



**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
УКРАЇНИ**

**УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ЗАЛІЗНИЧНОГО
ТРАНСПОРТУ**

**ОСНОВИ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ ТА СТІЙКОСТІ
РУХОМОГО СКЛАДУ**

Навчальний посібник

Харків 2021

УДК 629.4.015
О 751

*Рекомендовано вченою радою Українського державного університету
залізничного транспорту як навчальний посібник
(витяг з протоколу № 5 від 26 червня 2020 р.)*

Рецензенти:

професор, д-р техн. наук О. В. Фомін (ДУІТ),
професор, д-р техн. наук В. Г. Маслієв (НТУ «ХП»),
Д. Г. Воскобойников (АТ «Укрзалізниця»)

Авторський колектив:

О. В. Устенко, Р. І. Візник, А. О. Ловська, А. В. Рибін

О 751 Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу: Навч.
посібник / О. В. Устенко, Р. І. Візник, А. О. Ловська та ін. –
Харків: УкрДУЗТ, 2021. – 129 с., рис. 78, табл. 1.
ISBN

У посібнику розглянуто особливості фізичних процесів коливань, що виникають у різних механічних системах, а також конструкційних вузлах і деталях залізничного рухомого складу під час руху. Охарактеризовано та застосовано основні методи вивчення коливань і найбільш важливих властивостей коливальних явищ стосовно конструкцій вагонів нетягового рухомого складу.

Посібник призначений для студентів навчальних закладів залізничного транспорту, а також може бути корисним науково-технічним працівникам, пов'язаним з проектуванням, ремонтом та експлуатацією рухомого складу.

УДК 629.4.015

ISBN

© О. В. Устенко, Р. І. Візник, А. О. Ловська, А. В. Рибін
© Український державний університет
залізничного транспорту, 2021.

ЗМІСТ

Розділ 1. Механічні коливання: особливості та фізична природа	5
1.1. Короткі відомості з теорії коливань. Елементи коливальної системи	5
1.1.1. Коливання. Види коливальних рухів	5
1.1.2. Коливальні системи	10
1.2. Класифікація сил, що діють на коливальні системи	12
1.2.1. Позиційні сили	12
1.2.2. Дисипативні сили	17
1.2.3. Збурювальні сили	19
1.3. Вільні коливання. Лінійні системи з одним ступенем вільності без непружного опору	24
Розділ 2. Коливання лінійних механічних осциляторів при різних видах руху	31
2.1. Вільні коливання при в'язкому опорі (вплив опору на вільні коливання лінійних систем з одним ступенем вільності)	31
2.2. Методи складання диференціальних рівнянь руху	41
2.3. Крутильні коливання механічних систем	45
2.4. Вимушені коливання механічних систем	54
Розділ 3. Особливості коливальних рухів складних механічних систем	67
3.1. Поперечні коливання стрижневих конструкцій. Загальні відомості	67
3.2. Стійкість руху та автоколивання механічних систем	71
3.2.1. Стійкість механічних систем	71
3.2.2. Автоколивання механічних систем	74
3.2.3. Принцип дії віброізоляторів, поглиначів та амортизаторів.	78
3.3. Перехідні процеси при коливаннях найпростіших механічних систем	86
Питання до самоконтролю	95
Нормативні посилання	97
Бібліографічний список	98

Додаток 1. Визначення розрахункових параметрів коливань	100
Додаток 2. Рекомендовані вихідні дані до самостійної роботи	124

Розділ 1

МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ: ОСОБЛИВОСТІ ТА ФІЗИЧНА ПРИРОДА

1.1. Короткі відомості з теорії коливань. Елементи коливальної системи

1.1.1. Коливання. Види коливальних рухів

Коливання – це вид руху, що має певну міру повторюваності. Найбільш поширеними видами коливальних рухів є такі.

Механічні коливання – коливання маятників, мостових конструкцій, будівель і будівельних споруд, кораблів на хвилі, струн музичних інструментів, будь-яких рухомих транспортних засобів, у т. ч. і вагонів у складі поїзда, елементів конструкції машин і механізмів у результаті відхилень від положення рівноваги.

Електромагнітні коливання – коливання напруженості електричних і магнітних полів, що збуджуються в коливальному контурі і поширюються у вигляді хвиль у просторі, об'ємному або відкритому резонаторі, тобто коливальній системі з явно вираженими резонансними властивостями.

Окрім цих складних видів дуже поширені окремі види коливань, такі як електричні, світлові, звукові, електромеханічні і т. д.

За формою коливання розрізняють гармонійні, прямокутні, пилоподібні та ін.

Коливання різної природи лежать в основі великої кількості явищ і фізичних процесів:

1. *Коливання кристалічних ґрат* – коливання атомів, іонів або молекул біля положень рівноваги (вузлів кристалічних ґрат).

2. *Коливання земної кори* - постійні (const) повільні підйоми і опускання земної кори, що змінюють один одного в часі та просторі (швидкість цих коливань складає від 10^{-2} до n см/р.).

3. *Коливальні реакції* – хімічні реакції швидкості й концентрацій деяких проміжних речовин з'єднань від долей секунд до десятків хвилин.

4. *Важливі біологічні процеси організму людини* – генерації нервових імпульсів і біоритмів, робота серцево-судинної системи, скорочення м'язів та ін.

Тобто у всіх проявах життєдіяльності ми обов'язково пов'язані з дією коливань (хвиль).

Отже, *коливання* – це рухи або процеси, що відбуваються в механічних та інших системах і характеризуються певною повторюваністю в часі. Іншими словами, це зміни параметрів стану системи, що відбуваються більш-менш регулярно в часі, тобто періодично (рис. 1.1).

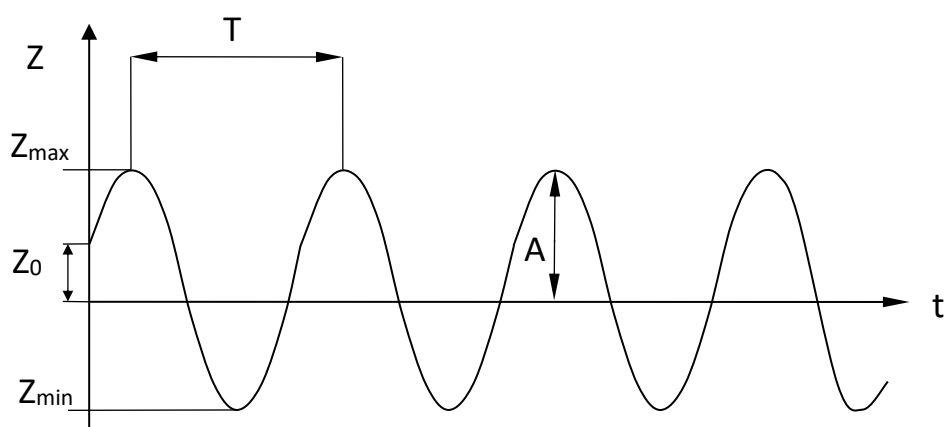


Рис. 1.1. Графік коливань механічної системи:

T – період коливань, с; A – амплітуда коливань, м;
 Z – переміщення, м; Z_0 – початкове переміщення, м; t – час, с

Положення або стан системи, що коливається, визначається узагальненою координатою (переміщення a , кут φ , тиск p , електрична напруга $u_{ел}$, час t , швидкість v). У теорії коливань досліджуються її зміни Z у часі t : $Z = z(t)$, при цьому особлива увага приділяється процесам, при яких ця зміна є періодичною, тобто

$$Z(t) = z(t + T), \quad (1.1)$$

де T – період коливань, с.

Період – це час, за який здійснюється один повний цикл коливального процесу.

Величина, що є зворотною періоду коливань T , називається *лінійною частотою коливань* і показує кількість здійснених коливань за одиницю часу, наприклад за 1 с.

$$\nu = 1/T, 1/\text{с} = \text{Гц}. \quad (1.2)$$

Наприклад, якщо в коливальній системі частота коливань $\nu = 6$ Гц, відбувається 6 повних коливань за 1 с.

Також у розрахунковій практиці часто використовують колову частоту ω , а саме кількість коливань за 2π с:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T, \text{ рад/с}. \quad (1.3)$$

Окрім T , ν , ω , коливання характеризуються також амплітудою A , що складає $1/2$ загального розмаху коливання (тобто виражає зміну узагальнених координат Z за T). Якщо Z_{\max} – найбільше, а Z_{\min} – найменше значення Z протягом періоду, то

$$A = 1/2 (Z_{\max} - Z_{\min}). \quad (1.4)$$

При періодичних коливаннях значення Z коливається близько середнього значення X_0 . Середнє значення може бути або задане або визначене як

$$Z_0 = 1/2(Z_{\max} - Z_{\min}).$$

При симетричних коливаннях це значення водночас відповідає стану спокою або положенню рівноваги.

Якщо $Z(t)$ задовольняє умову періодичності, тобто вираз (1.1) з достатнім наближенням, то розуміється майже періодичний процес коливань, вважаючи, що

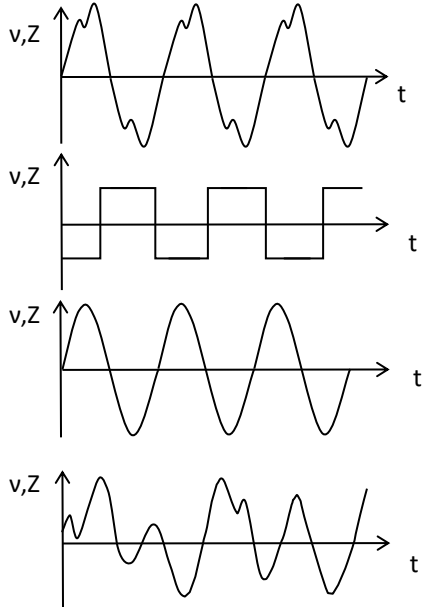
$$|Z(t) - z(t + T)| < \varepsilon, \quad (1.5)$$

де ε – раніше задана мала величина.

Проведемо класифікацію коливань за різними ознаками і результати зведемо до табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Класифікація коливань за різними ознаками

Ознака	Вид коливань	Пояснювальні відомості
1	2	3
Характер фізичних процесів	1. Механічні. 2. Електромагнітні. 3. Електромеханічні. 4. Світлові. 5. Звукові	Коливання різної фізичної природи описуються однаковими характеристиками і рівняннями, а отже до їх вивчення здійснюється єдиний підхід
Характер залежності від часу $f(t)$	1. Періодичні (коливання, що характеризуються такими функціями, що при будь-якому значенні часу t $f(t+T)=f(t)$. 2. Гармонійні (окремий випадок періодичних коливань). 3. Неперіодичні (якщо $f(t+T) \neq f(t)$)	 <p>The figure contains four separate coordinate systems, each with a vertical axis labeled 'v,z' and a horizontal axis labeled 't'. 1. The first graph shows a periodic, non-sinusoidal wave with multiple peaks and troughs. 2. The second graph shows a square wave, alternating between positive and negative constant values. 3. The third graph shows a simple sinusoidal wave. 4. The fourth graph shows a periodic wave with a complex, irregular shape.</p>
Спосіб збудження (породження процесу)	1. Вільні або власні 2. Вимушені	Відбуваються за рахунок початкової передачі енергії при послідовній відсутності зовнішніх впливів на коливальну систему Відбуваються при періодичній зовнішній дії

1	2	3
	3. Параметричні	Відбуваються при періодичній зміні за рахунок зовнішньої дії деякого параметра коливальної системи
	4. Автоколивання	Незагасальні коливання, що виникають і підтримуються в дисипативній* системі за рахунок const зовнішнього джерела енергії, причому властивості цих коливань визначаються самою системою

Примітка. *Від лат. *dissipatio* – розсіювання. Дисипативні механічні системи, повна енергія яких (сума кінетичної та потенціальної енергій) при русі убуває переходячи в інші види енергій, наприклад у теплову, тобто відбувається дисипація енергії. Наприклад, тіло, що рухається по поверхні іншого тіла за наявності тертя або рух тіла у водному середовищі.

З усіх видів коливань важливо виділити саме гармонійні коливання, оскільки всі коливання, що зустрічаються в природі й техніці, близькі до гармонійних коливань, а також різні періодичні процеси (наприклад будь-які повторення через однакові проміжки часу). Їх можна подати як накладання гармонійних коливань, які описуються рівняннями типу

$$Z = A \cos (\omega_0 t + \varphi) \quad (1.6)$$

або

$$Z = A \sin (\omega_0 t + \varphi),$$

де A – амплітуда коливань, м;

ω_0 – колова (циклічна) частота, рад/с;

φ – початкова фаза¹ коливань, рад;

$(\omega_0 t + \varphi)$ – фаза коливань у момент часу t , рад;

Z – миттєве значення коливальної величини, м.

¹ Від грец. «поява». Це стан коливально процесу в окремий момент часу.

З виразу (1.6) при $t = 0$; $Z = A \cos \varphi$; $Z_{\max} = A$, оскільки зміна $\cos \varphi$ як функції знаходиться в межах $[-1;1]$, при цьому $Z = [-A;A]$; T – період або проміжок часу t , протягом якого фаза коливань отримує приріст 2π , тобто $\omega_0(t + T) + \varphi = (\omega_0 t + T) + 2\pi$, звідки $T=2\pi/\omega_0$ (або T – тривалість одного повного коливання, с).

1.1.2. Коливальні системи

Коливальні системи – такі системи, у яких у результаті порушення стану рівноваги можуть збуджуватися власні коливання. Коливальні системи бувають:

- 1) *консервативними* (без втрат енергії в ідеальному випадку, що в реальності неможливе);
- 2) *дисипативними* (загасальні внаслідок енергетичних втрат, наприклад маятник і замкнені коливальні контури);
- 3) *активними* (найбільш важливі з них автоколивання, втрати енергії в яких поповнюються за рахунок джерела енергії, наприклад генератори електричних коливань) та ін.

Коливальні системи розрізняють також за кількістю ступенів вільності. У механічних системах (коливальних системах) як основні елементи застосовують тверді тіла, сполучені жорсткими й пружними складовими або спеціальними механізмами: якщо навіть вільний рух твердих тіл обмежується зовнішніми зв'язками (тобто тими, що не входять до системи, напрямними або стримувальними властивостями), то все це в сукупності носить назву *зв'язків*, що накладаються на коливальну систему.

Зв'язки бувають:

- *внутрішніми* (усередині пристроїв системи);
- *зовнішніми* (що не входять до системи).

Наприклад, коливальними механічними системами є автомобілі та вагони у складі поїзда як транспортні засоби, що переміщуються по авто- і залізничному полотну.

Розглянемо прості схеми коливальних систем (рис. 1.2 та 1.3).

Конденсатор 2 утримує й накопичує заряд, який перенаправляється в котушку 3 через дроти 1, у результаті цього

виникає активний опір, обумовлений загасанням коливань, як і реальний коливальний контур у цій системі.

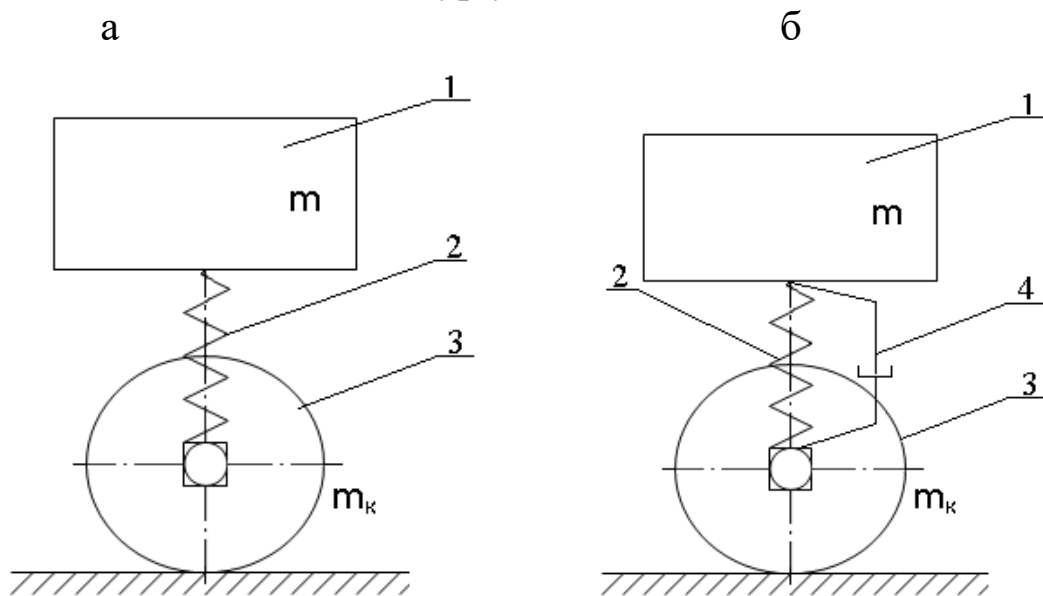


Рис. 1.2. Схеми коливальних систем з одним ступенем вільності:
 а – одновісна модель вагона з постійними зв'язками;
 б – одновісна модель вагона з пружними зв'язками та гідравлічними демпферами (гасильниками коливань); 1 – кузов;
 2 – пружний зв'язок (підвішування); 3 – необресорений елемент; 4 – в'язкий зв'язок (гідравлічний демпфер); m – маса кузова; m_k – маса колеса

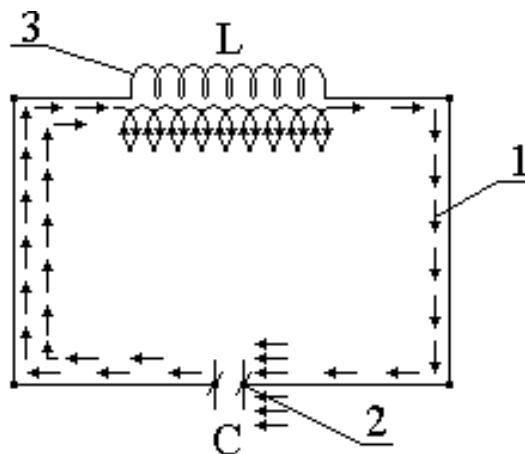


Рис. 1.3. Коливальний контур замкненого електричного кола:
 1 – електричний контур; 2 – конденсатор ємністю C , Ф;
 3 – котушка індуктивністю L , Тл.

1.2. Класифікація сил, що діють на коливальні системи

1.2.1. Позиційні сили

Зовнішні сили, що діють на механічну систему, яка складається з декількох тіл і безлічі точок, а також внутрішні реакції зв'язків різні за своєю природою та роллю, яку вони відіграють у коливальному русі.

Механічна система – безліч матеріальних точок, об'єднаних наявністю механічних зв'язків між собою.

Матеріальна точка – точка, маса якої відмінна від нуля.

Опишемо властивості різних типів сил, стосовно системи з одним ступенем вільності. У свою чергу *ступені вільності* (у механіці) – незалежні між собою можливі переміщення механічної системи. Кількість ступенів вільності залежить від кількості матеріальних точок, утворюючих систему і характеру накладених на систему механічних зв'язків. Так, відомо, що вільне тверде тіло має шість ступенів вільності: три поступальних (уздовж трьох осей декартової системи координат) і три обертальних (навколо цих осей).

Позиційні сили $F=F^0(x)$ – такі сили, які визначають миттєву конфігурацію системи, тобто її відхилення від положення рівноваги. Іншими словами, *позиційні сили* – сили, що залежать від координат системи.

Узагальнені координати – незалежні між собою параметри, які позначаються $q_i \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$, де $n=(3N-m)$, N – кількість точок системи, m – кількість голономних зв'язків, тобто обмежуючих вибір можливих положень системи. Кількість незалежних координат n дорівнює кількості ступенів вільності механічної системи, що однозначно визначають її положення в просторі.

Зв'язками називають обмеження, що ускладнюють вільний рух системи, які створюються та здійснюються такими самими або іншими матеріальними тілами.

Якщо F^0 та x різних знаків, то F^0 – відновлювальна сила системи, тоді

$$F = -F^0(x). \quad (1.7)$$

Наприклад, цьому повністю відповідає сила пружності, обумовлена деформацією зовнішніх або внутрішніх зв'язків (рис. 1.4). За законом Роберта Гука (1678 р.),

$$F^0 = -c \cdot x, \quad (1.8)$$

де c – узагальнений коефіцієнт жорсткості або пружності, Н/м;
 x – подовження (деформація) тіла.

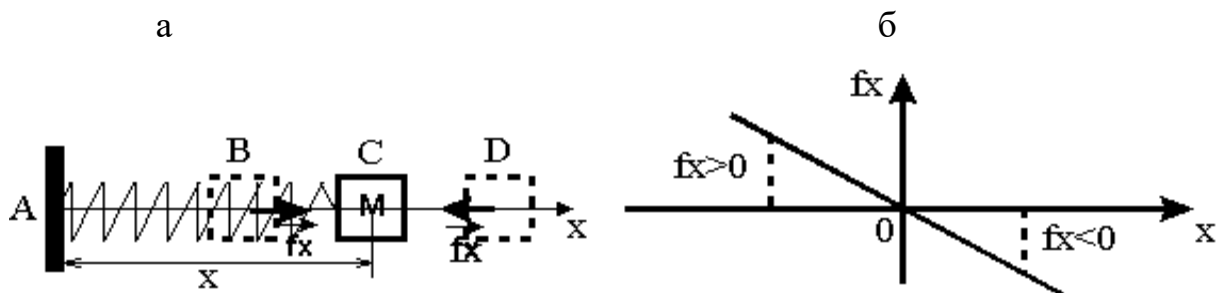


Рис. 1.4. Ілюстрація закону Гука

Розглянемо приклад, що ілюструє фізичну сутність закону Гука. Нехай вісь симетрії циліндричної пружини збігається з прямою AX (рис. 1.4, а). Один кінець пружини закріплений в опорі в точці А, а другий вільний, і до нього прикріплене тіло М. Коли пружина недеформована, її вільний кінець знаходиться в точці С. Цю точку вважатимемо початком відліку координати x , що визначає положення вільного кінця пружини.

Розтягнемо пружину так, щоб її вільний кінець знаходився в точці D, координата якої $x > 0$. У цьому положенні пружина діє на тіло М пружною силою

$$F^0 = -c \cdot x < 0. \quad (1.9)$$

Стиснемо тепер пружину так, щоб її вільний кінець знаходився в точці В, координата якої $x < 0$. У цьому положенні пружина діє на тіло М пружною силою

$$F^0 = -c \cdot x > 0. \quad (1.10)$$

З рисунка видно, що проєкція сили пружності пружини на вісь AX завжди має знак, протилежний знаку координати x , оскільки сила пружності направлена завжди до положення рівноваги C . На рис. 1.4, б зображено графік закону Гука. На осі абсцис відкладають значення подовження пружини x , а на осі ординат – значення сили пружності. Залежність F^0 від x лінійна, тому графік є прямою, що проходить через початок координат.

