МЕХАНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра „Механіка і проектування машин”

З.О. Іванова, Н.А. Аксьонова

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Конспект лекцій

(змістовий модуль "Д И Н А М І К А")

Харків – 2011

Іванова, З.О. Теоретична механіка. Динаміка [текст]: конспект лекцій / З.О. Іванова, Н.А. Аксьонова. – Харків:

УкрДАЗТ, 2011. – 62 с.

Конспект лекцій рекомендований для студентів денної та заочної форм навчання усіх спеціальностей механічного, будівельного та АТЗ факультетів. За обсягом конспект охоплює повний курс розділу "Динаміка" та являє собою складову частину методичного забезпечення роботи студентів при вивченні „Теоретичної механіки”.

Іл. 25, табл. 1, бібліогр.: 3 назв.

Конспект лекцій розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри “Механіка і проектування машин” 27 листопада 2009 р., протокол № 4.

Рецензент

проф. О.В. Братченко

З.О. Іванова, Н.А. Аксьонова

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Конспект лекцій

(змістовий модуль "Д И Н А М І К А")

Відповідальний за випуск Іванова З.О.

Редактор Ібрагімова Н.В.

Підписано до друку 22..03.10 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 1,25. Тираж 150. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту, 61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра “Механіка і проектування машин”

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни „ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА”
змістовий модуль
"Д И Н А М І К А"

Харків 2011 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Конспект лекцій з теоретичної механіки (частина 3) призначений для студентів денної та заочної форми навчання усіх спеціальностей. Він висвітлює основні питання, які розглядаються у розділі «Динаміка». Конспект лекцій є складовою частиною методичного забезпечення самостійної роботи студентів при вивченні дисципліні «Теоретична механіка».

Динаміка – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються закони руху матеріальних тіл залежно від діючих на них сил.

Рух тіл з геометричної точки зору було розглянуто у розділі «Кінематика». У динаміці при дослідженні руху матеріальних тіл приймаються у розгляд як діючі сили, так і інертність самих тіл.

Поняття **сили**, як величини, яка характеризує міру механічної взаємодії матеріальних тіл, було введене у розділі «Статика». При цьому вважалося, що усі сили постійні, і не торкалися питання про можливість зміни цих сил за деякий проміжок часу. Поряд з тим на тіло, що рухається, разом з постійними діють сили, модуль та напрямок яких при русі змінюються. Змінні сили можуть залежати від часу, положення та швидкості тіла. Саме такі сили поряд з постійними і будуть розглядатися у даному розділі.

Введемо поняття **інертності**. Якщо порівняти дію однієї і тієї самої сили на різні тіла, то через проміжок часу вони пройдуть різні відстані та матимуть різні швидкості. Отже, **інертність** – це властивість матеріальних тіл швидше чи повільніше змінювати швидкість свого руху під дією прикладених сил.

Кількісною мірою інертності тіла є фізична величина, яка називається **масою**. Водночас маса є мірою і гравітаційних властивостей. Маса розглядається як величина скалярна, додатна і постійна.

У класичній механіці рухи матеріальних об’єктів розглядаються за допомогою моделей реальних фізичних тіл: матеріальна точка, система матеріальних точок та абсолютно тверде тіло.

Матеріальна точка – це найпростіша модель матеріального об’єкта, розмірами якого в умовах даної задачі можна знехтувати і яка, як і об’єкт, має властивості інертності й здатність взаємодіяти з іншими тілами.

Системою матеріальних точок (механічною системою) називається така сукупність матеріальних точок, положення і рух яких взаємозв’язані.

Абсолютно твердим тілом (твердим тілом) називається така сукупність матеріальних точок, відстані між якими у процесі руху залишаються незмінними. Вивчення руху матеріальної точки повинно йти попереду розгляду руху системи точок і, зокрема, твердого тіла. Тому курс динаміки поділяють на динаміку точки і динаміку системи матеріальних точок.

В основі динаміки лежать закони, які були вперше сформульовані Ньютоном у його класичному творі «Математические начала натуральной философии» (1686 р.) – Axiomata sive leges motus.

ОСНОВНІ ЗАКОНИ ДИНАМІКИ (ЗАКОНИ ГАЛІЛЕЯ – НЬЮТОНА)

1 Закон інерції (відкритий у 1638 р. Галілеєм).

Матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху до того часу, поки прикладені сили не змусять змінити цей стан.

Рух, який створює точка за відсутності сил, є рухом за інерцією. З першого закону випливає: якщо сила $\overline{P}=0$, то точка знаходиться у спокої або рухається з постійною за модулем та напрямком швидкістю $\left(\overline{V}=const\right)$, прискорення точки при цьому дорівнює нулю $\left(\overline{a}=0\right)$.

Якщо рух точки не є рівномірним та прямолінійним, то на точку діє сила.

2 Закон пропорційності сили та прискорення.

Прискорення матеріальної точки пропорційне прикладеній до неї силі і має з нею однаковий напрямок.

$$\overline{P} = m \cdot \overline{a} \,.$$

Це співвідношення є основним рівнянням динаміки.

Якщо на матеріальну точку одночасно діє декілька сил, то

$$\overline{P} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \ldots + \overline{P}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \,,$$

тоді

$$m \cdot \overline{a} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \ldots + \overline{P}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \,.$$

Таким чином, декілька одночасно діючих на матеріальну точку сил надають точці таке прискорення, яке надала б сила, що дорівнює їх геометричній сумі.

3 Закон про рівняння дії та протидії.

Кожній дії відповідає рівна за модулем та протилежна за напрямком протидія.

Цей закон доводить, що при взаємодії двох тіл, в якому б кінематичному стані вони б не знаходились, сили, і прикладені до кожного з них, рівні за модулем, спрямовані вздовж однієї прямої за протилежним напрямком.

1 ДИНАМІКА ВІЛЬНОЇ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

1.1 Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

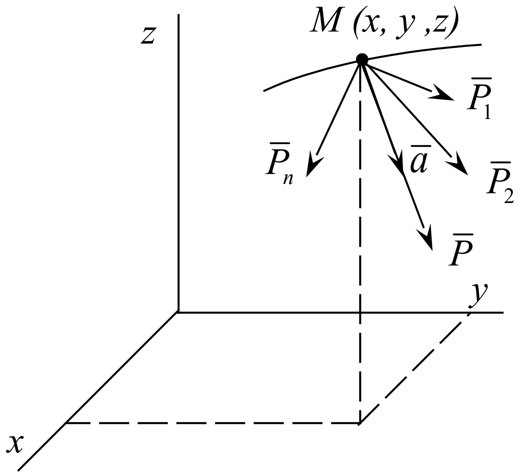


Рисунок 1.1

Розглянемо рух матеріальної точки *M* масою m, на яку діють сили $\overline{P}_1, \overline{P}_2 \ldots \overline{P}_n$ (рисунок 1.1).

Основне рівняння динаміки має вигляд

$$m \cdot \overline{a} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \ldots + \overline{P}_n \ . \tag{1.1}$$

Спроектуємо обидві частини векторного рівняння (1.1) на осі координат

$$\begin{aligned} m \cdot a_x &= P_{1x} + P_{2x} + \ldots + P_{nx} \\ m \cdot a_y &= P_{1y} + P_{2y} + \ldots + P_{ny} \\ m \cdot a_z &= P_{1z} + P_{2z} + \ldots + P_{nz} \end{aligned} \tag{1.2}$$

де a_x, a_y, a_z – проекції прискорення $\overline{a}$ на осі *x, y, z*;

$P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}, P_{2x}, P_{2y}, P_{2z} \ldots P_{nx}, P_{ny}, P_{nz}$ – проекції сил $\overline{P}_1, \overline{P}_2 \ldots \overline{P}_n$ на осі *x, y, z.*

З розділу «Кінематика» відомо, що проекція прискорення точки на кожну координатну вісь дорівнює другій похідній за часом від відповідної координати точки, тобто

$$a_x = \ddot{x}; \ a_y = \ddot{y}; \ a_z = \ddot{z} \ . \tag{1.3}$$

Таким чином,

$$m \cdot \ddot{x} = P_{1x} + P_{2x} + \ldots + P_{nx} = \sum_{i=1}^{n} P_{ix};$$
$$m \cdot \ddot{y} = P_{1y} + P_{2y} + \ldots + P_{ny} = \sum_{i=1}^{n} P_{iy}; \qquad (1.4)$$
$$m \cdot \ddot{z} = P_{1z} + P_{2z} + \ldots + P_{nz} = \sum_{i=1}^{n} P_{iz}.$$

Рівняння (1.4) – це диференціальні рівняння руху матеріальної точки.

1.2 Дві задачі динаміки точки

За допомогою диференціальних рівнянь руху (1.4) можна розв'язувати дві задачі динаміки матеріальної точки.

Перша задача динаміки. Знаючи масу точки *m* та рівняння її руху $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, визначити модуль і напрямок рівнодійної сил, прикладених до точки.

$$m\ddot{x} = P_x; \quad m\ddot{y} = P_y; \quad m\ddot{z} = P_z, \qquad (1.5)$$

де P_x, P_y, P_z – проекції рівнодійної на відповідні осі координат *x, y, z*.

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}, \qquad (1.6)$$

$$\cos\left(\overline{P}, \overline{i}\right) = \frac{P_x}{P}; \ \cos\left(\overline{P}, \overline{j}\right) = \frac{P_y}{P}; \ \cos\left(\overline{P}, \overline{k}\right) = \frac{P_z}{P}. \qquad (1.7)$$

Друга задача динаміки (основна). Знаючи сили, діючі на матеріальну точку, її масу, а також початкове положення та її початкову швидкість, визначити закон руху матеріальної точки.

Ця задача набагато складніше за першу. Якщо перша задача загалом розв'язується шляхом диференціювання, то розв'язання оберненої задачі зводиться до інтегрування системи диференціальних рівнянь при заданих початкових умовах.

Розв’язання задач динаміки шляхом інтегрування відповідних диференціальних рівнянь зводиться до такого:

1 Складання диференціальних рівнянь у вигляді

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= P_x\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right), \\ m\ddot{y} &= P_y\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right), \\ m\ddot{z} &= P_z\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right); \end{aligned} \tag{1.8}$$

а) обрати початок відліку та зобразити осі координат;

б) зобразити точку, що рухається, та сили, які діють на неї;

в) підрахувати суму проекцій сил на кожну координатну вісь і підставити у праву частину відповідного диференціального рівняння. При цьому потрібно змінні сили виразити через ті величини, від яких вони залежать.

2 Інтегрування диференціальних рівнянь руху (проводиться методами, відомими з курсу математики).

3 Визначення постійних інтегрування.

За даними задачі встановити початкові умови у вигляді

$$t = 0;\ x = x_0;\ y = y_0;\ z = z_0;\ \dot{x} = \dot{x}_0;\ \dot{y} = \dot{y}_0;\ \dot{z} = \dot{z}_0. \tag{1.9}$$

4 Отримання рівнянь руху точки:

$$\begin{aligned} x &= f_1\left(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0\right), \\ y &= f_1\left(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0\right), \\ z &= f_1\left(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0\right). \end{aligned} \tag{1.10}$$

5 Визначення невідомих та дослідження отриманих

результатів.

1.3 Вільне падіння тіла без урахування опору середовища

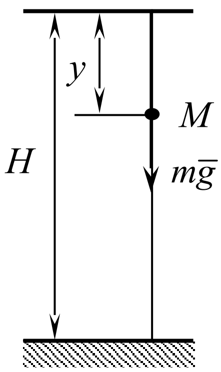


Рисунок 1.2

Тіло масою m падає на поверхню землі з висоти H (рисунок 1.2). Знайти закон руху тіла без урахування опору повітря.

