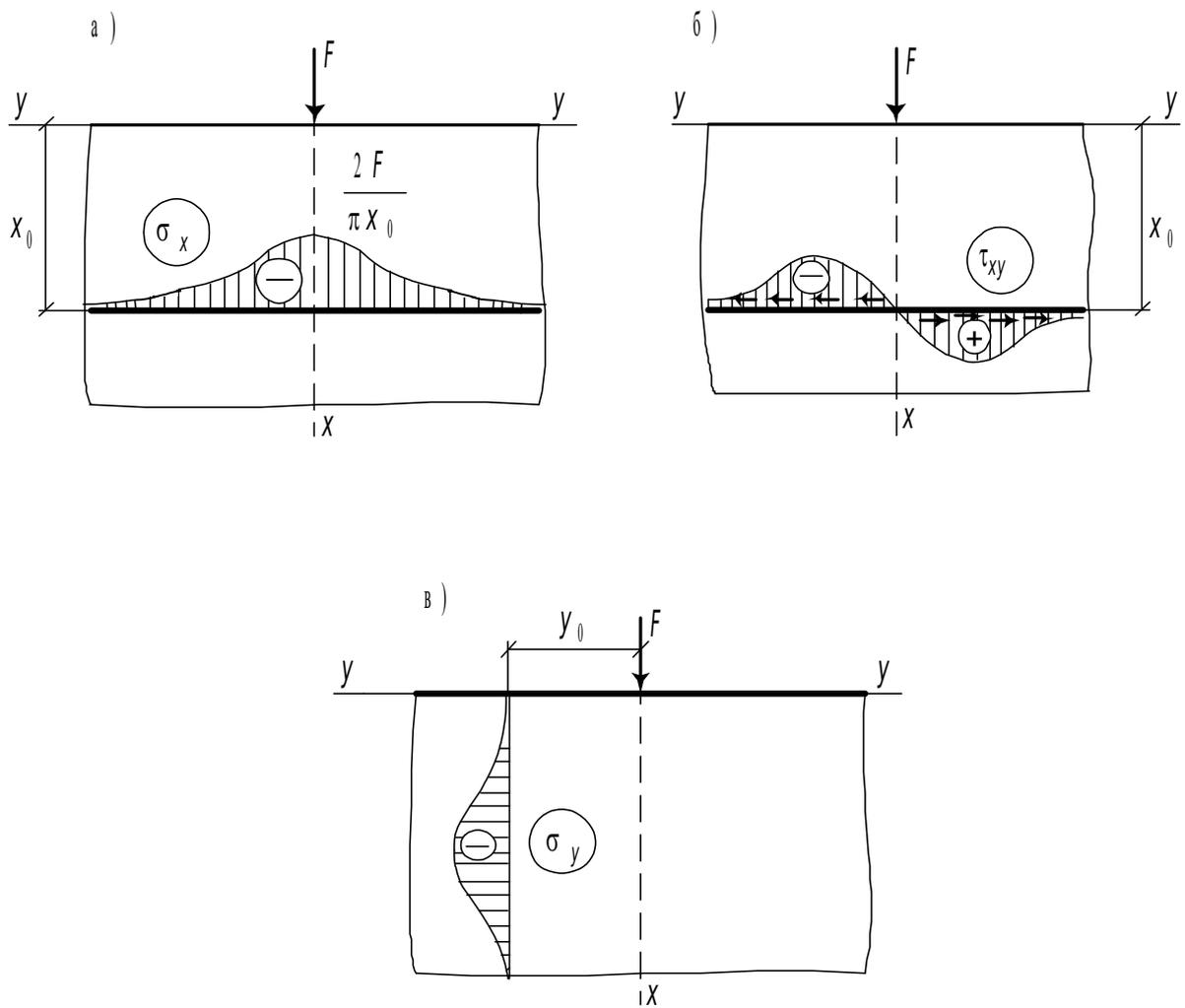


Рис. 10.20. Эпюры σ_x , σ_y , τ_{xy}

Раздел 11

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗКИ

11.1. Общие положения и понятия

Динамическими называют такие нагрузки, которые во время действия сообщают массам сооружения ускорения, вызывая появление инерционных сил. Динамические нагрузки вызывают в сооружении напряжения, деформации и перемещения, переменные во времени. По своей природе они разнообразны и в основном могут быть сведены к следующим видам.

Неподвижная периодическая нагрузка (расположенная на сооружении в определенном месте) характерна тем, что диаграмма зависимости ее от времени многократно повторяется через определенные промежутки времени (периоды). Периодическая нагрузка может быть как непрерывной, так и прерывной. Если периодическая нагрузка непрерывно изменяется по закону синуса или косинуса, то такая нагрузка называется вибрационной или гармонической.

Кратковременная нагрузка (импульс) характерна быстрым развитием и быстрым исчезновением, т. е. почти мгновенным действием. Такие нагрузки создаются, например, различными взрывами.

Ударная нагрузка в виде ударов в определенном месте сооружения характерна резким изменением скорости ударяемого тела за короткий промежуток времени. Ударную нагрузку создают падающие тела: копры, молоты и др.

Подвижная нагрузка – это нагрузка постоянного или переменного значения, меняющая свое положение на сооружении. Примерами такой нагрузки могут служить электровозы, автомобили, троллейбусы.

Сейсмическая нагрузка – это беспорядочное движение почвы, толчки, удары и колебания при землетрясении.

Динамический расчет сооружений состоит в определении внутренних сил и перемещений от динамических нагрузок, величина и характер действия которых известны, или в проверке системы на резонанс при периодически повторяющейся нагрузке определенной частоты. Если действие статических нагрузок определяется их величиной, то при расчетах на динамические нагрузки, наряду с величиной, существенную роль играет характер нагрузки. Особенно в этом отношении коварна всякая периодическая нагрузка. Иногда малая по величине периодическая нагрузка может создать большой динамический эффект, т. е. вызвать большие напряжения и перемещения. Это объясняется тем, что сооружение “отзывчиво” на периодические действия нагрузки некоторой определенной для него частоты.

Общие методы динамических расчетов изучаются в специальном разделе строительной механики “Динамика сооружений”. Ниже для иллюстрации динамических расчетов будут рассмотрены простейшие системы – системы с одной степенью свободы. К этим системам относится невесомая балка с сосредоточенной массой m , горизонтальным перемещением и поворотом которой пренебрегают. Если эту балку каким-либо образом, например, импульсом, вывести из состояния устойчивого равновесия, а затем выводящую его из этого состояния причину убрать, то балка будет совершать *свободные* колебания. Неизбежные различного рода внешние и внутренние сопротивления движению системы непрерывно поглощают часть энергии, поэтому сам процесс свободных колебаний является затухающим.

Свободные периодические колебания, совершаемые по гармоническому закону с одной частотой, когда отношения перемещений двух любых точек в любой момент времени не меняются, называются *собственными*.

Если же на балку действует непрерывно какая-либо динамическая нагрузка $F(t)$, то балка совершает *вынужденные* колебания. Предметом наших дальнейших исследований и являются свободные и вынужденные колебания невесомой балки с сосредоточенной массой.

11.2. Дифференциальное уравнение движения системы с одной степенью свободы

Рассмотрим систему в виде невесомой балки с сосредоточенной массой m . На рис. 11.1, а показано перемещение массы из ее исходного положения равновесия. Прогиб массы $y_{ст}$, как и в дальнейшем рассматриваемый $y(t)$, есть величина малая по сравнению с пролетом балки (см. п. 1.6).

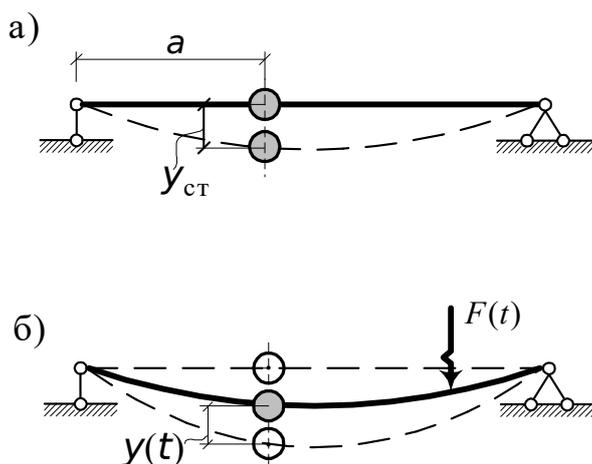


Рис. 11.1. К выводу дифференциального уравнения движения массы

Пусть на балку действует динамическая нагрузка $F(t)$ (вследствие малости прогиба в дальнейшем не будем делать различия между первоначальным (рис. 11.1, а) и деформированным (рис. 11.1, б) состояниями

балки), которая приводит балку и расположенную на ней массу в движение (рис. 11.1, б). Отметим тот момент движения массы m , когда она перемещается вниз. Отделим массу m от балки, приложим к массе: силу R , с которой балка действует на массу; силу P , характеризующую сопротивление движению; силу инерции массы $m \frac{d^2y}{dt^2}$ (рис. 11.2). Здесь необходимо отметить, что во главу динамики поставлен принцип Даламбера – общая теорема, которая указывает, как должны быть составлены уравнения движения для всякой механической системы: уравнение движения материальной точки получается из уравнений равновесия прибавлением сил инерции к реальным силам. Сила инерции направлена всегда противоположно ускорению движения.

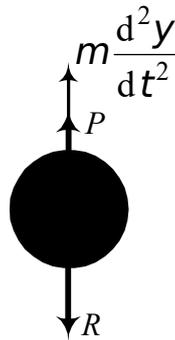


Рис. 11.2. Схема сил, действующих на массу

Спроектируем все силы, действующие на массу, на вертикальную ось и найдем

$$R = m \frac{d^2y}{dt^2} + P. \quad (11.1)$$

Перемещение массы запишем через перемещение балки (рис. 11.3, а, б). Для этого прикладываем к балке сначала силу $F = 1$ и отмечаем δ_{11} (рис. 11.3, а), а затем – силу $F(t)$ и снова находим перемещение балки в месте приложения массы $\Delta_{1F}(t)$ (рис. 11.3, б). Напомним, что первый индекс в обозначении перемещений δ_{11} и $\Delta_{1F}(t)$ обозначает место и направление перемещений, а второй индекс – причину, вызвавшую перемещение.

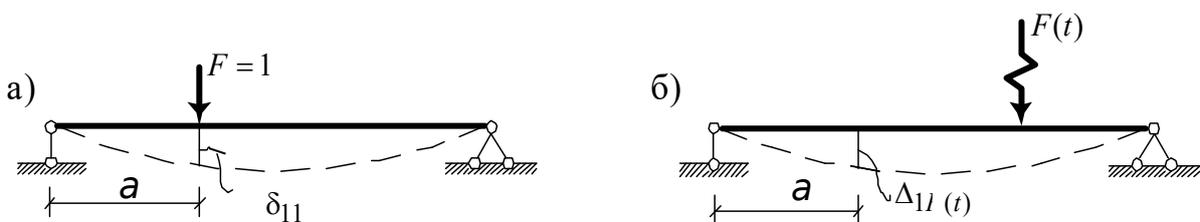


Рис. 11.3. К определению перемещений массы через перемещение балки

В результате

$$y = \Delta_{1F}(t) - R \delta_{11}. \quad (11.2)$$

Из (11.2) найдем

$$R = \frac{\Delta_{1F}(t)}{\delta_{11}} - \frac{y}{\delta_{11}}. \quad (11.3)$$

Приравняем правые части (11.1) и (11.3) и получим

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{P}{m} + \omega^2 y = \omega^2 \Delta_{1F}(t), \quad (11.4)$$

где

$$\omega^2 = \frac{1}{m \delta_{11}}. \quad (11.5)$$

Уравнение (11.4) есть дифференциальное уравнение вынужденного движения массы.

Положив $\Delta_{1F}(t)$ равным нулю, получим дифференциальное уравнение свободных колебаний:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{P}{m} + \omega^2 y = 0. \quad (11.6)$$

11.3. Свободные колебания без учета сил сопротивления

Дифференциальное уравнение свободных колебаний без учета сил сопротивления определяется выражением (11.6) при $P = 0$:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0. \quad (11.7)$$

Решение этого уравнения

$$y(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad (11.8)$$

где A и B – вещественные постоянные, определяемые из начальных условий:

$$\text{при } t=0 \quad y = y_0, \quad v = v_0. \quad (11.9)$$

Найдем скорость перемещения массы

$$\frac{dy}{dt} = v = \omega A \cos \omega t - \omega B \sin \omega t. \quad (11.10)$$

Из начальных условий (11.9) определим

$$y_0 = B \quad \text{и} \quad A = \frac{v_0}{\omega}.$$

Подставляя найденные значения постоянных A и B в уравнение (11.8), получим

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + y_0 \cos \omega t. \quad (11.11)$$

Используя формулу синуса суммы двух углов, вместо (11.11) можно написать

$$y(t) = C \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (11.12)$$

где

$$C = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{v_0}{\omega y_0}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{v_0}{\omega y_0}.$$

На графике рис. 11.4 видны основные элементы гармонических свободных колебаний, описываемых равенством (11.12), где C – амплитуда колебаний; φ_0 – начальная угловая фаза колебаний; T – период колебаний, т. е. продолжительность одного цикла колебаний; ω – круговая (угловая) частота колебаний, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, рад/с.

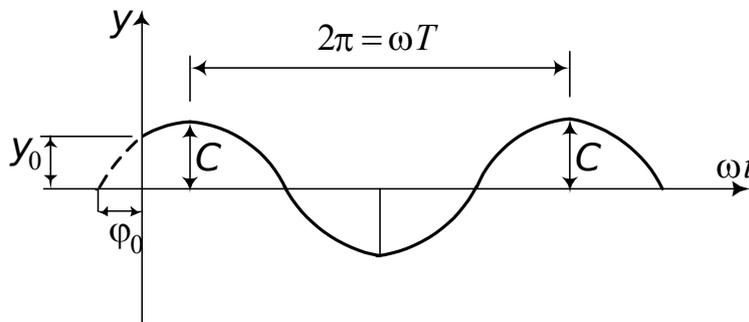


Рис. 11.4. График гармонических свободных колебаний системы с одной степенью свободы

Величина $n = \frac{1}{T}$, выражающая число колебаний за 1 с (измеряется в герцах), иногда называется технической частотой.