Відновлювальна сила – сила такої механічної дії на матеріальну точку, тіло або систему, при якому відновлюється положення її рівноваги.

Наприклад, рис. 1.5, а – Архімедова сила плавучості, яка для тіла, зануреного у воду, пропорційна глибині занурення h .

Також відновлювальна сила обумовлена дією вантажу, присутнього в механічних маятниках (рис. 1.5, б), де G при малих відхиленнях маятника пропорційне куту відхилення ϕ .



Рис. 1.5. Приклади дії відновлювальних сил

Часто відновлювальна сила F^0 має змішаний характер, наприклад при одночасній дії сил тяжіння і пружності пружин.

Система, для якої силова характеристика є прямою в координатах x, F , називається *лінійною* (рис. 1.6).

У практиці часто зустрічаються механічні системи, для яких зв'язок узагальненої координати з узагальненою силою не виражається лінійною залежністю $F(x)$ (рис. 1.6, б).

Нелінійні механічні системи – такі системи, властивості яких неможливо описати одним коефіцієнтом жорсткості. Отже, графіки силових характеристик цих систем або лінійні, або частково-лінійні.

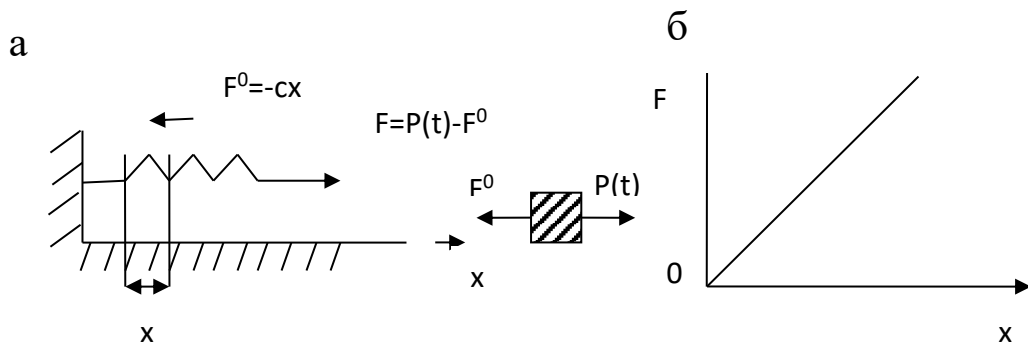


Рис. 1.6. Лінійна система: а – дія сили F на пружину – зовнішня сила, що прикладається до системи; б – силова характеристика системи (F прямо пропорційна x)

Наведемо декілька прикладів нелінійних систем, а також їхні силові характеристики (рис. 1.7). При цьому прийнято розрізняти жорсткі (із зростаючою формою) і м'які (з тією, що убуває) нелінійні характеристики (рис. 1.8).

Розглянемо кожен з наведених на рис. 1.7, а–д випадків:

а) поступальний рух тіла обмежено вертикальним пружним зв'язком із достатньою горизонтальною жорсткістю;

б) відновлювальний ефект у системі від сили F досягається за допомогою двох пружних елементів, розташованих під кутом α і опорної площини;

в) опора A системи, яка передає момент M , що обертає, через пружні елементи заввишки h_1 і h_2 на опорну площину. При збільшенні навантаження M послідовно включається в роботу елемент з h_2 , тобто підресорювання в цьому випадку – білінійне (лат. *bi*-ва), тобто що складається з двох частин, або подвоєне;

г) поперечні переміщення об'єкта в обидва боки обмежені однаковими горизонтальними пружними елементами, при контакті з якими відбувається відновлення і повернення об'єкта в первинне положення;

д) передача сили F на проміжний елемент призводить до послідовного включення в роботу однакових проміжно-розташованих пружних елементів з деяким запізненням у

результаті додаткової деформації поперечних розділювальних складових.

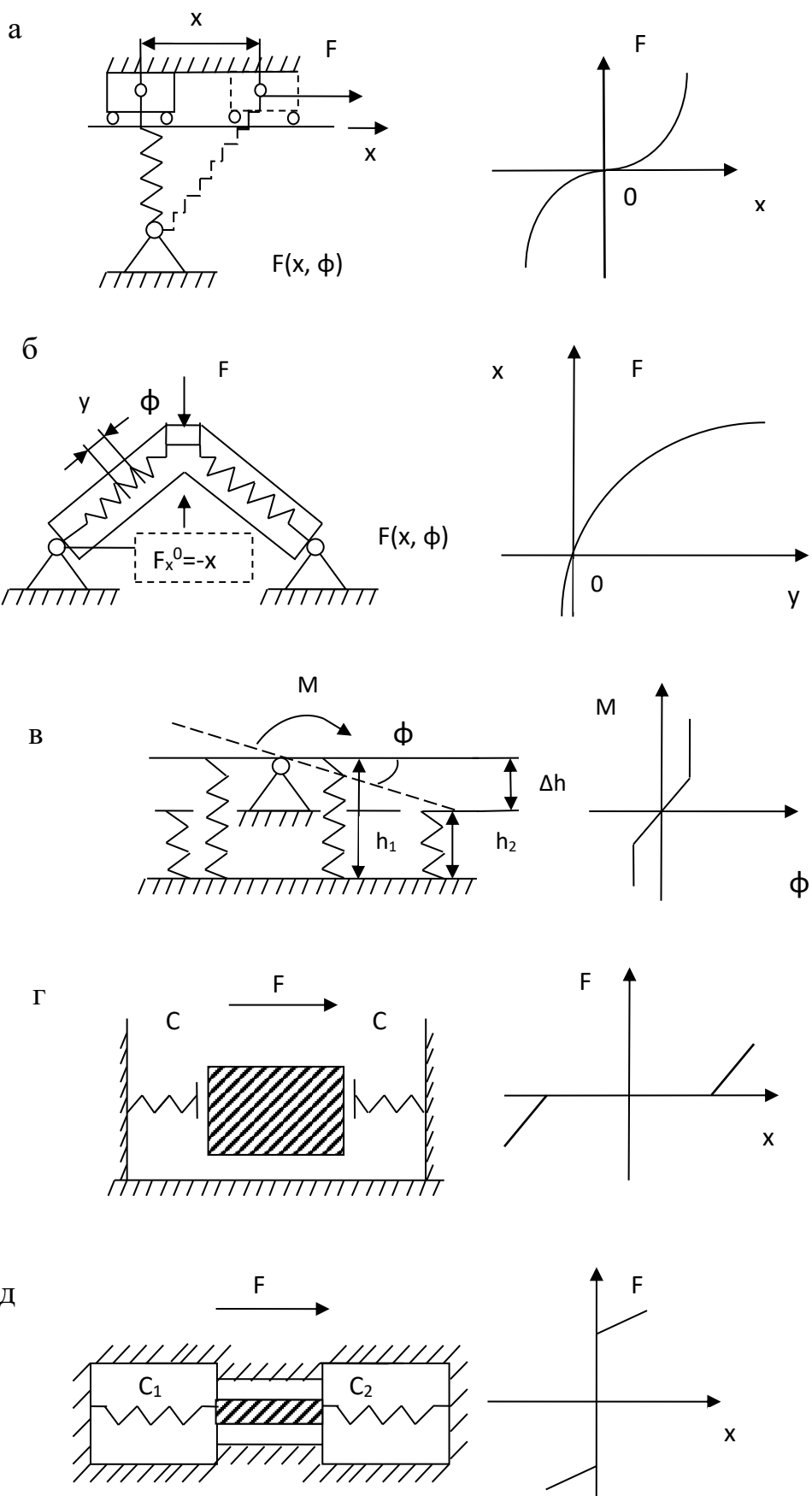


Рис. 1.7. Приклади нелінійних механічних систем і їхніх силових характеристик

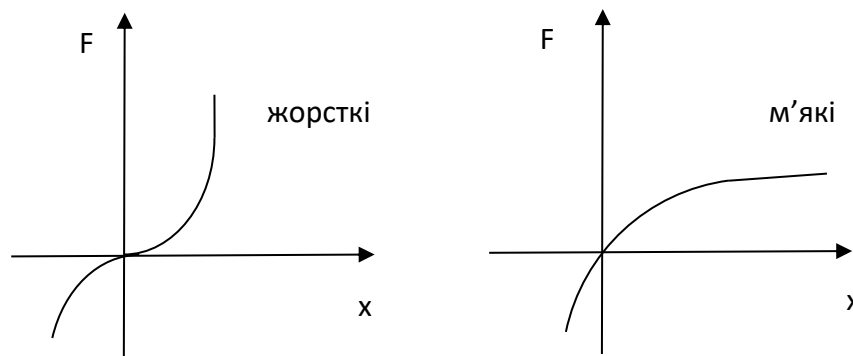


Рис. 1.8. Форми силових характеристик

Позиційні сили в деяких лінійних механічних системах з декількома ступенями вільності запишемо формулами

$$\begin{aligned} F_1^0 &= -c_{11}q_1 - c_{12}q_2 - \dots - c_{1n}q_n; \\ F_2^0 &= -c_{21}q_1 - c_{22}q_2 - \dots - c_{2n}q_n; \\ F_n^0 &= -c_{n1}q_1 - c_{n2}q_2 - \dots - c_{nn}q_n, \end{aligned} \quad (1.11)$$

де q , F_t^0 – узагальнені сили і координати;
 n – кількість ступенів вільності.

Або в іншому вигляді

$$\begin{aligned} F_t^0 &= -\sum_{k=1}^n c_{ik} q_k \quad (i = 1, 2, \dots, n); \\ F_t^0 &= -\sum_{k=1}^n c_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (1.12)$$

де q_k і F^0 – вектори узагальнених координат та узагальнених сил;
 c_{ik} – коефіцієнти жорсткості елементів системи.

1.2.2. Дисипативні сили

Для опису властивостей системи введемо характеристику, що відображує її пружно-в'язкі властивості і називається *коефіцієнтом в'язкого опору* демпфера. *В'язкість* (абсолютна в'язкість, або динамічна в'язкість) – це властивість рідин і газів, що характеризує їхній опір ковзанню або зрушенню та визначається за формулою

$$\beta = \frac{P}{V}, \left[\frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}} \right], \quad (1.13)$$

де P – сила, Н;
 V – швидкість, м/с.

Окрім відновлювальних сил у системі розвиваються сили опору R^0 , пов'язані зі швидкістю точок системи. Їхня необернена негативна робота здійснює дисипацію (розсіювання) механічної енергії. Наприклад, це сили тертя $F_{тр}$ в опорах та у зчленованих системах; сили опору середовища (рідкого і газоподібного), у яких відбуваються коливання; внутрішні сили тертя $F_{тр}$ в матеріалі системи (сили, що виникають при деформації спеціальних поглиначів енергії – демпферів (нім. *dämpfen* – зменшувати, заглушати)).

Розглянемо простий гідравлічний демпфер горизонтальної дії руху поршня 1 уздовж циліндра 2 (рис. 1.9, а).

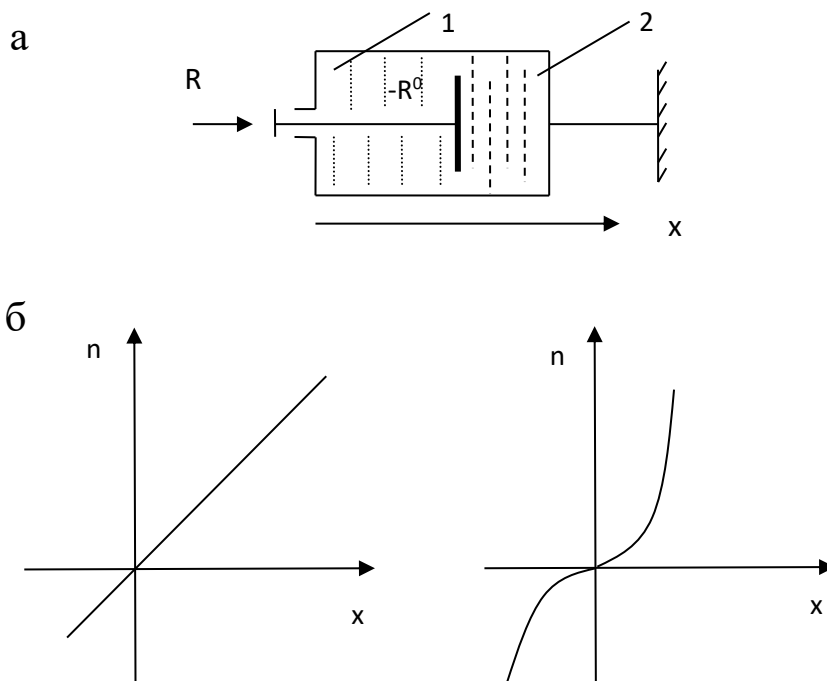


Рис. 1.9. Гідравлічний демпфер: а – принцип дії; б – лінійна й нелінійна силові характеристики

У першому випадку опір демпфера пропорційний швидкості стиску рідини всередині циліндра, тому силова характеристика лінійна – пряма. У другому – опір демпфера залежить від швидкості та інших факторів, що впливають на її величину, тому графік силової характеристики нелінійний – крива.

Опір демпфера пропорційний швидкості і може бути записаний формулою

$$R = -R^0(\dot{x}), \quad (1.14)$$

де R – зовнішня сила, прикладена до поршня, Н;

\dot{x} – узагальнена швидкість, м/с;

R^0 – узагальнена сила лінійного опору або вектор сил опору, Н.

У механічних системах з декількома ступенями вільності вектор сил опору записується у вигляді

$$R^0 = -B \cdot \dot{x}, \quad (1.15)$$

де x – вектор узагальнених координат;

B – матриця коефіцієнтів опору.

1.2.3. Збурювальні сили

Розглянемо роботу неврівноваженого ротора (сердечника) в електричній машині (рис. 1.10). Як відомо, він здійснює обертальний рух з великою кількістю обертів n , об/хв.

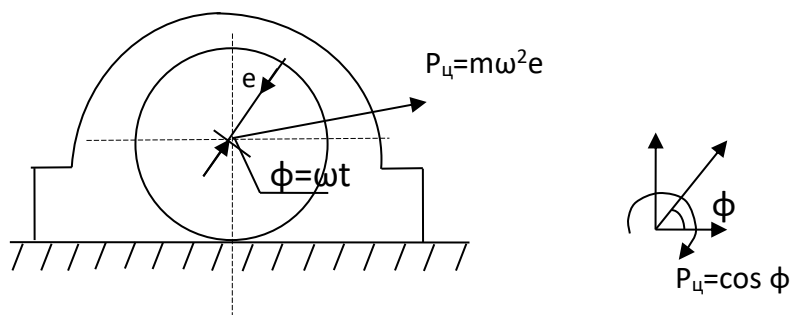


Рис. 1.10. Електрична машина на фундаменті з дисбалансом у роторі

$$P_{ц} = m \cdot \omega^2 \cdot e, \quad (1.16)$$

де e – ексцентриситет (зміщення) дисбалансу, м;

m – маса, кг;

ω – кутова швидкість обертання ротора електродвигуна і карданного зв'язку, рад/с;

e – кутове переміщення, рад.

$P_{ц} = m\omega^2 e$ – відцентрова сила, яка є причиною створення в системі вимушених коливань. Вона практично постійна, але її напрям з горизонтальною і вертикальною складовими, а також момент відносно центра опори змінні.

Найбільш розповсюджений закон зміни збурювальних сил у часі – гармонійний (табл. 1.1). Він діє в машинах з рівномірно обертальним неврівноваженим ротором, наприклад накладній вібраційній машині типу «УРАЛЦНИИ-МПС» для очищення вагонів від залишків насипних вантажів (рис. 1.11, 1.12). Вона встановлюється на верхній обв'язувальний пояс і передає на вагон періодичні вимушені коливання. Проявом збурювальних сил також може бути подана в роботах [4–7] дія нерівності рейок відносно колісної пари.



Рис. 1.11. Вібраційна машина «УРАЛЦНИИ-МПС» для очищення вантажних вагонів від залишків насипних вантажів:

а – зовнішній вигляд підготовлених до роботи вібраційних машин; б – застосування вібраційної машини при дорозвантаженні універсального напіввагона за допомогою козлового крана

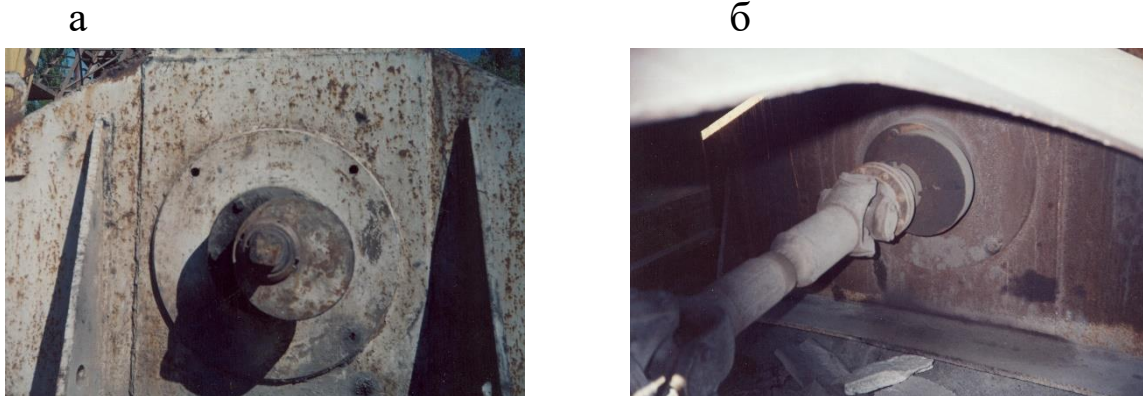


Рис. 1.12. Вібраційна машина «УРАЛЦННН-МПС»:
 а – елемент конструкції; б – зв'язок ротора привода
 з дисбалансом через карданний вал

За роботами [23–25], при роботі з насипними вантажами вібраційні машини передають вимушені коливання на кузов вагона. Визначено, що основним параметром ефективності використання машин є прискорення вимушених коливань, величини яких обов'язково регулюються за умови збереження вагонів. На продуктивність машини в основному впливають такі динамічні характеристики:

- збурювальна відцентрова сила;
- амплітуда і частота збурювальної сили для запобігання явища резонансу;
- маса машини за умови запобігання ударного навантаження вагона.

Вібраційна машина складається з корпусу, у стінки якого вмонтовано два центробіжних віброзбуджувачі кругового принципу, що приводяться до дії від карданної передачі і електродвигуна (рис. 1.12). Підшипники змонтовані з можливістю створення збурювального впливу саме на верхній обв'язувальний пояс, наприклад напіввагона. Електродвигун встановлюється в корпусі на рамі, ізольований від нього пружними опорами. У нижній частині передбачені напрямні для покращення стійкості на кузові. Основними технічними характеристиками відносно роботи з вагоном є такі:

- | | |
|-----------------------------------|--------|
| - частота збурювальної сили, Гц | 24-25; |
| - амплітуда збурювальної сили, кН | 90; |
| - маса, кг | 5000; |

- довжина опорних елементів, мм 3000;
- жорсткість опорних елементів, МН/м 350;
- допустимий прогин опорного елемента, м/мм 1;
- максимальний час вібродії, хв. 7.

Після відкриття кришок люків напіввагона на кут $35-37^{\circ}$ здійснюється процес звичайного вивантаження насипного вантажу з кузова (рис. 1.13).



Рис. 1.13. Гравітаційне розвантаження напіввагона

Після розвантаження основної частини вантажу в дію вступає вібраційна машина, заздалегідь навішана на гак крана за допомогою рухомої траверси, встановлюваної машиністом крана на верхню відкриту частину напіввагона. Після цього машина вмикається, здійснюється обертальний рух, у результаті чого створюються відцентрові збурювальні сили, і починається процес вимушених і власних коливань кузова вагона для видалення залишків вантажу з середини кузова.

Саме з початку доочищення і до вимкнення вібромашини спостерігається процес силового впливу на несучу конструкцію кузова, при цьому він зазнає дії вимушених коливань, обумовлених відцентровим зовнішнім збудженням.

Зривувальна відцентрова сила, прикладена до кузова на піввагона, змінюється під час доочищення за відомим тригонометричним законом

$$P_u = P_0 \sin pt, \quad (1.17)$$

де P_0 – початкова амплітуда збурювальної сили за початковими умовами коливального процесу.

Визначення максимальних переміщень точок кузова при впливі на напіввагон коливального процесу можливе шляхом побудови системи диференціальних рівнянь в узагальнених координатах [1–3]:

$$a\ddot{q} + cq = P_u(t), \quad (1.18)$$

де a – узагальнений коефіцієнт інерції, обумовлений масою системи з n ступенями вільності;

\ddot{q} – узагальнене прискорення системи «вібраційна машина – вагон»;

c – узагальнений коефіцієнт жорсткості системи «вібраційна машина – вагон»;

q – узагальнене переміщення;

$P_u(t)$ – узагальнена збурювальна сила.

Розв’язок рівняння (1.18) можна отримати у вигляді

$$q = A \cos vt + B \sin vt + \frac{x}{v^2 - p^2} \cos pt, \quad (1.19)$$

де v , p – відповідно, власна і вимушена частоти коливального процесу;

A , B , $\frac{x}{v^2 - p^2}$ – відповідно амплітуди власних і вимушених коливань.

З урахуванням частот власних і вимушених коливань вагона при доочищенні, амплітуд коливань, коефіцієнтів наростання амплітуд, а також динамічності надалі можливе визначення, динамічних напружень в елементах кузова вагона і оцінювання міцності за відомими залежностями теорії пружності і будівельної механіки.

Сили змішаного характеру розвиваються в складних механічних системах і розкладаються на суму зовнішніх, відновлювальних і дисипативних сил:

$$F^0(q) + R^0(\dot{q}) + P(t) = 0. \quad (1.20)$$

Розглянемо систему, зображену на рис. 1.14.