Об’єктом дослідження є вільна матеріальна точка M масою m, на яку діє сила ваги $m\overline{g}$. Оскільки траєкторією точки є пряма, то, обираючи систему координат, обмежимося тільки віссю OY.

Диференціальне рівняння цього прямолінійного руху під дією сили ваги матиме такий вигляд:

$$m\ddot{y} = \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = m\overline{g}\,, \tag{1.11}$$

$$\ddot{y} = g\,. \tag{1.12}$$

Рівняння (1.12) двічі інтегруємо за часом t:

$$\dot{y} = gt + C_1\,, \tag{1.13}$$

$$y = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2\,. \tag{1.14}$$

Початкові умови:

$$t = 0;\; y = 0;\;\; \dot{y} = 0\,. \tag{1.15}$$

При підстановці умов (1.15) у рівняння (1.13) та (1.14) отримаємо $C_1 = 0$ та $C_2 = 0$.

Рівняння, які характеризують вільне падіння тіла (точки), матимуть такий вигляд:

$$\dot{y} = gt\,, \tag{1.16}$$

$$y = \frac{gt^2}{2}. \qquad (1.17)$$

Закони вільного падіння тіла вперше були експериментально встановлені Г. Галілеєм, який у своїх «Бесідах» (1638 р.) вперше створив теорію падіння тіл у разі відсутності опору повітря; при цьому було вперше наведено поняття рівноприскореного руху.

1 Швидкість тіла, що вільно падає, пропорційна часу падіння.

2 Шляхи, які проходить тіло, що вільно падає, пропорційні часу падіння.

1.4 Рух матеріального тіла, кинутого під кутом до горизонту

Йдеться про рух вільної матеріальної точки в однорідному полі сил тяжіння без урахування опору середовища поблизу поверхні Землі.

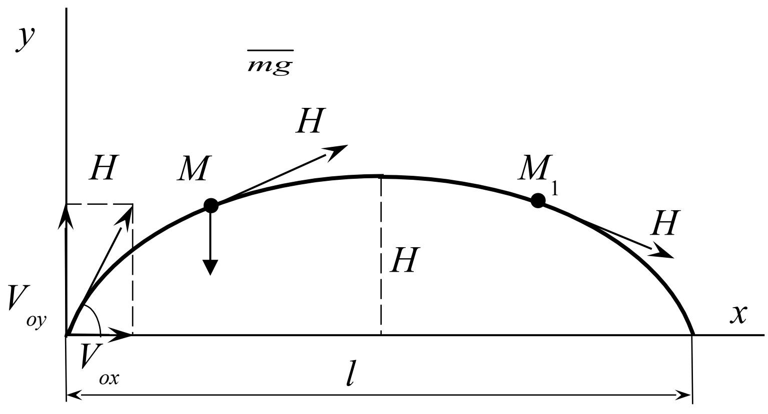


Рисунок 1.3

Нехай матеріальна точка M маси m рухається в однорідному полі сил тяжіння під дією однієї лише сили тяжіння. Обираємо систему координат XOY (рисунок 1.3).

Знайдемо закон руху такої точки, скориставшись диференціальними рівняннями руху (1.4):

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} \qquad m\ddot{y} = \sum_{i=1}^{n} P_{iy}, \qquad (1.18)$$

$$m\ddot{x} = 0 \qquad m\ddot{y} = -mg, \tag{1.19}$$

$$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = -g. \tag{1.20}$$

Рівняння (1.20) двічі інтегруємо за часом:

$$\dot{x} = C_1, \quad \dot{y} = -gt + C_2. \tag{1.21}$$

$$x = C_1 t + C_3, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + C_2 t + C_4. \tag{1.22}$$

Початкові умови:

$$t = 0;\ x_0 = 0;\ \ y_0 = 0;\ \ \dot{x}_0 = V_0 \cos\alpha;\ \ \dot{y}_0 = V_0 \sin\alpha. \tag{1.23}$$

При підстановці початкових умов (1.23) у рівняння (1.21), (1.22) отримаємо

$$C_1 = V_0 \cos\alpha,\ C_2 = V_0 \sin\alpha,\ \tilde{N}_3 = 0,\ \tilde{N}_4 = 0.$$

Тоді

$$\dot{x} = V_0 \cos\alpha, \quad \dot{y} = -gt + V_0 \sin\alpha, \tag{1.24}$$

$$x = Vo\cos\alpha \cdot t, \qquad y = -\frac{gt^2}{2} + Vo\sin\alpha \cdot t. \tag{1.25}$$

Виключаючи параметр t з рівняння (1.25), отримаємо рівняння траєкторії

$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}. \tag{1.26}$$

Таким чином, траєкторією точки, що розглядається, буде парабола з вертикальною віссю і вершиною у найвищій точці. Зазначимо, що за знайденим законом (формула (1.26)) можна досліджувати ряд важливих властивостей руху точки *M*. Наприклад, визначити горизонтальну дальність польоту OA, максимальну висоту підйому точки за заданим кутом кидання, час руху точки тощо.

2 КОЛИВАЛЬНИЙ РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Вчення про коливальний рух створює основу багатьох галузей фізики та техніки. Незважаючи на те, що коливання відрізняються за своєю фізичною суттю, основні закони цих коливань залишаються однаковими. Вивчення механічних коливань є важливими не тільки тому, що такі коливання існують взагалі, але й тому, що результати, отримані при дослідженні механічних коливань, можна використовувати для дослідженні інших коливальних явищ.

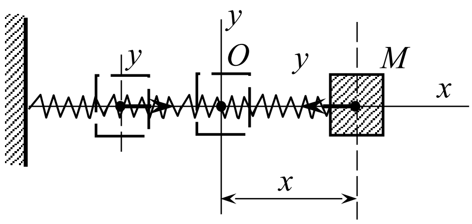


Рисунок 2.1

Коливальним рухом матеріальної точки називається рух, який характеризується багаторазовим проходженням положення рівноваги (рисунок 2.1).

Коливальний рух матеріальної точки відбувається за умови, якщо на точку, відхилену від стану спокою, діє сила $\bar{P}$, яка прагне повернути цю точку у рівноважне положення.

Така сила називається **відновлювальною**.

Існують чотири види коливального руху матеріальної точки:

1) вільні коливання, які створюються під дією тільки відновлювальної сили;

2) вільні коливання, які створюються під дією відновлювальної сили та сили опору середовища;

3) вимушені коливання, які створюються під дією відновлювальної сили та сили періодичного характеру, що називається **збуреною**;

4) вимушені коливання, які створюються під дією відновлювальної сили, збуреної сили та сили опору середовища.

2.1 Вільні коливання матеріальної точки

Розглянемо коливальний рух матеріальної точки *M*, яка знаходиться під дією відновлювальної сили $\bar{P}$ (рисунок 2.1).

Проекція сили на вісь *OX*:

$$P_x = -cx\,,$$

де c − постійний коефіцієнт пропорційності.

Знайдемо закон руху матеріальної точки *M*.

Складаємо диференціальне рівняння руху:

$$m\ddot{x} = -cx\,. \tag{2.1}$$

Введемо позначення:

$$\frac{c}{m} = k^2\,. \tag{2.2}$$

Тоді

$$\ddot{x} + k^2 x = 0\,. \tag{2.3}$$

Рівняння (2.3) є диференціальним рівнянням вільних коливань, загальний розв’язок якого має такий вигляд:

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt\,, \tag{2.4}$$

або

$$x = a \sin\left(kt + \alpha \right)\,. \tag{2.5}$$

Коливання, які відбуваються за законом (2.5), є **гармонійними** коливаннями.

Швидкість точки *M* в розглянутому русі визначається так:

$$\dot{x} = ak\cos\left(kt + \alpha\right). \tag{2.6}$$

Величина *a*, яка дорівнює найбільшому відхиленню точки М від центра коливань, називається **амплітудою** коливань.

Величина $\varphi = \left(kt + \alpha\right)$ називається **фазою** коливань.

Величина α визначає фазу початку коливань (**початкову фазу**).

Амплітуда *a* та початкова фаза α визначаються за початковими умовами: $t = 0;\ x = x_0;\ \ \dot{x} = \dot{x}_0$

$$\begin{aligned} &a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0^2}{k}\right)}, \\ &tg\alpha = \frac{kx_0}{\dot{x}_0}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Величина *k*, яка визначає число коливань матеріальної точки за 2π секунд, називається **круговою або власною** частотою коливань.

Проміжок часу Т, за який створюється одне повне коливання, називається **періодом** коливань.

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{m}}} \tag{2.8}$$

Графік вільних коливань наведений на рисунку 2.2.

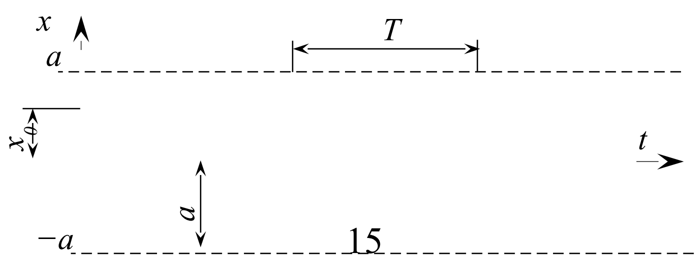
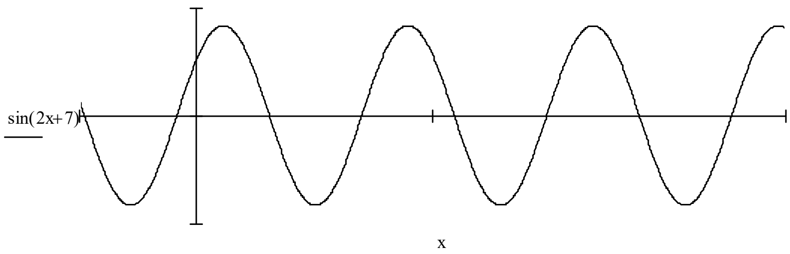


Рисунок 2.2



2.2 Згасальні коливання матеріальної точки

Матеріальна точка, яка здійснює коливальний рух, у реальних умовах відчуває опір руху. Це означає, що на матеріальну точку, крім відновлювальної сили $\bar{P}$, діє сила опору $\bar{R}$, яка завжди спрямована протилежно напрямку руху. Проекція сили опору на вісь OX дорівнює

$$R_x = -\lambda V_x = -\lambda \dot{x},$$

де λ − коефіцієнт пропорційності.

Як вже відомо, $P_x = -cx$.

Знайдемо закон руху матеріальної точки. Для цього складемо диференціальне рівняння руху

$$m\ddot{x} = -cx - \lambda \dot{x}. \tag{2.9}$$

Вводимо позначення

$$\frac{c}{m} = k^2, \ \frac{\lambda}{m} = 2n. \tag{2.10}$$

Тоді

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0. \tag{2.11}$$

Рівняння (2.11) є диференціальним рівнянням руху матеріальної точки під дією відновлювальної сили і сили опору, яка пропорційна швидкості.

Остаточний вигляд загального розв’язку рівняння (2.11) залежить від співвідношення величин k та n.

У випадку малого опору, тобто коли $n < k$, загальний розв’язок рівняння (2.11) буде таким:

$$x = e^{-nt}\left(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t \right), \tag{2.12}$$

або

$$x = ae^{-nt} \sin\left(k_1 t + \alpha\right), \tag{2.13}$$

де

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}\,. \tag{2.14}$$

Коливання, які відбуваються за законом (2.13), є згасальними коливаннями.

На рисунку 2.3 наведений графік згасальних коливань.