Круговая частота ω , очевидно, представляет собой число циклов колебаний, совершаемых за 2π с.

Учитывая значения ω (11.5), для периода колебаний можем написать формулы

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{m\delta_{11}}. \quad (11.13)$$

Вычислим силу инерции массы в произвольный момент времени:

$$J(t) = -m \frac{d^2 y}{dt^2} = \omega^2 C m \sin(\omega t + \varphi_0) = \omega^2 m y(t). \quad (11.14)$$

Выражение (11.14) показывает, что при гармонических колебаниях с частотой ω сила инерции пропорциональна отклонению массы $y(t)$. Для свободных колебаний без учета сил сопротивления эта сила является единственной внешней силой, уравновешивающей реакцию R балки в любой момент времени.

С энергетической точки зрения, свободные незатухающие колебания характеризуются непрерывным переходом кинетической энергии движения массы в потенциальную энергию деформации системы и наоборот.

11.4. Свободные колебания с учетом сил сопротивления

Дифференциальное уравнение свободных колебаний с учетом сил сопротивления имеет вид (11.6)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{P}{m} + \omega^2 y = 0.$$

Различные виды сопротивлений колебаниям условно можно разделить на две категории – внутреннее сопротивление (трение), связанное со свойствами материала и конструкции (трение в сборных креплениях, трение в соединениях и т. п.), и внешнее сопротивление (взаимодействие колеблющейся системы с внешней средой; отступления от идеальных условий деформирования конструкции и ее основания, вызванные упругими несовершенствами реальных материалов). Ввиду сложности и многообразия факторов, влияющих на сопротивление колебаниям, не существует единой теории, одинаково пригодной для учета всех видов внутреннего сопротивления. Имеется обширная литература по этим вопросам. Здесь мы рассмотрим прежде всего важные для строительных конструкций вопросы учета внутреннего сопротивления колебаниям, обусловленного свойствами материала.

Воспользуемся гипотезой Фойгта*, согласно которой силы сопротивления пропорциональны скорости:

$$P = 2\alpha m \frac{dy}{dt}, \quad (11.15)$$

где α – коэффициент затухания, имеющий размерность 1/с; m – точечная масса.

Несмотря на недостатки, на которые обратим внимание позднее, модель Фойгта (так называемое вязкое сопротивление) до сих пор широко применяется ввиду простоты и возможности получить качественную картину явления.

Подставив (11.15) в уравнение (11.6), получим

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0. \quad (11.16)$$

Характеристическое уравнение

$$r^2 + 2\alpha r + \omega^2 = 0 \quad (11.17)$$

имеет два корня:

* Вольдемар Фойгт (1850-1919) – немецкий ученый, работавший в области физики и теории упругости.

$$r_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}, \quad r_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2},$$

численная величина которых зависит от соотношения α и ω . Рассмотрим основной случай, имеющий место в реальных конструкциях: $\omega > \alpha$. Тогда

$$r_1 = -\alpha + i\omega_1, \quad r_2 = -\alpha - i\omega_1;$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}.$$

Вид корней определяет общее решение однородного уравнения (11.16):

$$y(t) = e^{-\alpha t} (A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t). \quad (11.18)$$

Используя начальные условия: при $t=0$ $y=y_0$, $v=v_0$, найдем

$$A = \frac{v_0 + \alpha y_0}{\omega_1}, \quad B = y_0.$$

Запишем, как и ранее (11.12), уравнение (11.18) с использованием формулы синуса суммы двух углов в следующем виде:

$$y(t) = C e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi), \quad (11.19)$$

где

$$C = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0 + \alpha y_0}{\omega_1}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A} = \frac{y_0 \omega_1}{v_0 + \alpha y_0}.$$

На рис. 11.5 изображен график затухающих колебаний, описываемых уравнением (11.19).

Огибающая колебаний (пунктирная линия на рис. 11.5) определена уравнением

$$y = \pm C e^{-\alpha t}. \quad (11.20)$$

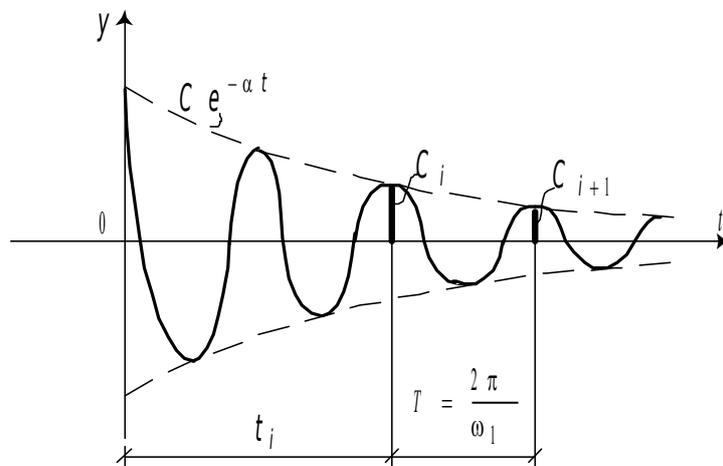


Рис. 11.5. График затухающих колебаний системы с одной степенью свободы

Кривая (11.20) касается кривой колебаний (11.19) в тех точках, где $\sin(\omega_1 t + \varphi) = \pm 1$. Значение отношения соседних амплитуд C_i/C_{i+1} обычно очень близко к единице, поэтому в качестве количественной характеристики затухания принимают натуральный логарифм отношения:

$$\delta = \ln(C_i/C_{i+1}). \quad (11.21)$$

Многочисленные эксперименты показывают, что для данного материала и максимального уровня напряжений (при котором происходят колебания) значение δ (декремента затухания) остается практически постоянным, т. е. внутреннее трение в материале проявляет себя как частотно независимый фактор. Гипотеза же Фойгта приводит к тому, что декремент затухания зависит от частоты ω , что является ее недостатком. Заметим, что пропорциональная зависимость затухания от частоты является очевидной. Действительно, чем выше частота колебаний, тем больше скорость движения $\frac{dy}{dt}$. Но именно скорости $\frac{dy}{dt}$ пропорциональны силы сопротивления P (11.15).

11.5. Вынужденные колебания под действием вибрационной нагрузки

Рассмотрим действие вибрационной (гармонической) силы $F(t) = F \sin \theta t$ на невесомую балку с сосредоточенной массой (рис. 11.6). Здесь θ – частота вынужденных колебаний.

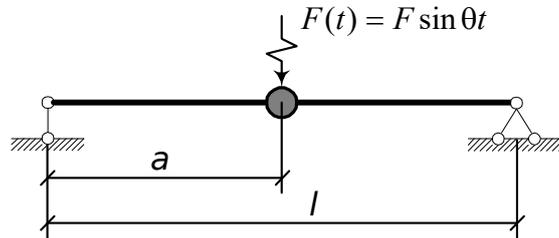


Рис. 11.6. Действие вибрационной силы на невесомую балку с сосредоточенной массой
Дифференциальное уравнение движения имеет следующий вид:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = \omega^2 \Delta_{1F}(t). \quad (11.22)$$

Это уравнение получено из (11.4) с учетом (11.15). Представим правую часть уравнения (11.22) с учетом (11.5) таким образом:

$$\omega^2 \Delta_{1F}(t) = \frac{F(t) \cdot \delta_{11}}{m \delta_{11}} = \frac{F(t)}{m} = \frac{F \sin \theta t}{m}. \quad (11.23)$$

Тогда дифференциальное уравнение движения рассматриваемой балки принимает следующий вид:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = \frac{F \sin \theta t}{m}. \quad (11.24)$$

Частное решение уравнения (11.24) будем искать в виде

$$y(t) = A \cos \theta t + B \sin \theta t. \quad (11.25)$$

Продифференцируем это выражение дважды по t :

$$\frac{dy}{dt} = -A \theta \sin \theta t + B \theta \cos \theta t, \quad (11.26)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -A \theta^2 \cos \theta t - B \theta^2 \sin \theta t. \quad (11.27)$$

Подставим (11.26), (11.27) и (11.25) в уравнение (11.24) и сгруппируем члены с одинаковыми $\cos \theta t$ и $\sin \theta t$:

$$\left[(\omega^2 - \theta^2)A + 2\alpha\theta B \right] \cos \theta t + \left[(\omega^2 - \theta^2)B - 2\alpha\theta A - \frac{F}{m} \right] \sin \theta t = 0.$$

Приравнявая коэффициенты при косинусе и синусе нулю, приходим к системе уравнений относительно A и B :

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \theta^2)A + 2\alpha\theta B &= 0, \\ (\omega^2 - \theta^2)B - 2\alpha\theta A - \frac{F}{m} &= 0. \end{aligned} \quad (11.28)$$

Решая систему уравнений (11.28), найдем

$$A = -\frac{2\alpha\theta F}{m\psi^2}, \quad B = \frac{F(\omega^2 - \theta^2)}{m\psi^2}; \quad (11.29)$$

где

$$\psi^2 = 4\alpha^2\theta^2 + (\omega^2 - \theta^2)^2. \quad (11.30)$$

Подставляем полученное решение в уравнение (11.25) и, учитывая решение однородного уравнения (11.19), получаем

$$y(t) = C e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi) + \frac{F}{m\psi^2} \left[-2\alpha\theta \cos \theta t + (\omega^2 - \theta^2) \sin \theta t \right]. \quad (11.31)$$

На рис. 11.7 показан график решения (11.31).

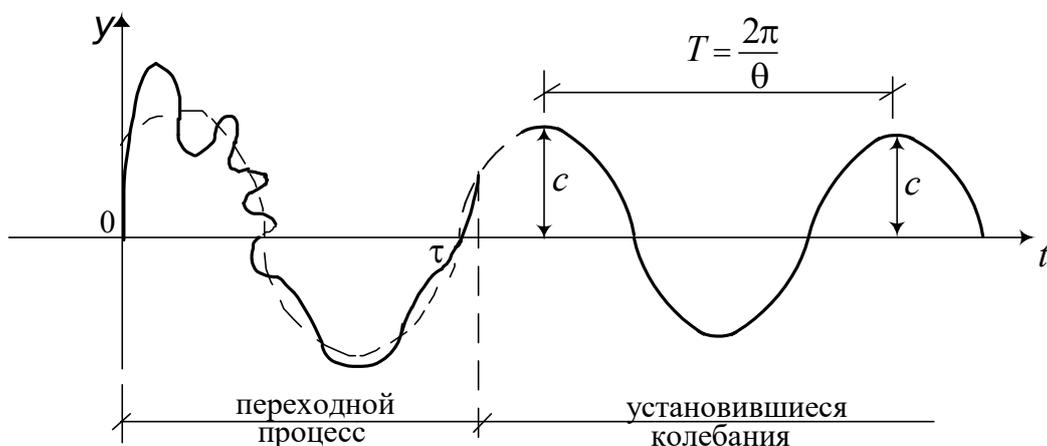


Рис. 11.7. График движения системы под действием вибрационной нагрузки

В начале движения имеет место переходной процесс (неустановившиеся колебания). По истечении некоторого времени τ собственные колебания (11.19) практически затухают, и система совершает установившиеся гармонические колебания с частотой и периодом изменения возмущающей силы.

Рассмотрим установившиеся колебания. Полагая первый член правой части уравнения (11.31) равным нулю, запишем уравнение установившихся колебаний:

$$y(t) = \frac{F}{m\psi} \left[\frac{(\omega^2 - \theta^2)}{\psi} \sin \theta t - \frac{2\alpha\theta}{\psi} \cos \theta t \right]. \quad (11.32)$$

Введем обозначения:

$$\frac{(\omega^2 - \theta^2)}{\psi} = \cos \rho; \quad -\frac{2\alpha\theta}{\psi} = \sin \rho. \quad (11.33)$$

Учитывая формулу синуса суммы двух углов

$$\sin(\theta t + \rho) = \sin \theta t \cdot \cos \rho + \cos \theta t \cdot \sin \rho,$$

найдем

$$y(t) = \frac{F}{m\psi} \sin(\theta t + \rho). \quad (11.34)$$

Подставим в (11.34) значения Ψ (11.30):

$$y(t) = \frac{F}{m\omega^2} \frac{\sin(\theta t + \rho)}{\sqrt{(1 - \delta^2)^2 + \gamma^2 \delta^2}}, \quad (11.35)$$

где

$$\delta = \frac{\theta}{\omega}, \quad \gamma^2 = \frac{4\alpha^2}{\omega^2}.$$

Как показывает формула (11.35), вынужденные колебания при наличии сил сопротивления происходят с частотой θ возмущающей силы F .

Амплитуда вынужденных колебаний ($\sin(\theta t + \rho) = \pm 1$)

$$y_{\max} = \frac{F}{m\omega^2} \mu, \quad (11.36)$$

где μ – динамический коэффициент,

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1 - \delta^2)^2 + \gamma^2 \delta^2}}, \quad (11.37)$$

от начальных условий и времени не зависит. С течением времени она не изменяется и, следовательно, вынужденные колебания, в отличие от свободных, от сопротивления не затухают.

При резонансе, когда $\omega = \theta$ (рис. 11.8), амплитуда вынужденных колебаний (11.36) остается конечной и притом не самой большой из возможных ее значений для данной системы.