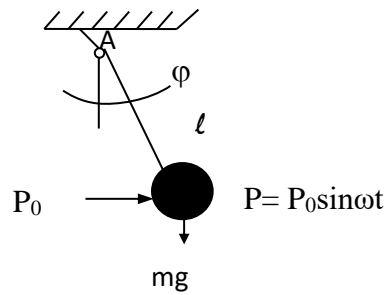


Рис. 1.14. Маятникова параметрична система

У момент відхилення маятника на вантаж діє не тільки сила тяжіння, а й зовнішня сила P , що викликає коливання системи. Тоді силовий момент відносно шарнірно-рухомої опори A маятника буде записаний як

$$M = -(mg + P_0 \sin \omega t) \cdot l \cdot \sin \varphi. \quad (1.21)$$

Момент M залежить від кута і часу, тобто $M(\varphi, t)$, але його особливість полягає в тому, що неможливо чітко виділити його відновлювальну $M_1(\varphi)$ і збурювальну частини $M_2(t)$.

1.3. Вільні коливання. Лінійні системи з одним ступенем вільності без непружного опору

Як приклади для дослідження даного явища розглянемо одномасові системи, що моделюють сприйняття повздовжніх і вертикальних сил. Аналогом у цьому випадку може служити робота автозчіпного пристрою (рис. 1.15) при розтягуванні (рис. 1.15, а) і кузова вантажного вагона на ресорах (рис. 1.15, б), а також їх подальше відновлення [5, 6]. Тут m – маса системи, кг; c – жорсткість пружних елементів, виконаних у вигляді витих циліндричних пружин, Н/м; $P_x(t)$ і $P_z(t)$ відповідно зовнішня збурювальна сила, прикладена в напрямі осей x і z ; $-cx$ і $-cz$ відповідно відновлювальна (пружна) сила амортизаторів поздовжньої та поперечної дії.

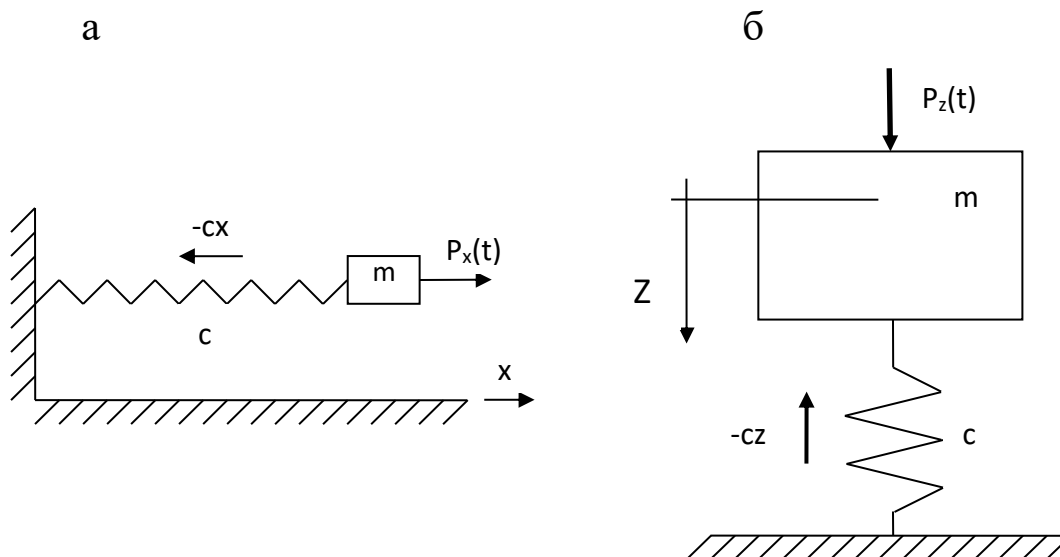


Рис. 1.15. Схеми одномасових систем з одним ступенем вільності без дисипації енергії: а – з урахуванням передачі поздовжніх сил; б – з урахуванням передачі вертикальних сил

Враховуємо, що збурювальна сила $P_i(t)$ відсутня, але вже здійснено порушення стану рівноваги. Як видно, тепер система буде залишена собі сама без повторних прикладань $P_i(t)$. Рухи, що при цьому виникли, вільні. Вони отримали назву *вільних* або *власних коливань* системи, що відбуваються самі по собі до повного їх зведення до нуля або *загасання*. На початку на систему накладено умови x_0, z_0 – початкове переміщення, v_0 – початкова швидкість.

Рівноважне положення таких систем характеризується початковими умовами

$$x(z) = x_0(z_0); v_{x(z)} = v_0 \text{ при } t=0.$$

Складемо рівняння руху таких систем:

$$m\ddot{x} = \sum x_i = P_x; m\ddot{z} = \sum z_i = P_z, \quad (1.22)$$

де P_x і P_z – відповідно відновлювальні сили (сили пружності пружин), у поздовжньому та вертикальному напрямках,

$$P_x = -cx; P_z = -cz. \quad (1.23)$$

Тоді очевидно, що

$$m\ddot{x} + cx = 0; m\ddot{z} + cz = 0 \quad . \quad (1.24)$$

Або після нескладних перетворень

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}x = 0; \quad \ddot{z} + \frac{c}{m}z = 0 \quad . \quad (1.25)$$

$$\ddot{x} + p^2x = 0; \quad \ddot{z} + \nu^2z = 0, \quad (1.26)$$

де p, ν – частоти вільних коливань системи, Гц².

Вираз (1.26) являє собою звичайні лінійні диференціальні рівняння другого порядку (однорідні з постійними коефіцієнтами при незалежних x і z).

Розв'язок цих рівнянь знаходять у вигляді (з урахуванням довільних постійних c_1 і c_2)

$$(c_1 = x_0(z_0) \text{ й } c_2 = \frac{\dot{x}_0}{\nu} \left(\frac{\dot{z}_0}{\nu} \right)): \quad ; \quad (1.27)$$

$$x = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt, \quad z = z_0 \cos \nu t + \frac{\dot{z}_0}{\nu} \sin \nu t. \quad (1.28)$$

Вирази (1.28) – це відповідні рівняння руху систем, розглянутих на рис. 1.15.

В іншій, еквівалентній, формі

$$x = A \sin(pt + \alpha), \quad z = B \sin(\nu t + \beta), \quad (1.29)$$

де A і B – амплітуди³ коливань, м.

α і β – початкова фаза або величина положення системи в початковий момент часу t .

Амплітуда коливального процесу

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{p}\right)^2}; \quad B = \sqrt{z_0^2 + \left(\frac{\dot{z}_0}{\nu}\right)^2}; \quad (1.30)$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{px_0}{\dot{x}_0}\right), \quad \beta = \arctg\left(\frac{\nu z_0}{\dot{z}_0}\right), \quad (1.31)$$

² 1 Гц (Герц (Hertz), на честь нім. фізика Ганса Рудольфа Герца) – частота періодичного процесу, при якій за час $t=1$ с відбувається один цикл процесу.

³ Амплітуда (від лат. Amplitudo – величина) – найбільше відхилення від нульового значення величини, що коливається.

де \dot{x}_0 і \dot{z}_0 – перші похідні від переміщення за часом або швидкості руху, м/с.

Окрім власних частот коливань даних систем p і ν , залежних лише від їхніх фізичних властивостей, коливальний рух характеризується лінійною і кутовою (коловою) частотами коливань, тобто кількістю коливань, що здійснюються системою за одиницю часу. У даному випадку за 2π с.

$$p^* = \frac{1}{T}, \nu^* = \frac{1}{T}; \quad (1.32)$$

$$\omega_1 \omega = 2\pi p^* = \frac{2\pi}{T}; \quad \omega_2 = 2\pi \nu^* = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.33)$$

Час, за який здійснюється одне повне коливання, – період, с.

Власна або циклічна частота і період вільних коливань точок залежать лише від маси та жорсткості, що характеризує відновлювальну силу і не залежать від початкових умов. Період T_i збільшується при збільшенні маси m_i і зменшується при збільшенні c_i ; у свою чергу частота p, ν зменшується при збільшенні маси m_i точки і збільшується при зростанні c_i .

Графік, що відображує характер руху точок системи при вільних коливаннях систем поданий на рис. 1.16. Це гармонійні коливання з вказаними частотами, кратні основній частоті першої гармоніки (характеру хвилі).

Для загального випадку диференціальне рівняння коливального руху лінійної системи з одним ступенем вільності без непружного опору (тертя у зв'язках) запишемо в такій *узагальненій* формі:

$$a\ddot{q} = -cq; \quad a\ddot{q} + cq = 0, \quad (1.34)$$

де q – узагальнена координата;

a – узагальнений коефіцієнт інерції;

c – узагальнений коефіцієнт жорсткості.

Тоді власна частота за аналогією з визначенням у виразі (1.25) запишеться як

$$P = \sqrt{\frac{c}{a}}. \quad (1.35)$$

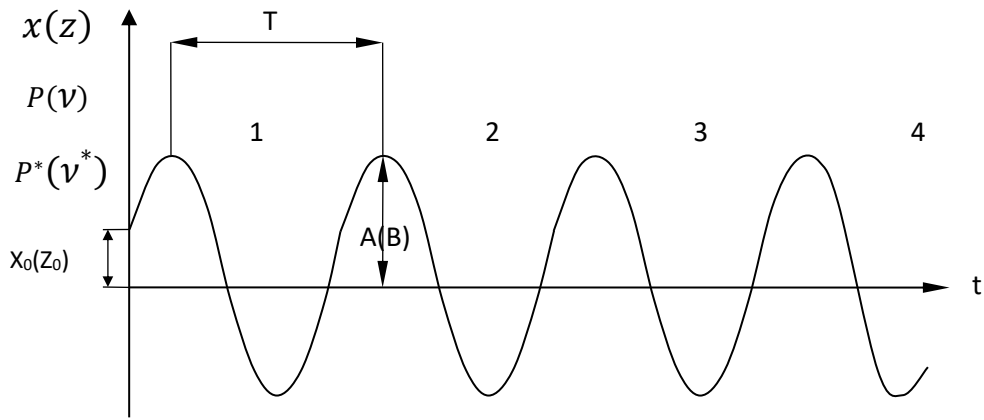


Рис. 1.16. Графік вільних коливань точок системи:
1, 2, 3, 4 – нумерація хвиль процесу

Оскільки ресорне підвішування вагонів утворене декількома пружинами, а також їх конструкційним поєднанням [16, 21, 22], то доцільно розглянути такі приклади їх розташувань, як на рис. 1.17.

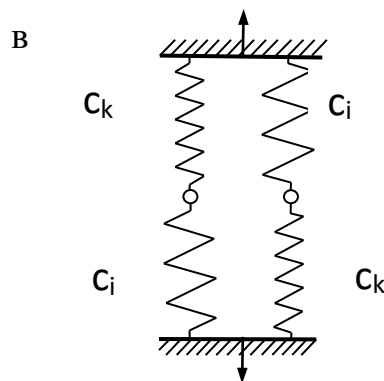
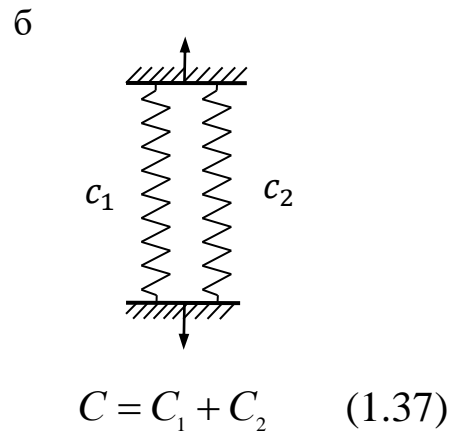
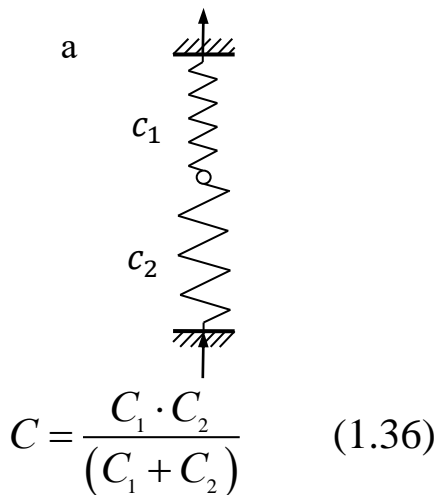


Рис. 1.17. Комбінації конструкційних рішень розташування пружин у підвішуванні: а – послідовне розташування; б – паралельне розташування; в – система змішаного типу

Визначимо коефіцієнт жорсткості для комбінованої системи:

$$C_1 = \frac{C_i \cdot C_k}{(C_i + C_k)}; \quad (1.38)$$

$$C_2 = \frac{C_k \cdot C_i}{(C_k + C_i)}; \quad (1.39)$$

$$C_1 + C_2 = \frac{C_i \cdot C_k}{(C_i + C_k)} + \frac{C_k \cdot C_i}{(C_k + C_i)};$$

$$C_1 + C_2 = 2 \left[\frac{C_i \cdot C_k}{(C_i + C_k)} \right];$$

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{(C_1 + C_2)};$$

$$C = \frac{\left(\frac{C_i \cdot C_k}{(C_i + C_k)} \cdot \frac{C_i \cdot C_k}{(C_i + C_k)} \right)}{\left(\frac{2C_i \cdot C_k}{(C_i + C_k)} \right)}.$$

Врешті-решт маємо

$$C = \frac{C_i \cdot C_k}{2 \cdot (C_i + C_k)}. \quad (1.40)$$

Для пружного елемента, навантаженого масою m (рис. 1.17, б), рівняння рівноваги запишеться у вигляді

$$mg - cf_{cm} = 0; \quad cf_{cm} = mg, \quad (1.41)$$

де f_{cm} – статичний прогин пружини, м.

Тоді коефіцієнт жорсткості буде мати вигляд

$$c = \frac{mg}{f_{cm}} = \frac{p}{f_{cm}}, \quad (1.42)$$

тобто величина сили, що викликала одиничне переміщення, Н/м.

Величина, обернена жорсткості, – *гнучкість*.

$$\lambda = \frac{1}{c} = \frac{f_{cm}}{p}, \quad (1.43)$$

тобто величина переміщення, викликаного одиничною силою, Н/м.

Розділ 2

КОЛИВАННЯ ЛІНІЙНИХ МЕХАНІЧНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ ПРИ РІЗНИХ ВИДАХ РУХУ

2.1. Вільні коливання при в'язкому опорі (вплив опору на вільні коливання лінійних систем з одним ступенем вільності)

Осцилятором (від лат. Oscillo – качатися) – найпростішу коливальну систему – у механіці прийнято називати кожен фізичну систему, спроможну здійснювати коливання. Термін *осцилятор* можна застосовувати для кожної системи, якщо величини, які її характеризують, можуть періодично змінюватися зі зміною часу. Розглянемо особливості коливального руху звичайного лінійного осцилятора з урахуванням в'язкого опору в системі.

Фізична природа виникнення сил опору така. Розглянемо систему з коливаннями, викликаними одноразовим зовнішнім збуренням (рис. 2.1).

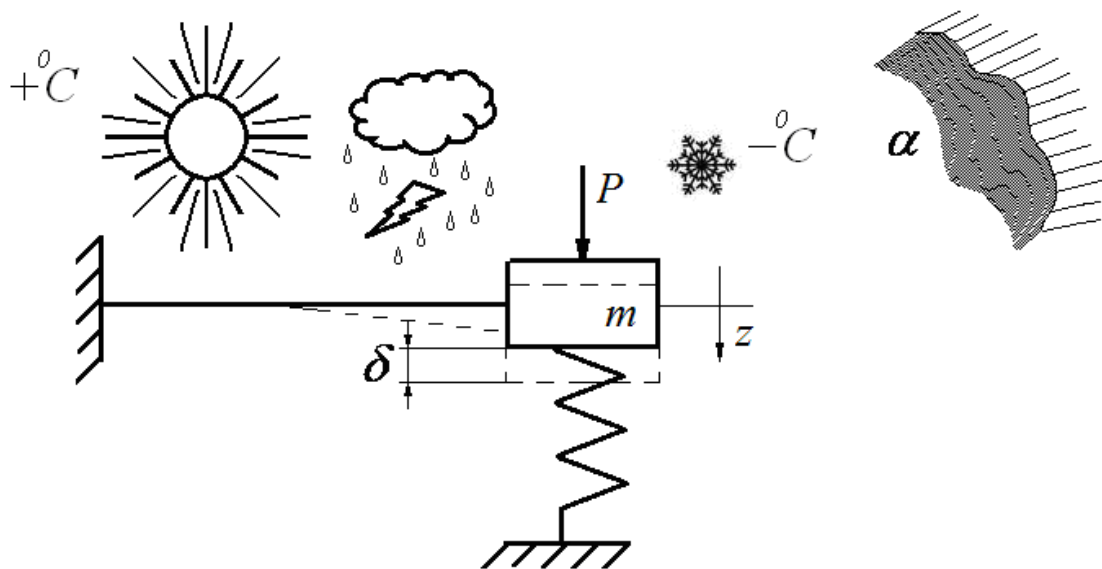


Рис. 2.1. Схема коливального руху системи

Після прикладення сили P виникають вільні коливання системи, які з часом загасають, причина загасання така: крім сил пружності $|cz|$, розвиваються дисипативні сили $F(t)$, тобто сили непружного опору, які розсіюють енергію коливальної системи,

виведеної зі стану рівноваги. Ці сили пов'язані з незбїжним тертям у кінематичних парах, тертям з середовищем α , а також внутрішнім тертям у матеріалі конструкції, яка коливається (на атомічному рівні кристалічних ґрат матеріалу). На здолання непружних опорів безперервно у зворотному напрямку витрачається робота, внаслідок чого повільно загасає загальний запас енергії та зменшуються розмахи коливань, амплітуда з протіканням часу, тобто $A \rightarrow 0$ (рис. 2.2).

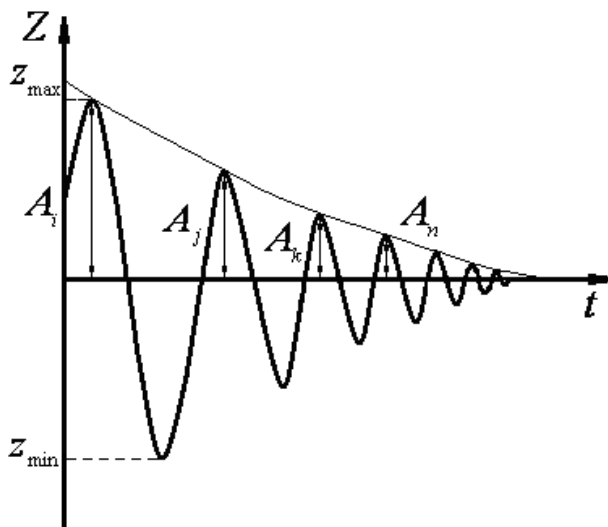


Рис. 2.2. Вільні коливання системи з характером загасання в часі

Якщо визначено, що опір прямопропорційний першому ступеню швидкості, то сила опору (зокрема тертя) запишеться як

$$R = -k\mathcal{V}, \quad (2.1)$$

де k – емпіричний коефіцієнт пропорційності, визначуваний дослідно.

Як приклад розглянемо роботу простого механічного осцилятора коливального контура (рис. 2.3).

Поршень призначений для створення демпфірування (наприклад пневморесори підвішування транспортного засобу). Сила демпфірування R буде визначатися як

$$R = -k(d\dot{z}). \quad (2.2)$$

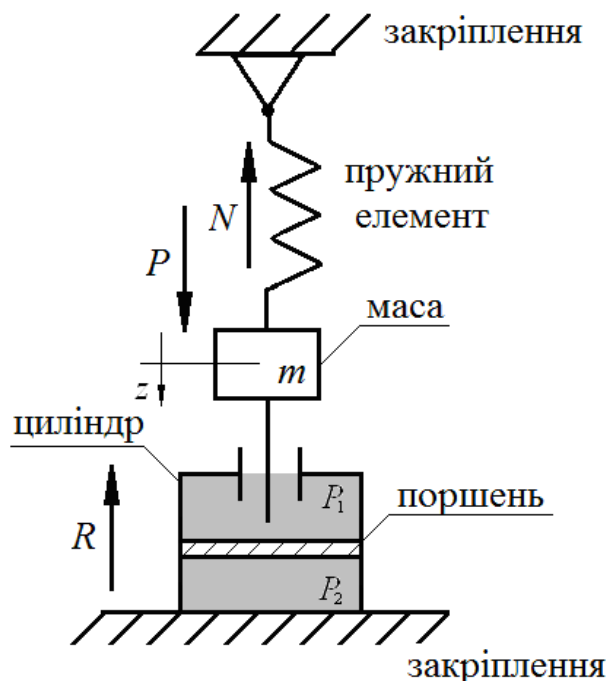


Рис. 2.3. Схема роботи механічного осцилятора

Сила демпфірування спрямована на гальмування руху. З урахуванням сили демпфірування R умова рівноваги набуде вигляду

$$F + R + N = 0 \quad (2.3)$$

або

$$m\ddot{z} + d\dot{z} + cz = 0. \quad (2.4)$$

На відміну від простої системи, позбавленої демпфірування (наприклад пружина ресорного підвішування (механічної частини візка)),

$$m\ddot{z} + cz = 0. \quad (2.5)$$

У кожному випадку демпфірувальний вплив є функцією швидкості, позначимо її через $g(z') = a$, сили опору $f(z) = \frac{cz}{m}$, (2.4) після ділення його членів на коефіцієнт інерції m рівняння руху осцилятора набуде вигляду

$$\ddot{z} + g(\dot{z}) + f(z) = 0 \quad (2.6)$$

При тісному зв'язку сил демпфірування та відновлювальних сил у рівнянні руху раціонально записати

$$\ddot{z} + f(z, \dot{z}) = 0. \quad (2.7)$$

Розуміється не тільки лінійне подання сил опору R , а і змішане, яке дозволяє вирішувати більш складні задачі у вигляді

$$R = -k\vartheta|\vartheta|^{n-1}, \quad (2.8)$$

де n – постійна ступеня, визначувана експериментально.

Наприклад, при $n = 1$, $R = -k\vartheta|\vartheta|^{n-1} = -k\vartheta \Rightarrow R \approx \vartheta$ і характеристика тертя – пряма (рис. 2.4, а); $n = 0$, $R = -k\vartheta|\vartheta|^{n-1} = -k\frac{\vartheta}{\vartheta} = -k$ – кулонове тертя і характеристика тертя – гіпербола (рис. 2.4, б); $n = 2$, $R = -k\vartheta|\vartheta|^{2-1} = -k\vartheta^2$ – квадратичний опір і характеристика тертя – парабола (рис. 2.4, в).