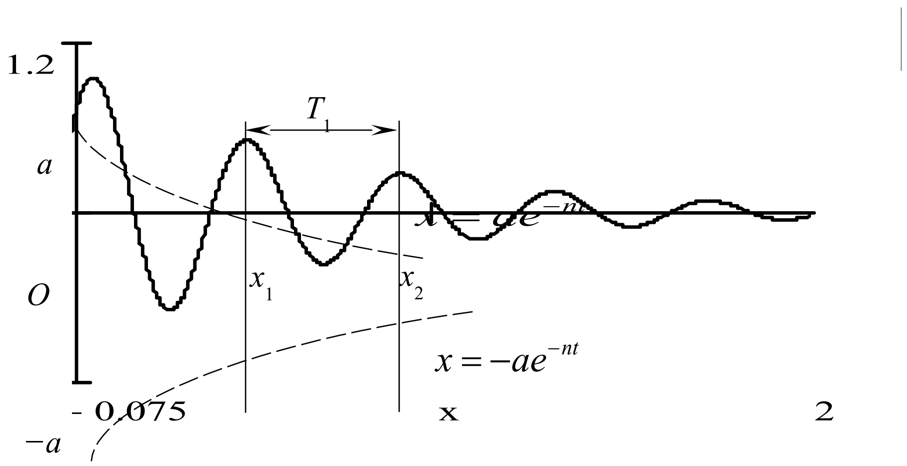


Рисунок 2.3

Проміжок часу T_1, який дорівнює періоду $\sin\left(k_1 t + \alpha\right)$, прийнято називати **періодом згасальних** коливань:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}, \tag{2.15}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{k\sqrt{1-\left(\frac{n}{k}\right)^2}} = \frac{T}{\sqrt{1-\left(\frac{n}{k}\right)^2}}, \qquad (2.16)$$

де T − період вільних коливань матеріальної точки.

У випадку великого опору, тобто коли $n \geq k$, рух матеріальної точки втрачає коливальний характер і стає аперіодичним.

2.3 Вимушені коливання матеріальної точки

Розглянемо коливальний рух матеріальної точки, на яку поряд з відновлювальною силою $\bar{P}$ діє збурена сила $\bar{Q}$, що періодично змінюється за часом.

Проекція збуреної сили на вісь OX визначається таким чином:

$$Q_x = Q_0 \sin pt,$$

де p − частота збуреної сили;

Q_0 − амплітуда збуреної сили.

Знайдемо закон руху матеріальної точки. Складаємо диференціальне рівняння руху

$$m\ddot{x} = -cx + Qo \sin pt. \qquad (2.17)$$

Введемо позначення:

$$\frac{c}{m} = k^2, \ \frac{Q_0}{m} = P_0. \qquad (2.18)$$

Тоді

$$\ddot{x} + k^2 x = P_0 \sin pt. \qquad (2.19)$$

Рівняння (2.19) є диференціальним рівнянням вимушених коливань матеріальної точки.

Загальний розв'язок рівняння (2.19) має такий вигляд:

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + \frac{P_0}{\left(k^2 - p^2\right)} \sin pt, \tag{2.20}$$

або

$$x = a \sin\left(kt + \alpha\right) + A \sin pt, \tag{2.21}$$

де $A = \dfrac{P_0}{\left(k^2 - p^2\right)}$ − амплітуда вимушених коливань. (2.22)

Аналізуючи рівняння (2.21), доходимо висновку, що при одночасній дії відновлювальної та збуреної сил матеріальна точка здійснює складний коливальний рух, який є результатом накладання вільних коливань з амплітудою *a* і частотою *k* та вимушених коливань з амплітудою *A* і частотою *p*, яка збігається з частотою збуреної сили.

Якщо на матеріальну точку поряд з відновлювальною силою $\bar{P}$ та збуреною силою $\bar{Q}$ діє сила пору $\bar{R}$, то диференціальне рівняння руху має такий вигляд:

$$m\ddot{x} = -cx - \lambda \dot{x} + Q_0 \sin pt. \tag{2.23}$$

Як вже відомо,

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{\lambda}{m} = 2n, \quad \frac{Q_0}{m} = P_0. \tag{2.24}$$

Тоді

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = P_0 \sin pt. \tag{2.25}$$

Рівняння (2.25) є диференціальним рівнянням вимушених коливань матеріальної точки за наявності опору.

Загальний розв'язок рівняння (2.25), коли $n < k$, має такий вигляд:

$$x = ae^{-nt}\sin\left(k_1 t + \alpha\right) + A\sin\left(pt - \beta\right), \tag{2.26}$$

де A − амплітуда вимушених коливань,

$$A = \frac{P_0}{\sqrt{\left(k^2 - p^2\right) + 4n^2 p^2}}, \tag{2.27}$$

де β − зсув фази вимушених коливань відносно фази збуреної сили.

З рівняння (2.26) випливає, що при одночасній дії відновлювальної сили, збуреної сили та сили опору матеріальна точка здійснює складний коливальний рух, який є результатом накладання згасальних та вимушених коливань.

Проаналізуємо залежність амплітуди вимушених коливань A від відношення частоти збуреної сили p до частоти вільних коливань k.

Введемо позначення:

$$\frac{P}{k} = z,\ \frac{n}{k} = h,\ \frac{P_0}{k} = \frac{Q_0}{c} = A_0, \tag{2.28}$$

де z − величина відношення частот, яка називається коефіцієнтом розладу;

h − величина, яка характеризує опір;

A_0 − статичне відхилення точки від положення рівноваги (x = 0) під дією сили, яка дорівнює максимальному значенню збуреної сили $\bar{Q}_0$.

Відношення амплітуди вимушених коливань A до величини A_0 називається **коефіцієнтом динамічності**:

$$\eta = \frac{A}{A_0} = \frac{\dfrac{P_0}{\sqrt{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2}}}{\dfrac{P_0}{k^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\dfrac{p}{k}\right)^2\right)^2 + 4\left(\dfrac{n}{k}\right)^2\left(\dfrac{p}{k}\right)^2}},$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - z^2\right)^2 + 4h^2z^2}}. \tag{2.29}$$

З рівняння (2.29) випливає, що коефіцієнт динамічності залежить від двох величин − z та h (рисунок 2.4).

На рисунку 2.4 наведені криві, кожна з яких є залежністю коефіцієнта динамічності η від коефіцієнта розладу z при визначеному значенні h.

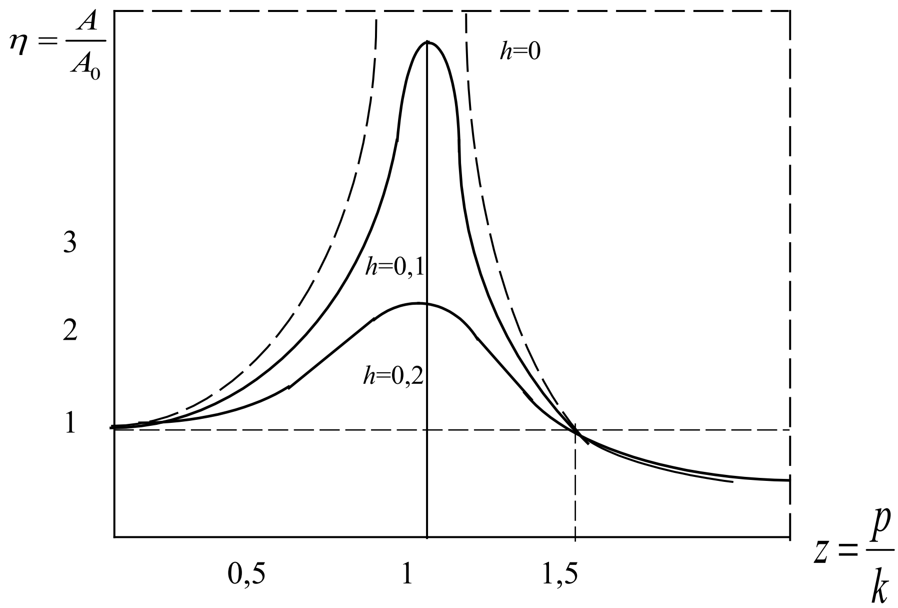


Рисунок 2.4

3 ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ

3.1 Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки

Введемо такі поняття, як кількість руху матеріальної точки та імпульс сили.

Однією з основних динамічних характеристик руху точки є кількість руху.

Кількістю руху матеріальної точки називається векторна величина $m\overline{V}$, яка дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості.

Спрямований вектор кількості руху так, як і швидкість точки, тобто по дотичній до траєкторії.

Для характеристики дії, яку створює сила за деякий проміжок часу, введемо поняття імпульс сили, але спочатку розглянемо елементарний імпульс сили.

Елементарним імпульсом сили називається векторна величина $d\overline{S}$, яка дорівнює добутку вектора сили $\overline{P}$ за елементарний проміжок часу dt.

$$d\overline{S} = \overline{P}dt\,. \tag{3.1}$$

Спрямований елементарний імпульс вздовж лінії дії сили.

Імпульс $\overline{S}$ будь-якої сили $\overline{P}$ за кінцевий проміжок часу t_1 визначається як інтегральна сума відповідних елементарних імпульсів:

$$\overline{S} = \int_0^{t_1} \overline{P}dt. \tag{3.2}$$

Модуль та напрямок імпульсу можна визначити через його проекції на осі координат:

$$S_x = \int_0^{t_1} P_x dt, \quad S_y = \int_0^{t_1} P_y dt, \quad S_z = \int_0^{t_1} P_z dt\,, \tag{3.3}$$

де $P_x,\ P_y,\ P_z$ – проекції сили на відповідні осі координат.

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}\,, \tag{3.4}$$

$$\cos\left(\vec{S},\vec{i}\right)=\frac{S_x}{S},\cos\left(\vec{S},\vec{j}\right)=\frac{S_y}{S},\cos\left(\vec{S},\vec{k}\right)=\frac{S_z}{S}. \qquad (3.5)$$

Якщо до точки водночас прикладені декілька сил $\overline{P}_1, \overline{P}_2 \ldots \overline{P}_n$, то імпульс рівнодіючої за деякий проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів складових сил за той самий проміжок часу:

$$\vec{S}=\vec{S}_1+\vec{S}_2+\ldots\vec{S}_n=\sum_{i=1}^{n}\overline{S}_i. \qquad (3.6)$$

Теорема. ***Зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів сил, прикладених до точки за той самий проміжок часу***.

$$m\overline{V}_1-m\overline{V}_0=\sum_{i=1}^{n}\overline{S}_i. \qquad (3.7)$$

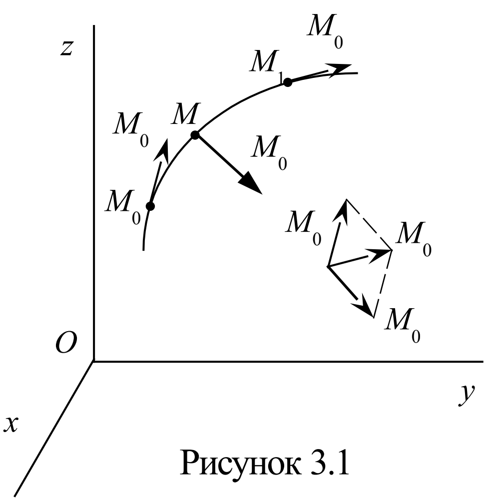


Рисунок 3.1

Розглянемо точку М масою m, яка рухається вздовж траєкторії під дією сили $\overline{P}=\sum_{i=1}^{n}\overline{P}_i$ (рисунок 3.1) та має в момент часу $t=0$ швидкість $\overline{V}_0$, а в момент часу t_1 – $\overline{V}_1$.

Основне рівняння динаміки має вигляд:

$$m\overline{a}=\overline{P}=\sum_{i=1}^{n}\overline{P}_i, \qquad (3.8)$$

де $\overline{a}=\frac{d\overline{V}}{dt}$.