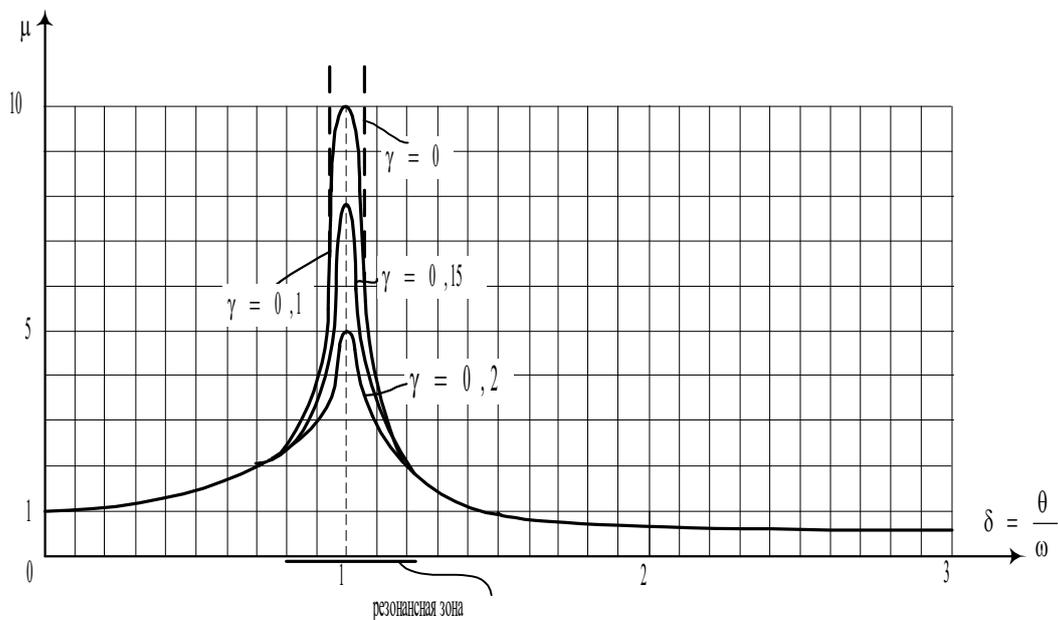


Рис. 11.8. Графики зависимости коэффициента μ от коэффициента неупругого сопротивления γ

В самом деле, разыскивая значение θ , при котором амплитуда достигает максимума, видим, это случится тогда, когда

$$\theta^2 = \omega^2 - 2\alpha^2,$$

т. е. до наступления резонанса.

В вынужденных колебаниях с сопротивлением всегда имеется сдвиг фазы колебаний по сравнению с фазой возмущающей силы на величину

$$\operatorname{tg} \rho = -\frac{2\alpha\theta \cdot \psi}{\psi(\omega^2 - \theta^2)} = -\frac{2\alpha\theta}{(\omega^2 - \theta^2)}.$$

Изложенное показывает, что при отсутствии сил сопротивления ($\gamma = 0$) и при совпадении частот вынужденных и свободных колебаний динамический коэффициент $\mu = \infty$. Как показывает точное решение дифференциального уравнения (11.24), при резонансе получается неограниченное возрастание амплитуды колебания. Следует также отметить, что при больших амплитудах теория малых колебаний, которую мы здесь излагаем, неприменима. Поэтому поведение сооружения при резонансе является более сложным. Во всяком случае остается верным тот вывод, что деформации могут достигать значения, во много раз превышающего их статическую величину.

При наличии сил сопротивления $\gamma \neq 0$ последние играют существенную роль при резонансных или близких к ним колебаниям (резонансная зона $0,7 \leq \delta \leq 1,3$). Система как бы “включает” силы внутреннего трения как резерв, с помощью которого она только и может уравновесить внешнюю нагрузку при $\theta = \omega$.

11.6. Расчет на внезапное нагружение

Пусть сила $F(t) = F \cdot \varphi(t)$ изменяется, как это показано на рис. 11.9.

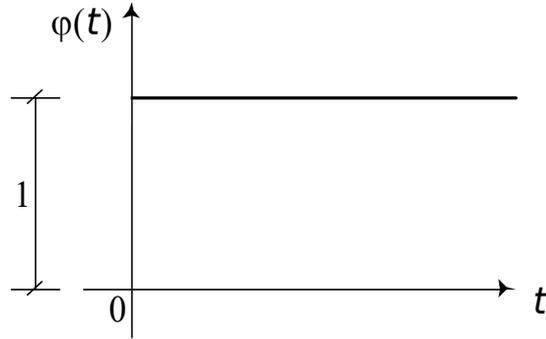


Рис. 11.9. Действие внезапно приложенной силы $F(t) = F \cdot \varphi(t)$

Тогда для $t > 0$ и при $\alpha = 0$ уравнение (11.22) с учетом (11.23) примет вид

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = \frac{F(t)}{m}. \quad (11.38)$$

Будем исследовать установившийся процесс колебаний, т. е. примем во внимание частное решение дифференциального уравнения (11.38). Оно имеет такой вид:

$$y(t) = \frac{1}{\omega m} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (11.39)$$

Здесь τ – новая переменная – время, которое изменяется в пределах от 0 до t .

Внезапное нагружение характеризуется тем, что (см. рис. 11.9)

$$\begin{aligned} \text{при } t < 0 \quad \varphi(t) &= 0, \\ \text{при } t > 0 \quad \varphi(t) &= 1. \end{aligned}$$

С учетом этого

$$y(t) = \frac{F}{\omega m} \int_0^t \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (11.40)$$

Учитывая, что

$$\sin \omega(t - \tau) = \sin \omega t \cdot \cos \omega \tau - \cos \omega t \cdot \sin \omega \tau,$$

получим

$$\int_0^t \sin \omega(t - \tau) d\tau = \frac{1}{\omega} (1 - \cos \omega t). \quad (11.41)$$

Теперь

$$y(t) = \frac{F}{m \omega^2} (1 - \cos \omega t). \quad (11.42)$$

Если вместо ω^2 в выражение $\frac{F}{m \omega^2}$ подставить значение (11.5), то это выражение получит смысл статического перемещения точки приложения силы F . Обозначим его

$$\frac{F}{m\omega^2} = F \delta_{11} = y_{\text{ст}}. \quad (11.43)$$

Тогда окончательное решение (11.42) запишется так:

$$y(t) = y_{\text{ст}} (1 - \cos \omega t). \quad (11.44)$$

Графически оно представлено на рис. 11.10.

Оно (движение) представляет собой незатухающие колебания с частотой свободных колебаний ω около статического положения равновесия с амплитудой $y_{\text{ст}}$.

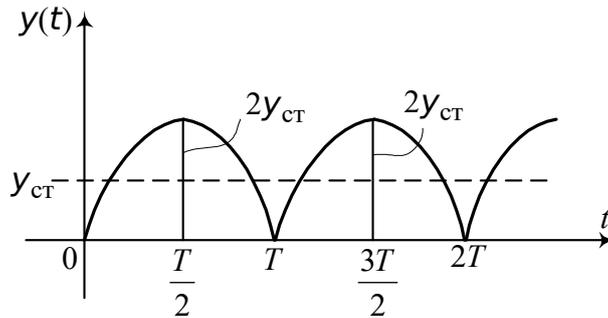


Рис. 11.10. График движения балки при внезапном нагружении

Максимальное отклонение $y_{\text{max}} = 2y_{\text{ст}}$, а динамический коэффициент $\mu = y_{\text{max}}/y_{\text{ст}} = 2$, т. е. наибольший прогиб равен удвоенному статическому прогибу. При $t < \frac{\pi}{2}$ перемещения продолжают нарастать во время действия силы F и максимума достигнут уже после ее исчезновения. При $t > \frac{\pi}{2}$ перемещения достигают максимума, а затем начинают убывать. Следовательно, в тех случаях, когда продолжительность t действия силы F меньше $\frac{T}{2}$, максимальное перемещение следует искать в том процессе свободных колебаний, который происходит после прекращения действия силы F .

11.7. Расчет на действие кратковременной нагрузки

График кратковременной нагрузки $F(t) = F \cdot \varphi(t)$ показан на рис. 11.11.

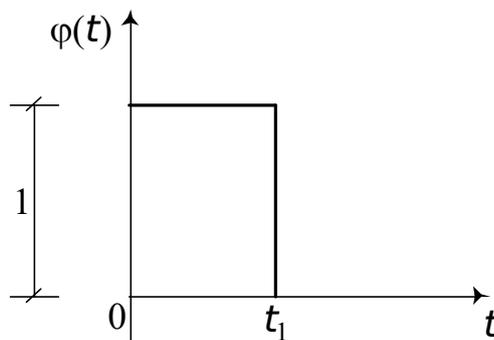


Рис. 11.11. График кратковременной нагрузки

Как видно из этого графика, при $t=0$ на балке внезапно появилась нагрузка, затем оставалась без изменения до момента $t=t_1$, после этого внезапно исчезла.

Частное решение дифференциального уравнения (11.38) приобретает для этого случая нагружения следующий вид:

$$y(t) = \frac{F}{\omega m} \left[\int_0^{t_1} 1 \cdot \sin \omega(t - \tau) d\tau + \int_{t_1}^t 0 \cdot \sin \omega(t - \tau) d\tau \right]. \quad (11.45)$$

Используя те же тригонометрические зависимости, что и при решении (11.42), найдем

$$y(t) = \frac{F}{m\omega^2} [\cos \omega(t - t_1) - \cos \omega t]. \quad (11.46)$$

Учитывая, что

$$\cos \omega(t - t_1) - \cos \omega t = -2 \sin \omega \frac{t - t_1 + t}{2} \sin \omega \frac{t - t_1 - t}{2}, \quad (11.47)$$

получим

$$y(t) = 2y_{\text{ст}} \sin \frac{\omega t_1}{2} \sin \omega \left(t - \frac{t_1}{2} \right). \quad (11.48)$$

Полученное решение показывает, что система совершает свободные гармонические колебания около ненагруженного состояния с частотой ω и амплитудой (рис. 11.12)

$$2y_{\text{ст}} \sin \frac{\omega t_1}{2}. \quad (11.49)$$

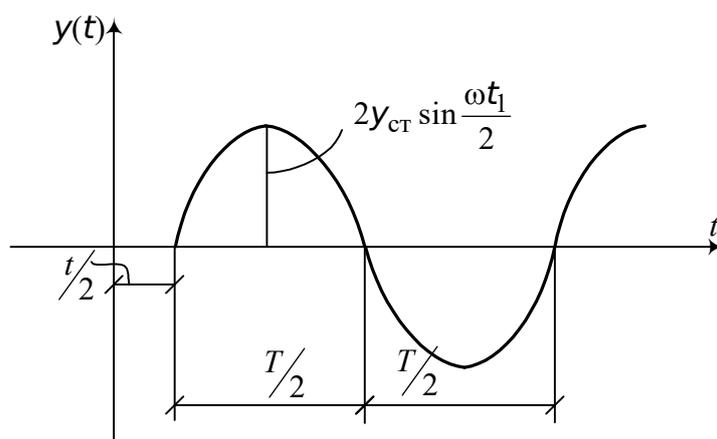


Рис. 11.12. График движения балки при кратковременной нагрузке

Значения динамического коэффициента приведены в табл. 11.1.
Максимальное отклонение

$$y_{\max} = 2y_{\text{ст}} \sin \frac{\pi t_1}{T} . \quad (11.50)$$

Интересно, что при $t_1/T = k$, где k – целое число, $y_{\max} = 0$, т. е. в этом случае после прекращения действия силы F система остается в покое. Причину этого нетрудно понять: в момент времени $t_1/T = k$ колеблющаяся система будет проходить через положение $y = 0$, и в этот момент времени вследствие исчезновения нагрузки получит дополнительную скорость, которая уничтожит имеющуюся скорость, следовательно, в этот момент времени окажется $y = 0$ и $\frac{dy}{dt} = 0$.

Таблица 11.1

Значения динамического коэффициента $\mu = y_{\max}/y_{\text{ст}}$
при кратковременном нагружении

$\frac{t_1}{T}$	0	0,02	0,03	0,04	0,05	0,10	0,15	0,167	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{y_{\max}}{y_{\text{ст}}}$	0	0,126	0,188	0,251	0,313	0,618	0,908	1,0	1,05	1,413	1,617	1,782	1,902	1,974	2

Как видно из табл. 11.1, эффект силы F зависит от продолжительности ее действия. Даже громадная сила даст незначительный эффект, если ее продолжительность невелика.

11.8. Ударное нагружение

Задача о расчете конструкций на ударную нагрузку содержит в себе много трудностей, которые далеко не всегда могут быть преодолены простейшими средствами. Сюда относится, в первую очередь, анализ напряженного состояния в зоне контакта соударяющихся тел и процесса изменения контактных сил во времени. Ограничимся простейшими приемами, которые не дают высокой точности, но в то же время позволяют правильно оценить порядок перемещений, напряжений и деформаций при ударе. Рассмотрим, как и во всех задачах этого раздела, систему с одной степенью свободы в виде невесомой балки с точечной массой (рис. 11.13, а)

$$m = \frac{G_0}{g} ,$$

где G_0 – вес балки; g – ускорение свободного падения.

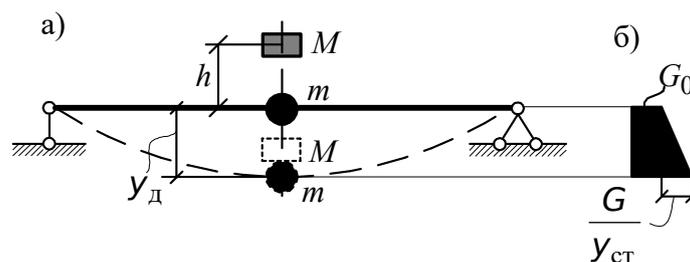


Рис. 11.13. К расчету невесомой балки с сосредоточенной массой на ударные воздействия

Массу груза, падающего с высоты h , обозначим

$$M = \frac{G}{g}.$$

После того как груз G коснулся балки, они движутся вместе со скоростью $v_0 < v$, которую найдем из условия равенства количества движения системы до соударения и после соударения:

$$Mv = (M + m)v_0, \quad (11.51)$$

где $v = \sqrt{2gh}$.