На рис. 2.4, г наведена комбінована характеристика сухого тертя (суцільна пряма) з уточненням (пунктирна крива), за законом Г. Амонтона – Ш. О. Кулона.

Для механічних систем із декількома ступенями вільності формулу (2.8) раціонально записати у матричному вигляді

$$R^0 = -B\dot{q};$$

$$R^0 = \begin{Bmatrix} R_1^0 \\ R_2^0 \\ R_n^0 \end{Bmatrix}; \quad \dot{q} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix}; \quad B = \begin{Bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_n \end{Bmatrix}, \quad (2.9)$$

де R^0 – вектор узагальнених сил опору;

q – вектор узагальнених швидкостей;

B – матриця коефіцієнтів опору.

При в'язкому терті в коливальній системі, обумовленому наявністю в ресорному підвішуванні в'язкого лінійного демпфера, сили непружного опору R природно залежать від швидкості, тобто в кінцевому рахунку від частоти процесу деформування.

Це говорить про суттєву залежність площі петлі гістерезису (від грец. – відставання, запізнення при змінні фізичної величини, що характеризує стан речовини) від швидкості руху (рис. 2.5).

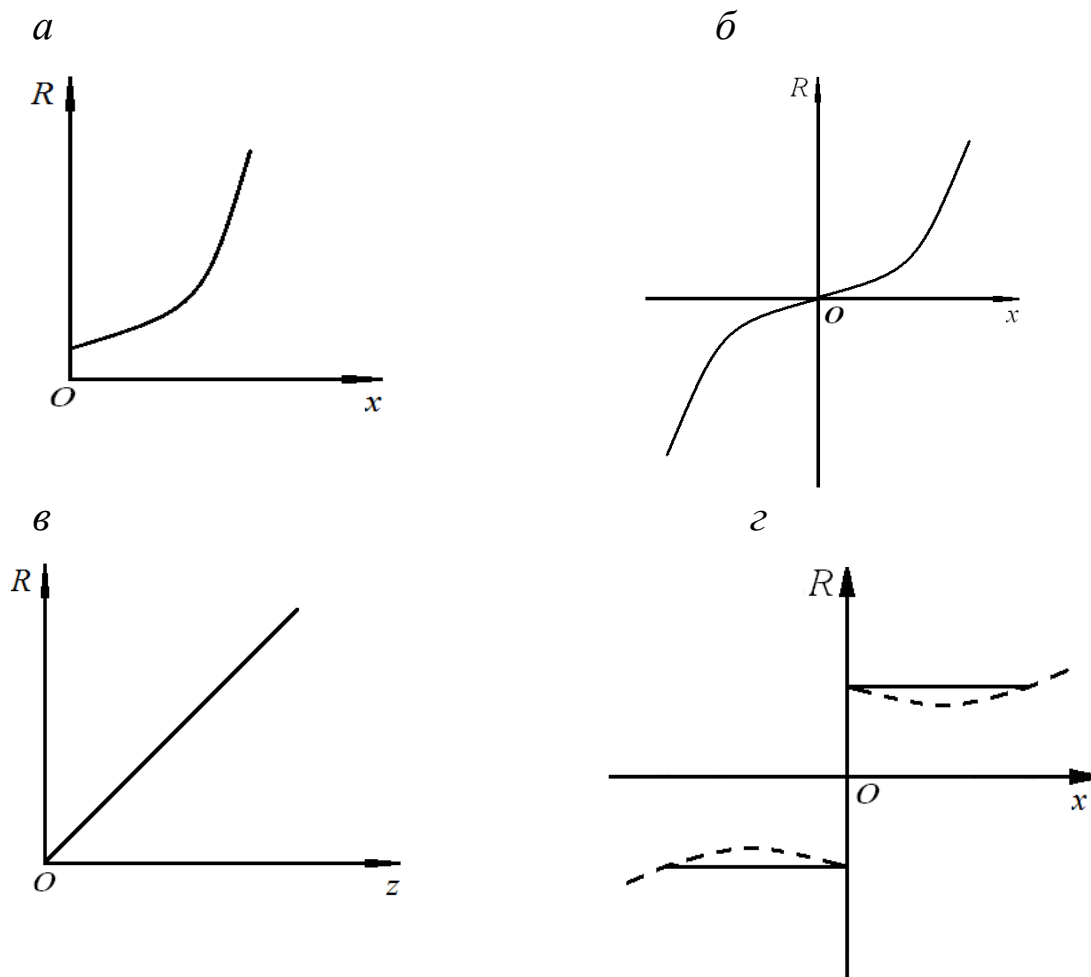


Рис. 2.4. Залежність сил демпфірування (дисипації) від переміщення точок системи

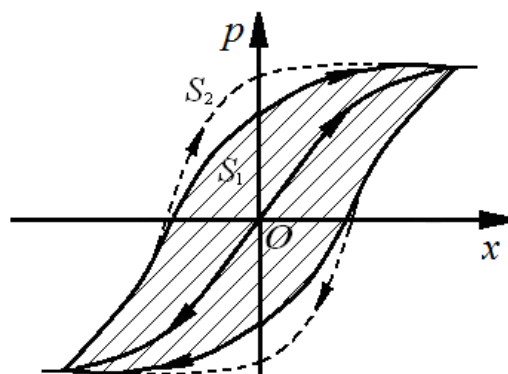


Рис. 2.5. Гілки та петлі гістерезису з різними характерами запізнення: S_1, S_2 – площі петель гістерезисних явищ

Петля Гістерезису – це зв’язок між напруженням σ та відносними деформаціями ε в матеріалах і безпосередньо в конструкціях підвішування, що описується криволінійними гілками особливостей циклів навантаження та деформації конструкції, як і самого матеріалу, структура якого віддалено навіть при існуванні малих амплітуд відхиляється від відомого закону Р. Гука

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (2.10)$$

де E – модуль пружності матеріалу конструкції (для сталей, що застосовуються у вагобудуванні, $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па).

Площу петлі гістерезису можна визначити за формулою М. М. Давіденкова

$$\psi = kA^{n+1}, \quad (2.11)$$

де k, n – const, які залежать від інтервалу і типу конструкції.

Те саме пов’язано і зі зв’язками поміж навантаженням P на ресорне підвішування ходової (екіпажної) частини вагона з внутрішнім тертям і відповідає переміщенню x . Причини гістерезисних явищ (рис. 2.5) криються також відносно механічних систем в опорах і нерухомих з’єднаннях (при застосуванні нарізних, зварних, болтових та ін.).

Розглянемо приклад системи з в’язким лінійним демпфером, якій властива пропорційність між силами зв’язку опору та швидкостями їх зміни (рис. 2.6).

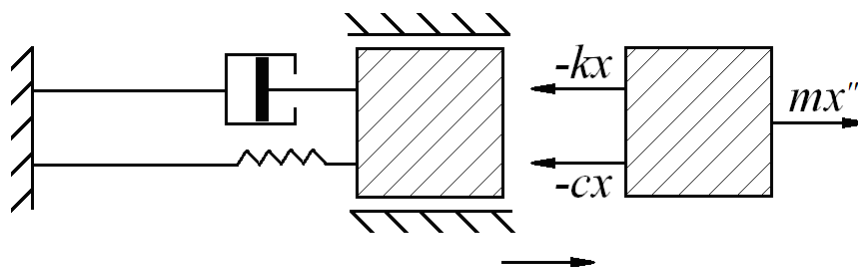


Рис. 2.6. Система з в’язким лінійним демпфером

Складемо диференціальних рівнянь руху системи:

$$m\ddot{x} + cx + k\dot{x} = 0 \quad \text{або} \quad m\ddot{x} = -cx - k\dot{x}, \quad (2.12)$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x + \frac{k}{m}\dot{x} = 0, \quad \text{де} \quad \frac{c}{m} = p^2,$$

позначимо $\frac{k}{2m} = n$,

де n – показник в'язкості системи, який не є показником ступеня згідно з виразом (2.11).

$$\begin{aligned} \frac{c}{m} = p^2 \Rightarrow \ddot{x} + p^2x + 2n\dot{x} &= 0, \\ \ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Зазвичай необхідно намагатися проектувати ресорне підвішування, щоб виконувалося переважання квадрата частоти над в'язкістю системи, іншими словами, система не була передемпфированою, а демпфірування сприяло змінному (поступовому) загасанню вільних коливань при великих амплітудах A .

Отже

$$p = p^2 > n^2, \quad (2.14)$$

що характеризує випадок слабкого демпфірування.

Загальний розв'язок рівняння (2.13) має вигляд

$$x = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{p^2 - n^2}t + \alpha), \quad (2.15)$$

де $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\mathcal{G}_0}{p}\right)^2}$ – амплітуда коливань;

$\alpha = \arctg\left(\frac{px_0}{\mathcal{G}_0}\right)$ – фаза коливань.

Відомо, що $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $c_1 = \frac{\mathcal{G}_0}{p}$,

$c_2 = x_0 \Rightarrow x = c_1 \sin pt + c_2 \cos pt$, $x = A \sin(pt + \alpha)$.

Відповідно до цього для даного випадку маємо кінцеві вирази

$$A = \frac{\sqrt{x_0^2 + (\mathcal{G}_0 + nx_0)^2}}{(p^2 - n^2)}, \quad (2.16)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left[\frac{(x_0 \sqrt{p^2 - n^2})}{(\mathcal{G}_0 + nx_0)} \right], \quad (2.17)$$

або, за розв'язком у попередньому вигляді для вільних коливань без урахування опору гасильника коливань,

$$x = x_0 \cos pt + \left(\frac{\mathcal{G}_0}{p} \right) \sin pt. \quad (2.18)$$

Розв'язок виразу (2.15) остаточно запишеться у вигляді

$$x = e^{-nt} \left[x_0 \cos \sqrt{p^2 - n^2} t + (\mathcal{G}_0 + nx_0) \sin \frac{\sqrt{p^2 - n^2} t}{\sqrt{p^2 - n^2}} \right]. \quad (2.19)$$

На рис. 2.7 наведена силова характеристика для системи з одним ступенем вільності з постановкою в'язкого лінійного демпфера.

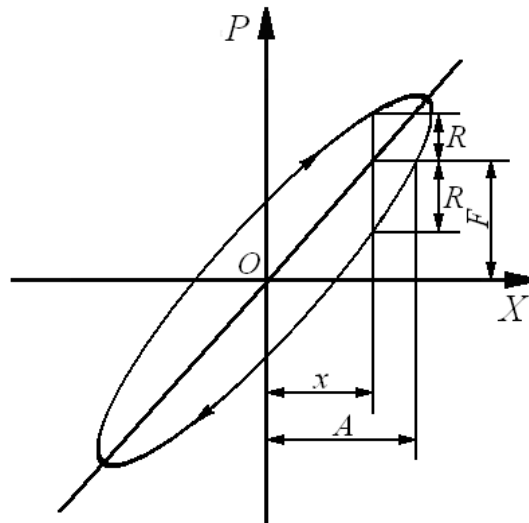


Рис. 2.7. Силова характеристика системи з в'язким лінійним демпфером: P – сили опору; F – лінійна складова P ; R – непружна складова P ; A – амплітуда

Відомо, що складова F відповідає закону Р. Гука, а складова R – напрямку деформування, «+» – завантаження; «-» – розвантаження.

На рис. 2.8 наведено графік загасання коливань, що характеризує роботу системи з розміщенням різних в'язких демпферів.

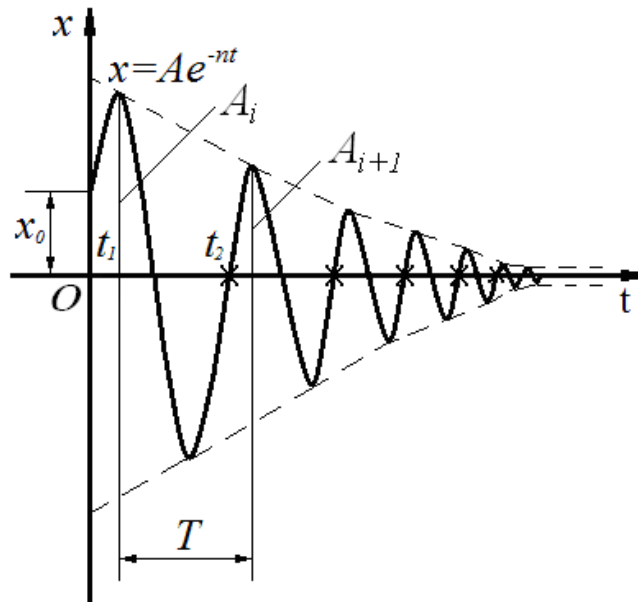


Рис. 2.8. Графік (характер) коливального процесу:
 t_i – час максимального відхилення

Частота коливального процесу для гармонійних коливань може бути визначена за формулою

$$p_z^* = \sqrt{p^2 - n^2}. \quad (2.20)$$

Вирази для амплітуд послідовних хвиль циклу коливань можна записати як

$$A_1 = Ae^{-nt}; \quad A_2 = Ae^{-n(t_1+T)}; \quad A_3 = Ae^{-n(t_1+2T)}, \quad (2.21)$$

де e^{-nt} – експоненціальна (показникова) функція, що за наближенням характеризує загасання коливального процесу.

Період (неперіодичність, а тривалість коливального циклу) визначається як

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{p^2 - n^2}} - a,$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = \frac{A_i}{A_{i+1}} = \dots = e^{nT} = \text{const}.$$

З урахуванням характерної геометричної прогресії при будь-якому i , а також відношенні послідовних циклових значень амплітуд переміщень маємо

$$nT = \ln\left(\frac{A_1}{A_{i+1}}\right), \quad (2.22)$$

де nT – логарифмічний декремент (від лат. – зменшення, зниження) загасання коливань (характеристика дисипативних властивостей коливальної системи, швидкості затухання),

тоді

$$\delta = nT. \quad (2.23)$$

Робота, здійснювана силою тертя $F_{\text{тр}}$ за час T , – це втрати енергії за один новий цикл. Відношення цих втрат до середнього значення енергії за цикл характеризує швидкість загасання коливань та імітується коефіцієнтом поглинання

$$\varphi = 2nT = 2\delta. \quad (2.24)$$

Як видно, це вдвічі більше за δ .

Значення φ та δ визначаються конструкцією, матеріалом та іншими власними властивостями коливальної системи.

Також разом з δ та φ як характеристику дисипативних властивостей використовують величину γ – коефіцієнт втрат або коефіцієнт непружного опору, який визначається за формулою

$$\gamma = \frac{\delta}{\pi}. \quad (2.25)$$

Системи з комбінованими рішеннями пружного та в'язкого опору дозволяють отримати належні динамічні характеристики

при русі локомотивів і вагонів у складі єдиного поїзда і тому відіграють суттєву роль у конструкції ресорного підвішування екіпажної частини залізничного рухомого складу.

2.2. Методи складання диференціальних рівнянь руху

Наприклад, є така система з параметрами W , яка передає зовнішнє збурення X (сила бере участь у переміщенні). За другим основним законом динаміки, як і розділом класичної механіки, по-перше, треба знайти рівняння руху з вихідним параметром Y (рис. 2.9); по-друге, коли відомі зовнішнє збурення X і рівняння руху Y , при цьому Y – вихідний параметр (відомий), значення, що прагне до *min*, необхідно визначити завдані параметри системи W .

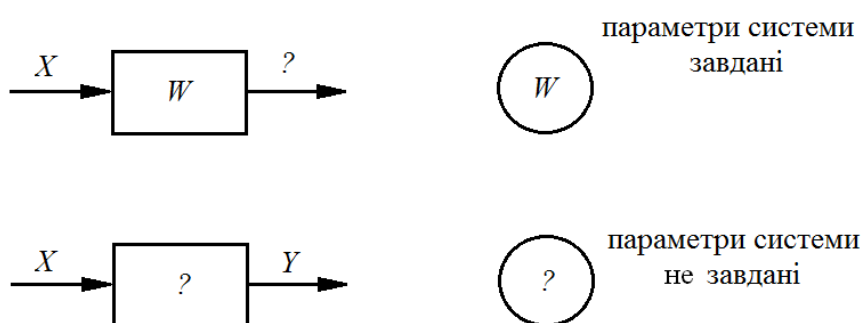


Рис. 2.9. Основні задачі дослідження коливального руху систем

1. Метод, заснований на використанні рівняння Жозефа Луї Ла-Гранжа (1736 – 1813 рр.),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{q}_i} \right) + \frac{dU}{dq_i} + \frac{d\Phi}{d\dot{q}_i} = F_i. \quad (2.26)$$

З загального рівняння динаміки

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^n = 0,$$

де $\sum A$ – сума активних і реактивних сил, які діють на систему.

З нього отримуємо принцип Даламбера-Лагранжа: при русі системи з ідеальними зв'язками в кожний даний момент часу сума елементарних робіт усіх прикладених активних сил і всіх сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи буде дорівнювати нулю.

$$\sum [(F_{kx}^a + F_{kx}^n)\delta x_k + (F_{ky}^a + F_{ky}^n)\delta y_k + (F_{kz}^a + F_{kz}^n)\delta z_k] = 0. \quad (2.27)$$

Ці два рівняння дозволяють скласти диференціальні рівняння руху будь-якої механічної системи.

За формулою (2.26):

$$T - \text{кінетична енергія системи}; \quad T = \sum \frac{mk \mathcal{Q}_k^2}{2};$$

$$U - \text{потенціальна енергія системи}; \quad U = \sum \frac{cz^2}{2};$$

$$\Phi - \text{функція дисипативних сил - розсіювання}; \quad \Phi = cz + \beta \dot{z};$$

q_i - узагальнені координати (кількість узагальнених координат дорівнює кількості ступенів вільності системи), м;

\dot{q}_i - узагальнена швидкість, м/с;

F_i - узагальнена сила (активна), Н.

Кількість рівнянь, які входять до системи (2.26) визначається кількістю ступенів вільності механічної системи.

Основна задача динаміки в узагальнених координатах полягає в тому, щоб, знаючи F_i, F_j, F_r та початкові умови, знайти закон руху у вигляді визначеної узагальненої координати як $f(t)$.

$q_1 = f_1(t), q_2 = f_2(t), q_s = f_s(t)$ - кінематичне рівняння руху системи в узагальнених координатах. T залежить від узагальненої швидкості \dot{q}_1 , що змінюється на \ddot{q}_1 при диференціюванні за t - лівих частин системи.

З цього випливає, що рівняння Лагранжа - звичайне диференціальне рівняння 2-го порядку відносно q_1, q_2, \dots, q_g ; $T = -U$.

Для складання диференціальних рівнянь руху механічної системи необхідно встановити кількість ступенів вільності та обрати узагальнені координати; скласти розрахункову схему (з зображенням передачі активних сил); визначити узагальнені сили

$$Q_i: Q_i(j, k) = \sum F_k \frac{dr_k}{dq_1} \text{ для } i, j, r \text{ координат з правильним напрямком}$$

узагальнених переміщень; визначити кінетичну енергію в абсолютному русі та виразити її через q_1 та \dot{q}_1 ; визначити частинні похідні від кінетичної енергії за \dot{q}_1 та q_1 , підставити їх до рівняння (2.26).

З отриманих рівнянь, якщо відомі величини активних сил і початкові умови завдані, інтегруванням можна знайти закон руху.

2. Метод, заснований на використанні принципу Жана Лерона Даламбера (1717–1783 рр.): сума всіх зовнішніх сил, які діють на тіло, дорівнюють нулю.

Сила інерції точки (Даламберова) визначається як

$$\begin{aligned} F_k^n &= -m_k \omega_k, \\ F_k^e + F_k^i + F_k^n &= 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

За другим законом Ісаака Ньютона (1643–1727 рр.),

$$m_k \omega_k = F_k^e + F_k^i,$$

де $m\omega = F^n \dots$.

Принцип Даламбера та другий закон Ньютона еквівалентні для визначення умов за прикладенням до системи сил інерції; система буде в рівновазі, що дозволить використовувати до неї рівняння статички, а не динаміки.

Перевага принципу – можливість використання добре відомих рівнянь рівноваги.

На підставі принципів можливих переміщень Лагранжа і Даламбера складається поєднаний принцип Даламбера–Лагранжа: при русі системи з ідеальними зв'язками в кожний даний момент часу сума елементарних робіт всіх прикладених активних сил і всіх сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи буде дорівнювати нулю.

Приклад запису диференціальних рівнянь. Для системи ресорного підвішування з одним ступенем вільності (рис. 1.2, б), спочатку відкинемо зовнішні зв'язки та замінимо їх внутрішніми реакціями (рис. 2.10):

$$m\ddot{z} = \sum p_z. \quad (2.29)$$

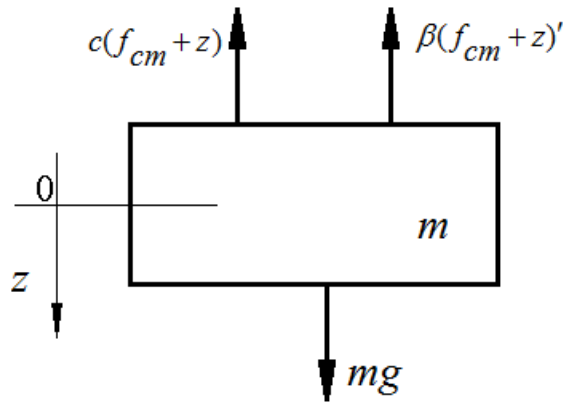


Рис. 2.10

Записуючи суму проекцій відносно вертикальної осі за принципом кінетостатики та подальші послідовні математичні перетворення, маємо

$$\sum p_z + F_{опору} + p = 0; \quad (2.30)$$

$$cf_{cm} = Q; \quad Q = mg; \quad cf_{cm} = mg;$$

$$\beta z' = \beta(f_{cm} + z)';$$

$$m\ddot{z} = mg - c(f_{cm} + z) - \beta\dot{z};$$

$$m\ddot{z} = Q - Q - cz - \beta\dot{z};$$

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + cz = 0. \quad (2.31)$$

У такий спосіб через вираз (2.31) отримано звичайне лінійне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами при невідомих для системи підвішування візка залізничного рухомого складу, що може мати один або декілька в'язких демпферів. Тоді для транспортного засобу з підвішуванням візків n ресорних груп k гасильників коливань диференціальне рівняння (2.31) матиме вигляд

$$m\ddot{z} + k\beta\dot{z} + ncz = 0. \quad (2.32)$$

Основні методи розв'язання диференціальних рівнянь руху механічних систем наведені в роботі [6].