Тоді

$$m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\left(m \cdot \vec{V}\right)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \,, \qquad (3.9)$$

$$d\left(m\overline{V}\right) = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i dt \,. \qquad (3.10)$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння (3.10) у відповідних границях.

$$\int_{V_0}^{V_1} d\left(m\overline{V}\right) = \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{t_1} \overline{P}_i dt \,. \qquad (3.11)$$

Отже,

$$m\overline{V}_1 - m\overline{V}_0 = \sum_{i=1}^{n} \overline{S}_i \,, \qquad (3.12)$$

що й потрібно було довести.

Векторному рівнянню (3.12) відповідають три рівняння в проекціях на осі координат:

$$\begin{aligned} mV_{1x} - mV_{0x} &= S_{1x} + S_{2x} + \ldots + S_{nx}, \\ mV_{1y} - mV_{0y} &= S_{1y} + S_{2y} + \ldots + S_{ny}, \\ mV_{1z} - mV_{0z} &= S_{1z} + S_{2z} + \ldots + S_{nz}. \end{aligned} \qquad (3.13)$$

3.2 Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Введемо такі поняття, як кінетична енергія матеріальної точки та робота сили.

Другою основною динамічною характеристикою руху матеріальної точки є її кінетична енергія.

Кінетичною енергією (або живою силою) точки називається скалярна величина $\frac{mV^2}{2}$, яка дорівнює півдобутку маси точки на квадрат її швидкості:

$$T = \frac{mV^2}{2}. \qquad (3.14)$$

Для характеристики дії, яку створює сила на деякому переміщенні, введемо поняття про роботу сили. Робота характеризує ту дію сили, якою визначається зміна модуля швидкості точки, яка рухається. Спочатку розглянемо поняття елементарної роботи.

Елементарною роботою сили $\bar{P}$ (рисунок 3.2) називається скалярна величина

$$dA = P_t \cdot ds, \qquad (3.15)$$

де P_t – проекція сили $\bar{P}$ на дотичну до траєкторії;

ds – нескінченно мале переміщення точки, яке спрямовано вздовж цієї дотичною.

$$P_\tau = P\cos\alpha, \qquad (3.16)$$

тому

$$dA = P\cos\alpha \cdot ds. \qquad (3.17)$$

Аналітичний вигляд елементарної роботи сили

$$dA = P_x dx + P_y dy + P_z dz. \qquad (3.18)$$

Робота сили на будь-якому кінцевому переміщенні M_1M_0 (рисунок 3.2) визначається як інтегральна сума відповідних елементарних робіт:

$$A_{(M_0 M_1)} = \int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} P_\tau ds \tag{3.19}$$

або

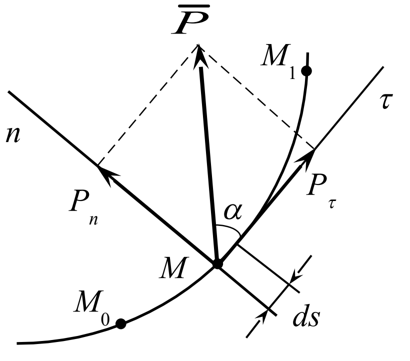


Рисунок 3.2

$$A_{(M_0 M_1)} = \int\limits_{M_0}^{M_1} P \cos\alpha \cdot ds\,, \tag{3.20}$$

$$A_{(M_0 M_1)} = \int\limits_{M_0}^{M_1} \left(P_x dx + P_y dy + P_z dz \right). \tag{3.21}$$

ПРИКЛАДИ ВИЗНАЧЕННЯ РОБОТИ

Приклад 1. Робота сили тяжіння

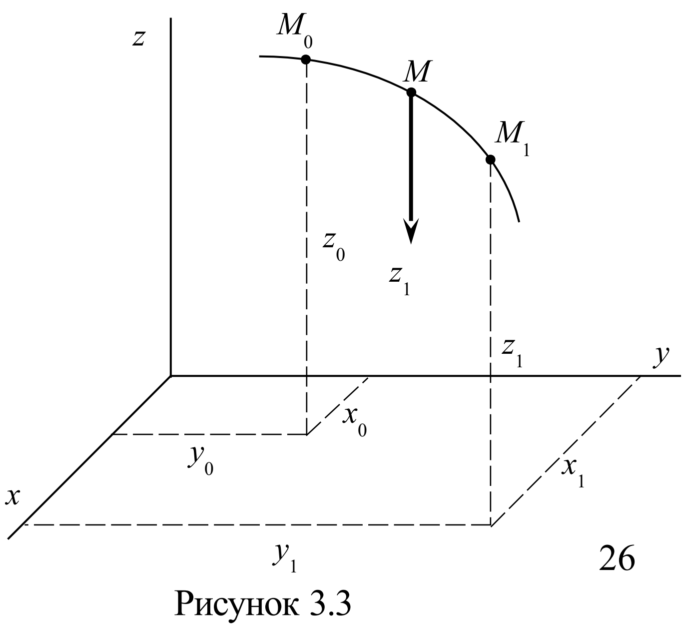


Рисунок 3.3

Точка *M*, на яку діє сила тяжіння $m\overline{g}$, рухається вздовж своєї траєкторії (рисунок 3.3), $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – початкове положення, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – кінцеве положення.

Для визначення роботи сили тяжіння скористаємося рівняннями (3.21), при цьому $P_x = 0,\ \ P_y = 0,\ \ P_z = -mg$,

$$A_{(M_0M_1)} = \int\limits_{M_0}^{M_1} \left(P_x dx + P_y dy + P_z dz \right) = \int\limits_{M_0}^{M_1} (-mg) dz = -\int\limits_{z_0}^{z_1} (-mg) dz = mg\left(z_0 - z_1 \right),$$

де $z_0 - z_1 = h$.

Тому $$A_{(M_0M_1)} = mgh.$$

Якщо $z_0 > z_1$ − робота сили тяжіння додатна.
Якщо $z_0 < z_1$ − робота сили тяжіння від’ємна.

Таким чином,

$$A_{(M_0M_1)} = \pm\, mgh. \tag{3.22}$$

Приклад 2. Робота сили пружності

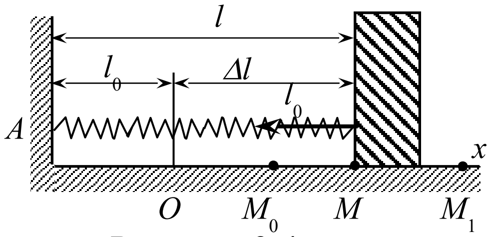


Рисунок 3.4

Вантаж, який лежить на горизонтальній площині, знаходиться під дією сили пружності $\overline{P}_{np}$ (рисунок 3.4).

O − початок відліку (початок координат). $|AO| = l_0$ − довжина недеформованої пружині. $|AM| = l$ − довжина деформованої пружини.

$$P_{np} = c \cdot |\Delta l| = c \cdot |x|, \tag{3.23}$$

де c − коефіцієнт жорсткості пружини.

Для визначення роботи сили пружності при переміщенні вантажу з положення $M_O(x_1)$ в положення $M_1(x_1)$ скористаємось рівнянням (3.21). При цьому $P_x = -cx, \quad P_y = 0, \quad P_z = 0$.

$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} \left(P_x dx + P_y dy + P_z dz \right) = \int_{M_0}^{M_1} (-cx) dx = -c \int_{x_0}^{x_1} x dx ,$$

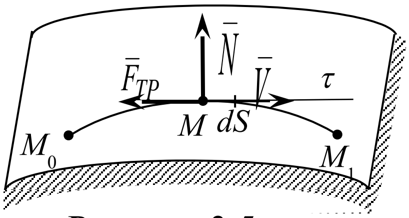


Рисунок 3.5

де x_0 − початкове здовження пружини $\Delta l_{поч}$;

x_1 − кінцеве здовження пружини $\Delta l_к$.

Остаточно

$$A_{(M_0 M_1)} = \frac{c}{2} \left(\left(\Delta l_{поч} \right)^2 - \left(\Delta l_{к} \right)^2 \right) \cdot \tag{3.24}$$

Приклад 3. Робота сил тертя

Точка M рухається вздовж шорсткої поверхні (рисунок 3.5).На точку діє сила тертя $\bar{F}_{TP}$, яка спрямована за протилежним напрямком руху точки:

$$\left| \bar{F}_{TP} \right| = \left| fN \right| , \tag{3.25}$$

де f − коефіцієнт тертя;

N − сила нормальної реакції поверхні.

$$F_{TP} = -fN . \tag{3.26}$$

Для визначення роботи сили тертя скористуємось рівнянням (3.19).

Тоді

$$A_{(MoM_1)} = -\int_{Mo}^{M_1} fNds . \tag{3.27}$$

Якщо величина сили тертя постійна, то

$$A_{(M_0M_1)} = -\overline{F}_{TP} \cdot S \qquad (3.28)$$

де S − довжина дуги кривої M_0M_1.

Теорема. ***Зміна кінетичної енергії матеріальної точки на деякому її переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт усіх діючих на цю точку сил на тому самому переміщенні***.

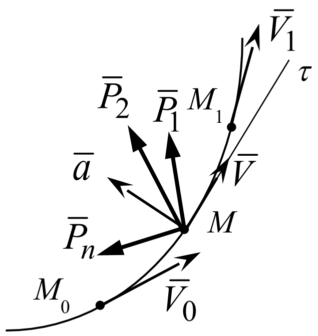


Рисунок 3.6

Розглянемо точку M масою m, яка рухається вздовж траєкторії під дією сил $\overline{P}_1,\ \overline{P}_2 \ldots \overline{P}_n$ (рисунок 3.6) та має в положенні M_0 швидкість $\overline{V}_0$, а в положенні $M_1 - \overline{V}_1$.

Основне рівняння динаміки має такий вигляд:

$$m\overline{a} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \,. \qquad (3.30)$$

Спроектуємо обидві частини рівняння (3.30) на дотичну до траєкторії точки M:

$$ma_\tau = \sum_{i=1}^{n} P_{i\tau} \,, \qquad (3.31)$$

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{dV \cdot dS}{dt \cdot dS} = \frac{dV}{dS} V \,. \qquad (3.32)$$

Тоді

$$m\frac{dV}{dS}V=\sum_{i=1}^{n}\overline{P}_{i\tau}\ , \qquad (3.33)$$

$$mVdV=\sum_{i=1}^{n}\overline{P}_{i\tau}dS\ . \qquad (3.34)$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння (3.34) у відповідних границях. Тоді

$$\frac{mV_1^2}{2}-\frac{mV_0^2}{2}=\sum_{i=1}^{n}A_i\ , \qquad (3.35)$$

тобто

$$T_1-T_0=\sum_{i=1}^{n}A_i\ , \qquad (3.36)$$

що і потрібно було довести.

3.3 Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки

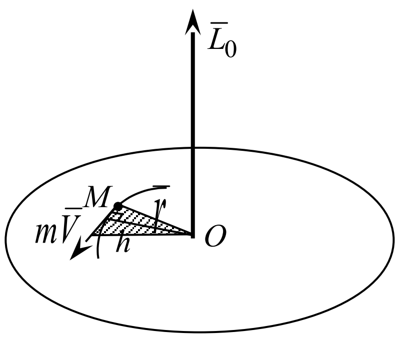


Рисунок 3.7

Введемо поняття момент кількості руху відносно центра та відносно осі.

У розділі «Статика» було введено поняття момент сили відносно центра та відносно осі. Оскільки кількістю руху матеріальної точки $m\overline{V}$ є вектор, то можна визначити його моменти відносно центра і відносно осі так само, як і визначалися моменти сили.