Когда вся кинетическая энергия груза перейдет в потенциальную энергию изгибаемой балки, груз остановится, а сила, изгибающая балку, достигнет максимума.

Кинетическая энергия системы равна

$$T_0 = \frac{(M + m)v_0^2}{2} = \frac{M^2}{2(M + m)}v^2. \quad (11.52)$$

Далее начнется движение в обратном направлении. Сила взаимодействия между балкой и грузом будет уменьшаться. Когда балка полностью распрямится, груз при отсутствии сил трения получит среднюю скорость в обратном направлении.

Процесс совместного движения груза G и балки может быть описан уравнением (11.8)

$$y(t) = A \sin \omega^* t + B \cos \omega^* t$$

при начальных условиях:

$$\begin{aligned} \text{при } t = 0 \quad y(t) &= 0, \\ \frac{dy}{dt} &= v_0 = \frac{M}{M + m}v. \end{aligned}$$

Используя начальные условия, найдем (см. (11.11))

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega^*} \sin \omega^* t. \quad (11.53)$$

Максимальное перемещение (при $\sin \omega^* t = \pm 1$)

$$y_{\max} = \frac{v_0}{\omega^*}, \quad (11.54)$$

а максимальная сила

$$F_{\max} = \frac{y_{\max}}{\delta_{11}} = \frac{v_0}{\omega^* \delta_{11}}. \quad (11.55)$$

Для определения динамического коэффициента $\mu = \frac{y_{\max}}{y_{\text{ст}}}$ используем известную из теоретической механики теорему о том, что приращение ки-

нетической энергии системы равно работе внешних сил. Тогда можно написать

$$T_1 - T_0 = A, \quad (11.56)$$

где T_1 – кинетическая энергия системы при $y = y_d$, $T_0 = 0$; A – работа сил тяжести G и G_0 и силы R , действующей на массы со стороны балки:

$$A = (G + G_0)y_d - R y_d. \quad (11.57)$$

Сила R выражается площадью трапеции, отражающей изменение силы R на пути y_d (рис. 11.13, б):

$$R = G_0 + \frac{1}{2} \frac{G y_d}{y_{ст}}.$$

Учитывая T_0 (11.52), получим квадратное уравнение относительно y_d :

$$y_d^2 - 2y_d y_{ст} - 2h \frac{M}{M+m} y_{ст} = 0. \quad (11.58)$$

Два корня этого уравнения будут

$$y_d = y_{ст} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{ст}} \left(\frac{M}{M+m} \right)} \right). \quad (11.59)$$

В этой формуле знак “+” соответствует нижнему амплитудному положению масс, а знак “-” – верхнему положению.

Приняв знак “+”, окончательно получим формулу динамического коэффициента

$$\mu = \frac{y_d}{y_{ст}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{ст}} \left(\frac{M}{M+m} \right)}. \quad (11.60)$$

При $h = 0$ формула (11.60) дает $\mu = 2$, что соответствует так называемому внезапному загрузению (см. п. 11.6).

На рис. 11.14 представлена зависимость μ от параметров удара $\frac{h}{y_{ст}}$ и $\frac{m}{M}$.

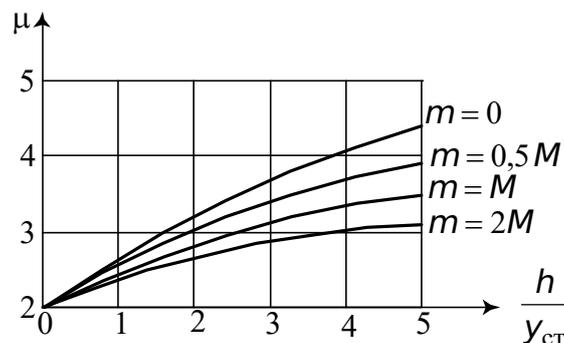


Рис. 11.14. Зависимость динамического коэффициента от

относительной высоты падения $\frac{h}{y_{ст}}$ и соотношения масс

Из рис. 11.14 видно, что чем больше ударяемая масса, тем меньше динамический коэффициент. Связано это с потерями кинетической энергии ударяющего тела при неупругом ударе. Чтобы это подтвердить, достаточно сравнить энергию перед ударом

$$T = \frac{Mv^2}{2}$$

и энергию T_0 (см. (11.52)) после удара. Их отношение равно

$$\frac{T_0}{T} = \frac{M}{M+m} \leq 1. \quad (11.61)$$

Как видим, это отношение тем меньше, чем больше отношение m/M

11.9. Динамические характеристики строительных материалов и конструкций

Здесь мы рассмотрим основные динамические характеристики строительных материалов: *динамическую жесткость* и *динамическую прочность* (выносливость) при циклическом процессе деформирования.

11.9.1. Динамическая жесткость

Обратим внимание на понятия “статической” и “динамической” жесткости элементов строительных конструкций. Под “статической” понимается жесткость, определяемая при медленных процессах деформирования конструкций, которая вводится в расчет сооружений на статические нагрузки. Под “динамической” будем понимать жесткость, определяемую при достаточно быстрых циклических процессах деформирования конструкций, которая вводится в расчет сооружений на динамические нагрузки.

Динамическую жесткость элементов строительных конструкций при расчете на умеренные динамической нагрузки (периодические и импульсивные) определяют исходя из упругой стадии работы материала и считают равной произведению динамического модуля упругости на соответствующую геометрическую характеристику поперечного сечения элемента. Исключение представляют случаи мощных динамических нагрузок, вызывающих появление макропластических деформаций, которые здесь не рассматриваются.

При динамическом расчете стальных и деревянных конструкций динамические модули упругости можно принимать равными статическим, определяемым при кратковременных испытаниях. При расчете кирпичных зданий на горизонтальные колебания модуль сдвига принимается равным $0.3E$, где E – модуль упругости кирпичной кладки на сжатие.

11.9.2. Явление усталости

Тела, подвергающиеся периодически изменяющимся нагрузкам, по истечении определенного числа циклов разрушаются. Такое явление называется *усталостью* материала. Способность материала сопротивляться достаточно большому числу циклов периодически повторяющейся нагрузки называется *выносливостью*. Периодически изменяющиеся нагрузки вызывают напряжения, которые также изменяют свои величины периодически. Например, периодический характер изменения растягивающих и сжимающих напряжений при одноосном растяжении-сжатии может быть изображен графиком, как на рис. 11.15.

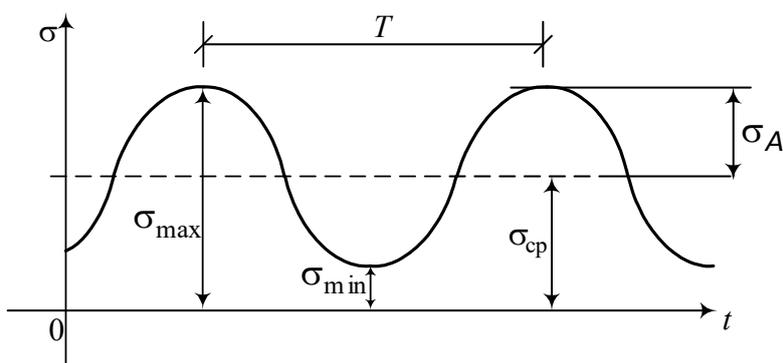


Рис. 11.15. Периодический характер изменения растягивающих и сжимающих напряжений при одноосном растяжении-сжатии

Цикл переменных напряжений характеризуется величинами: σ_{\max} — максимальное напряжение; σ_{\min} — минимальное напряжение; σ_A — амплитуда цикла, $\sigma_A = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$; $\sigma_{\text{ср}}$ — среднее напряжение, $\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$; r — коэффициент асимметрии цикла, $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$; T — период цикла (ν — частота цикла, $\nu = \frac{1}{T}$).

Для знакопеременного цикла $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$ и $r = -1$ (симметричный цикл напряжений), рис. 11.16; $\sigma_{\text{ср}} = 0$; $\sigma_A = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\max}}{2} = \sigma_{\max}$.

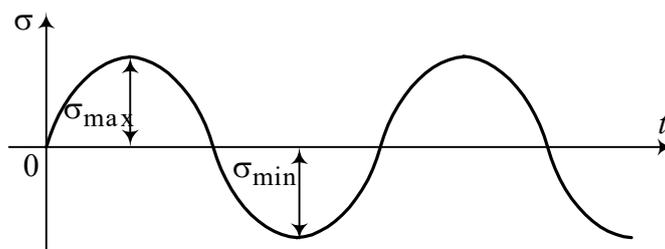


Рис. 11.16. Симметричный цикл напряжений

Для статической нагрузки (рис. 11.17) $\sigma_{\max} = \sigma$; $\sigma_{\min} = \sigma$; $\sigma_{\text{cp}} = \sigma$; $\sigma_A = 0$; $r = 1$.

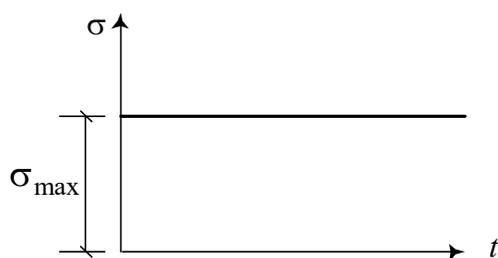


Рис. 11.17. График статической нагрузки

Для расчетов на прочность при действии повторно-переменных напряжений необходимо знать механические характеристики материала. Они определяются путем испытаний на усталость образцов на специальных машинах. Наиболее простым и распространенным является испытание образцов при симметричном цикле напряжений. Одинаковые образцы при одинаковых условиях подвергаются периодическому знакопеременному симметричному растяжению-сжатию таким образом, что амплитуда напряжений $\sigma_A = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$, оставаясь постоянной для каждого образца, меняется от одного образца к другому. Каждый образец до разрушения выдерживает N циклов при некотором наибольшем напряжении σ . Откладывая число N по горизонтали, получим кривую Вёлера* (рис. 11.18).

Следовательно, при симметричном цикле нагружения образца с наибольшим напряжением $\sigma < \sigma_0$ он может выдержать без разрушения неограниченное число циклов. Если же наибольшее напряжение в образце $\sigma > \sigma_0$, то он разрушится при конечном числе циклов N . Напряжение σ_0 называется *пределом усталости*.

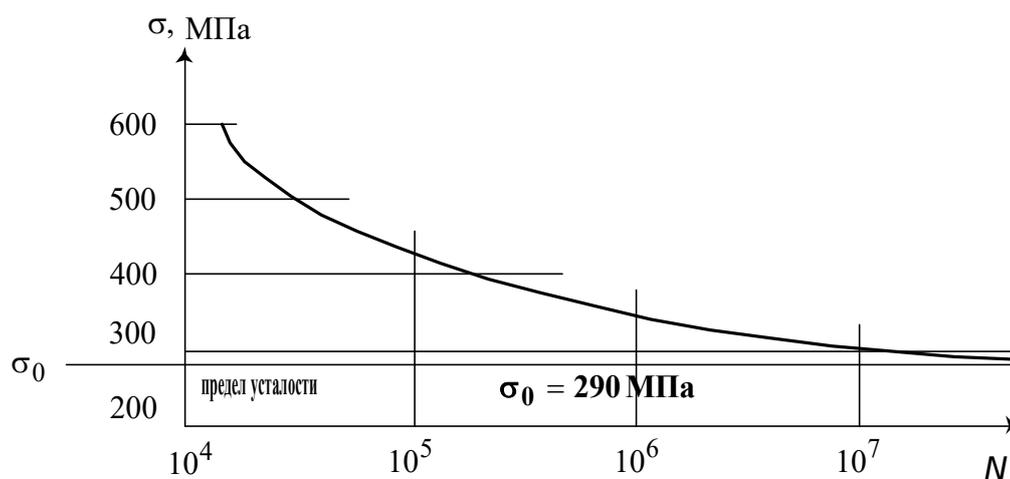


Рис. 11.18. Кривая усталости

* Вёлер (Велер) (1819 – 1914) – немецкий инженер.

Для сталей предел усталости при симметричном цикле растяжения-сжатия составляет 30-50 % от временного сопротивления (см. табл. 11.2).

Таблица 11.2

Пределы выносливости при разных видах деформации

Материал	σ_B , МПа	Значение σ_0/σ_B		
		Изгиб	Растяжение-сжатие	Кручение
Сталь марки:				
10	340-420	0,51	0,37	0,27
20	450-500	0,43	0,31	0,255
30	480-600	0,435	0,35	0,215
45	600-750	0,435	0,325	0,26
40ХН	900	0,44	0,32	0,28
12ХНЗА	950	0,455	0,31	0,25
ГУТАП 5140	900-1000	0,435	0,30	0,25
25ХНВА	1100	0,455	0,305	0,265
18ХНВА	1150	0,49	0,33	0,30

Так как неограниченное число циклов осуществить нельзя, то для установления значения предела усталости задаются определенным достаточно большим числом циклов и определяют наибольшее напряжение, при котором образец, проходя через все число циклов, не разрушается.

Для сталей такое число циклов, или базу испытаний, принимают в пределах $10^6 - 10^7$ циклов (рис. 11.18). Для цветных металлов – $(5 - 10) \cdot 10^7$ циклов.

В табл. 11.2 для некоторых сталей даны пределы выносливости в долях от σ_B при симметричных циклах напряжений изгиба, растяжения-сжатия (рис. 11.16) и кручения.

Как видно из табл. 11.2, для металлов минимум σ_0/σ_B соответствует кручению, максимум – изгибу. Пределы усталости сталей при изгибе, сжатии-растяжении и кручении соотносятся приблизительно как числа 1, 8:1, 3:1.

11.9.3. Диаграмма предельных амплитуд

Для получения характеристик сопротивления усталости при асимметричных циклах производят испытания образцов при различной степени асимметрии и по результатам испытаний строят диаграмму предельных напряжений, характеризующую зависимость между амплитудами циклов σ_A и средними значениями напряжений циклов σ_{cp} (рис. 11.19).