2.3. Крутильні коливання механічних систем

Як відомо з класичної механіки та опору матеріалів, кручення – це вид деформації, при якому в поперечних перерізах бруса виникають крутні моменти як силові фактори [10, 18]. Кручення виникає в різних машинобудівних брусах, валах, а також вісях колісних пар залізничного рухомого складу, гвинтових пружинах, стабілізуючих пристроях, торсіонах машин і вагонів та інших елементах конструкцій. Зазвичай кручення відносно цих елементів конструкції відбувається при їх навантаженні зовнішніми моментами, які скручують (парами сил) і площини дії яких перпендикулярні до його поздовжньої осі. При розрахунку валів часто величини зовнішніх моментів, які скручують, визначають за величиною потужності, що споживається, і швидкості руху вала. Крутні моменти, які виникають у поперечних перерізах брусів, валів, пружин, визначають за величинами зовнішніх моментів, які скручують, з використанням методу перерізів (рис. 2.11, а).

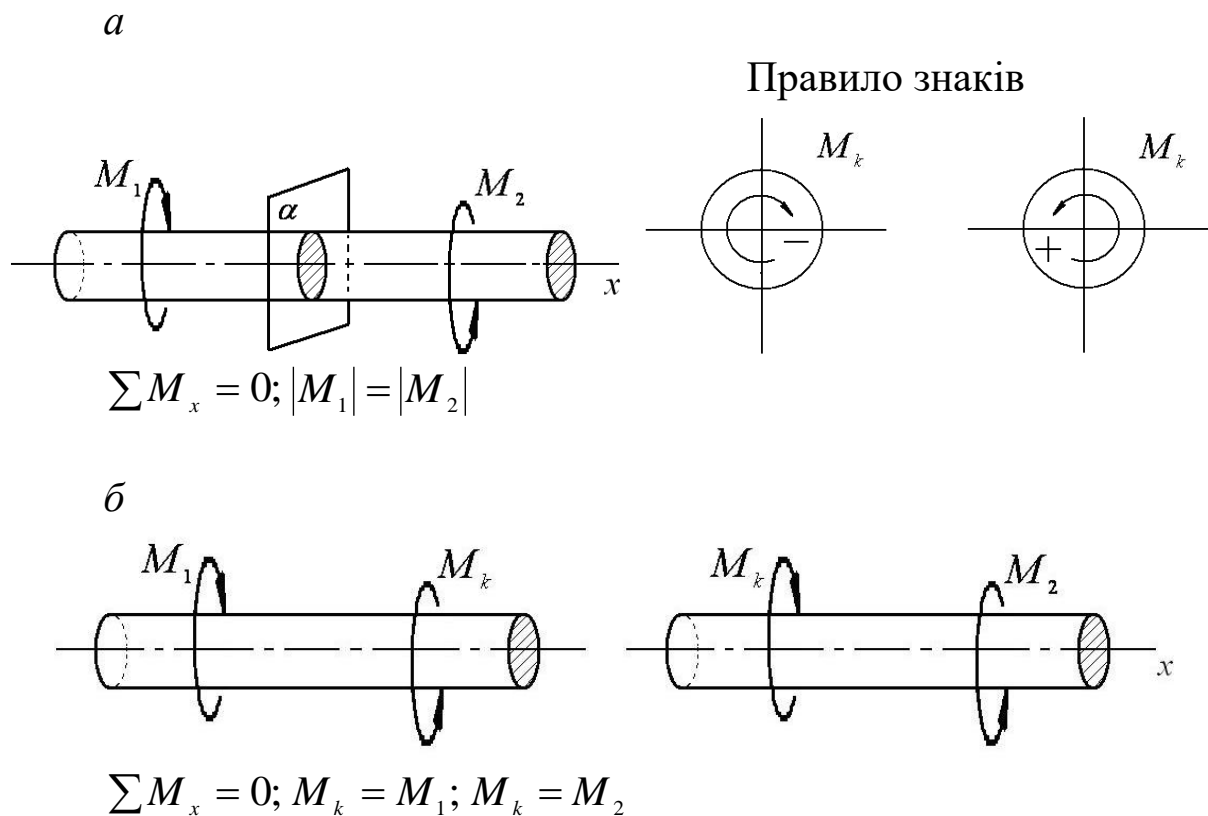


Рис. 2.11. Дія крутних моментів на вал

Крутний момент у будь-якому поперечному перерізі бруса (на ділянці між зовнішніми моментами) за величиною дорівнює зовнішньому моменту $|M_1| = |M_2|$.

У більш складних випадках, коли до бруса прикладено декілька зовнішніх моментів, крутний момент у поперечному перерізі будь-якої ділянки бруса неоднаковий (рис. 2.11, б).

На підставі методу перерізів крутний момент у довільному поперечному перерізі бруса чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, які скручують, що прикладені до бруса за одним боком від перерізу, який розглядається.

Така епюра крутних моментів вала для прикладу наведена на рис. 2.12.

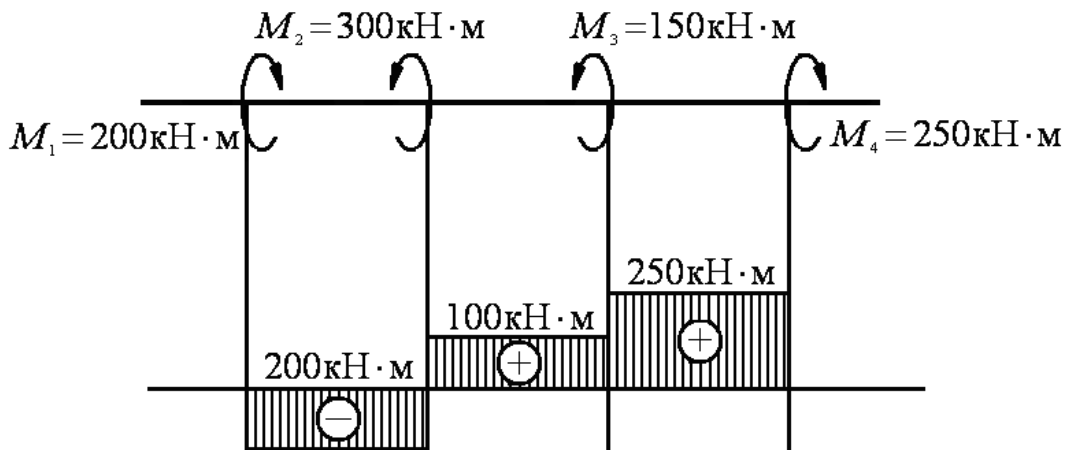


Рис. 2.12. Епюра крутних моментів

Крутний момент, що діє на брус, який зацемлений, наведений на рис. 2.13.

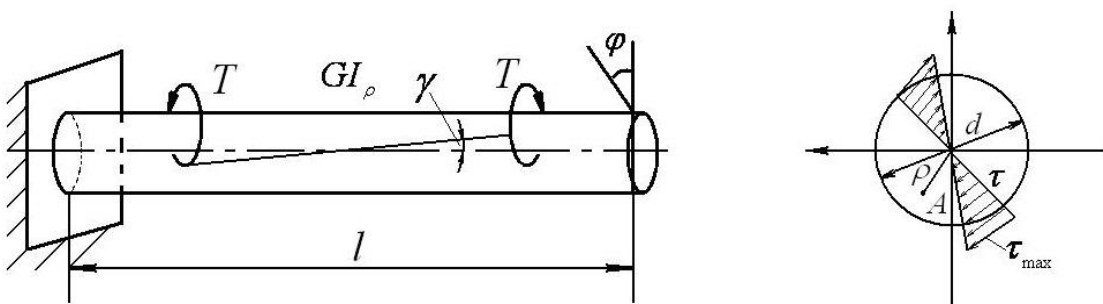


Рис. 2.13. Крутний момент, що діє на брус, який зацемлений:

γ – відносний зсув волокон матеріалу, $\gamma = \vartheta \cdot \rho$

Відносний кут закручування бруса визначається за формулою

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx}, \quad (2.33)$$

де $d\varphi$ – повний кут закручування (оберту), град;
 dx – ділянка довжини бруса, м.

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_\rho}, \quad (2.34)$$

де G – модуль зсуву матеріалу бруса, Н/м²;
 I_ρ – полярний момент інерції, м⁴.

Радіус кривизни ρ від дослідної точки A до центра визначається за формулою

$$\rho d\varphi = \rho \vartheta dx, \quad (2.35)$$

$$\gamma = \vartheta \rho.$$

Тоді момент, що скручує, у поперечному перерізі бруса визначаємо за формулою

$$M_k = \vartheta G I_\rho.$$

Для визначення дотичних напружень τ проведемо нескладні математичні перетворення:

$$\vartheta = \frac{M_k}{G I_\rho}, \Rightarrow \tau = \frac{M_k}{G I_\rho} \cdot \rho G = \frac{M_k}{I_\rho} \rho,$$

де $G I_\rho$ – жорсткість перерізу при скручуванні, Н · м².

$$\tau = \gamma G = \vartheta \rho G.$$

Максимальні дотичні напруження визначаються як

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_k}{W_p}, \quad (2.36)$$

де W_p – полярний момент опору, м^3 .

Із роботи [18] відомо, що для круглого поперечного перерізу можна записати

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4,$$

тоді

$$W_p = \frac{I_p}{\frac{d}{2}} = \frac{2I_p}{d} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (2.37)$$

Потенціальна енергія U деформації при крученні за всією площею визначається як

$$U = \frac{M_k^2 \cdot l}{2GI_p}. \quad (2.38)$$

Якщо брус змінний за довжиною, то

$$U = \sum \int_l \frac{M_k^2 \cdot l}{2GI_p}. \quad (2.39)$$

Умова міцності при крученні має вигляд $\tau_{\max} \leq [\tau]$, тобто порівнює максимальні та допустимі дотичні напруження.

Вали, крім зусиль на кручення, сприймають деформацію згину, тому при розрахунку на кручення допустиму величину $[\tau]$ знижують на 20 ÷ 40 МПа. Для бруса постійного перерізу непружним є переріз, де $\tau = \max$. Великі кути закручування вала особливо небезпечні при передачі їм змінних у часі моментів, оскільки при цьому виникають небезпечні для його міцності крутильні коливання. Вали мають бути при цьому розраховані на міцність і жорсткість.

Бруси некруглого поперечного перерізу сприймають депланацію, на відміну від круглих, які залишаються плоскими після деформації.

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k},$$

де W_k – коефіцієнт опору при скручуванні.

$$W_k = \frac{I_k}{b} = \frac{hb^2}{3}, \quad (2.40)$$

$$I_k = \frac{h \cdot b^3}{3}, \quad (2.41)$$

де I_k – геометрична характеристика.

Для тонкостінного стрижня відкритого профілю некруглого (прямокутного) поперечного перерізу криволінійний (некруглий) переріз доцільно спрощувати на кількість n прямокутних елементів. Перейдемо до вивчення крутильних коливань механічних систем. Розглянемо систему, що складається з абсолютно жорсткого диска, закріпленого на пружному стрижні, враховуючи, що він безмасовий (рис. 2.14).

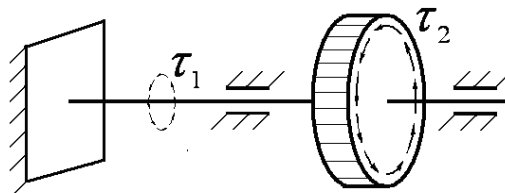


Рис. 2.14. Стрижне-дискова умовна система

Відновлювальний момент створюється дотичними напруженнями τ_1, τ_2 у поперечному перерізі стрижня та коефіцієнтом жорсткості

$$c = \frac{GI_\rho}{l}, \quad (2.42)$$

де l – довжина стрижня, м.

Розглянемо двомасову систему. Процес коливань відбувається таким чином. Нехай на диск діє відносна деформація.

Тоді, за рівнянням Ж. Л. Лагранжа, енергетичний баланс запишемо як

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{dq} \right) - \frac{dT}{dq} = \frac{d\Pi}{dq}; \quad (2.43)$$

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2; \quad (2.44)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c (\varphi_2 - \varphi_1)^2, \quad (2.45)$$

де T і Π – відповідно кінетична та потенціальна енергії, Дж.

Момент сил пружності вала запишемо як

$$M_{\text{пруж}} = c (\varphi_2 - \varphi_1) \quad (2.46)$$

Нехай на диски діють рівні та протилежно спрямовані пари, що скручують (рис. 2.15), які за час $t_0 = 0$ миттєво зникають.

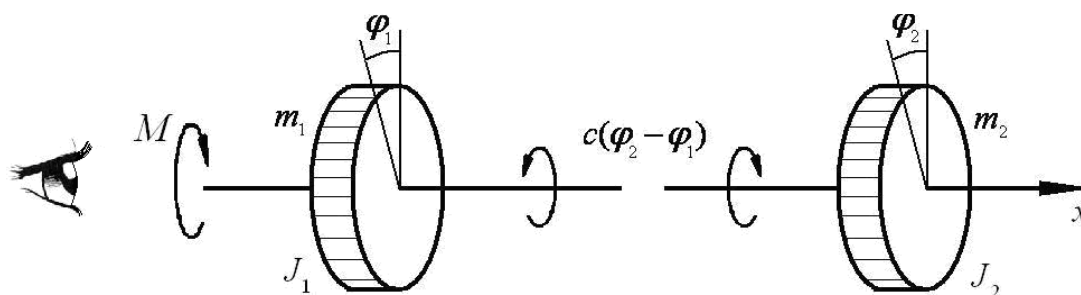


Рис. 2.15. Дія крутних моментів на диски

Для деякого моменту часу $t_0 > 0$ кути $\varphi = \varphi_1$ та $\varphi = \varphi_2$, так що $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Момент сил пружності вала $M_{\text{пруж}}$ діє на кожний з дисків, I_1 та I_2 – момент інерції дисків вала. Запишемо диференціальне рівняння руху

$$I\ddot{\varphi} + c\varphi = 0. \quad (2.47)$$

Враховуючи, що система наведена двома тілами, запишемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\varphi}_1 - c(\varphi_2 - \varphi_1) = 0; \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + c(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

Аналогія знаків залишається як при поздовжніх, так і поперечних силах пружності, оскільки пружний момент діє і на другий диск, спрямований за ходом годинникової стрілки (від'ємний момент).

Поділивши перше рівняння на I_1 , а друге на I_2 та віднявши перше рівняння з другого, отримуємо

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 - \frac{c}{I_1}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0; \\ \ddot{\varphi}_2 - \frac{c}{I_2}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_1 - \frac{c}{I_1}(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{c}{I_2}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0,$$

$$\ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_1 = \left(\frac{c}{I_1} - \frac{c}{I_2} \right) (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Введемо в рівняння відносний кут φ дисків $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Тоді рівняння набуде вигляду

$$\ddot{\varphi} - \left(\frac{c}{I} \varphi \right) = 0.$$

Якщо покласти, що $I = \frac{I_1 I_2}{(I_1 + I_2)}$, то власну частоту будемо шукати у вигляді $p = \sqrt{\frac{c(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}}$ з урахуванням $m_1 + m_2 = m$.

$$p = \sqrt{\frac{c(I_1 + I_2)}{m I_1 I_2}}. \quad (2.49)$$

Результат не зміниться, якщо, окрім пружних коливань, відбувається оберт системи як жорсткого цілого. Деякий проміжний переріз – вузол коливань – не бере участі в коливальному процесі, для його визначення врахуємо, що в процесі власних коливань зовнішні моменти відсутні, отже в будь-який час $\sum I\ddot{\varphi} = 0$ двох дисків відносно осі вала

$$I_1\ddot{\varphi}_1 - I_2\ddot{\varphi}_2 = 0. \quad (2.50)$$

Позначимо через A_1 та A_2 амплітуди кутових переміщень, отримаємо прискорення

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= -A_1 p^2 \sin(pt + \alpha); \\ \ddot{\varphi}_2 &= -A_2 p^2 \sin(pt + \alpha); \\ I_1 A_1 + I_2 A_2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.51)$$

звідки $\frac{A_1}{A_2} = -\frac{I_2}{I_1}$, тоді відношення амплітуд дисків обернено пропорційно відношенню моментів, знак «-» означає, що відхилення відбувається $I_1 A_1 = -\frac{I_2}{A_2}; \frac{A_1}{A_2} = -\frac{I_2}{I_1}; -\frac{A_1}{A_2} = \frac{I_2}{I_1}$.

Епюру крутних моментів, які діють на двомасову систему, наведено на рис. 2.16.

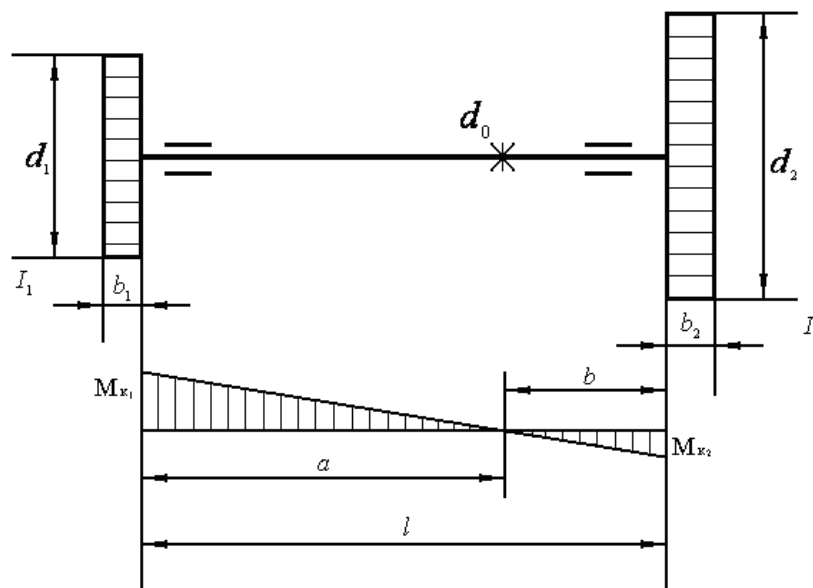


Рис. 2.16. Епюра крутних моментів, які діють на двомасову систему

Відстань від вузла коливань до кінців вала

$$(I_1 + I_2)a = I_2l; \quad a = \frac{I_2l}{(I_1 + I_2)}; \quad b = I_1l(I_1 + I_2). \quad (2.52)$$

$$\frac{I_1 + I_2}{I_2} = \frac{l}{a}; \quad I_1 + I_2 \cdot b = I_2 \cdot l;$$

$$\frac{I_1}{I_2} + 1 = \frac{l}{a}; \quad 1 + \frac{I_2}{I_1} = \frac{l}{b};$$

$$I_1 = \left(\frac{l}{a} - 1\right)I_2; \quad I_2 = \left(\frac{l}{b} - 1\right)I_1;$$

$$I_1 = I_2 \frac{l}{a} - I_2; \quad I_2 = I_1 \frac{l}{b} - I_1.$$

Складемо систему диференціальних рівнянь для чотиримасової системи, наведеної на рис. 2.17.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{q}} \right) - \frac{dT}{dq} = \frac{d\Pi}{dq};$$

$$T = \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}(h\dot{\varphi}_2)^2 + \frac{1}{2}I_4\dot{\varphi}_4^2;$$

$$\Pi = \frac{1}{2}c_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2}c_{34}(\varphi_4 - h\varphi_2);$$

$$n = \frac{K_2}{K_3}; \quad \varphi_3 = -n\varphi_2;$$

$$\begin{cases} I_1\ddot{\varphi}_1 - c_{12}(\varphi - \varphi_1) = 0 \\ (I_2 + n^2I_3)\ddot{\varphi}_2 + c_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) + c_{34}n(\varphi_4 + n\varphi_2) = 0 \\ I_4\ddot{\varphi}_4 + c_{34}n(\varphi_4 + n\varphi_2) = 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

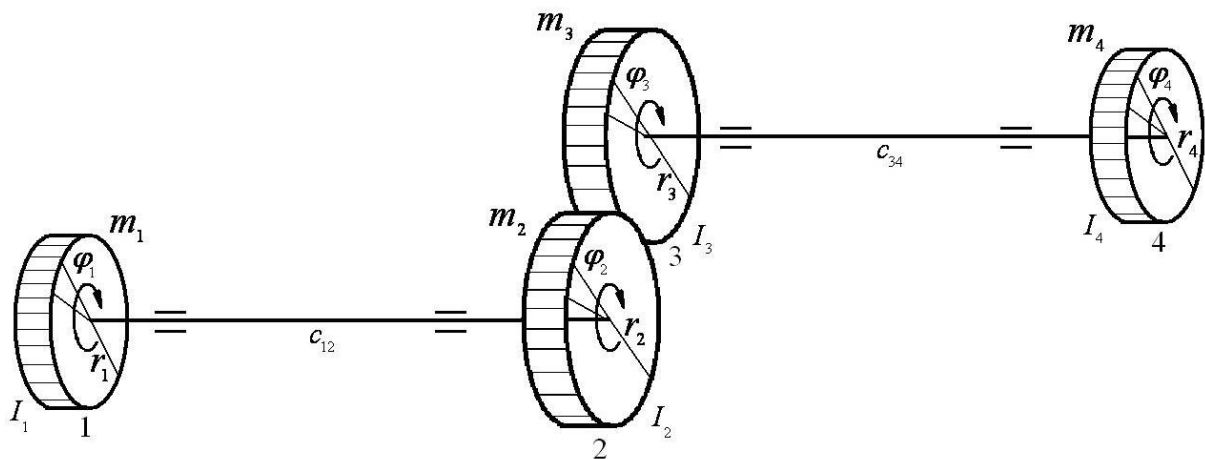


Рис. 2.17. Чотиримасова коливальна система

Також слід зауважити, що в подібному режимі працюють торсіонні механізми кришок люків восьмивісних вагонів, повертальних і стабілізуючих пристроїв візків сучасних пасажирських вагонів та ін.

У дод. 1 і 2 до навчального посібника наведені практичні завдання, які дозволять студенту краще засвоїти зазначені питання.