Момент кількості руху точки M відносно центра O (рисунок 3.7) є вектор $\overline{L}_0$, спрямований перпендикулярно до площини, яка проходить через вектор $m\overline{V}$ та центр O в той бік, звідки вектор $m\overline{V}$ відносно центра O видно спрямованим проти обертання стрілки годинника.

Модуль вектора $\overline{L}_0$ дорівнює

$$L_0 = mVh, \qquad (3.37)$$

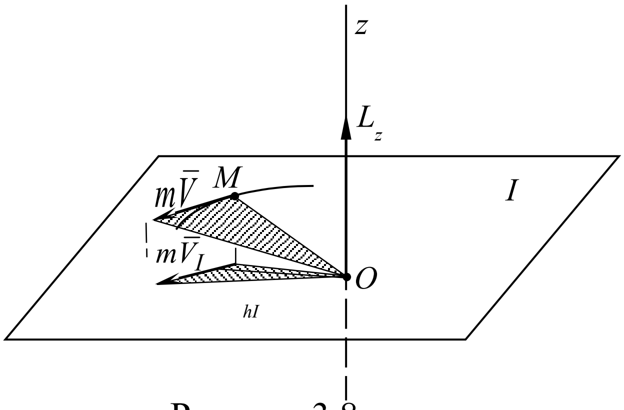


Рисунок 3.8

де h − плече від центра O до вектора $m\overline{V}$.

Момент кількості руху можна визначити як векторний добуток

$$\overline{L_O} = \overline{r} \times m\overline{V}, \qquad (3.38)$$

де $\overline{r}$ − радіус-вектор, який спрямований від центру O до точки M.

Момент L_z кількості руху $m\overline{V}$ точки M відносно осі OZ (рисунок 3.8) дорівнює добутку проекції вектора $m\overline{V}$ на площину I, перпендикулярну до осі OZ, на плече цієї проекції відносно точки O перетину осі OZ з площиною I.

$$L_z = \pm mV_I h_I, \qquad (3.39)$$

де h_I − плече;

mV_I − проекція вектора $m\overline{V}$ на площину I.

$L_z > 0$, якщо mV_I прагне обернутися відносно O проти стрілки годинника.

$L_z < 0$ − у протилежному випадку.

Аналітичні вирази моментів кількості руху точки відносно осей координат:

$$L_x = ymV_z - zmV_y,$$
$$L_y = zmV_x - xmV_z, \qquad (3.40)$$
$$L_z = xmV_y - ymV_x,$$

де x, y, z – координати точки M, що рухається;

V_x, V_y, V_z – проекції швидкості точки M на відповідні осі координат.

Теорема. ***Похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно деякого нерухомого центра дорівнює геометричній сумі моментів сил, які діють на дану точку, відносно того самого центра***.

$$\frac{d\overline{L}_0}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_{i0}\,. \qquad (3.41)$$

m,
під
M

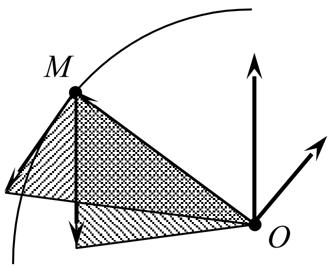


Рисунок 3.9

Розглянемо матеріальну точку M масою яка рухається вздовж своєї траєкторії дією сили $\overline{P}$ (рисунок 3.9).

Визначимо момент сили $\overline{P}$ відносно центра O та момент кількості руху точки відносно центра O.

$$\overline{M}_0 = \overline{r} \times \overline{P}, \qquad (3.42)$$

$$\overline{L}_0 = \overline{r} \times m\overline{V}\,. \qquad (3.43)$$

Щоб визначити залежність між $\overline{L}_0$ та $\overline{M}_0$, знайдемо похідну за часом від моменту кількості руху:

$$\frac{d\overline{L}_0}{dt} = \frac{d\overline{r}}{dt} m\overline{V} \times \overline{r} m \frac{d\overline{V}}{dt}, \qquad (3.44)$$

де $\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{V}$, $\frac{d\bar{V}}{dt}=\bar{a}$.

Оскільки кут $\left(\bar{V}\hat{,}m\bar{V}\right)=0$, то

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt}=\bar{V}m\bar{V}\times\bar{r}m\bar{a}, \tag{3.45}$$

$$\bar{V}\times m\bar{V}=0, \tag{3.46}$$

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt}=\bar{r}m\bar{a}=\bar{r}\bar{P}, \tag{3.47}$$

тобто

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt}=\bar{M}_0. \tag{3.48}$$

Якщо на матеріальну точку діє декілька сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2\ldots\bar{P}_n$, то $\bar{M}_0$ потрібно розглядати як момент їх рівнодіючої, тобто

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt}=\bar{M}_{10}+\bar{M}_{20}+\ldots+\bar{M}_{n0}, \tag{3.49}$$

або

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\bar{M}_{i0}. \tag{3.50}$$

Спроектуємо обидві частини векторного рівняння (2.49) на осі координат:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_{1x} + M_{2x} + \ldots + M_{nx},$$
$$\frac{dL_y}{dt} = M_{1y} + M_{2y} + \ldots + M_{ny}, \qquad (3.51)$$
$$\frac{dL_z}{dt} = M_{1z} + M_{2z} + \ldots + M_{nz}.$$

або

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum_{i=1}^{n} M_{ix},$$
$$\frac{dL_y}{dt} = \sum_{i=1}^{n} M_{iy}, \qquad (3.52)$$
$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{i=1}^{n} M_{iz},$$

де $L_x,\ L_y,\ L_z$ – моменти кількості руху точки М відносно осей координат;

$M_{ix},\ M_{iy},\ M_{iz}$ – моменти сили $\overline{P}_i$ відносно тих самих осей.

Рівняння (3.52) виражають теорему про зміну кількості руху точки відносно осі.

Теорема. ***Похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно деякої нерухомої осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил, діючих на матеріальну точку відносно цієї осі***.

Висновок 1. Якщо лінія дії рівнодіючої прикладених до матеріальної точки сил увесь час проходить через деякий нерухомий центр, то момент кількості руху матеріальної точки відносно того самого центра залишається постійним.

З рівняння (3.50) випливає, якщо $\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_{i0} = 0$, то $\frac{d\overline{L}_0}{dt} = 0$ та $\overline{L}_0 = const$.

Висновок 2. Якщо момент рівнодіючої прикладених до матеріальної сил відносно деякої осі увесь час дорівнює нулю, то момент кількості руху матеріальної точки відносно цієї осі залишається постійним.

Наприклад, з рівняння (3.52) випливає, якщо $\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0$, то $\frac{dL_x}{dt} = 0$ та $L_x = const$.

4 ВСТУП ДО ДИНАМІКИ СИСТЕМИ МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК ТА ТВЕРДОГО ТІЛА

4.1 Механічна система. Сили зовнішні та внутрішні

Механічною системою матеріальних точок або тіл називається така їх сукупність, в якій положення або рух кожної точки (або тіла) залежить від положення або руху решти.

Матеріальне тіло також розглядається як система матеріальних точок (часток), які утворюють це тіло.

Сили, які діють на точки або тіла механічної системи, поділяються на зовнішні та внутрішні.

Зовнішніми силами $\overline{P}_i^e$ називаються такі сили, які діють на точки або тіла механічної системи з боку точок або тіл, які не належать даній системі.

Внутрішніми силами $\overline{P}_i^j$ називаються сили, які діють на точки або тіла механічної системи з боку точок або тіл тієї самої системи.

Властивості внутрішніх сил:

1) геометрична сума (головний вектор) усіх внутрішніх сил системи дорівнює нулю

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i^j = 0; \qquad (4.1)$$

2) сума моментів (головний момент) усіх внутрішніх сил системи відносно будь-якого центра або осі дорівнює нулю

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_0\left(\overline{P}_i^j\right) = 0 \qquad (4.2)$$

або

$$\sum_{i=1}^{n} M_x\left(\overline{P}_i^j\right) = 0,\ \sum_{i=1}^{n} M_y\left(\overline{P}_i^j\right) = 0,\ \sum_{i=1}^{n} M_z\left(\overline{P}_i^j\right) = 0. \qquad (4.3)$$

4.2 Маса системи. Центр мас

Рух механічної системи залежить як від діючих сил, так і від сумарної маси та розподілення мас.

Маса системи дорівнює арифметичній сумі мас усіх точок системи або тіл, які утворюють цю систему,

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i\ , \qquad (4.4.)$$

де m − маса системи;
m_i − маса i-ї точки системи.

В однорідному полі тяжіння, для якого $g = const$, вага будь-якої частки тіла буде пропорційна її масі. Тому розподіл мас у тілі можна визначити за положенням його центра ваги:

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i g \cdot x_i}{mg} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{m};$$

$$Y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{m}; \qquad (4.5)$$

$$Z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i}{m}.$$

Геометрична точка $C\left(x_c, y_c, z_c\right)$, координати якої визначаються за формулами (4.5), називається **центром мас** або **центром інерції** механічної системи.

Якщо положення центра мас визначається його радіусом-вектором $\overline{r_c}$, то

$$\overline{r_c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overline{r_i}}{m}, \qquad (4.6)$$

де $\overline{r_i}$ − радіус-вектор точки.

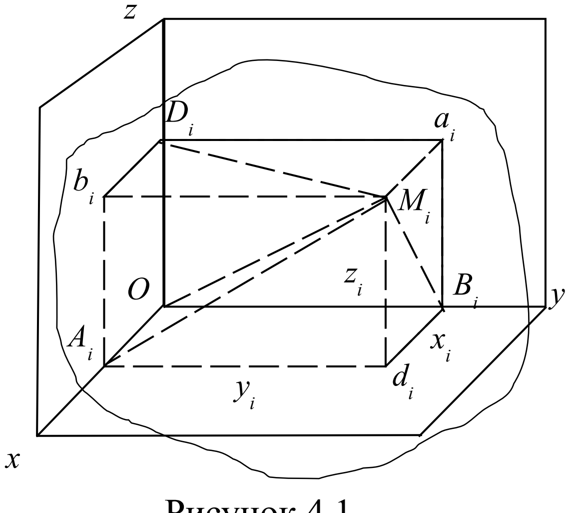


Рисунок 4.1

4.3 Момент інерції твердого тіла. Радіус інерції

Положення центра мас характеризує розподіл мас не повністю. Тому введемо ще одну характеристику розподілу мас – момент інерції.

Розглянемо матеріальне тіло як сукупність матеріальних точок $M_i\left(i=1,2\ldots n\right)$ (рисунок 4.1).

Моментом інерції твердого тіла відносно площини називається скалярна величина, яка дорівнює сумі добутків маси кожної точки тіла на квадрат відстані від цієї точки до площини.

$$I_{yoz}=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2,$$
$$I_{zox}=\sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2, \tag{4.7}$$
$$I_{xoy}=\sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2,$$

де I_{yoz}, I_{zox}, I_{xoy} – моменти інерції твердого тіла відносно відповідних площин.

Моментом інерції твердого тіла відносно осі називається скалярна величина, яка дорівнює сумі добутків маси кожної точки на квадрат відстані від цієї точки до осі.

$$I_x=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(y_i^2+z_i^2\right),$$
$$I_y=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(z_i^2+x_i^2\right), \tag{4.8}$$
$$I_z=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2+y_i^2\right),$$

де I_x, I_y, I_z – моменти інерції твердого тіла відносно відповідних осей.

Моментом інерції твердого тіла відносно полюса

(полярний момент інерції) називається скалярна величина, яка дорівнює сумі добутків маси кожної точки тіла на квадрат відстані від точки до полюса.