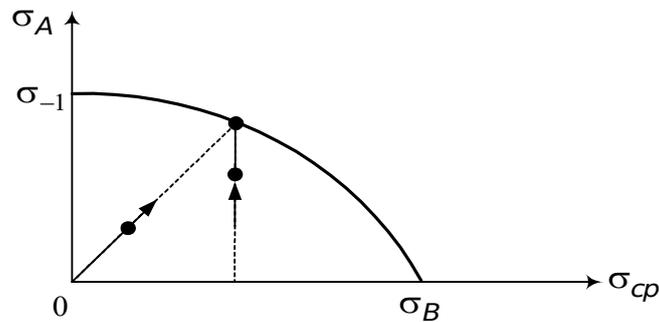


Рис. 11.19. Диаграмма предельных амплитуд

Введение нового параметра (параметра асимметрии цикла) требует испытания уже не десятка, а нескольких десятков образцов. Построение диаграммы $\sigma_A - \sigma_B$ может быть осуществлено следующим способом.

Всю партию образцов, предназначенную для испытаний, разбивают на несколько серий. Для каждой серии устанавливают среднее значение напряжения $\sigma_{ср}$. В результате испытаний определяют максимальное значение σ_A , под которым понимается наибольшее значение амплитуды, не вызывающее разрушения образца до базового числа испытаний N при заданном среднем напряжении $\sigma_{ср}$. Полученные таким образом напряжения σ_A и $\sigma_{ср}$ определяют на диаграмме амплитуд одну точку (рис. 11.19). По результатам испытаний всех серий образцов находят несколько точек указанной диаграммы.

Назначение диаграммы предельных амплитуд выясняется из следующих рассуждений. Допустим, что цикл нагружения образца характеризуется параметрами σ_A , $\sigma_{ср}$. Если точка, отвечающая этим значениям σ_A и $\sigma_{ср}$, оказывается ниже кривой $\sigma_{ср} \sim \sigma_A$ на рис. 11.19, то рассматриваемый образец способен выдержать неограниченное число циклов или, по крайней мере, не разрушится до базового числа цикла N . Если же точка оказалась выше указанной кривой, то образец разрушится при некотором ограниченном числе циклов или при числе циклов, меньшем базового числа.

11.9.4. Факторы, влияющие на усталостную прочность материалов

На предел выносливости материала оказывают влияние концентрация напряжений, масштабный фактор, качество обработки поверхности, внешняя среда и др.

11.9.4.1. Концентрация напряжений

Концентрация напряжений при циклическом изменении нагрузки вызывает в зоне очага концентрации зарождение и последующий рост трещины, который завершается усталостным разрушением. Для учета влияния концентрации напряжений на предел выносливости вводится эффективный коэффициент концентрации напряжений K_σ , равный отношению пределов

выносливости «гладкого» образца σ_p и образца с концентрацией напряжений σ_{pk} , т.е.

$$\beta = \frac{\sigma_p}{\sigma_{pk}}. \quad (11.62)$$

Экспериментально установлено, что коэффициент β уменьшается с увеличением коэффициента асимметрии цикла, т. е. по мере приближения нагружения к статическому.

Хотя коэффициент β должен определяться для каждого значения коэффициента асимметрии цикла, вследствие недостаточности экспериментальных данных в расчетах обычно используются числовые значения эффективного коэффициента концентрации напряжений для симметричного цикла:

$$\beta = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}}. \quad (11.63)$$

Влияние концентрации напряжений на предел выносливости иногда учитывается коэффициентом чувствительности материала к местным напряжениям:

$$q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}, \quad (11.64)$$

где $\alpha = \sigma_{\max} / \sigma_{\text{ном}}$ – теоретический коэффициент концентрации напряжений (см. п. 10.8).

Коэффициент q зависит главным образом от свойств материала. Для конструкционных сталей коэффициент $q \approx 0.6 \dots 0.8$, причем более прочным сталям соответствуют большие значения q . Поэтому применение высокопрочных материалов при переменных нагрузках не всегда целесообразно.

Замечено, что усталостное разрушение в значительной степени зависит от интенсивности уменьшения напряжений в области очага концентрации напряжений. Если местные напряжения убывают достаточно резко, то число зерен материала в зоне высоких напряжений относительно невелико, и вероятность усталостной трещины также относительно невелика. Скорость убывания местных напряжений определяется градиентом G , то есть производной от напряжения по какой-либо координате (рис. 10.15):

$$G = \left. \frac{d\sigma}{dx} \right|_{x=\frac{a}{2}}. \quad (11.65)$$

Относительным градиентом является

$$\bar{G} = \frac{G}{\sigma_{\max}}, \quad (11.66)$$

увеличение которого снижает чувствительность материала к местным напряжениям.

11.9.4.2. Масштабный фактор

Многочисленными испытаниями установлено, что усталостная прочность образцов при всех прочих равных условиях снижается с увеличением их площади поперечного сечения. Как правило, зависимость между пределом выносливости материала и размерами поперечного сечения имеет асимметрический характер, из чего следует, что для очень больших образцов предел выносливости оказывается неизменным. На сопротивление усталости оказывает влияние также длина образца, хотя оно менее ярко проявляется по сравнению с влиянием размеров поперечного сечения.

Снижение усталостной прочности с увеличением размеров детали получило название масштабного фактора. В качестве причин появления масштабного фактора можно назвать следующие:

а) статистический фактор – большая вероятность появления дефектов и перенапряженных зерен материала, что приводит к увеличению вероятности разрушения;

б) технологический фактор – влияние способа обработки детали в процессе ее изготовления;

в) производственный фактор – ухудшение качества материала с увеличением объема детали,ковки и т.п.

Для неоднородных материалов, имеющих большое число дефектов, влияние масштабного фактора на предел выносливости выражен сильнее, чем для однородных материалов с существенно меньшим числом дефектов. Влияние абсолютных размеров детали на предел выносливости материала учитывается с помощью коэффициента масштабного фактора.

11.9.4.3. *Качество поверхности*

Результаты испытаний образцов, поверхность которых имеет разную степень чистоты обработки, свидетельствуют о том, что предел выносливости, полученный для образцов с полированной поверхностью, выше, чем для образцов со шлифованной поверхностью, а σ_r последних выше, чем у образцов с поверхностью, обработанной резцом, и т. д. Это обстоятельство объясняется тем, что после обработки резцом на поверхности образца остаются надрезы, царапины и т. п., которые при действии переменных во времени нагрузок провоцируют зарождение и последующее развитие трещин.

Для повышения усталостной прочности деталей используются технологические методы упрочнения их поверхности, такие как наклеп поверхностного слоя путем обдувки дробью или ультразвуком, закалка токами высокой частоты и др.

Положительное влияние указанных способов на усталостную прочность детали объясняется тем, что в поверхностном слое материала создаются сжимающие напряжения, которые затрудняют развитие усталостных трещин. Кроме того, вследствие наклепа повышается прочность материала в поверхностном слое.

Влияние технологических факторов на усталостную прочность осуществляется коэффициентом поверхностного упрочнения.

11.9.4.4. Внешняя среда

Резкое снижение предела выносливости вызывает коррозия металлов. При этом в поверхностных слоях возникают трещины коррозионной усталости, в основном внутрикристаллические. Около небольших местных коррозионных повреждений возникает концентрация напряжений, причем на дне коррозионной полости появляются максимальные напряжения. Это приводит к более интенсивному развитию коррозии и к постепенному углублению трещины усталости. Снижение предела выносливости вследствие коррозии более существенно для высокопрочных сталей. В целях защиты конструкций от коррозии применяют различные защиты (антикоррозионные) покрытия поверхностей, например, их окраску.

11.9.5. Усталостная прочность при нестационарных нагрузениях

До сих пор предполагалось, что значение амплитуды напряжений σ_A изменяется во времени. Часто это изменение носит циклический характер. Продолжительность такого цикла, называемого блоком нагружения, обозначим t_σ . Для оценки усталостной прочности элемента конструкции необходимо иметь данные о значениях σ_A и количестве циклов ее повторения на протяжении одного блока нагружения.

Для этого разобьем весь интервал изменения напряжения σ на k отрезков, в пределах каждого из которых амплитуда напряжений σ_{A_i} ($i = 1, \dots, k$) считается постоянной, и определяется n_i – число циклов повторения величины σ_{A_i} (рис. 11.20).

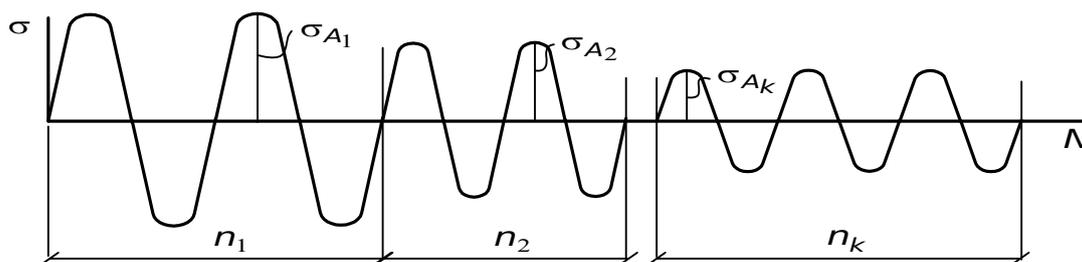


Рис. 11.20. Разбивка интервала изменения напряжения на отрезки, в пределах которых амплитуда напряжений постоянна

По результатам таких вычислений можно построить график зависимости σ_{A_i} от n_i , показанный на рис. 11.21. Здесь σ_{A_i} убывает с ростом порядкового номера i , в результате чего $\sigma_A = \sigma_{\max}$, $\sigma_{A_k} = \sigma_{\min}$. При неограниченном увеличении числа k ступенчатая функция распределения параметра σ_A переходит в непрерывную функцию.

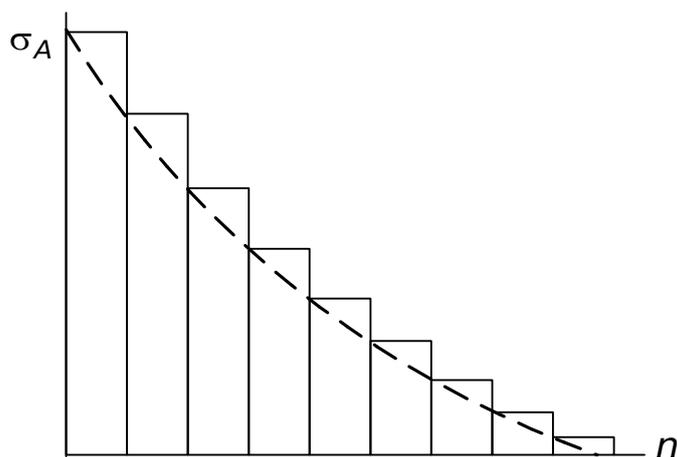


Рис. 11.21. Распределение амплитуд напряжений в блоке нагружения

Число

$$n_{\sigma} = \sum_{i=1}^{k_i} n_i$$

определяет общее число циклов в одном блоке нагружения.

Если общий срок службы конструкции равен T , то число блоков нагружения, укладываемых в срок службы, равно

$$\lambda = \frac{T}{t_{\sigma}},$$

а общее суммарное число циклов всех амплитуд напряжений

$$N_{\Sigma} = \lambda n_{\sigma}.$$

Теперь естественно возникает вопрос об определении числа циклов изменения напряжений при нестационарном нагружении, после которого произойдет усталостное разрушение конструкции.

Ответ на этот вопрос может быть получен с помощью гипотезы о линейном суммировании усталостных повреждений, предложенной впервые в 1924 г. Пальмгреном. Смысл гипотезы заключается в следующем. Допустим, что N_i – число циклов до наступления усталостного разрушения при неизменной амплитуде σ_{A_i} . Число N_i может быть найдено с помощью кривой Велера (см. рис. 11.18). Отношение n_i^*/N_i , где $n_i^* = \lambda n_i$, определяет относительное усталостное повреждение, соответствующее напряжению σ_{A_i} .

Очевидно, что усталостному разрушению соответствует равенство

$$\sum_{i=1}^k \frac{n_i^*}{N_i} = 1.$$

Если $\sigma_{A_i} < \sigma_{-1}$ при любом $1 \leq i \leq k$, то разрушение элемента конструкции не происходит. Гипотеза линейного суммирования повреждений неоднократно подвергалась проверке. Опыт ее применения показыва-

ет, что она дает достоверные результаты, если все значения амплитуды σ_{A_i} превышают предел выносливости и монотонно изменяются во времени без резких всплесков.

11.9.6. Расчет на прочность при переменных напряжениях

Расчет элементов строительных конструкций на выносливость сводится к проверке неравенства вида

$$\sigma_{\max} \leq \alpha \gamma_v R_v, \quad (11.67)$$

где σ_{\max} – максимальное нормальное напряжение; R_v – расчетное сопротивление усталости, зависящее от временного сопротивления материала; α – коэффициент, учитывающий число циклов нагружений; γ_v – коэффициент, зависящий от вида напряженного состояния и коэффициента асимметрии цикла.

Например, для стальных конструкций коэффициент γ_v определяется по табл. 11.3.

Таблица 11.3

Значение коэффициента γ_v для стальных конструкций

σ_{\max}	r	γ_v
Растяжение	$-1 \leq r < 0$	$2,5/(1,5 - r)$
	$0 < r \leq 0,8$	$2,0/(1,2 - r)$
	$0,8 < r < 1$	$1,0/(1 - r)$
Сжатие	$-1 \leq r < 1$	$2,0/(1 - r)$

Расчетное сопротивление усталости, а также коэффициент α учитывают качество обработки поверхности рассчитываемого элемента, его конструктивное исполнение, наличие концентрации напряжений.