2.4. Вимушені коливання механічних систем

Вимушені коливання пружних систем виникають при впливі на систему (протягом усього періоду коливань) завданих зовнішніх періодично змінених збурювальних сил, які діють безперервно, незалежно від коливань у системі. Характер процесу як визначається властивостями самої системи, так і залежить від природи самої зовнішньої сили. Прикладом можуть бути електродвигуни з неврівноваженою масою, у яких період вимушених коливань $T_{B.K.}$ співпадає з періодом зміни вимушеної сили $T_{з.в.с.}$, тобто $T_{B.K.} = T_{з.в.с.}$, що використовуються в різних галузях машинобудування, у т. ч. і вагонному господарстві, наприклад при застосуванні резонансного стенда для випробування карданних валів приводів підвагонних генераторів з метою забезпечення збереження і покращення їхніх показників в експлуатації [26] та експлуатації систем життєзабезпечення пасажирських вагонів (рис. 2.18).

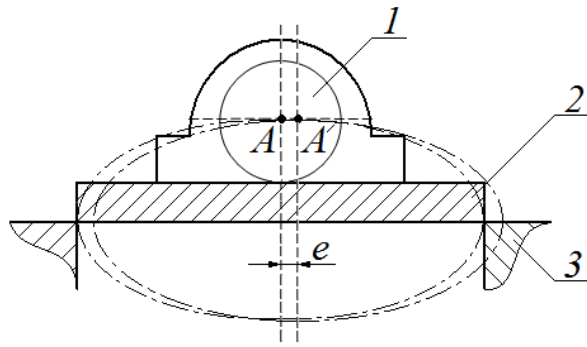


Рис. 2.18. Електродвигун з нерівноваженою масою:
 A' – центр мас нерівноваженого двигуна; A – центр мас
 рівноваженого двигуна; e – зміщення ротора (ексцентриситет)
 1 – електродвигун; 2 – проміжна металоконструкція;
 3 – фундамент (жорстка опора)

Конструкційне виконання типового редукторно-карданного привода підвагонного генератора пасажирського вагона показано на рис. 2.19.

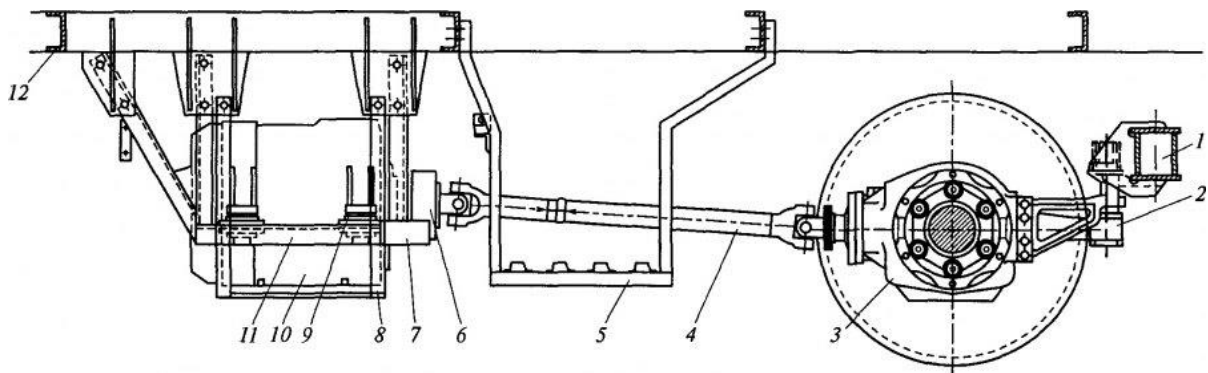


Рис. 2.19. Привод з редуктором ВБА-32/2:
 1 – рама візка; 2 – опора; 3 – редуктор; 4 – карданний вал; 5
 – пристрій карданного вала, що уловлює; 6 – гумометалева муфта;
 7 – запобіжний пристрій; 8 – запобіжна скоба; 9 – гумо-металеві
 опори генератора; 10 – генератор; 11 – кронштейн підвіски
 генератора; 12 – рама кузова вагона

Як відомо, редукторно-карданний привод генератора від середньої частини осі встановлений на пасажирських вагонах, обладнаних системами кондиціонування повітря і вагонах-

ресторанах. Напрям обертання і відповідно крутний момент передається редуктором на карданний вал і послідовно муфті зчеплення та якорю мотор-генератора (перетворювача). Під час руху, особливо з підвищенням швидкості, виникають поштовхи та вібрації на перетворювач, послаблення болтових з'єднань між муфтою карданного вала та якорем і перекося опорних елементів зварної підтримувальної рами. Тому виникає дисбаланс ланцюгового типу в місцях з'єднання деталей привода і, як наслідок, непрогнозовані зноси в експлуатації і зменшення технічного ресурсу генераторів.

На стенді можливе балансування інших карданних валів аналогічних за конструкцією відповідним технічним даним стенда [21, 22]. Стенд не має пристрою коректування мас карданних валів, що підлягають балансуванню. Умови експлуатації стенда виконуються згідно з нормативними документами. Загальний вигляд вузла з'єднання вала з перетворювачем через муфту і пристосування для балансування показані на рис. 2.20. Допустимі відхилення на основні параметри та розміри встановлюють не більше $\pm 10\%$.

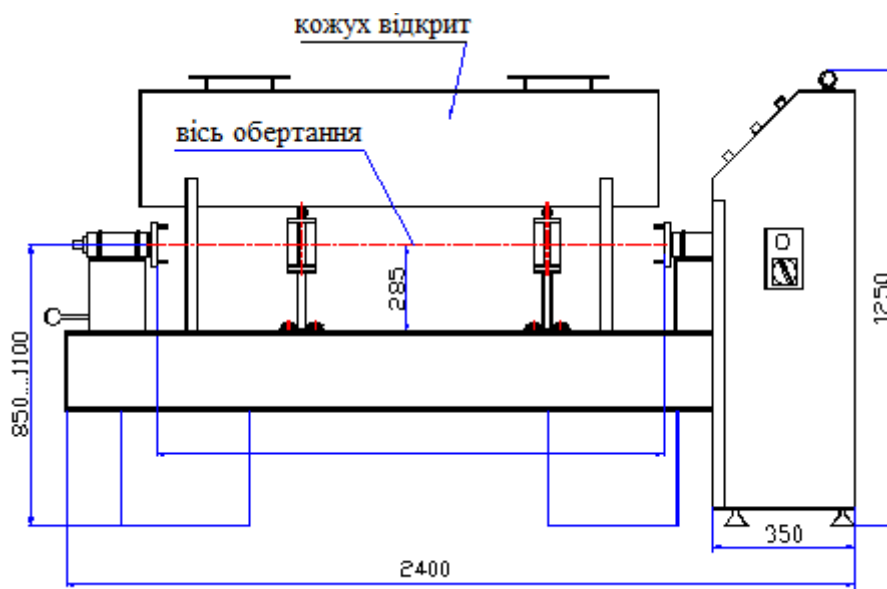


Рис. 2.20. Загальний вигляд стенда в робочому стані

Принцип роботи стенда може бути описаний таким чином. Для динамічного балансування карданного вала необхідно

вибрати дві площини I-I і II-II, перпендикулярні до осі обертання, відносно яких можна додавати або знімати коригувальні маси. Ці площини, що мають назву площин корекції, вибираються за конструктивними і технологічними ознаками. Величину і кутове положення коригувальних мас визначають вимірюванням дисбалансу на балансувальному стенді. Вал встановлюється в адаптерах на шпинделях передньої і рухомої стійок. На стійках встановлені п'єзоелектричні датчики. Обертання карданного вала здійснюється електродвигуном через плоскопасову передачу.

Коливання стійок, викликані обертанням неврівноваженого ротора, передаються датчикам. Датчики створюють п'єзоелектричний сигнал – сигнал дисбалансу, частота якого дорівнює частоті обертання балансованого вала, амплітуда пропорційна амплітуді коливань стійки, тобто величині дисбалансу, а фаза визначається місцеположенням неврівноваженої маси. Для виконання цих вимірів на поверхні карданного привода нанесена контрастна мітка.

На стенді встановлений датчик мітки (фотодатчик), який має випромінювач – світлодіод і приймач – фототранзистор. Світловий потік, що відбивається від поверхні, сприймається фототранзистором.

При проходженні перед фотодатчиком контрастної мітки він подає імпульсний сигнал, що поступає в електронний пристрій. В електронному пристрої імпульсний сигнал синхронізує роботу засобів аналізу сигналів, що поступають від датчиків вібрації.

Стенд не містить пристроїв усунення неврівноваженості. Як правило, для цього балансований вал доводиться знімати зі стенда. Після корекції дисбалансу вал за необхідності знову встановлюється на стенді для контролю (рис. 2.21).

Вимушені коливання, на відміну від власних, не загасають, але мають місце сили опору R (оскільки енергія, яка постійно підводиться, витрачається на подолання в системі сил опору R_i , які в ній є). Коли початкові частоти збурювальних сил близькі або співпадають з частотами власних коливань системи, вимушені коливання супроводжуються значними амплітудами, викликаючи недопустимі для конструкції деформації – резонанс (від франц. *Resonance*, лат. *Resono* – відгукуватися).



Рис. 2.21. Процес випробування валів після балансування на стенді

Збурювальні сили задано у вигляді явних функцій $f(t)$ і не залежать від руху системи до якої вони прикладені.

$$P = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \dots \\ P_n(t) \end{Bmatrix}.$$

Наприклад, дія сил від обертання неврівноваженого ротора електродвигуна на фундамент привода машини (рис. 2.22).

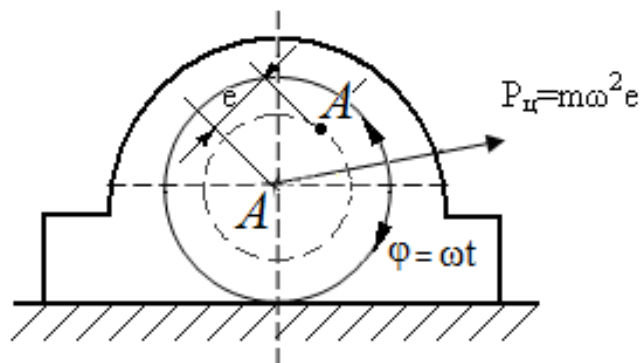


Рис. 2.22. Сили від обертання неврівноваженого ротора на фундамент машини: e – ексцентриситет; m – маса; ω – кутова швидкість; φ – кутове переміщення

При цьому можуть виникати такі види коливальних рухів (рис. 2.23):

а) гармонійні вимушені сили (у машинах з не зовсім врівноваженими роторами);

б) періодичні вимушені сили (у машинах з кривошипно-шатунними та повзунковими механізмами);

в) періодичні короткочасні імпульси (у вібраційно-ударних, накладних, навісних і формувальних вібромашинах для дорозвантаження вагонів);

г) неперіодичні вимушені сили (у двигунах, наприклад прокатного стану);

д) імпульсно-вимушені сили (копрові пристрої, кувальні машини, машини для буровибухових робіт, кар'єрні екскаватори, грейферні ковші для зачерпування насипних вантажів, відбійні молоти, залучення піротехніки та ін.).

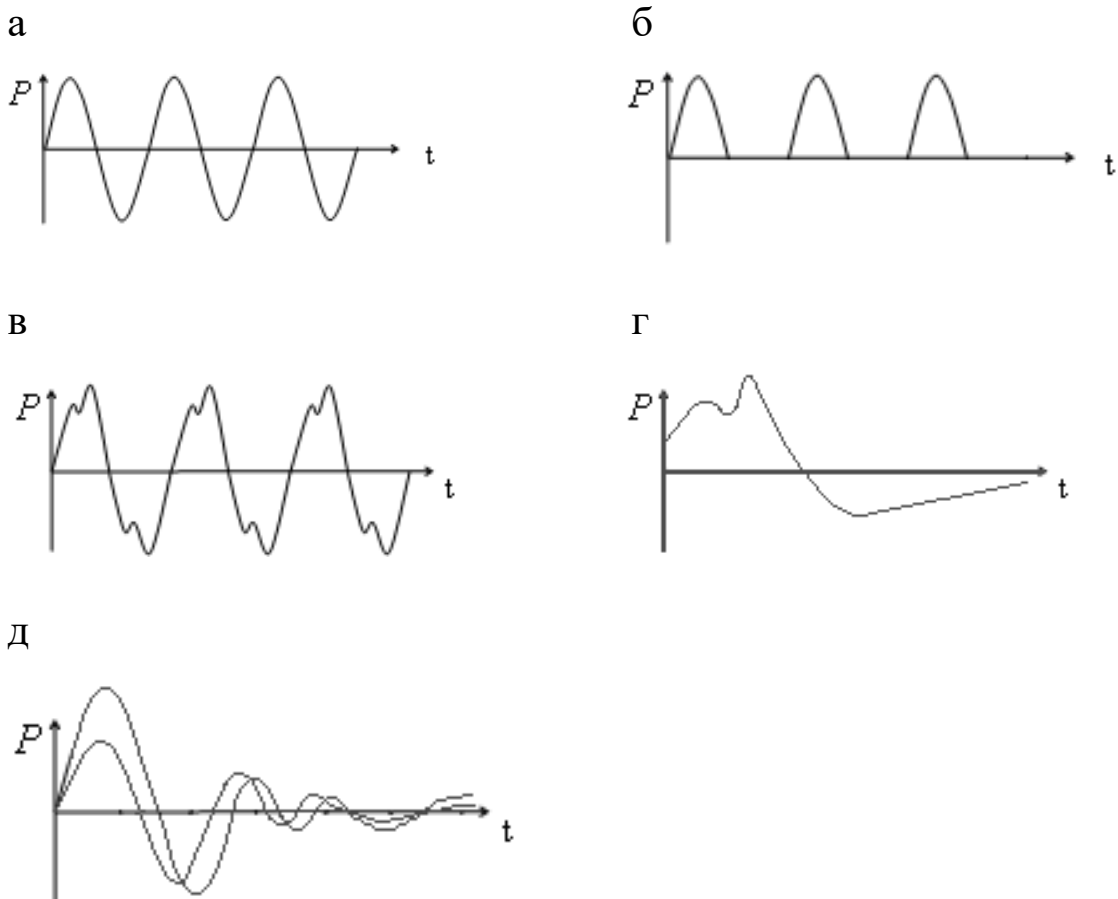


Рис. 2.23

Випадковий характер збурювального збудження (вимушена сила) сил простежується в таких випадках: дія нерівностей рейкової колії на необресорені елементи вагона, шляху (автополот-на) на колесо автомобіля, навантажень на виконавчі органи горних машин або грейферного механізму (ковша) на кузов напів-вагона при вивантаженні вугілля та інших насипних вантажів.

Якщо на лінійну систему з одним ступенем вільності діє довільна завдана узагальнена сила $P(t)$, то за відсутності опору узагальнене диференціальне рівняння вимушених коливань запишемо згідно з виразом (1.18) як

$$a\ddot{q} + cq = P(t), \quad (2.54)$$

де a – коефіцієнт інерції;
 c – коефіцієнт жорсткості,

або

$$\ddot{q} + p^2 q = \frac{P(t)}{a},$$

де p – власна частота системи, $p = \sqrt{\frac{c}{a}}$, $a \sim m_{\text{системи}}$.

Приклад 1. Розглянемо рис. 2.24, 2.25.

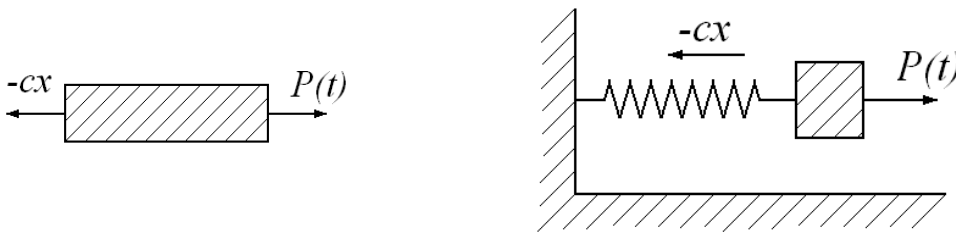


Рис. 2.24. Розрахункова схема системи

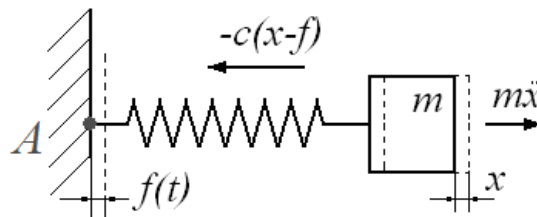


Рис. 2.25. Схема переміщення елементів системи в поздовжньому напрямку

При складанні диференціального рівняння руху системи перейдемо від узагальненої координати q та частоти p до дискретних величин x та p .

Диференціальне рівняння руху вантажу має вигляд

$$P(t) - cx = m\ddot{x}, \quad (2.55)$$

де c – жорсткість пружини.

Закон руху точки завдано у вигляді $f(t)$. Позначимо поточне переміщення точки в абсолютному русі через x . На вантаж масою m діє пружина (сила пружності) – $c(x - f)$, тоді $cf(t)$ – приведена вимушена сила, тобто $P(t) = cf(t)$, що призводить до основної форми виразу (2.54). При кінематичному збудженні точки A закріплення пружини подовження пружини буде визначатися як $\Delta l = x - f$.

Тоді диференціальне рівняння руху можна записати у вигляді

$$-c \cdot \Delta l = m\ddot{x},$$

або з урахуванням подальших перетворень

$$-c(x - f) = m\ddot{x},$$

$$-cx + cf = m\ddot{x},$$

$$m\ddot{x} + cx = cf.$$

Остаточно диференціальне рівняння вимушених коливань системи буде мати вигляд

$$\ddot{x} + p^2 x = \frac{cf(t)}{m}. \quad (2.56)$$

Приклад 2. Для розрахунку міцності пружин (у т. ч. ресорного підвішування візка, а також пружних елементів поглинальних апаратів) викликає інтерес не абсолютний, а відносний рух вантажу. Позначимо x^* – відносне переміщення вантажу в системі координат, що зв'язаний з лівим кінцем пружини, тоді диференціальне рівняння руху можна записати в такому вигляді:

$$m\ddot{x}^* + cx^* = -mf'',$$

де $m\ddot{f}$ – переносна сила інерції вантажу.

Спрошуючи, маємо

$$\ddot{x}^* + p^2 x^* = -\ddot{f}. \quad (2.57)$$

Тобто кінематичне збудження завжди може бути замінено силовим.

Як відомо, загальний розв'язок цього рівняння дорівнює сумі загального розв'язку та частинного. Якщо позначити через ω власну частоту коливань системи, то рівняння (2.56) може бути записано у вигляді

$$\ddot{x} + \omega^2 x = q \cos pt.$$

Тоді отримаємо

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Проведемо математичне перетворення, знайдемо першу та другу похідну від x_q :

$$x_q = C \cos pt;$$

$$\dot{x}_q = -pC \sin pt;$$

$$\ddot{x}_q = -p^2 C \sin pt.$$

Тоді після підстановки x_q та похідних значень \dot{x}_q і \ddot{x}_q маємо

$$-p^2 C \cos pt + \omega^2 C \cos pt = q \cos pt;$$

$$C(\omega^2 - p^2) = q.$$

Після нескладних перетворень отримаємо значення амплітуди коливань C

$$C = \frac{q}{\omega^2 - p^2}$$

Звідси загальний розв'язок рівняння матиме вигляд

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{q}{\omega^2 - p^2} \cos pt. \quad (2.58)$$

Перші два доданки правої частини рівняння (2.58) характеризують вільні коливання, які зазвичай швидко загасають.

Доданок $\frac{q}{\omega^2 - p^2} \cos pt$ характеризує вимушені встановлені коливання системи, які відбуваються з частотою зовнішньої збурювальної сили. Амплітуда C вимушених коливань залежить від частоти вимушених коливань p . Статична деформація $x_{cm} = \frac{q \cos pt}{\omega^2}$ (враховуючи повільне змінення $P(t)$, тобто $p \rightarrow 0$ порівняно з ω , буде мати малі значення, якими можливо знехтувати). Тоді після перетворень остаточно отримаємо

$$\frac{c}{x_{cm}} = \frac{q}{\omega^2 - p^2} : \frac{q}{\omega^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - p^2} = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}} = \beta$$

або

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{T^2}{T_1^2}} - \text{коефіцієнт наростання амплітуд,}$$

$$\text{де } T_1 = \frac{2\pi}{p}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

У випадку, коли $\frac{p}{\omega} \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 1$ та $c \approx x_{cm}$, але коли $p \rightarrow \omega$, тобто $\frac{p}{\omega} = 1$, тоді $c \rightarrow \infty$ (спостерігається явище резонанса, відповідна частота збурювальної сили в цьому випадку називається критичною) (рис. 2.26).

При $p > \omega$ c зменшується, а при $p \gg \omega$ $c \ll x_{cm}$ маса вантажу може бути розглянута у відносному спокої.

При $p < \omega$ вимушені коливання та збурювальна сила N знаходяться в одній фазі, тобто зсув фаз $\alpha = 0$, при досягненні вантажем максимального відхилення збурювальне зусилля $P(t)$ максимальне в цьому ж напрямку (рис. 2.27).