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \right), \tag{4.9}$$

де I_O – момент інерції твердого тіла відносно полюса O.

Між моментами інерції твердого тіла відносно координатних площин, координатних осей та початку координат існують такі залежності:

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \right) = I_{yoz} + I_{zox} + I_{xoy}, \tag{4.10}$$

$$I_x + I_y + I_z = 2\sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \right) = 2I_O, \tag{4.11}$$

$$\begin{gathered} I_O = 0{,}5\left(I_x + I_y + I_z \right), \\ I_x = I_{zox} + I_{xoy}, \\ I_y = I_{xoy} + I_{yoz}, \\ I_z = I_{yoz} + I_{zox}. \end{gathered} \tag{4.12}$$

Момент інерції твердого тіла відносно заданої осі, наприклад осі Z, також визначається як добуток маси тіла на квадрат лінійної величини, яка називається **радіусом інерції тіла** відносно осі Z.

$$I_z = m \cdot i_z^2, \tag{4.13}$$

де m – маса тіла;
i_z – радіус інерції тіла відносно осі Z.

Співвідношення (4.13) показує, що радіус інерції i_z визначає відстань від осі Z до точки, в якій потрібно зосередити масу тіла m, щоб момент інерції точки відносно цієї осі дорівнював моменту інерції тіла.

5 ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

5.1 Теорема про рух центра мас механічної системи

Розглянемо рух n матеріальних точок $M_1, M_2 \ldots M_i \ldots M_n$. Масу кожної точки позначимо відповідно m_i. Поділимо прикладені до точок сили на зовнішні та внутрішні. Рівнодіючі прикладених до точки зовнішніх і внутрішніх сил позначимо відповідно $\overline{P}_i^e$ та $\overline{P}_i^j$.

Складемо основне рівняння динаміки для кожної точки M_i $\left(i = 1, 2 \ldots n \right)$:

$$m\overline{a_i} = m_i \frac{d^2 \overline{r}}{dt^2} = \overline{P_i^e} + \overline{P_i^j}. \qquad (5.1)$$

Для механічної системи, яка складається з n матеріальних точок, отримаємо n диференціальних рівнянь:

$$m\overline{a_1} = m_1 \frac{d^2 \overline{r_1}}{dt^2} = \overline{P_1^e} + \overline{P_1^j},$$

$$m_2 \overline{a_2} = m_2 \frac{d^2 \overline{r_2}}{dt^2} = \overline{P_2^e} + \overline{P_2^j}, \qquad (5.2)$$

....

$$m_n \overline{a_n} = m_n \frac{d^2 \overline{r_n}}{dt^2} = \overline{P_n^e} + \overline{P_n^j}.$$

Рівняння (5.2), з яких можна визначити закон руху кожної точки системи, називаються диференційними рівняннями руху системи у векторному вигляді.

У ряді випадків для визначення характеру руху системи (особливо твердого тіла) достатньо визначити закон руху її центра мас.

Теорема. ***Центр мас механічної системи рухається як матеріальна точка, до якої прикладені усі зовнішні сили, що діють на систему***.

Положення центра мас визначається так:

$$\overline{r}_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i}{m}.$$

Щоб знайти закон руху центра мас, скористаємось диференціальними рівняннями руху системи (5.2):

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 \overline{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i^e + \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i^j . \qquad (5.3)$$

Перетворюємо ліву частину рівняння (5.3), тоді

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 \overline{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i = \frac{d^2}{dt^2}(m\overline{r}_C) = m\frac{d^2 \overline{r}_C}{dt^2} . \qquad (5.4)$$

Як вже відомо, геометрична сума усіх внутрішніх сил системи дорівнює нулю (формула(4.1)), тоді

$$m\frac{d^2 \overline{r}_c}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i^e , \qquad (5.5)$$

або

$$m\overline{a}_{\tilde{n}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i^e , \qquad (5.6)$$

де $\bar{a}_{\tilde{n}}$ – прискорення центра мас механічної системи.

Таким чином, добуток маси системи на прискорення її центра мас дорівнює геометричній сумі усіх діючих на систему зовнішніх сил.

Рівняння (5.6) виражає теорему про рух центра мас механічної системи.

Векторному рівнянню (5.6) відповідають три рівняння в проекціях на осі координат:

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^{n} P_{ix}^{e},$$

$$m\ddot{y} = \sum_{i=1}^{n} P_{iy}^{e}, \tag{5.7}$$

$$m\ddot{z} = \sum_{i=1}^{n} P_{iz}^{e}.$$

Висновок 1. Якщо сума усіх зовнішніх сил, діючих на систему, увесь час дорівнює нулю, то центр мас цієї системи рухається рівномірно і прямолінійно або знаходиться у стані спокою.

З рівняння (5.6) випливає, якщо $\sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i^e = 0$, то $\bar{a}_{\tilde{n}} = 0$ та $\bar{V}_c = const$.

Висновок 2. Якщо сума проекцій усіх зовнішніх сил на будь-яку нерухому вісь увесь час дорівнює нулю, то проекція центра мас механічної системи на цю вісь нерухома або рухається рівномірно.

З рівняння (5.7) випливає, якщо $\sum_{i=1}^{n} P_{ix}^e = 0$, то $\ddot{x}_c = 0$ та $\dot{x}_c = V_{cx} = const$.

Висновки з теореми про рух центра мас механічної системи відображають **закон збереження руху центра мас системи**.

5.2 Теорема про зміну кількості руху механічної системи

Кількістю руху механічної системи називається векторна величина $\overline{k}$, яка дорівнює геометричній сумі (головному вектору) кількості руху усіх матеріальних точок системи.

$$\overline{k} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{V}_i . \tag{5.8}$$

Перетворюємо праву частину рівняння (5.8), тоді

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{V}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\overline{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i . \tag{5.9}$$

Згідно зі співвідношенням (4.6)

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i = m \cdot \overline{r}_c , \tag{5.10}$$

тоді

$$\overline{k} = \frac{d}{dt}\left(m \cdot \overline{r}_c \right) = m \frac{d\overline{r}_c}{dt} = m \overline{V}_c ,$$

$$\overline{k} = m \overline{V}_c , \tag{5.11}$$

тобто кількість руху механічної системи дорівнює добутку маси системи на швидкість її центра мас.

У проекціях на осі координат:

$$k_x = \sum_{i=1}^{n} mV_{cx},$$

$$k_y = \sum_{i=1}^{n} mV_{cy}, \qquad (5.12)$$

$$k_z = \sum_{i=1}^{n} mV_{cz}.$$

Теорема. ***Похідна за часом від кількості руху механічної системи дорівнює геометричній сумі усіх діючих на систему зовнішніх сил***.

Рівняння (5.11) диференціюємо за часом:

$$\frac{d\overline{k}}{dt} = m\frac{d\overline{V}_c}{dt} = m\overline{a}_c, \qquad (5.13)$$

але

$$m\overline{a}_{\tilde{n}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i^e, \qquad (5.14)$$

тоді

$$\frac{d\overline{k}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i^e. \qquad (5.15)$$

Рівняння (5.15) виражає теорему про зміну кількості руху механічної системи у диференціальному вигляді.

Векторному рівнянню (5.15) відповідають три рівняння в проекціях на осі координат:

$$\frac{dk_x}{dt} = \sum_{i=1}^{n} P_{ix}^e,$$
$$\frac{dk_y}{dt} = \sum_{i=1}^{n} P_{iy}^e, \qquad (5.16)$$
$$\frac{dk_z}{dt} = \sum_{i=1}^{n} P_{iz}^e.$$

Другий вираз теореми має такий вигляд:

$$\overline{k}_1 - \overline{k}_0 = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{t_1} \overline{P}_i^e dt, \qquad (5.17)$$

$$\overline{k}_1 - \overline{k}_0 = \sum_{i=1}^{n} \overline{S}_i^e, \qquad (5.18)$$

де $\overline{k}_0$ − кількість руху в момент часу $t = 0$;
$\overline{k}_1$ − кількість руху в момент час $t = t_1$;
$\overline{S}_i^e$ − імпульс зовнішньої сили $\overline{P}_i^e$.

Рівняння (5.18) виражає теорему про зміну кількості руху механічної системи в інтегральному вигляді.

Теорема. ***Зміна кількості руху механічної системи за деякий проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів зовнішніх сил, прокладених до системи за той самий проміжок часу***.

Векторному рівнянню (5.18) відповідають три рівняння в проекція на осі координат:

$$k_{1x} - k_{0x} = \sum_{i=1}^{n} S_{ix}^{e},$$

$$k_{1y} - k_{0y} = \sum_{i=1}^{n} S_{iy}^{e}, \qquad (5.19)$$

$$k_{1z} - k_{0z} = \sum_{i=1}^{n} S_{iz}^{e}.$$

Висновок 1. Якщо сума усіх зовнішніх сил, діючих на механічну систему за розглянутий проміжок часу, дорівнює нулю, то кількість руху механічної системи постійна.

З рівняння (5.15) випливає, якщо $\sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i^e = 0$, то $\frac{d\overline{k}}{dt} = 0$, тобто $\overline{k} = m\overline{V}_c = const$.

Висновок 2. Якщо сума проекцій усіх діючих зовнішніх сил на будь-яку вісь за розглянутий проміжок часу дорівнює нулю, то проекція кількості руху механічної системи на цю вісь постійна.

З рівняння (5.16) випливає, якщо $\sum_{i=1}^{n} P_{ix}^e = 0$, то $\frac{dk_x}{dt} = 0$, тобто $k_x = mV_{cx} = const$.

Висновки з теореми про зміну кількості руху механічної системи відображають закон збереження кількості руху системи.

5.3 Теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи

Кінетичним моментом або головним моментом кількості руху механічної системи відносно даного центра називається векторна величина $\overline{L}_0$, яка дорівнює геометричній сумі моментів кількостей руху усіх матеріальних точок системи відносно того самого центра.

$$\overline{L_O} = \sum_{i=1}^{n} \overline{L_{iO}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{r_i} \times m_i \overline{V_i}. \qquad (5.20)$$

Кінетичним моментом або головним моментом кількості руху механічної системи відносно осі називається алгебраїчна сума моментів кількості руху усіх матеріальних точок відносно тієї самої осі.

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{iz} \,. \tag{5.21}$$

Теорема. ***Похідна за часом від кінетичного моменту механічної системи відносно деякого нерухомого центра геометрично дорівнює головному моменту зовнішніх сил, діючих на систему відносно того самого центра***.

Розглянемо систему матеріальних точок $M_1, M_2 \ldots M_n$, яка рухається під дією системи сил $\overline{P}_1^e,\ \overline{P}_2^e \ldots \overline{P}_n^e$ та $\overline{P}_1^j,\ \overline{P}_2^j \ldots \overline{P}_n^j$.

Визначимо зміну моменту кількості руху кожної точки M_i відносно даного нерухомого центра O. Скористаємось рівнянням (3.50), тоді

$$\frac{d\overline{L}_{i0}}{dt} = \overline{M}_{i0}^e + \overline{M}_{i0}^j \ \left(i = 1, 2 \ldots n \right).$$

Підсумуємо отримані n рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\overline{L}_{i0}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_{i0}^e + \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_{i0}^j \,. \tag{5.22}$$

Як вже відомо, $\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_{i0}^j = 0$, але

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\overline{L}_{i0}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \overline{L}_{i0} = \frac{d\overline{L}_0}{dt} \,. \tag{5.23}$$

Тоді

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_{i0}^{e} = \bar{M}_0^e. \qquad (5.24)$$

Рівняння (5.24) виражає теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи.