Для частных видов конструкций соотношение (11.67) может принимать несколько отличную форму. Так, при расчете стальных конструкций мостов используется следующее неравенство:

$$\sigma_{\max} \leq \gamma_v m R, \quad (11.68)$$

где R – расчетное сопротивление при растяжении, сжатии и изгибе по пределу текучести материала; m – коэффициент условий работы;

$$\gamma_v = \frac{1}{(\alpha\beta + \delta) - (\alpha\beta - \delta)r}, \quad (11.69)$$

где α, δ – коэффициенты, учитывающие марку стали и нестационарность нагружения; r – коэффициент асимметрии цикла переменных напряжений; β – эффективный коэффициент концентрации напряжений.

Коэффициент γ_v , определяемый выражением (11.69), описывает вид диаграммы предельных амплитуд с учетом концентрации напряжений, качества материала и обработки его поверхности, режима нагружения и других факторов.

Рассмотрим пример расчета на прочность. Пусть раскос стального пролетного строения железнодорожного моста при прохождении поезда испытывает воздействие переменного осевого усилия. Наибольшее растягивающее усилие равно $N_{\max} = 1200 \text{ кН}$. Наименьшее (сжимающее) усилие $N_{\min} = 200 \text{ кН}$. Расчетное сопротивление R низколегированной стали марки 15ХСНД равно 295 МПа. Коэффициент условий работы $m = 0,9$. Поперечное сечение – составное (рис. 11.22), и его площадь равна $A = 75 \text{ см}^2$.

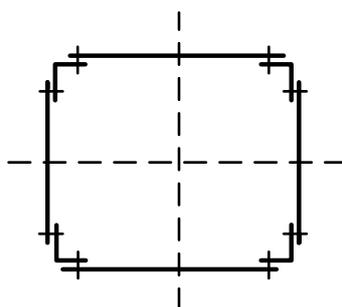


Рис. 11.22. Конструкция поперечного сечения раскоса стального пролетного строения железнодорожного моста

Коэффициент асимметрии цикла определяется так:

$$r = -\frac{|N_{\min}|}{N_{\max}} = -\frac{1}{6}.$$

В соответствии со СНиП 2.05.03-84 коэффициент β принимается равным 1,5; параметры $\alpha = 0,72$, $\delta = 0,24$.

Тогда по (11.64)

$$\gamma_v = 0,85.$$

Максимальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{1200 \cdot 10^3}{75 \cdot 10^{-4}} = 160 \text{ МПа}.$$

Правая часть неравенства (11.63) принимает значение

$$\gamma_v m R = 0,85 \cdot 0,9 \cdot 295 = 226,4 \text{ МПа} > 160 \text{ МПа}.$$

Следовательно, условие усталостной прочности выполняется.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Остановимся на некоторых научных проблемах сопротивления материалов, не нашедших отражения (или частично изложенных) в настоящем издании, но характеризующих современный уровень развития науки о прочности.

При теоретическом определении напряжений в стержнях используются определенные гипотезы, упрощающие решение задач. Экспериментальные результаты в общем случае не полностью укладываются в рамки этих гипотез. Для правильного их объяснения и применения, как правило, требуется более широкий взгляд на деформирование элемента конструкции. Такую возможность дает применение основных понятий и уравнений теории упругости.

В последнее время в различных областях техники, в том числе и строительстве, все большее распространение получают новые, так называемые композитные материалы (композиты). Композит представляет собой полимерную или металлическую матрицу, армированную высокопрочными волокнами. Отличительными признаками этих материалов являются их неоднородность и, как правило, ярко выраженная анизотропия свойств.

Основным методом экспериментальных исследований является метод тензометрии. Однако его недостаток состоит в том, что в нем сведения о деформировании элемента получаются на основе "точечных" измерений деформации. В настоящее время существуют и успешно применяются методы фотоупругости, метод муаровых полос и метод голографической интерферометрии, позволяющие в наглядной форме получить из эксперимента общую картину деформирования элемента.

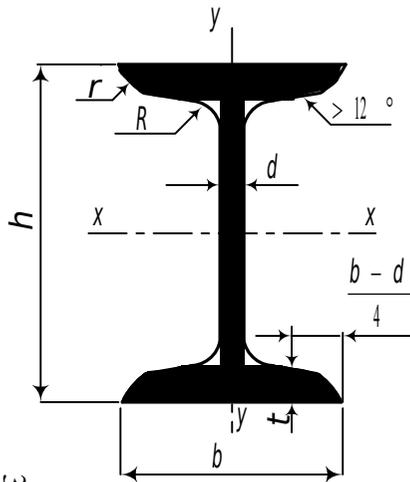
Элементы современных конструкций при работе могут находиться не только в условиях высоких и низких температур, вакуума, но и в условиях нейтронного облучения. Радиационное облучение твердых тел сопровождается многочисленными эффектами, в результате которых в теле возникает объемная деформация, изменяются упругие и особенно пластические характеристики материала.

Снижение стоимости, материалоемкости при обеспечении высокого уровня надежности осуществляется в процессе оптимального проектирования. Здесь сначала задают требования к поведению конструкции вместе с расчетными нагрузками и геометрическими ограничениями, а затем определяют целевую функцию или функцию стоимости. Цель последующего расчета состоит в таком выборе геометрии и материала (или материалов) конструкции, при которых достигается требуемое поведение конструкции, и ее стоимость оказывается минимальной.

В последние 25-30 лет сформировалось новое направление в вопросах прочности, получившее наименование "механика разрушения". В ней изучаются вопросы роста и устойчивости трещин в элементах конструкции в зависимости от уровня нагружения и других условий в процессе эксплуатации.

СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ

Балки двутавровые (по ГОСТу 8239-89)



Обозначения

h - высота балки;
b - ширина полки;
d - толщина стенки;
t - средняя толщина полки;

J - момент инерции;
W - момент сопротивления;
i - радиус инерции;
S - статический момент
 полусечения

Таблица П. 1.1

351
345
Номер
профи-
ля

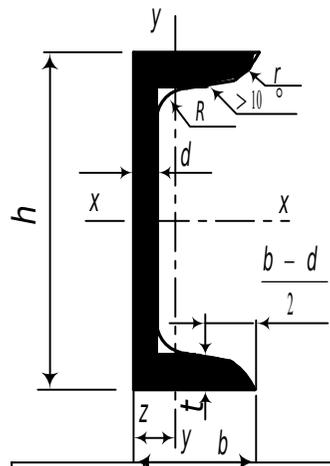
1	Размеры, мм				Пло- щадь сече- ния, см ²	<i>J_x</i> , см ⁴	<i>W_x</i> , см ³	<i>i_x</i> , см	<i>S_x</i> , см ³	<i>J_y</i> , см ⁴	<i>W_y</i> , см ³	<i>i_y</i> , см	Масса 1 м, кг
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>t</i>									
2	3	4	5	6	6	8	9	10	11	12	13	14	
10	100	55	4.5	7.2	12.0	198	39.7	4.06	23.0	17.9	6.49	1.22	9.46
12	120	64	4.8	7.3	14.7	350	58.4	4.88	33.7	27.9	8.72	1.38	11.5
14	140	73	4.9	7.5	17.4	572	81.7	5.73	46.8	41.9	11.5	1.55	13.7
16	160	81	5.0	7.8	20.2	873	109	6.57	62.3	58.6	14.5	1.70	15.9

Продолжение табл. П.1.1

352

1	2	3	4	5	6	6	8	9	10	11	12	13	14
18	180	90	5.1	8.1	23.4	1290	143	7.42	81.4	82.6	18.4	1.88	18.4
20	200	100	5.2	8.4	26.8	1840	184	8.28	104	115	23.1	2.07	21.0
22	220	110	5.4	8.7	30.6	2550	232	9.13	131	157	28.6	2.27	24.0
24	240	115	5.6	9.5	34.8	3460	289	9.97	163	198	34.5	2.37	27.3
27	270	125	6.0	9.8	40.2	5010	371	11.2	210	260	41.5	2.54	31.5
30	300	135	6.5	10.2	46.5	7080	472	12.3	268	337	49.9	2.69	36.5
33	330	140	7.0	11.2	53.8	9840	597	13.5	339	419	59.9	2.79	42.2
36	360	145	7.5	12.3	61.9	13380	743	14.7	423	516	71.1	2.89	48.6
40	400	155	8.3	13.0	72.6	19062	953	16.2	545	667	86.1	3.03	57.0
45	450	160	9	14.2	84.7	27696	1231	18.1	708	808	101	3.09	66.5
50	500	170	10	15.2	100	39727	1589	19.9	919	1043	123	3.23	78.5
55	550	180	11	16.5	118	55962	2035	21.8	1181	1356	151	3.39	92.6
60	600	190	12	17.8	138	76806	2560	23.6	1491	1725	182	3.54	108

Швеллеры (по ГОСТу 8240-89)



Обозначения

h - высота швеллера;
 b - ширина полки;
 d - толщина стенки;
 t - средняя толщина полки;
 z_0 - расстояние от оси y до внешней грани стенки

J - момент инерции;
 W - момент сопротивления;
 i - радиус инерции;
 S - статический момент полусечения;

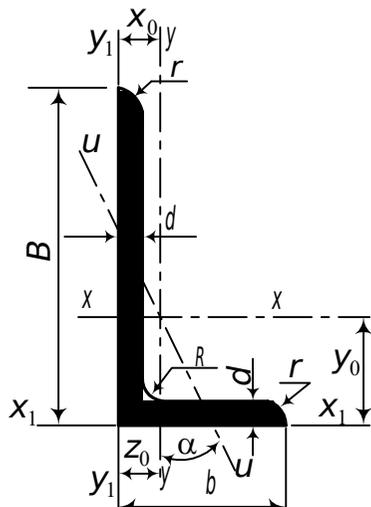
Таблица П.1.2

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения, см^2	J_x , см^4	W_x , см^3	i_x , см	S_x , см^3	J_y , см^4	W_y , см^3	i_y , см	z_0 , см	Масса 1 м, кг
	h	b	d	t										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	5	32	4.4	7.0	6.16	22.8	9.1	1.92	5.59	5.61	2.75	0.954	1.16	4.84
6.5	65	36	4.4	7.2	7.51	48.6	15.0	2.54	9.0	8.7	3.68	1.08	1.24	5.90
8	80	40	4.5	7.4	8.98	89.4	22.4	3.16	13.3	12.8	4.75	1.19	1.31	7.05
10	100	46	4.5	7.6	10.9	174	34.8	3.99	20.4	20.4	6.46	1.37	1.44	8.59
12	120	52	4.8	7.8	13.3	304	50.6	4.78	29.6	31.2	8.52	1.53	1.54	10.4
14	140	58	4.9	8.1	15.6	491	70.2	5.60	40.8	45.4	11.0	1.70	1.67	12.3
16	160	64	5.0	8.4	18.1	747	93.4	6.42	54.1	63.6	13.8	1.87	1.80	14.2

Продолжение табл. П.1.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16a	160	68	5.0	9.0	19.5	823	103	6.49	59.4	78.8	16.4	2.01	2.00	15.3
18	180	70	5.1	8.7	20.7	1090	121	7.24	69.8	86	17.0	2.04	1.94	16.3
18a	180	74	5.1	9.3	22.2	1190	132	7.32	76.1	105	20.0	2.18	2.13	17.4
20	200	76	5.2	9.0	23.4	1520	152	8.07	87.8	113	20.5	2.20	2.07	18.4
22	220	80	5.4	9.5	26.7	2110	192	8.89	110	151	25.1	2.37	2.21	21.0
24	240	90	5.6	10.0	30.6	2900	242	9.73	139	208	31.6	2.60	2.42	24.0
27	270	95	6.0	10.5	35.2	4160	308	10.9	178	262	37.3	2.73	2.47	27.7
30	300	100	6.5	11.0	40.5	5810	387	12.0	224	327	43.6	2.84	2.52	31.8
33	330	105	7.0	11.7	46.5	7980	484	13.1	281	410	51.8	2.97	2.59	36.5
36	360	110	7.5	12.6	53.4	10820	601	14.2	350	513	61.7	3.10	2.68	41.9
40	400	115	8.0	13.5	61.5	15220	761	15.7	444	642	73.4	3.23	2.75	48.3

354



Уголки неравнополочные (по ГОСТу 8510-86*)

Обозначения

 B - ширина большей полки; b - ширина меньшей полки; d - толщина стенки; J - момент инерции; i - радиус инерции; x_o, y_o - расстояние от центра тяжести до
внешних граней полок

Таблица П.1.3

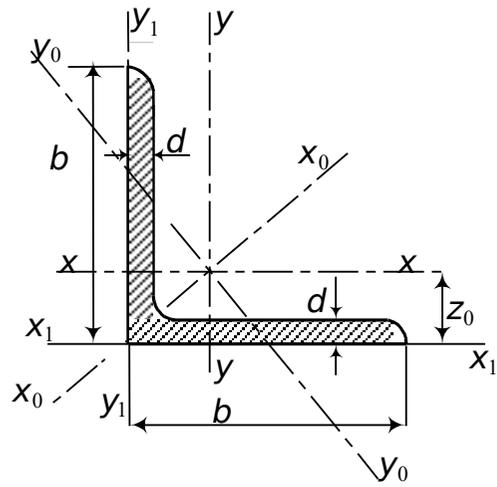
Номер профи- ля	Размеры, мм			Пло- щадь сече- ния, см ²	$J_x,$ см ⁴	$i_x,$ см	$J_y,$ см ⁴	$i_y,$ см	$J_{u\ min},$ см ⁴	$i_{u\ min},$ см ⁴	Угол наклона оси $u,$ $tg\ \alpha$	$J_{x1},$ см ⁴	$J_{y1},$ см ⁴	$x_o,$ см	$y_o,$ см	Мас- са 1 м, кг
	B	b	d													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2.5/1.6	25	16	3	1.16	0.7	0.78	0.22	0.44	0.13	0.3	0.392			0.42	0.86	0.91
3.2/2	32	20	3	1.49	1.52	1.01	0.46	0.55	0.28	0.43	0.382			0.49	1.08	1.17
			4	1.94	1.93	1.00	0.57	0.54	0.35	0.43	0.374			0.53	1.12	1.52
4/2.5	40	25	3	1.89	3.06	1.27	0.93	0.7	0.56	0.54	0.385			0.59	1.32	1.48
			4	2.47	3.93	1.26	1.18	0.69	0.71	0.54	0.381			0.63	1.37	1.94
			5	3.03	4.73	1.25	1.41	0.68	0.86	0.53	0.374			0.66	1.41	2.37
5/3.2	50	32	3	2.42	6.18	1.6	1.99	0.91	1.18	0.7	0.403			0.72	1.6	1.9