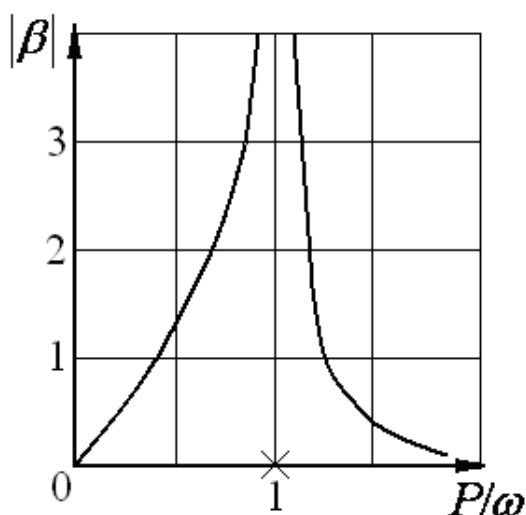


Рис. 2.26. Графічна залежність динамічного коефіцієнта від відношення частот вільних і вимушених коливань

При $p > \omega$ різниця у фазах вимушених коливань і збурювальної сили складає величину $\alpha = \pi$ (рис. 2.28), тобто коливання відбуваються у протифазі зі збурювальною силою (це означає, що в той час, коли збурювальна сила має максимальне значення в напрямку праворуч, вантаж, який коливається, досягає свого максимального відхилення ліворуч). Введемо початкові умови: $t_0 = 0$; $x = 0$; $\dot{x} = 0$, тобто $(x)_t = 0$; $(\dot{x})_{t=0} = 0$, тоді з виразу

$$(2.58): A = -\frac{q}{\omega^2 - p^2}, \text{ далі беремо першу похідну і остаточно}$$

отримаємо

$$\dot{x} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t - \frac{q}{\omega^2 - p^2} \sin pt;$$

$$x = -\frac{q}{\omega^2 - p^2} \cos \omega t + \frac{q}{\omega^2 - p^2} \cos pt;$$

$$x = \frac{q}{\omega^2 - p^2} (\cos pt - \cos \omega t). \quad (2.59)$$

Спочатку дії збурювальної сили виникають вимушені та вільні коливання однієї амплітуди. Якщо $\omega \rightarrow p$, то має місце

биття (рис. 2.29). Вважаючи, що $\omega - p = 2\Delta$, вираз (2.59) при $\Delta = \frac{\omega - p}{2}$ матиме вигляд

$$x = -\frac{2q}{\omega^2 - p^2} \sin \frac{(p + \omega)t}{2} \sin \frac{(p - \omega)t}{2} = -\frac{2q}{\omega^2 - p^2} \sin(-\Delta)t \sin \frac{(p + \omega)t}{2} =$$

$$= \frac{2q \sin t \Delta}{\omega^2 - p^2} \sin \frac{(p + \omega)t}{2}. \quad (2.60)$$

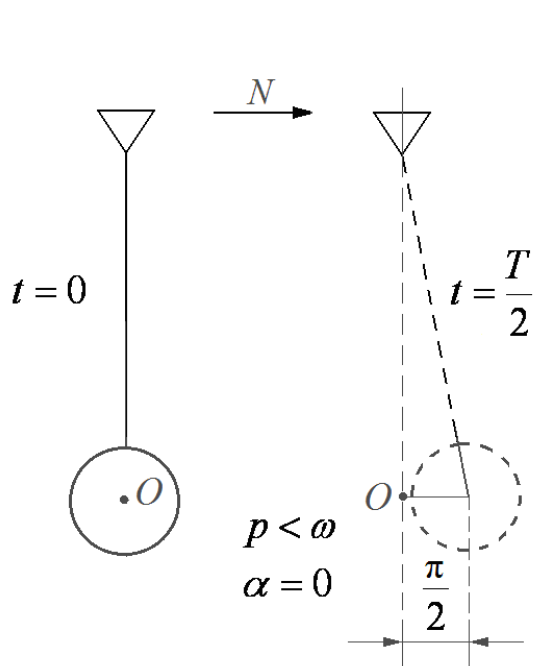


Рис. 2.27. Коливання маятника в одній фазі зі збудювальним фактором

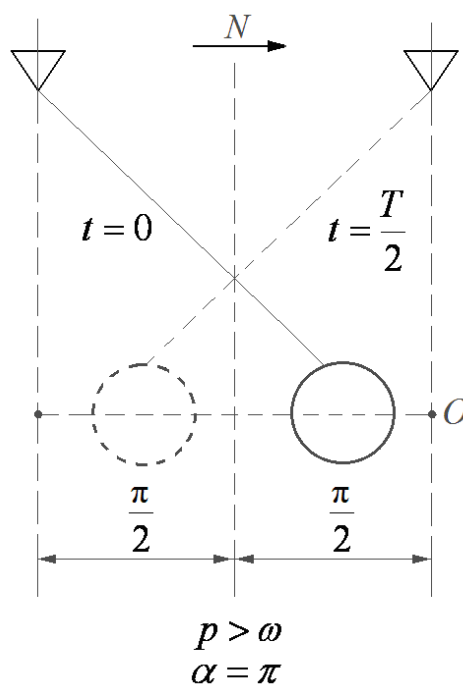


Рис. 2.28. Коливання маятника в протифазі зі збудювальним фактором

При $p = \omega$ період биття $T_6 \rightarrow \infty$, при $p \rightarrow \omega$, $\Delta \rightarrow 0$ запишемо вираз (2.60) у вигляді

$$x = \frac{2qt\Delta}{2\Delta(\omega + p)} \sin \frac{(p + \omega)t}{2} = \frac{qt}{2p} \sin pt; \quad (2.61)$$

$$T = \frac{2\pi}{\left(\frac{p+\omega}{2}\right)} = \frac{4\pi}{p+\omega} \text{ (рис. 2.29);}$$

$$a = \frac{2q}{\omega^2 - p^2} \sin t\Delta, \quad T_{\sigma} = \frac{2\pi}{\Delta}.$$

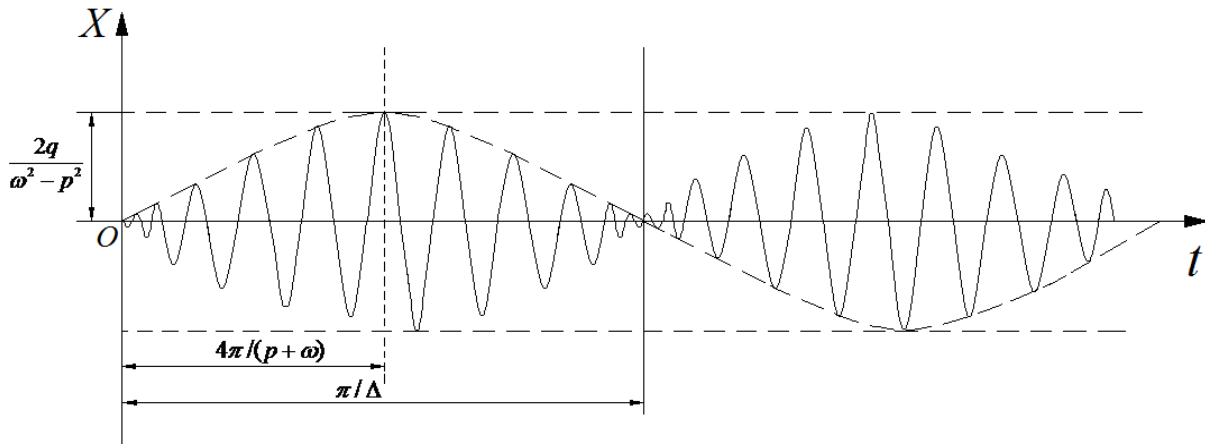


Рис. 2.29. Коливання биття

Вираз (2.61) справедливий тільки за відсутності сил опору в системі, що в дійсності не є можливим. Але вивченню коливань биття і їхніх характеристик, як перехідних процесів, та автоколивань механічних систем у майбутньому необхідно приділяти більшу увагу.

Розділ 3

ОСОБЛИВОСТІ КОЛИВАЛЬНИХ РУХІВ СКЛАДНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

3.1. Поперечні коливання стрижневих конструкцій

Явище коливань цього типу взагалі часто спостерігається в машинобудуванні, зокрема в автобудуванні та турбинобудуванні, де використовуються вали з прямолінійною віссю, що несуть ряд дисків (коленвали). Часто ці вали мають значні прогони, тоді важливо визначити критерії швидкості обертання цих валів ω , а це зводиться до ілюстрації їхніх поперечних коливань (частіше крутильних коливань).

Як приклад розглянемо балку на двох опорах, до якої прикладені зосереджені маси (рис. 3.1).

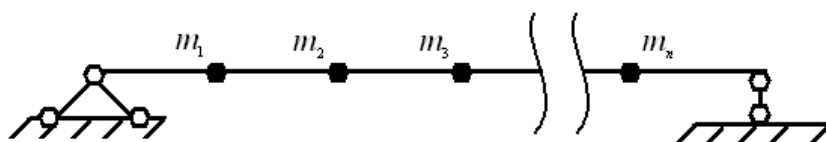


Рис. 3.1. Розрахункова схема балки на двох опорах, до якої прикладено зосереджені (точечні) маси $m_1 - m_n$

Прикладаємо сили інерції $-m_1\ddot{\omega}_1$; $-m_2\ddot{\omega}_2$; \dots ; $-m_n\ddot{\omega}_n$, де ω_1 , ω_2 , \dots , і відповідні сили пружності c_1x_1 ; $-c(x_2 - x_1)$, ω_n – поперечні переміщення, прогини осі балки в місці прикладення мас m_1 , m_2 , \dots , m_n , $\ddot{\omega}_1$, $\ddot{\omega}_2$, \dots , $\ddot{\omega}_n$ – прискорення мас. Схематично це матиме традиційний вигляд як на рис. 3.2.

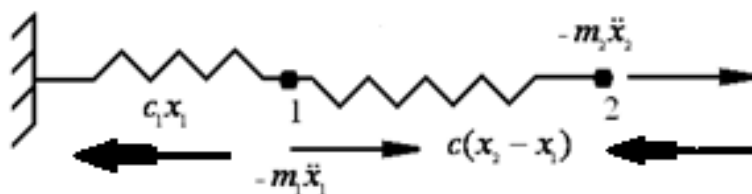


Рис. 3.2

У канонічному вигляді за принципом Даламбера маємо

$$x - m_1 \ddot{x} = 0;$$

$$-c_1 x_1 + c(x_2 - x_1) - m_1 \ddot{x}_1 = 0;$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c(x_2 - x_1) = 0. \quad (3.1)$$

На m_2 діє тільки сила напруження другої пружини $-c_2(x_2 - x_1)$, $\Rightarrow m_2 \ddot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) = 0$.

З урахуванням підстановки в систему третьої та т. д. – i -ї маси – загальне переміщення x виразиться зміщенням x_{i-1} , x_i та x_{i+1} .

На рис. 3.3 наведено приклади існуючих коливальних систем, у яких положення рухливих мас при коливаннях визначається зміною лінійних і кутових переміщень.

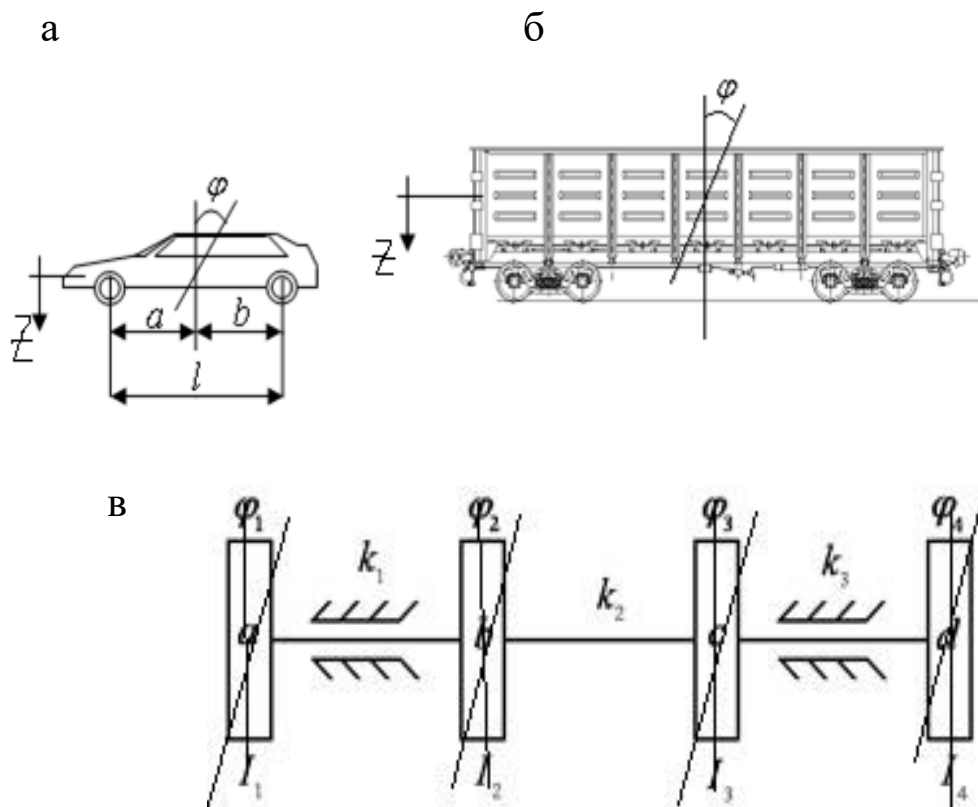


Рис. 3.3. Коливальні системи, у яких положення мас визначається вертикальним переміщенням z та кутом φ :

а – легковий автомобіль; б – вантажний вагон; в – турбінний вал із дисками, закріпленими в підшипниках

При складанні диференціальних рівнянь мас у просторовій системі координат додаємо до діючих зовнішніх сил вздовж вісей X, Y, Z ще і сили інерції $-m\ddot{x}, -m\ddot{y}, -m\ddot{z}$, тоді рівняння руху будуть мати вигляд

$$X - m\ddot{x} = 0; \quad Y - m\ddot{y} = 0; \quad Z - m\ddot{z} = 0. \quad (3.2)$$

У канонічному вигляді запишемо дані переміщення, що іменуються прогинами,

$$\begin{cases} \omega_1 = -\omega_1 \ddot{\omega}_1 \delta_{11} - \omega_2 \ddot{\omega}_2 \delta_{21} - \dots - \omega_n \ddot{\omega}_n \delta_{1n}; \\ \omega_2 = -\omega_1 \ddot{\omega}_1 \delta_{21} - \omega_2 \ddot{\omega}_2 \delta_{22} - \dots - \omega_n \ddot{\omega}_n \delta_{2n}; \\ \omega_n = -\omega_1 \ddot{\omega}_1 \delta_{n1} - \omega_2 \ddot{\omega}_2 \delta_{n2} - \dots - \omega_n \ddot{\omega}_n \delta_{nn} \end{cases} \quad (3.3)$$

згідно з формулою Крамера (матрична алгебра), де δ_{ik} – переміщення в напрямку i , викликане одиничною силою, що діє в напрямку k .

$$\delta_{ik} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EI} dx - \quad \text{за інтегралом Мора;}$$

$P_i = -m_i \ddot{\omega}_i = 1; P_k = -m_k \ddot{\omega}_k = 1$ – одиничні сили, які викликають одиничний момент $M_{i(k)}$.

За теоремою Максвела (взаємності переміщень), $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ – переміщення 1 та 2 одиничної сили у відношенні – рівні.

Для системи з одним ступенем вільності, вочевидь, $\omega_1 = -\omega_1 \ddot{\omega}_1 \delta_{11}$, що приблизно пропорційно $m\ddot{\omega} + c_1 \omega = 0$, оскільки

$$c = \frac{1}{\delta_{11}}.$$

Для системи з двома ступенями вільності на підставі виразу (3.3)

$$\begin{cases} \omega_1 = -\omega_1 \ddot{\omega}_1 \delta_{11} - \omega_2 \ddot{\omega}_2 \delta_{21} & ; \\ \omega_2 = -\omega_1 \ddot{\omega}_1 \delta_{21} - \omega_2 \ddot{\omega}_2 \delta_{22} \end{cases} \quad (3.4)$$

Розв'язуючи її, отримуємо

$$\omega_i = \lambda_i \sin(\omega t + \alpha).$$

Підставивши це рівняння у вирази (3.3) або (3.4), маємо

$$\begin{cases} \lambda_1 (m_1 \delta_{11} \omega^2 - 1) + \lambda_2 m_2 \delta_{12} \omega^2 = 0, \\ \lambda_2 (m_2 \delta_{22} \omega^2 - 1) + \lambda_1 m_1 \delta_{21} \omega^2 = 0 \end{cases}$$

Визначник $\int \begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} \omega^2 - 1 & m_2 \delta_{12} \omega^2 \\ m_1 \delta_{11} \omega^2 - 1 & m_2 \delta_{12} \omega^2 \end{vmatrix} = 0$.

Підставляючи $\omega_i = \lambda_i \sin(\omega t + \alpha)$ у вираз (3.3), отримаємо такі вирази:

$$\lambda_1 \sin(\omega t + \alpha) = -m_1 (\lambda_1 \sin(\omega t + \alpha))'' \delta_{11} - m_2 (\lambda_2 \sin(\omega t + \alpha))'' \delta_{12} - \dots - m_n (\lambda_n \sin(\omega t + \alpha))'' \delta_{in} \quad ;$$

$$\lambda_2 \sin(\omega t + \alpha) = -m_1 (\lambda_1 \sin(\omega t + \alpha))'' \delta_{21} - m_2 (\lambda_2 \sin(\omega t + \alpha))'' \delta_{22} - \dots - m_n (\lambda_n \sin(\omega t + \alpha))'' \delta_{2n} \quad ;$$

$$\lambda_n \sin(\omega t + \alpha) = -m_1 (\lambda_1 \sin(\omega t + \alpha))'' \delta_{n1} - m_2 (\lambda_2 \sin(\omega t + \alpha))'' \delta_{n2} - \dots - m_n (\lambda_n \sin(\omega t + \alpha))'' \delta_{nn} \quad .$$

На прикладі одного з рівнянь проводимо прості перетворення:

$$\lambda_1 (m_1 \delta_{11} \omega^2 - 1) + \lambda_2 m_2 \delta_{12} \omega^2 = 0.$$

Так само працюємо і з іншими рівняннями:

$$\begin{cases} \lambda_1 m_1 \delta_{21} \omega^2 + \lambda_2 (m_2 \delta_{22} \omega^2 - 1) + \dots + \lambda_n m_n \delta_{2n} \omega^2 = 0, \\ \lambda_1 m_1 \delta_{2n} \omega^2 + \lambda_2 m_2 \delta_{n2} \omega^2 + \dots + \lambda_n (m_n \delta_{nn} \omega^2 - 1) = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

За наявності коливань у системі амплітуда λ_i не обертається в 0, якщо визначник, що складається з коефіцієнтів системи (3.5), дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} \omega^2 - 1 & m_1 \delta_{12} \omega^2 & \dots & m_n \delta_{1n} \omega^2 \\ m_1 \delta_{21} \omega^2 & m_2 \delta_{22} \omega^2 - 1 & \dots & m_n \delta_{2n} \omega^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 \delta_{n1} \omega^2 & m_2 \delta_{n2} \omega^2 & \dots & m_1 \delta_{nn} \omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Записавши цей визначник у розгорненому вигляді та позначивши через a_i коефіцієнти при різних ступенях ω , отримуємо частотне рівняння n -го ступеня для квадрата частоти ω

$$1 - a_1 \omega^2 + a_2 \omega^4 - a_3 \omega^6 + \dots (-1)^n a_n \omega^{2n} = 0 \quad (3.6)$$

де

$$\omega_1 = +\sqrt{\omega_1^2}; \omega_2 = +\sqrt{\omega_2^2}; \dots; \omega_n = +\sqrt{\omega_n^2}.$$

Наприклад, для системи (3.4) з двома ступенями вільності розкриваємо визначник 2-го порядку та виходимо на біквдратне частотне рівняння

$$\omega^4 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) m_1 m_2 - \omega^2 (\delta_{11} m_1 + \delta_{22} m_2) + 1 = 0. \quad (3.7)$$

Тоді, остаточно розв'язавши його, визначаємо частоти коливального руху вала:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2(\delta_{11} \delta_{12} \delta_{12}^2 m_2)}} \cdot \left[\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1} + \sqrt{(\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1})^2 - 4(\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) \frac{m_2}{m_1}} \right],$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2(\delta_{11} \delta_{12} \delta_{12}^2 m_2)}} \cdot \left[\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1} - \sqrt{(\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1})^2 - 4(\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) \frac{m_2}{m_1}} \right].$$

3.2. Стійкість руху та автоколивання механічних систем

3.2.1. Стійкість механічних систем

При дослідженні стійкості механічних систем приділяють увагу визначенню стійкості рівноваги та стійкості руху.

Стійкість рівноваги – властивість механічної системи, яка знаходиться під дією сил рівноваги, після незначного відхилення повертатися в стан рівноваги.

Стійкість руху – властивість механічної системи, яка рухається під дією прикладених сил, майже не відхилятися від руху при будь-яких незначних або випадкових діях (слабкі пориви вітру та ін.). Рух, який не має цієї властивості, – нестійкий.

Умова стійкості механічної системи при русі – критерій стійкості. Всі рухливі об'єкти, які використовуються в техніці, повинні мати цю властивість: залізничний рухомий склад, автомобіль, літак, судно, снаряд, техніка, ракета, супутник Землі та ін.

Розрізняють встановлену та невстановлену рівноваги механічних систем. Завдання полягає у вивченні особливого руху механічних систем, виведення зі стану рівноваги після малих початкових збурення стану рівноваги. Внаслідок коливань зі зростаючими розмахами говорять про нестійкий рух. При гармонійних коливаннях система фактично повертається до стану рівноваги (монотонні наближення або загасання коливань) – стійкий рух.

При вирішенні багатьох технічних проблем необхідно приділяти особливу увагу перевірці стійкості рівноваги станів і стаціонарних режимів та аналізу впливу параметрів механічних систем на стійкість.

Для консервативних механічних систем з кінцевою кількістю ступенів вільності, коли справедлива теорія Лагранжа-Дирехле: якщо у стані рівноваги потенціальна енергія системи має мінімум, то цей стан стійкий.

Розглянемо, наприклад, тіло, закріплене на горизонтальній осі. За знайденою умовою тіло буде знаходитися в рівновазі під дією сили ваги $p = mg$, коли $\sum m_z(p) = 0$, тобто центр ваги C тіла займає найнижче або найвище положення (рис. 3.4): випадок *a* – невелике відхилення момента сили p прагне повернути тіло в стан рівноваги; випадок *б* – при скільки завгодно малому відхиленні момент сил p буде це відхилення збільшувати.

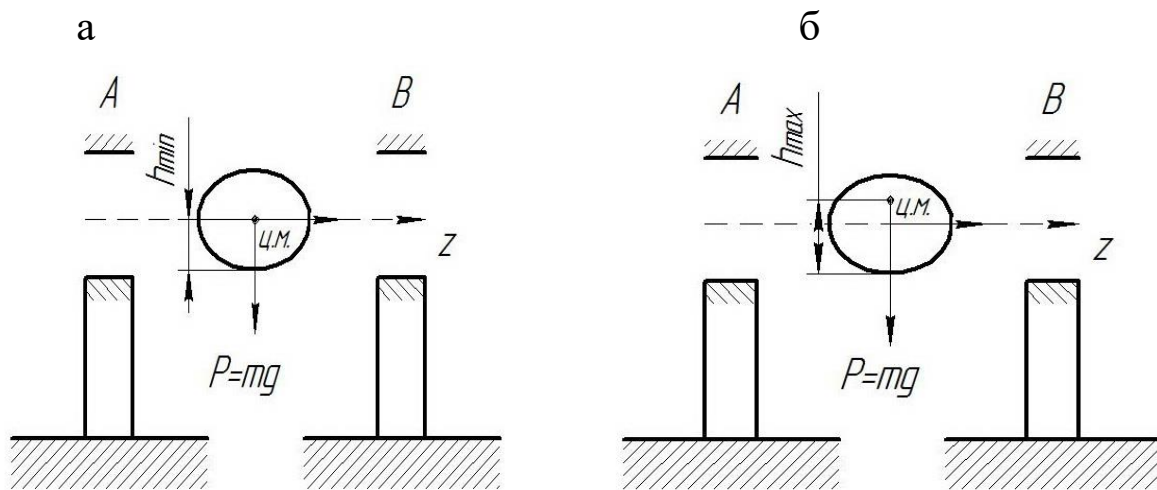


Рис. 3.4. Розрахункова схема стійкості системи:
 а – стійка рівновага тіла; б – нестійка рівновага тіла

Якщо центр мас тіла знаходиться на осі обертання, то рівновага тіла не змінюється, або астатична, тобто можлива втрата стійкості в кожний момент часу.