Векторному рівнянню (5.24) відповідають три рівняння в проекціях на осі координат:

$$\begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} M_{ix}^{e} = M_x^e, \\ \frac{dL_y}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} M_{iy}^{e} = M_y^e, \\ \frac{dL_z}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} M_{iz}^{e} = M_z^e, \end{aligned} \qquad (5.25)$$

де L_x, L_y, L_z – кінетичні моменти механічної системи відносно відповідних осей;

M_x^e, M_y^e, M_z^e – головні моменти зовнішніх сил відносно відповідних осей.

Таким чином, похідна за часом від кінетичного моменту механічної системи відносно деякої осі дорівнює головному моменту зовнішніх сил відносно тієї самої осі.

Висновок 1. Якщо головний момент зовнішніх сил відносно деякого нерухомого центра увесь час дорівнює нулю, то кінетичний момент механічної системи відносно того самого центра залишається постійним.

З рівняння (5.24) випливає, якщо $\bar{M}_0^e$=0, то $\frac{d\bar{L}_0}{dt} = 0$ а $d\bar{L}_0 = const$.

Висновок 2. Якщо головний момент зовнішніх сил відносно деякої осі увесь час дорівнює нулю, то кінетичний момент механічної системи відносно тієї самої осі залишається постійним.

З рівняння (5.25) випливає, якщо, наприклад, $M_x^e = 0$, то $\frac{dL_x}{dt} = 0$ та $L_x = const$.

Висновки з теореми про зміну кінетичного моменту механічної системи виражають **закон збереження кінетичного моменту механічної системи**.

5.4 Теорема про зміну кінетичної енергії

Кінетична енергія механічної системи та твердого тіла

Кінетичною енергією механічної системи називається скалярна величина *T*, яка дорівнює арифметичній сумі кінетичних енергій усіх точок системи.

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_i^2}{2}. \tag{5.26}$$

Кінетична енергія згідно з виразом (5.26) є величиною суттєво додатною, яка дорівнює нулю лише тоді, коли швидкості усіх точок системи дорівнюють нулю, тобто у випадку спокою системи.

При визначенні кінетичної енергії механічної системи іноді виявляється доцільно користуватись теоремою Кьоніга.

Теорема. ***Кінетична енергія механічної системи дорівнює сумі кінетичної енергії центра мас системи, маса якого дорівнює масі системи, і кінетичної енергії системи у її відносному русі відносно центра мас***.

$$T = \frac{mV_c^2}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_{ir}^2}{2}, \tag{5.27}$$

де V_{ir} – відносна швидкість точки.

Якщо механічно система складається з декількох тіл, то її кінетична енергія визначається як сума кінетичних енергій цих тіл.

Визначення кінетичної енергії твердого тіла

Приклад 1. Поступальний рух твердого тіла

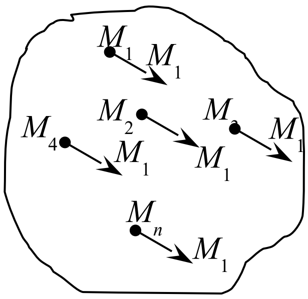


Рисунок 5.1

При поступальному русі твердого тіла швидкості усіх його точок у кожен момент часу геометрично рівні (рисунок 5.1).
Кінетична енергія тіла визначається так:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_i^2}{2} = \frac{V^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \,. \tag{5.28}$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{n} m_i = m$, то остаточно

$$T = \frac{mV^2}{2}, \tag{5.29}$$

тобто кінетична енергія твердого тіла, яке рухається поступально, дорівнює півдобутку маси тіла на квадрат його швидкості.

Приклад 2. Обертальний рух твердого тіла

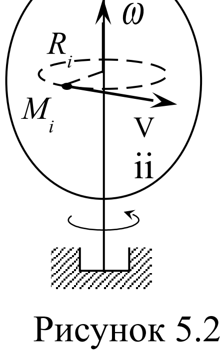


Рисунок 5.2

При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі (рисунок 5.2) швидкість будь-якої його точки визначається як обертальна швидкість:

$$V_i = R_i \cdot \omega \,. \tag{5.30}$$

Тоді

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i R_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \, . \quad (5.31)$$

Оскільки

$$\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = I_z \, ,$$

де I_z − момент інерції тіла відносно осі обертання,

остаточно маємо

$$T = \frac{I_z \omega^2}{2} \, . \qquad (5.33)$$

Тобто кінетична енергія твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, дорівнює півдобутку його моменту інерції відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості тіла.

Приклад 3. Плоскопаралельний рух твердого тіла

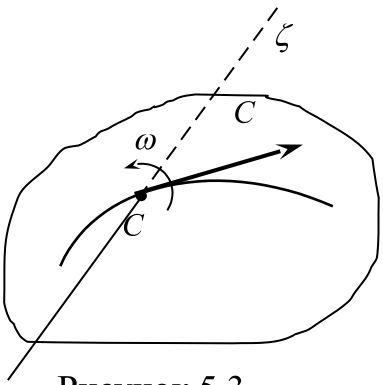


Рисунок 5.3

Припустимо, що при плоско-паралельному русі твердого тіла його центр мас C рухається у площині креслення (рисунок 5.3). Розкладаємо цей рух на поступальний разом з центром мас та відносний рух щодо центра мас.

У цьому випадку відносний рух являє собою обертання тіла навколо осі $c\zeta$, яка проходить через центр мас C перпендикулярно до площини креслення.

Визначаємо кінетичну енергію тіла за теоремою Кьоніга (формула (5.27)):

$$T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_{c\zeta}\omega^2}{2}, \tag{5.34}$$

де $\frac{mV_c^2}{2}$ − кінетична енергія тіла у поступальному русі разом з центром мас;

$\frac{I_{c\zeta}\omega^2}{2}$ − кінетична енергія в обертанні тіла навколо рухомої осі $c\zeta$, визначена на підставі (5.33).

Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи та твердого тіла

Зміна кінетичної енергії механічної системи на деякому переміщенні дорівнює сумі робіт внутрішніх та зовнішніх сил, діючих на матеріальні точки системи на цьому переміщенні.

$$T_1 - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i^e + \sum_{i=1}^{n} A_i^j. \tag{5.35}$$

Розглянемо систему n матеріальних точок $M_1, M_2 \ldots M_i \ldots M_n$. Масу кожної точки позначимо відповідно m_i. Поділимо прикладені до точок сили на зовнішні $\overline{P}_1^e,\ \overline{P}_2^e \ldots \overline{P}_n^e$ та внутрішні $\overline{P}_1^j,\ \overline{P}_2^j \ldots \overline{P}_n^j$.

При застосуванні до руху кожної точки системи теореми про зміну кінетичної енергії (формула (3.35)) отримаємо систему рівнянь

$$\frac{m_i V_{i1}^2}{2} - \frac{m_i V_{i0}^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} A_i^e + \sum_{i=1}^{n} A_i^j \ \left(i = 1, 2 \ldots n \right). \tag{5.36}$$

Підсумовуючи обидві частини складених n рівнянь, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_{i1}^2}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_{i0}^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} A_i^e + \sum_{i=1}^{n} A_i^j , \tag{5.37}$$

або

$$T_1 - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i^e + \sum_{i=1}^{n} A_i^j .$$

Для твердого тіла рівняння (5.35) набуває такого вигляду:

$$T_1 - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i^e , \tag{5.38}$$

оскільки сума робіт внутрішніх сил твердого тіла на будь-якому переміщенні дорівнює нулю $\sum_{i=1}^{n} A_i^j = 0$.

Зміна кінетичної енергії твердого тіла на деякому переміщенні дорівнює сумі робіт зовнішніх сил, діючих на тіло на тому самому переміщенні.

6 ЗАГАЛЬНІ ПРИНЦИПИ МЕХАНІКИ

6.1 Принцип Германа-Ейлера-Даламбера

Принципом Германа-Ейлера-Даламбера називається загальний метод, за допомогою якого рівнянням динаміки за формою надається вигляд рівнянь статики.

Цей метод, запропонований Германом у 1716 році та узагальнений Ейлером у 1737 році, який отримав назву петербурзького принципу, часто називають початком або принципом Даламбера.

Принцип Германа-Ейлера-Даламбера для матеріальної точки

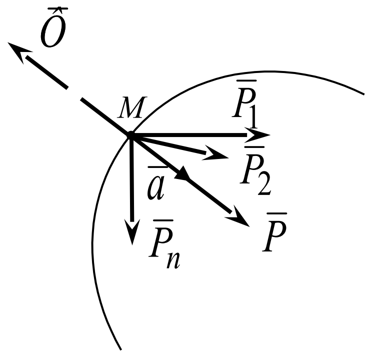


Рисунок 6.1

Розглянемо матеріальну точку M, яка рухається з прискоренням $\overline{a}$ під дією прикладених до неї сил $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2 \ldots \overline{P}_n$ (рисунок 6.1).
Основне рівняння динаміки має такий вигляд:

$$m\overline{a} = \overline{P}_1 \ , \ \overline{P}_2 \ldots \overline{P}_n \ . \tag{6.1}$$

Введемо величину, яка має розмірність сили

$$\bar{O} = -m\overline{a} \ . \tag{6.2}$$

Векторну величину $\bar{O}$, яка за модулем дорівнює добутку маси точки на її прискорення та спрямована протилежно цьому прискоренню, називають **силою інерції** або Даламберовою силою.

Тоді виявляється, що рух матеріальної точки має таку загальну властивість: ***якщо у кожен момент часу до фактично діючих на матеріальну точку сил додати силу інерції, то отримана система сил буде зрівноваженою, тобто***

$$\overline{P}_1 \ , \ \overline{P}_2 \ldots \overline{P}_n + \bar{O} = 0 \ . \tag{6.3}$$

Принцип Германа-Ейлера-Даламбера для невільної механічної системи

При дослідженні руху невільної механічної системи застосовують принцип звільнення від зв’язків, згідно з яким існуючі зв’язки відкидають, змінюючи їх дію відповідними реакціями. Отриману механічну систему розглядають як вільну, яка знаходиться під дією завданих сил та реакцій зв’язків.

Розглянемо невільну механічну систему, яка складається з n матеріальних точок $M_1, M_2 \ldots M_i \ldots M_n$.

Застосовуючи для кожної точки системи принцип Германа-

Ейлера-Даламбера, отримаємо систему n рівнянь:

$$\overline{P}_i + \overline{R}_i + \overline{\Phi}_i = 0, \ (i = 1, 2 \ldots n), \tag{6.4}$$

де $\overline{P}_i$ − рівнодіюча заданих сил;

$\overline{R}_i$ − рівнодіюча реакцій зв'язків;

$\overline{\Phi}_i$ − сила інерції матеріальної точки M_i.

Підсумуємо обидві частини n рівнянь (6.4), тоді

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{R}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{\Phi}_i = 0\,. \tag{6.5}$$

Рівняння (6.5) виражає принцип Германа-Ейлера-Даламбера для невільної матеріальної системи.

Якщо у будь-який момент часу до кожної з точок системи, крім фактично діючих на неї сил, додати відповідні сили інерції, то отримана система сил буде зрівноваженою і до неї можна застосовувати усі рівняння статики.

Співвідношенню (6.5) відповідає такий вираз:

$$\overline{P}^* + \overline{R}^* + \overline{\Phi}^* = 0, \tag{6.6}$$

де $\overline{P}^* = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i$ − головний вектор зовнішніх сил;

$\overline{R}^* = \sum_{i=1}^{n} \overline{R}_i$ − головний вектор реакцій зв'язків;

$\overline{\Phi}^* = \sum_{i=1}^{n} \overline{\Phi}_i$ − головний вектор сил інерції точок системи.