Продолжение табл. П.1.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
5.6/3.6	56	36	4	3.58	11.4	1.78	3.7	1.02	2.19	0.78	0.406	23.2	6.25	0.84	1.82	2.81
			5	4.41	13.8	1.77	4.48	1.01	2.66	0.78	0.404	29.2	7.91	0.88	1.86	3.46
6.3/4	63	40	4	4.04	16.3	2.01	5.16	1.13	3.07	0.87	0.397	33.0	8.51	0.91	2.03	3.17
			5	4.98	19.9	2.00	6.26	1.12	3.72	0.86	0.396	41.4	10.8	0.95	2.08	3.91
			6	5.90	23.3	1.99	7.28	1.11	4.36	0.86	0.393	49.9	13.1	0.99	2.12	4.63
			8	7.68	29.6	1.96	9.15	1.09	5.58	0.85	0.386	66.9	17.9	1.07	2.20	6.03
7/4.5	70	45	5	5.59	27.8	2.23	9.05	1.27	5.34	0.98	0.406	56.7	15.2	1.05	2.28	4.39
7.5/5	75	50	6	7.25	40.9	2.38	14.6	1.42	8.48	1.08	0.435	83.9	25.2	1.21	2.44	5.69
			8	9.47	52.4	2.35	18.5	1.40	10.9	1.07	0.430	112	34.2	1.29	2.52	7.43
8/5	80	50	5	6.36	41.6	2.56	12.7	1.41	7.58	1.09	0.387	84.6	20.8	1.13	2.60	4.99
			6	7.55	49.0	2.55	14.8	1.40	8.88	1.08	0.386	102	25.2	1.17	2.65	5.92
9/5.6	90	56	5.5	7.86	65.3	2.88	19.7	1.58	11.8	1.22	0.384	132	32.2	1.26	2.92	6.17
			6	8.54	70.6	2.88	21.2	1.58	12.7	1.22	0.384	145	35.2	1.28	2.95	6.70
			8	11.18	90.9	2.85	27.1	1.56	16.3	1.21	0.380	194	47.8	1.36	3.04	8.77
10/6.3	100	63	6	9.59	98.3	3.20	30.6	1.79	18.2	1.38	0.393	198	49.9	1.42	3.23	7.53
			7	11.1	113	3.19	35.0	1.78	20.8	1.37	0.392	232	58.7	1.46	3.28	8.70
			8	12.6	127	3.18	39.2	1.77	23.4	1.36	0.391	266	67.6	1.50	3.32	9.87
			10	15.5	154	3.15	47.1	1.75	28.3	1.35	0.387	333	85.8	1.58	3.40	12.1
11/7	110	70	6.5	11.4	142	3.53	45.6	2.00	26.9	1.53	0.402	286	74.3	1.58	3.55	8.98
			8	13.9	172	3.51	54.6	1.98	32.3	1.52	0.400	353	92.3	1.64	3.61	10.9
12.5/8	125	80	7	14.1	227	4.01	73.7	2.29	43.4	1.76	0.407	452	119	1.80	4.01	11.0
			8	16.0	256	4.00	83	2.28	48.8	1.75	0.406	518	137	1.84	4.05	12.5
			10	19.7	312	3.98	100	2.26	59.3	1.74	0.404	649	173	1.92	4.14	15.5
			12	23.4	365	3.95	117	2.24	69.5	1.72	0.400	781	210	2.00	4.22	18.3

Продолжение табл. П.1.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
14/9	140	90	8	18.0	364	4.49	120	2.58	70.3	1.98	0.411	727	104	2.03	4.49	14.1
			10	22.2	444	4.47	146	2.56	85.5	1.96	0.409	911	245	2.12	4.58	17.5
16/10	160	100	9	22.9	606	5.15	186	2.85	110	2.20	0.391	1221	300	2.23	5.19	18.0
			10	25.3	667	5.13	204	2.84	121	2.19	0.390	1359	335	2.28	5.23	19.8
			12	30.0	784	5.11	239	2.82	142	2.18	0.388	1634	405	2.36	5.32	23.6
			14	34.7	897	5.08	272	2.80	162	2.16	0.385	1910	477	2.43	5.40	27.3
18/11	180	110	10	28.3	952	5.80	276	3.12	165	2.42	0.375	1933	444	2.44	5.88	22.2
			12	33.7	1123	5.77	324	3.10	194	2.40	0.374	2324	537	2.52	5.97	26.4
20/12.5	200	125	11	34.9	1449	6.45	446	3.58	264	2.75	0.392	2920	718	2.79	6.50	27.4
			12	37.9	1568	6.43	482	3.57	285	2.74	0.392	3189	786	2.83	6.54	29.7
			14	43.9	1801	6.41	551	3.54	327	2.73	0.390	3726	922	2.91	6.62	34.4
			16	49.8	2026	6.38	617	3.52	367	2.72	0.388	4264	1061	2.99	6.71	39.1



Уголки равнополочные (по ГОСТу 8509-93)

Обозначения

b - ширина полки;

d - толщина стенки;

J - момент инерции;

i - радиус инерции;

z_0 - расстояние от центра тяжести до
внешних граней полоч

Таблица П.1.4

358

Номер профиля	Размеры, мм		Площадь сечения, см ²	Справочные величины для осей								Масса 1 м длины профиля, кг
	b	d		X-X		X ₀ -X ₀		Y ₀ -Y ₀		X ₁ -X ₁	Z ₀ , см	
				J_x , см ⁴	i_x , см	$J_{x0\ max}$, см ⁴	$i_{x0\ max}$, см	$J_{y0\ min}$, см ⁴	$i_{y0\ min}$, см	J_{x1} , см ⁴		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	0,89
		4	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	1,15
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	1,12
		4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	1,46
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	1,27
3	30	3	1,74	1,45	0,91	2,30	1,15	0,60	0,59		0,85	1,36
		4	2,27	1,84	0,90	2,92	1,13	0,77	0,58		0,89	1,78

Продолжение табл. П.1.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----

3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	1,46
		4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94	1,91
3,5	35	3	2,04	2,35	1,07	3,72	1,35	0,97	0,69		0,97	1,60
		4	2,67	3,01	1,06	4,76	1,33	1,25	0,68		1,01	2,10
		5	3,28	3,61	1,05	5,71	1,32	1,52	0,68		1,05	2,58
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	1,85
		4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13	2,42
		5	3,79	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17	2,97
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21	2,08
		4	3,48	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	12,10	1,26	2,73
		5	4,29	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	15,30	1,30	3,37
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,30	1,95	2,95	1,00	12,40	1,33	2,32
		4	3,89	9,21	1,54	14,60	1,94	3,80	0,99	16,60	1,38	3,05
		5	4,80	11,20	1,53	17,80	1,92	4,63	0,98	20,90	1,42	3,77
		6	5,69	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98		1,46	4,47
5,6	56	4	4,38	13,10	1,73	20,80	2,18	5,41	1,11	23,30	1,52	3,44
		5	5,41	16,00	1,72	25,40	2,16	6,59	1,10	29,20	1,57	4,25
6,3	63	4	4,96	18,90	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	33,10	1,69	3,90
		5	6,13	23,10	1,94	36,60	2,44	9,52	1,25	41,50	1,74	4,81
		6	7,28	27,10	1,93	42,90	2,43	11,20	1,24	50,00	1,78	5,72
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,38
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
		8	10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	8,37

Продолжение табл. П.1.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,80
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7	10,10	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
		8	11,50	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113,0	2,15	9,02
		9	12,80	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	127,0	2,18	10,10
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6	9,38	57,0	2,47	94,0	3,11	23,5	1,58	102,0	2,19	7,36
		7	10,80	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	119,0	2,23	8,51
		8	12,30	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	137,0	2,27	9,65
9	90	6	10,60	82,1	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	145,0	2,43	8,33
		7	12,30	94,3	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	169,0	2,47	9,64
		8	13,90	106,0	2,76	168,0	3,48	43,8	1,77	194,0	2,51	10,90
		9	15,60	118,0	2,75	186,0	3,46	48,6	1,77	219,0	2,55	12,20
10	100	6,5	12,80	122,0	3,09	193,0	3,88	50,7	1,99	214,0	2,68	10,10
		7	13,80	131,0	3,08	207,0	3,88	54,2	1,98	231,0	2,71	10,80
		8	15,60	147,0	3,07	233,0	3,87	60,9	1,98	265,0	2,75	12,20
		10	19,20	179,0	3,05	284,0	3,84	74,1	1,96	333,0	2,83	15,10
		12	22,80	209,0	3,03	331,0	3,81	86,9	1,95	402,0	2,91	17,90
		14	26,30	237,0	3,00	375,0	3,78	99,3	1,94	472,0	2,99	20,60
		16	29,70	264,0	2,98	416,0	3,74	112,0	1,94	542,0	3,06	23,30

Продолжение табл. П.1.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----

11	110	7	15,20	176,0	3,40	279,0	4,29	72,7	2,19	308,0	2,96	11,90
		8	17,20	198,0	3,39	315,0	4,28	81,8	2,18	353,0	3,00	13,50
12,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	17,3
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68	29,6
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	19,4
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	25,5
16	160	10	31,3	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1

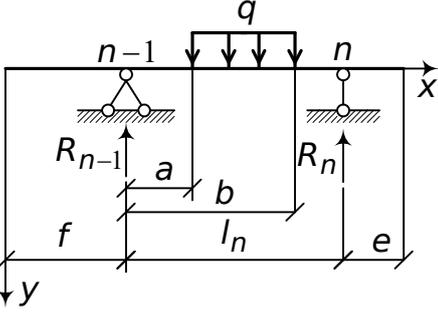
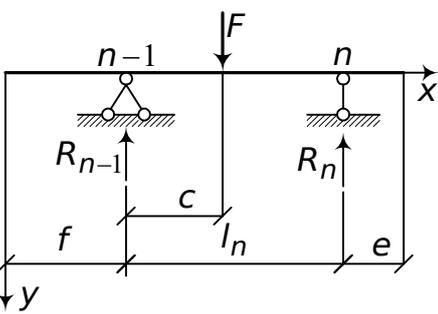
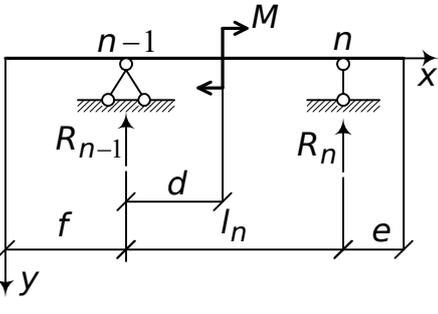
Продолжение табл. П.1.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----

20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	47,4
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	83,3
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94,0
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31	111,4

**ЗНАЧЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ
В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛКАХ**

Таблица Д.2.1

Номер схемы	Расчетная схема балки	Формулы для определения опорных реакций, начальных параметров
1	2	3
1		$R_{n-1} = \frac{q(b-a)}{2l_n} [2l_n - (a+b)];$ $R_n = \frac{q(b-a)}{2l_n} (a+b);$ $\varphi_0 = \frac{1}{24EJ} \left\{ 4R_{n-1}l_n^2 + \frac{q}{l_n} [(l_n - b)^4 + (l_n - a)^4] \right\};$ $y_0 = -\frac{f}{24EJ} \left\{ 4R_{n-1}l_n^2 + \frac{q}{l_n} [(l_n - b)^4 + (l_n - a)^4] \right\}$
2		$R_{n-1} = \frac{F}{l_n} (l_n - c);$ $R_n = \frac{Fc}{l_n};$ $\varphi_0 = \frac{1}{6EJ} \left[R_n l_n^2 - F \frac{(l_n - a)^3}{l_n} \right];$ $y_0 = -\frac{f}{6EJ} \left[R_n l_n^2 - F \frac{(l_n - a)^3}{l_n} \right]$
3		$R_{n-1} = -\frac{M}{l_n};$ $R_n = \frac{M}{l_n};$ $\varphi_0 = \frac{1}{6EJ} \left[R_{n-1} l_n^2 + 3M \frac{(l_n - d)^2}{l_n} \right];$ $y_0 = -\frac{f}{6EJ} \left[R_{n-1} l_n^2 + 3M \frac{(l_n - d)^2}{l_n} \right]$

Продолжение табл. Д.2.1

1	2	3
4		$R_{n-1} = \frac{qf}{2l_n}(2l_n + f); \quad R_n = -\frac{qf^2}{2l_n};$ $\varphi_0 = \frac{1}{24EJ} \left\{ 4R_{n-1}l_n^2 - \frac{q}{l_n} [(l_n + f)^4 - (l_n^4 + f^4)] \right\};$ $y_0 = -\frac{f}{24EJ} \left\{ 4R_{n-1}l_n^2 - \frac{q}{l_n} [(l_n + f)^4 - (l_n^4 + f^4)] + qf^3 \right\}$
5		$R_{n-1} = \frac{F}{l_n}(l_n + f); \quad R_n = \frac{Ff}{l_n};$ $\varphi_0 = \frac{1}{6EJ} \left\{ R_{n-1}l_n^2 - \frac{F}{l_n} [(l_n + f)^3 - f^3] \right\};$ $y_0 = -\frac{f}{6EJ} \left\{ R_{n-1}l_n^2 - \frac{F}{l_n} [(l_n + f)^3 - f^3] + Ff^2 \right\}$
6		$R_{n-1} = -\frac{M}{l_n}; \quad R_n = \frac{M}{l_n};$ $\varphi_0 = \frac{1}{6EJ} \left\{ R_{n-1}l_n^2 + \frac{3M}{l_n} [(l_n + f)^2 - f^2] \right\};$ $y_0 = -\frac{f}{6EJ} \left\{ R_{n-1}l_n^2 + \frac{3M}{l_n} [(l_n + f)^2 - f^2] - 3Mf \right\}$
7		$R_{n-1} = -\frac{qe^2}{2l_n}; \quad R_n = \frac{qe}{2l_n}(2l_n + e);$ $\varphi_0 = \frac{R_{n-1}l_n^2}{6EJ};$ $y_0 = -\frac{R_{n-1}l_n^2 f}{6EJ}$