Зі статики відомо, що геометрична сума сил, яка знаходиться в рівновазі, та сума їх моментів відносно будь-якого центра O дорівнює нулю. Тоді на підставі принципу Германа-Ейлера-Даламбера випливає, що

$$\bar{M}_0^P + \bar{M}_0^R + \bar{M}_0^{\hat{O}} = 0, \qquad (6.7)$$

де $\bar{M}_0^P = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_{i0}^P$ – головний момент заданих сил відносно центра O;

$\bar{M}_0^R = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_{i0}^R$ – головний момент реакцій зв’язків відносно центра O;

$\bar{M}_0^{\hat{O}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_{i0}^{\hat{O}}$ – головний момент сил інерції точок системи відносно центра O.

Приведення сил інерції точок твердого тіла до простішого вигляду

До системи сил інерції точок твердого тіла можна застосувати метод приведення сил до деякого центра (метод Пуансо), розглянутий у розділі «Статика». За центр приведення сил інерції обирають центр мас тіла. Тоді в результаті приведення сил інерції до центра C отримаємо силу $\bar{O}^*$, яка дорівнює головному вектору сил інерції точок тіла та парі сил з моментом $\bar{M}^{\hat{O}}$, що дорівнює головному моменту сил інерції відносно центра мас.

$$\bar{O}^* = -\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{a}_i = -m\bar{a}_c, \qquad (6.8)$$

$$\bar{M}^{\hat{O}} = \bar{M}_c^{\hat{O}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_{ic}^{\hat{O}}. \qquad (6.9)$$

Приклад 1. Поступальний рух тіла

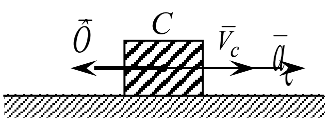


Рисунок 6.2

При поступальному русі сили інерції точок твердого тіла приводяться до рівнодіючої, прикладеної до центра мас тіла, яка за модулем дорівнює добутку маси тіла на модуль прискорення його центра мас і спрямована протилежно цьому прискоренню (рисунок 6.2).

$$\bar{O}^{*} = -m\bar{a}_{c}. \tag{6.10}$$

Приклад 2. Обертання твердого тіла навколо осі, яка проходить через центр мас тіла

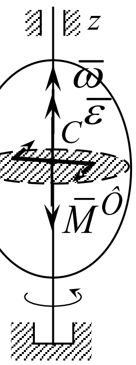


Рисунок 6.3

Якщо тверде тіло обертається навколо нерухомої осі Z, яка проходить через центр мас тіла, то сили інерції точок тіла приводиться до пари сил, яка лежить в площині, перпендикулярної до осі обертання, момент якої визначається так (рисунок 6.3):

$$\bar{M}^{\hat{O}} = -I_{cz}\varepsilon, \tag{6.11}$$

де I_{cz} − момент інерції тіла відносно осі обертання Z.

Приклад 3. Плоскопаралельний рух твердого тіла

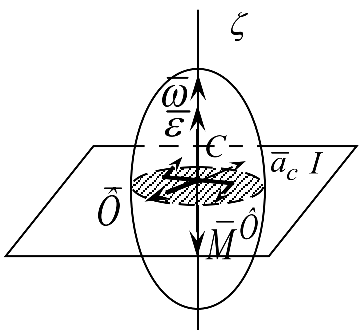


Рисунок 6.4

Якщо тверде тіло, яке має площину матеріальної симетрії, рухається паралельно цій площині, то сили інерції точок тіла приводяться до сили, прикладеної до центра мас, яка дорівнює головному вектору, та до пари сил, яка лежить у площині симетрії (рисунок 6.4):

$$
\begin{aligned}
&\bar{O}^* = -m\bar{a}_c, \\
&\bar{M}^{\hat{O}} = -I_\zeta \varepsilon,
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

де I_ζ – момент інерції тіла відносно головної центральної осі ζ.

6.2 Принцип можливих переміщень

Одним із загальних принципів у механіці є принцип можливих переміщень, який у найбільш загальному вигляді встановлює умови рівноваги будь-якої механічної системи.

При дослідженні рівноваги системи тіл методами геометричної статики доводиться розглядати рівновагу кожного тіла окремо, замінюючи накладені зв’язки відповідними, наперед невідомими, реакціями.

Коли кількість тіл системи значна, цей шлях буде громіздким і пов’язаний з необхідністю розв’язання великої кількості рівнянь з багатьма невідомими.

Застосування методу можливих переміщень полягає в тому, що ефект дії зв’язків враховується не шляхом введення наперед невідомих реакцій, а шляхом розгляду переміщень, які можна надати точкам системи, якщо систему вивести зі стану, який вона займає. Ці переміщення називають можливими, або віртуальними.

Можливими, або віртуальними, переміщеннями невільної механічної системи називаються уявні безкінечно малі переміщення, припущені у даний момент накладеними на систему зв’язками.

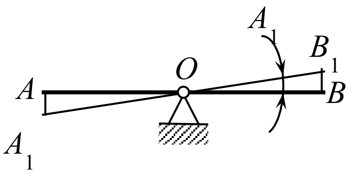


Рисунок 6.5

Так, наприклад, можливим переміщенням підойму AB (рисунок 6.5) є його поворот на нескінченно малий кут $\delta\varphi$ навколо точки O.

При цьому $\delta S_A = |OA|\delta\varphi,\ \delta S_B = |OB|\delta\varphi,$

де δS_A та δS_B – можливі переміщенні точок A та B.

Введемо поняття про **можливу (або віртуальну) роботу**, тобто про елементарну роботу, яку діюча на матеріальну точку сила могла б виконати на переміщенні, збіжному з можливим цієї точки. При цьому введемо позначення: $\delta A^P -$ можлива робота заданої сили, δA^R − можлива робота реакції зв'язків.

Розглянемо систему *n* матеріальних точок $M_1, M_2 \ldots M_i \ldots M_n$, яка під дією прикладених до неї сил знаходиться в рівновазі. При цьому будемо вважати, що всі зв'язки ідеальні, тобто незмінні за часом. Тоді для кожної матеріальної точки M_i

$$\overline{P}_i + \overline{R}_i = 0, \tag{6.13}$$

де $\overline{P}_i$ − рівнодіюча заданих сил;

$\overline{R}_i$ − рівнодіюча реакцій зв'язків.

Отже, на будь-якому можливому переміщенні кожної точки системи M_i можливі роботи δA_i^P та δA_i^R прикладених до неї сил $\overline{P}_i$ та $\overline{R}_i$ будуть однакові за модулем та протилежні за знаком, тобто

$$\delta A_i^P + \delta A_i^R = 0 \;\; (i = 1, 2 \ldots n). \tag{6.14}$$

Тоді для системи *n* матеріальних точок

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i^P + \sum_{i=1}^{n} \delta A_i^R = 0 \;. \tag{6.15}$$

Якщо накладені на систему зв'язки є ідеальними, то сума елементарних робіт реакцій зв'язків на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i^R = 0 \,. \tag{6.16}$$

Підставивши вираз (6.16) у рівняння (6.15), отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i^P = 0 \quad . \tag{6.17}$$

Рівняння (6.17) виражає **принцип можливих переміщень**: ***для рівноваги механічної системи з ідеальними зв'язками необхідно і достатньо, щоб сума елементарних робіт усіх заданих сил на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнювала нулю***.

В аналітичній формі рівняння (6.17) набуває такого вигляду:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(P_{ix}\delta x_i + P_{iy}\delta y_i + P_{iz}\delta z_i \right) = 0\,, \tag{6.18}$$

де $P_{ix},\ P_{iy},\ P_{iz}$ – проекції заданих сил на осі координат;
$\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ – проекції можливих переміщень $\delta \overline{S}_i$ на відповідні осі.

6.3 Загальне рівняння динаміки

Принцип можливих переміщень дає загальний метод розв'язання задач статики. З іншого боку, принцип Германа-Ейлера-Даламбера дозволяє використовувати методи статики для розв'язання задач динаміки. Отже, використовуючи обидва принципи водночас, можна отримати загальний метод розв'язання задач динаміки.

Розглянемо систему *n* матеріальних точок $M_1, M_2 \ldots M_i \ldots M_n$, на яку накладені ідеальні зв'язки. Якщо до кожної точки системи, крім діючих на неї заданих сил $\overline{P}_i$ та реакцій зв'язків $\overline{R}_i$, додати відповідні сили інерції $\overline{O}_i$, то згідно з принципом Германа-Ейлера-Даламбера отримана система сил буде зрівноваженою.

Тоді, застосовуючи до цих сил принцип можливих переміщень, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i^P + \sum_{i=1}^{n} \delta A_i^R + \sum_{i=1}^{n} \delta A_i^{\hat{O}} = 0 . \qquad (6.19)$$

Оскільки накладені на систему зв’язки є ідеальними, то згідно з виразу (6.16) отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i^P + \sum_{i=1}^{n} \delta A_i^{\hat{O}} = 0 . \qquad (6.20)$$

Рівняння (6.20) є загальним рівнянням динаміки, з якого випливає **принцип Даламбера-Лагранжа**: ***при русі механічної системи з ідеальними зв’язками у кожен момент часу сума елементарних робіт усіх заданих сил та усіх сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю***.

В аналітичній формі рівняння (6.20) набуває такого вигляду:

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\left(P_{ix} + \hat{O}_{ix} \right) \delta x_i + \left(P_{iy} + \hat{O}_{iy} \right) \delta y_i + \left(P_{iz} + \hat{O}_{iz} \right) \delta z_i \Big) = 0 , \qquad (6.21)$$

де P_{ix}, P_{iy}, P_{iz} – проекції заданих сил $\overline{P}_i$ на осі координат;
$\hat{O}_{ix}, \hat{O}_{iy}, \hat{O}_{iz}$ – проекції сил інерції $\overline{\hat{O}}_i$ на осі координат;
$\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ – проекції можливих переміщень $\delta \overline{S}_i$ на відповідні осі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Тарг, С.М., Краткий курс теоретической механики [текст]: учебник для ВТУЗов / С.М. Тарг. − 19 е изд. − М., 2009. − 416 с.

2 Яблонский, А.А. Курс теоретической механики [текст] / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова − М., 1984. − ч. 1, 2.

3 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. [текст] / под ред. А.А. Яблонского. – М.: «Интеграл-

Прогресс», 2006. – 382 с.

ДОДАТОК А

Одиниці вимірювання механічних величин у міжнародній Системі одиниць (СІ)

Фізична величина		**Одиниця**
Назва	**Позначення**	
Час	t	*с* (секунда)
Довжина	l, s	*м* (метр)

Маса	M	*кг* (кілограм)
Сила	P, F, Φ	*Н* (ньютон)
Швидкість	V	$\frac{м}{с}$ (метр за секунду)
Прискорення	A	$\frac{м}{с^2}$ (метр за секунду в квадраті)
Плоский кут	φ	*рад* (радіан)
Кутова швидкість	ω	$с^{-1}$ (радіан за секунду)
Кутове прискорення	ε	$с^{-2}$ (радіан за секунду в квадраті)
Імпульс	S	*Нс* або $\frac{кгм}{с}$ (ньютон-секунда або кілограм на метр за секунду)
Кількість руху	mV, k	$\frac{кгм}{с}$ (кілограм-метр за секунду)
Момент сили	M	*Нм* (ньютон-метр)
Момент інерції	I	$кгм^2$ (кілограм-метр у квадраті)
Момент кількості руху	L	$\frac{кгм^2}{с}$ (кілограм-метр у квадраті за секунду)
Робота	A	*Дж* або $\frac{кгм^2}{с^2}$ (джоуль або кілограм на метр квадратний за секунду у квадраті)
Кінетична енергія	T	*Дж* або $\frac{кгм^2}{с^2}$ (джоуль або кілограм на метр квадратний за секунду у квадраті)