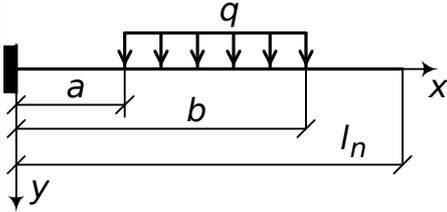
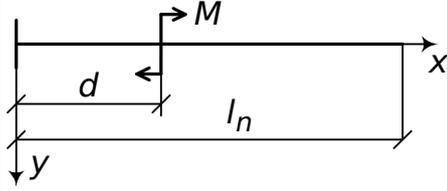
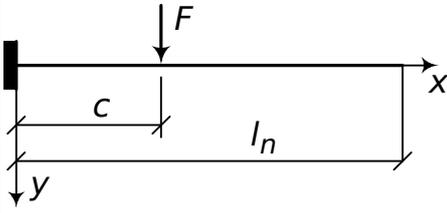
Продолжение табл. Д.2.1

1	2	3
		$R_{n-1} = -\frac{M}{l_n}; \quad R_n = \frac{M}{l_n};$

8		$\varphi_0 = \frac{R_{n-1} l_n^2}{6EJ};$ $y_0 = -\frac{R_{n-1} l_n^2 f}{6EJ}$
9		$R_{n-1} = -\frac{Fl}{l_n}; \quad R_n = \frac{F(l_n + e)}{l_n};$ $\varphi_0 = \frac{R_{n-1} l_n^2}{6EJ};$ $y_0 = -\frac{R_{n-1} l_n^2 f}{6EJ}$
10		$\varphi_0 = -\frac{q}{6EJ} [(l_n - a)^3 - (l_n - b)^3];$ $y_0 = \frac{q}{24EJ} \left\{ 4l_n [(l_n - a)^3 - (l_n - b)^3] - \right.$ $\left. - [(l_n - a)^4 - (l_n - b)^4] \right\}$
11		$\varphi_0 = \frac{M(l_n - d)}{EJ};$ $y_0 = -\frac{M(l_n^2 - d^2)}{2EJ}$
12		$\varphi_0 = -\frac{F(l_n - c)^2}{2EJ};$ $y_0 = \frac{F(l_n - c)^2 (2l_n + c)}{6EJ}$

Продолжение табл. Д.2.1

1	2	3
---	---	---

13		$M_0 = \frac{q}{2}(b^2 - a^2);$ $Q_0 = q(b - a)$
14		$M_0 = -M;$ $Q_0 = 0$
15		$M_0 = -F c;$ $Q_0 = F$

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	9
Раздел 1. Общие положения	11
1.1. Предмет и задачи сопротивления материалов	11
1.2. Схемы элементов конструкций	12
1.3. Основные типы опорных устройств	13
1.4. Внешние силы и их классификация	14
1.5. Понятие о расчетной схеме сооружения	15
1.6. Гипотезы и допущения	17
1.7. Внутренние усилия в поперечных сечениях стержня ..	18
1.7.1. Внутренние усилия при растяжении и сжатии	20
1.7.2. Внутренние усилия при кручении	22
1.7.3. Внутренние усилия при изгибе стержней с прямой осью	24
1.7.4. Внутренние усилия в рамах	32
1.7.5. Внутренние усилия в криволинейных стержнях ...	35
1.8. Напряжения и деформации	40
1.8.1. Компоненты напряжений	40
1.8.2. Составляющие деформации	43
1.8.3. Зависимости между составляющими напряжения и составляющими деформации	46
Раздел 2. Геометрические характеристики поперечных сечений стержней	50
2.1. Статический момент площади	50
2.2. Центр тяжести сечения	51
2.3. Моменты инерции сечений	52
2.3.1. Зависимость между моментами инерции при параллельном переносе осей	53
2.3.2. Изменение осевых и центробежного моментов инерции при повороте координатных осей	55
2.3.3. Главные оси и главные моменты инерции. Радиус инерции	56
2.3.4. Моменты инерции простейших фигур	59
2.3.5. Вычисление моментов инерции сложных фигур ...	61
2.3.5.1. Определение центра тяжести сечения	62
2.3.5.2. Вычисление моментов инерции составного сечения	62
2.3.5.3. Определение положения главных центральных осей и главных моментов инерции	64
2.4. Моменты инерции сечений тонкостенных стержней ...	65
2.4.1. Система координат	66
2.4.2. Секториальные характеристики сечения	67

2.4.3.	Определение положения главного полюса	68
2.4.4.	Определение секториального момента инерции ...	69
Раздел 3.	Растяжение и сжатие	75
3.1.	Напряжения в сечениях, перпендикулярных оси бруса	75
3.2.	Напряжения в сечениях, наклонных к оси бруса	76
3.3.	Деформации при растяжении и сжатии	78
3.3.1.	Продольная деформация	78
3.3.2.	Поперечная деформация	79
3.4.	Определение перемещений при растяжении и сжатии ..	81
3.4.1.	Растяжение стержня силой на конце	81
3.4.2.	Растяжение стержня под действием собственного веса	84
3.5.	Статически неопределимые системы, работающие на растяжение и сжатие	87
3.5.1.	Расчет статически неопределенных систем на силовые воздействия	87
3.5.2.	Расчет статически неопределимых систем на темпе- ратурные воздействия и неточность изготовления	88
3.6.	Сведения о строительных материалах несущих конструкций	90
3.7.	Испытание материалов на растяжение и сжатие	92
3.7.1.	Диаграммы растяжения пластичных и хрупких материалов	92
3.7.2.	Диаграммы сжатия различных материалов	98
3.8.	Влияние различных факторов на механические характеристики материалов	101
3.8.1.	Влияние температуры	101
3.8.2.	Влияние скорости деформации	102
3.8.3.	Влияние технологических факторов	103
3.9.	Потенциальная энергия деформации и работа, затрачиваемая на растяжение стержня	103
3.10.	Методы расчета строительных конструкций	105
3.10.1.	Метод предельных состояний	105
3.10.1.1.	Нагрузки и воздействия	105
3.10.1.2.	Механические свойства материалов	106
3.10.1.3.	Геометрические параметры конструктивных элементов	106
3.10.1.4.	Условия работы	107
3.10.1.5.	Степень ответственности сооружения	107
3.10.1.6.	Условие прочности при растяжении	107
3.10.2.	Метод допускаемых напряжений	108
3.10.3.	Метод разрушающих нагрузок	109

3.10.4.	Понятие о вероятностном методе расчета на прочность	111
Раздел 4.	Основы теории напряженного состояния	113
4.1.	Плоское напряженное состояние и плоская деформация	113
4.1.1.	Напряжения в точке	114
4.1.2.	Главные напряжения. Положение главных площадок	116
4.1.3.	Экстремальные касательные напряжения	117
4.2.	Исследование напряжений в трех измерениях	118
4.2.1.	Главные напряжения и положение главных площадок	121
4.2.2.	Экстремальные значения касательных напряжений	122
4.2.3.	Октаэдрические напряжения	124
4.3.	Потенциальная энергия деформации при объемном напряженном состоянии	126
4.4.	Пример исследования напряженного состояния в точке тела	128
Раздел 5.	Теории прочности	134
5.1.	Теория наибольших нормальных напряжений	135
5.2.	Теория наибольших удлинений	136
5.3.	Теория максимальных касательных напряжений	138
5.4.	Энергетическая теория прочности	140
5.5.	Теория прочности Мора	141
Раздел 6.	Теория изгиба	143
6.1.	Чистый изгиб	143
6.2.	Распространение выводов теории чистого изгиба на поперечный изгиб	148
6.3.	Вывод формулы касательных напряжений	150
6.3.1.	Касательные напряжения для прямоугольного сечения	152
6.3.2.	Касательные напряжения для кругового сечения ...	153
6.3.3.	Касательные напряжения для треугольного сечения	154
6.3.4.	Касательные напряжения для двутаврового сечения	155
6.4.	Главные напряжения при изгибе балок	157
6.5.	Проверка прочности балок при изгибе	158
6.6.	Изогнутая ось прямого бруса	161
6.6.1.	Дифференциальное уравнение изогнутой оси	161
6.6.2.	Решение дифференциального уравнения методом непосредственного интегрирования	163
6.6.3.	Метод начальных параметров	166
6.6.3.1.	Равномерно распределенная нагрузка	167

6.6.3.2.	Сосредоточенная сила	168
6.6.3.3.	Сосредоточенный момент	169
6.6.4.	Метод фиктивной нагрузки	174
6.6.5.	Метод Мора	178
6.7.	Сдвиг как частный случай изгиба	182
6.7.1.	Расчеты соединений, работающих на сдвиг	184
6.8.	Потенциальная энергия при изгибе	188
Раздел 7.	Расчет статически неопределимых балок	189
7.1.	Общие положения	189
7.2.	Расчет неразрезных балок	191
7.2.1.	Пример расчета неразрезной балки	197
7.3.	Расчет балки на упругом основании	200
7.3.1.	Пример расчета балки на упругом (винклеровском) основании	213
7.4.	Расчет бесконечно длинной балки на упругом основании	215
Раздел 8.	Кручение	219
8.1.	Кручение стержней с круглым поперечным сечением	219
8.1.1.	Определение углов закручивания	223
8.1.2.	Напряжения в продольных и наклонных сечениях, проходящих через ось стержня	226
8.1.3.	Статически неопределимые задачи при кручении	227
8.1.4.	Потенциальная энергия при кручении круглого стержня	229
8.1.5.	Расчет цилиндрических пружин с малым шагом витка	230
8.1.6.	Расчет на кручение круглых стержней с учетом пластических деформаций	232
8.2.	Кручение стержней прямоугольного сечения	234
8.2.1.	Общие положения	234
8.2.2.	Свободное кручение стержней прямоугольного сечения и тонкостенных стержней открытого профиля	235
8.2.2.1.	Депланация незамкнутого тонкостенного сечения	238
8.2.3.	Стесненное кручение тонкостенных стержней открытого профиля	240
8.2.3.1.	Основные допущения	240
8.2.3.2.	Нормальные напряжения σ_ω	242
8.2.3.3.	Касательные напряжения τ_ω	243
8.2.3.4.	Дифференциальные уравнения углов закручивания	245
8.2.3.5.	Общий случай нагружения тонкостенного стержня открытого профиля. Пример расчета	248

Раздел 9.	Сложное сопротивление и устойчивость	254
9.1.	Общие положения и предпосылки	254
9.2.	Косой изгиб	255
9.3.	Изгиб и кручение стержня кольцевого поперечного сечения	260
9.4.	Внецентренное растяжение и сжатие	265
9.5.	Устойчивость сжатых стержней	271
9.5.1.	Понятие об устойчивости и критической силе	271
9.5.2.	Формула Эйлера для определения величины критической силы	272
9.5.3.	Формула Эйлера при различных условиях закрепления концов стержня	276
9.5.4.	Пределы применимости формулы Эйлера	277
9.5.5.	Практический расчет сжатых стержней	279
9.5.6.	Учет влияния сдвигов при определении критической силы	283
9.6.	Расчет внецентренно сжатого гибкого стержня	285
9.7.	Продольно-поперечный изгиб	287
Раздел 10.	Расчет некоторых конструкций, испытывающих плоское напряженное состояние	292
10.1.	Дифференциальные уравнения равновесия	292
10.2.	Условия на контуре	293
10.3.	Условия совместности	294
10.4.	Функция напряжений	296
10.5.	Решение дифференциального уравнения плоской задачи при помощи полиномов	297
10.5.1.	Изгиб консольной балки	300
10.6.	Плоская задача в полярных координатах	301
10.6.1.	Общие уравнения в полярных координатах	301
10.6.2.	Составляющие деформации в полярных координатах	306
10.7.	Толстая труба под действием равномерного давления	309
10.8.	Растяжение пластинки с малым круглым отверстием	312
10.9.	Действие сосредоточенной силы, приложенной к прямолинейному краю бесконечно большой пластинки	314
Раздел 11.	Динамическое действие нагрузки	320
11.1.	Общие положения и понятия	320
11.2.	Дифференциальное уравнение движения системы с одной степенью свободы	321
11.3.	Свободные колебания без учета сил сопротивления	323
11.4.	Свободные колебания с учетом сил сопротивления	325

11.5.	Вынужденные колебания под действием вибрационной нагрузки	327
11.6.	Расчет на внезапное нагружение	331
11.7.	Расчет на действие кратковременной нагрузки	333
11.8.	Ударное нагружение	335
11.9.	Динамические характеристики строительных материалов и конструкций	338
11.9.1.	Динамическая жесткость	338
11.9.2.	Явление усталости	339
11.9.3.	Диаграмма предельных амплитуд	342
11.9.4.	Факторы, влияющие на усталостную прочность материалов	343
11.9.4.1.	Концентрация напряжений	343
11.9.4.2.	Масштабный фактор	344
11.9.4.3.	Качество поверхности	345
11.9.4.4.	Внешняя среда	345
11.9.5.	Усталостная прочность при нестационарных нагружениях	345
11.9.6.	Расчет на прочность при переменных напряжениях	347
ЗАКЛЮЧЕНИЕ		350
Приложение 1. Сортамент прокатной стали		351
Приложение 2. Определение начальных параметров в статически определимых балках		363