Рівновага тіла стійка, коли його центр мас тіла займає найнижчий стан, а нестійка – коли найвищий.

Умова рівноваги тіла, яке має нерухому вісь обертання, полягає в тому, що сума моментів всіх сил, які діють відносно цієї осі, має дорівнювати нулю $\sum M_z(F_k) = 0$.

Стосовно консервативних систем з одним ступенем вільності, то ознакою мінімальної потенціальної енергії Π є додатний коефіцієнт жорсткості c . Якщо n ступенів вільності більше одиниці, то Π_{\min} відповідає система нерівностей (критерій Сильвестра):

$$c_{11} > 0; \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \dots c_{14} \\ c_{21} & c_{22} \dots c_{24} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{41} & c_{42} \dots c_{44} \end{vmatrix} > 0. \quad (3.8)$$

На рис. 3.5 зображено перекинуте положення універсального напіввагона (а) і пасажирського вагона відкритого типу (б) при втраті поперечної стійкості, коли спочатку втратила горизонтальну стійкість колісна пара першої за ходом руху

екіпажної частини відносно рейкової колії, а потім і виникла перевага за величиною моменту, що переважає над моментом, що повертає кузов вагона з вантажем і пасажирами в початкове експлуатаційне положення [27, 28].

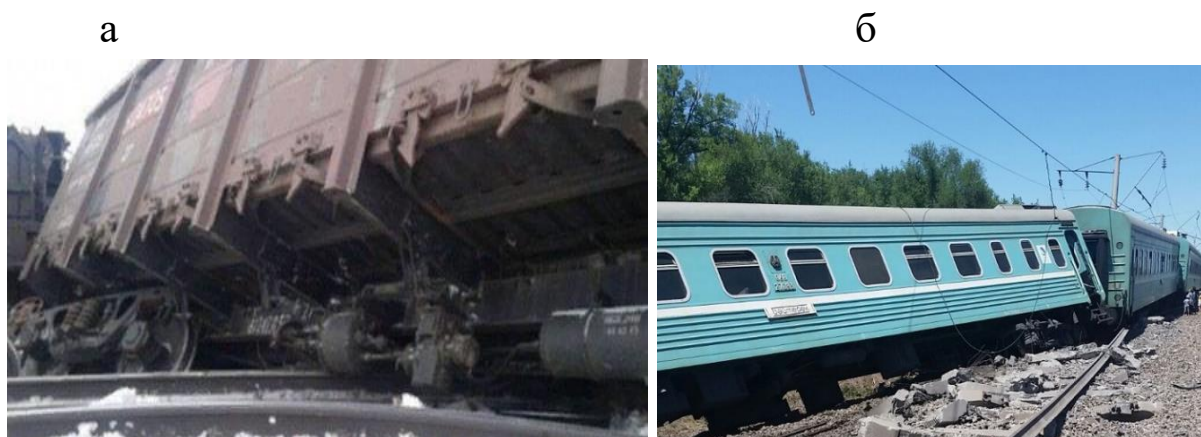


Рис. 3.5. Ілюстрація часткової втрати стійкості вагонів у складі вантажного та пасажирського поїздів:
 а – перекидання вантажного вагона;
 б – перекидання пасажирського вагона

3.2.2. Автоколивання механічних систем

Автоколивання (*від грец. – сам*) – коливання, що не загасають, можуть існувати за відсутності в коливальній системі зовнішніх збурювальних дій (на відміну від вимушених коливань) за рахунок активного елемента в системі, який заповнює незбіжні в реальній системі втрати енергії: визначається властивостями самої системи та не залежить від кінцевої зміни початкових умов.

Автоколивання: коливання маятника годинників, скрипкова струна при русі смичка та ін.

У багатьох випадках збільшення коливань поступово сповільнюється та рух прагне до деякого стійкого режиму зі сталими амплітудами A та періодами T – режими встановлених коливань.

Природа цього явища зрозуміла, якщо розглядаються коливання системи з тертям, коли характер тертя описується нелінійною функцією швидкості

$$R = -b_1 \dot{q} + b_3 \dot{q}^3, \quad (3.9)$$

де b_1, b_3 – додатні сталі.

Тоді диференціальне рівняння з урахуванням сил інерції, aq та пружних складових cq має вигляд

$$a\ddot{q} - b_1\dot{q} + b_3\dot{q}^3 + cq = 0. \quad (3.10)$$

Відмінність лінійної від нелінійної функції показана на рис. 3.6.

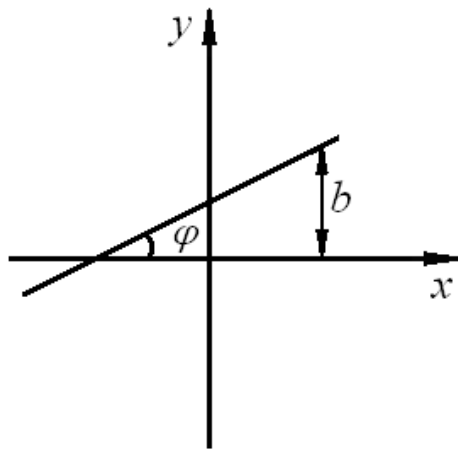


Рис. 3.6. Лінійна функція

Функція прямої $y = kx + b$, де $k = \operatorname{tg} \phi$.

Лінійні системи визначають тоді, коли властивості системи (пружність, маса, коефіцієнт тертя) зберігаються при зміненому стані системи, тобто не залежать від змін (y, x) швидкостей. Коливальні процеси описуються лінійними диференціальними рівняннями.

Тобто лінійні системи – такі системи, у яких протікають коливальні процеси, що описуються лінійними рівняннями. Властивості та характеристики нелінійних систем залежать від їхнього стану.

У зв'язку з тим, що відхилення від рівноваги дуже малі, нелінійними членами нехтують з відомими припущеннями, проводячи лінеаризацію.

Внаслідок дії тертя (у багатьох випадках від'ємного) може бути виявлена нестійкість системи. Внаслідок дії демпфірування вплив нелінійного члена рівняння на збільшення коливань буде зменшуватися, а рух буде прагнути до встановленого режиму з

постійною амплітудою. Ефект від'ємного тертя (що порушує стійкість механічних систем) наведено на рис. 3.7.

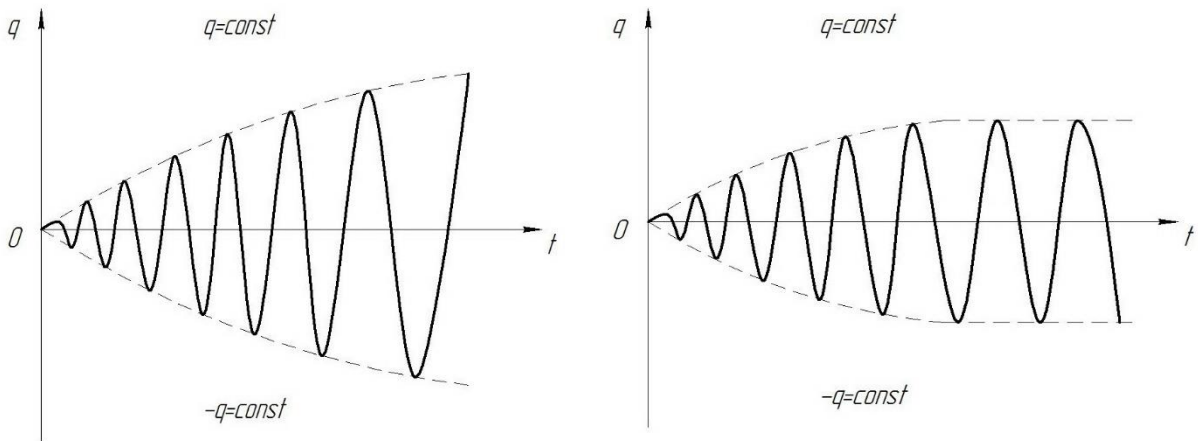


Рис. 3.7. Ефект від'ємного тертя

Сили тертя можуть бути причиною загасання коливань, але в деяких випадках - причиною їх розхитування.

Розглянемо систему з двох барабанів (рис. 3.8), що обертаються з кутовими швидкостями ω , при цьому $\omega_1 = \omega_2$.

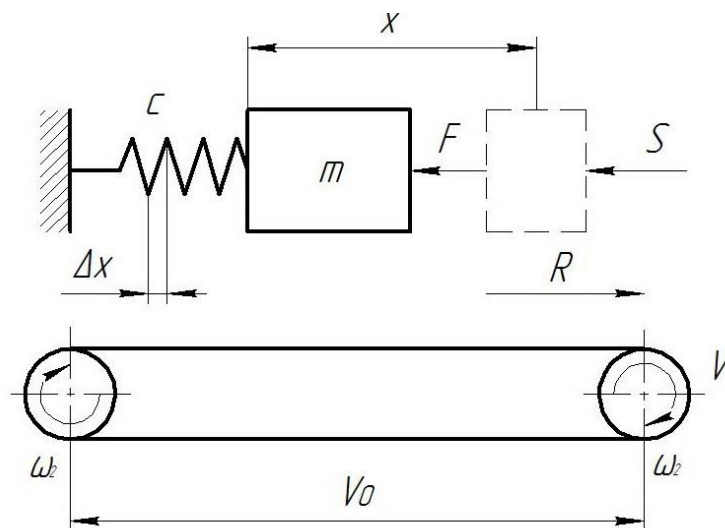


Рис. 3.8. Розрахункова схема системи з двох барабанів

На стрічці розташований вантаж масою m , рух якого обмежується пружиною з коефіцієнтом жорсткості c . Дія сили R

зміщує вантаж праворуч і викликає подовження пружини Δx . Нехай у стані рівноваги $F_{mp} = R_0$, тоді статичне зміщення вантажу складе

$$x_0 = \frac{R_0}{c}; \quad F_{пруж} = R_0; \quad R_0 = x_0 \cdot c.$$

Але відомо, що $R_0 = f(V_{відн})$, тоді характеристика тертя може бути такою, як на рис. 3.9.

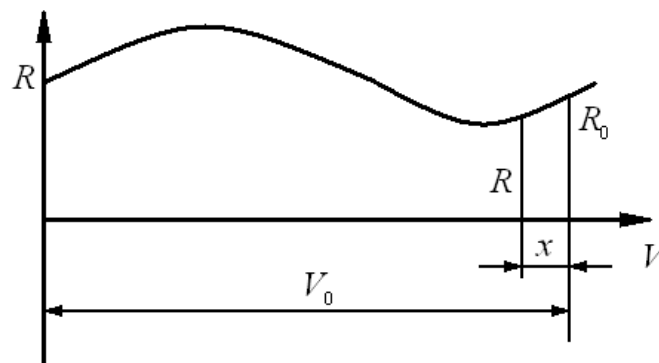


Рис. 3.9. Характеристика тертя

Припустимо, що внаслідок якого-небудь збурення $P(t)$ $t = 0$, вантаж виведений зі стану спокою.

Тоді характеристика руху може бути визначена так. Нехай при $t > 0$ додаткове зміщення вантажу – x , тоді $\mathcal{G}_{абс} = x'$, а швидкість відносно стрічки

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 - x'.$$

У процесі руху на вантаж діють три сили

$$F_{пруж} = -c(x + x_0).$$

Зовнішній опір $S = -kx'$.

Диференціальні рівнянні вантажу мають вигляд

$$-c(x + x_0) - kx' + R = mx'';$$

$$R \neq R_0;$$

$$V_{omn} \neq V_0$$

$$R = R_0 - R'_0 \cdot \dot{x}$$

$$R_0 = tg \phi$$

$$-c(x + \frac{R_0}{c}) - k\dot{x} + R = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + (R_0 + k)x' + cx$$

$$-c(x + \frac{R_0}{c}) - kx' + R_0 - R'_0\dot{x} = 0$$

$$-cx - R_0 - kx' + R_0 - R'_0\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$mx'' + cx + \dot{x}(R_0 + k) = 0$$

3.2.3. Принцип дії віброізоляторів, поглиначів та амортизаторів

Віброізолятори, поглиначі та амортизатори мають місце для пристроїв як засобів боротьби зі шкідливими динамічними явищами. В основу дії цих пристроїв покладено таке:

1. Амплітуди вимушених коливань достатньо малі, якщо (t) системи менше або дорівнює $\omega(t)$.

2. Тертя F призводить до якогось коливання енергії, а вимушені коливання виникають з меншими амплітудами, ніж за відсутності тертя (процес особливо проявляється в резонансній області).

3. Сили тертя поступово призводять до їх загасання (вільні коливання).

4. Цей принцип стосується віброізоляторів. Вібрації часто виникають при русі засобів, у т. ч. і вагонів у складі поїзда, і може призвести до навантаження режимів їхньої роботи і руйнування конструкції.

Ізоляція подібних явищ притаманна принципу дії спеціальних пристроїв. Віброізолятори – пружні елементи, які

спеціально вводяться до механічної системи для загасання коливань шляхом значного зменшення $\mathcal{Q}(t)$ (в основному високочастотні спектри коливань).

На початку заходів запобігають негативному впливу на вимірювальні прилади у вагоні встановленням до системи пружних елементів – амортизаторів, ресор, гумових і металевих прокладок, блоків тощо.

Другий принцип стосується поглиначів, головною частиною яких є елементи тертя (рідинного, сухого, гістерезисного).

Третій принцип стосується об'єднань (комбінування) для віброізоляторів і поглиначів у більш складні системи конструкційних елементів (демпфірування в цих складних амортизаторах сприяють швидкому загасанню вільних коливань, які виникають після поштовхів та ударів).

Розглянемо дію найбільш відомих пристроїв, принцип яких скрізь і повсякденно використовується в залізничній техніці (транспортних засобах).

Віброізолятори:

– активні – встановлюються між джерелами вібрації та основою для захисту від вимушених сил (рис. 3.10);

– пасивні – навпаки, встановлюються від можливих коливань основи (рис. 3.11).

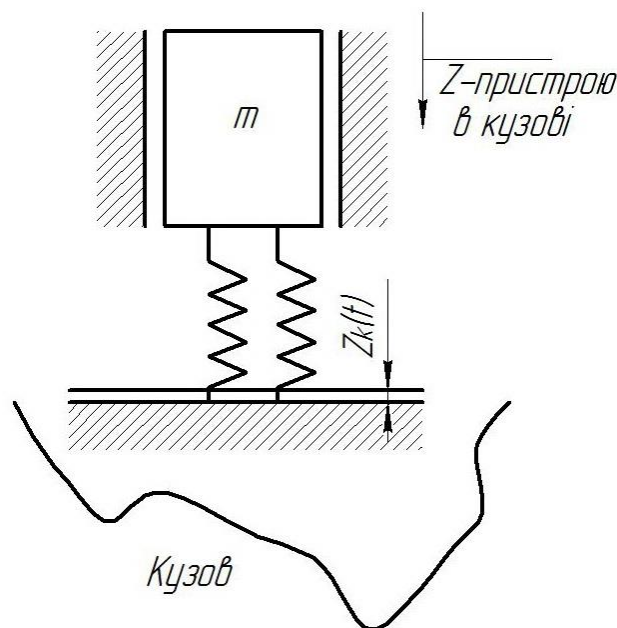


Рис. 3.10. Активні віброізолятори

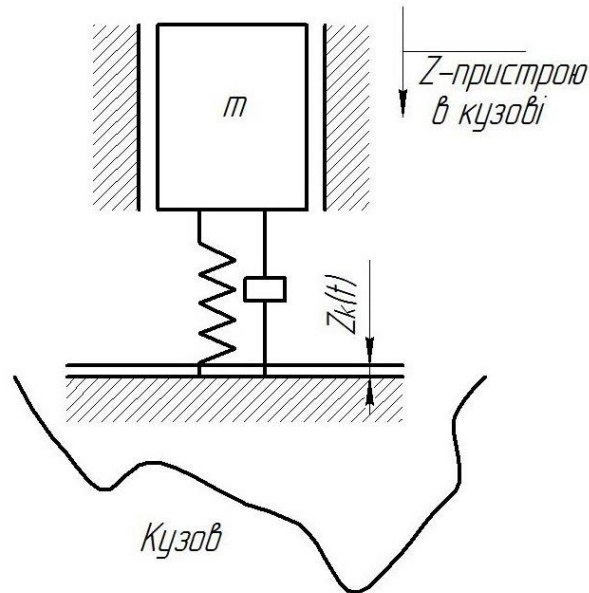


Рис. 3.11. Пасивні віброізолятори

Особливості віброізоляторів від кінематичного збудження наведено на рис. 3.12. При цьому частоти збудження строго не організовані, а самозбудження полігармонійного характеру є звичайним процесом, що потребує додаткового демпфірування, що спричиняє небезпеку підвищення коливань при будь-яких частотах збудження (цей принцип часто використовується в конструюванні автомобільного підвішування, які мають одночасно властивості віброізолятора та амортизатора, у цьому є сутність використання гідрогасильника, який значно розсіює енергію при коливаннях).

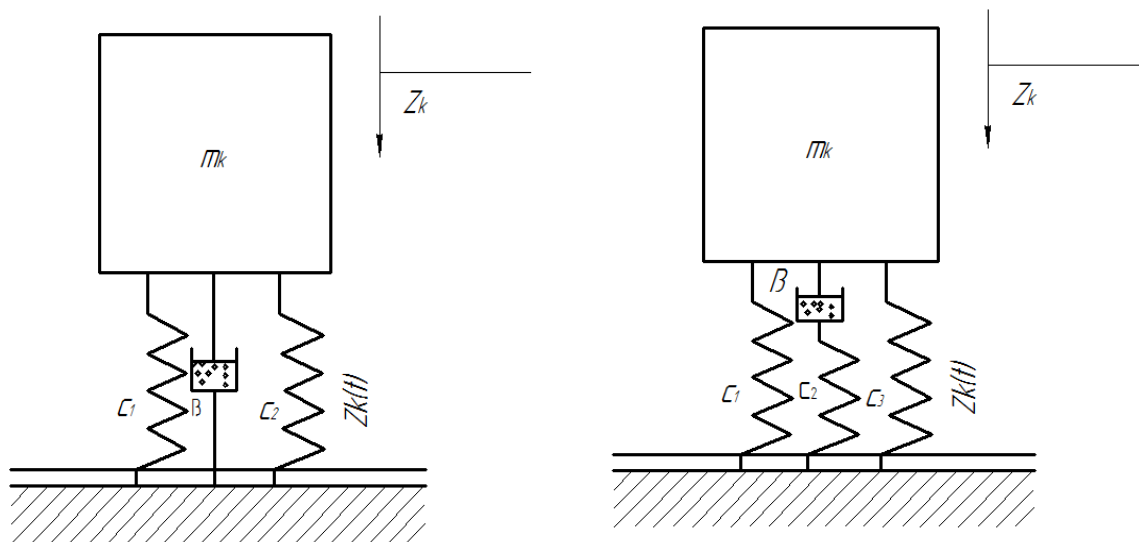


Рис. 3.12. Віброізолятори від кінематичного збудження

У пасажирських вагонах додаткові гнучкі елементи не потрібні (ускладнюють конструкцію гасильника). Сам гасильник має достатню характеристику непружного опору β .

За принципом Даламбера, процес коливань амортизованого об'єкта описується диференціальним рівнянням

$$m\ddot{z}_1 - c(z_1 - z_k) = 0,$$

$$z_k(t) = a \sin \omega t,$$

$$z_1 = a \chi \sin(\omega t + \theta),$$

де $\chi = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}} = \frac{1}{1 - n^2}$ – коефіцієнт передачі амплітуд.

Як видно, найбільш небезпечний стан, коли $\mathcal{G} = 1$, $\omega = \mathcal{G}$.

З пружного елемента визначається припустима величина переміщення об'єкта. Так, для жорсткого ($c \rightarrow \infty$) $\mathcal{G} \rightarrow \infty$, а $\eta \rightarrow \infty$, отже і $\chi \rightarrow 1$ та коливання маси та об'єкта, який амортизується будуть однаковими.

Позитивний ефект від пружного підвішування об'єкта лише при зниженні пружного елемента, який під час руху вагона з максимальною експлуатаційною швидкістю відповідає процесу коливань у зарезонансній зоні, n – зростає, а $\chi < 1$.

При експлуатаційній швидкості менше тієї, яка відповідає малій c , можливі резонансні коливання амортизуючого об'єкта, тоді до системи підвішування разом з пружними елементами вводять демпфери (непружний опір – гума, яка має пружні та в'язкі властивості), одночасно тоді рівняння запишемо у вигляді

$$m\ddot{z}_1 + c(z_1 - z_k) + \beta(z_1 - \dot{z}_k) = 0,$$

$$z_1 = ax_1 \sin(\omega t - \theta),$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{1 + 4\gamma^2 \cdot \frac{\omega^2}{\gamma^2}}}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\nu^2})^2 \cdot 4\gamma^2 (\frac{\omega^2}{\nu^2})}} = \frac{\sqrt{1 + 4\gamma^2 \gamma^2}}{\sqrt{(1 - \nu^2)^2 + 4\gamma^2 \nu^2}},$$

де

$$\gamma = \frac{\beta}{\beta_{кр}};$$

$$\beta_{кр} = 2\sqrt{mc}.$$

Це означає, що зі збільшенням β , x та z_1 збільшуються.

Правильно обрані параметри елементів амортизації різних приборів, експлуатованих на вагонах, сприяють підвищенню строку служби і стабільності їхньої роботи.

Зазвичай для різних машин $n = 500 \frac{\text{об}}{\text{хв}}$.

$$\frac{\bar{\omega}}{v} \geq 4,$$

$$\beta < \frac{1}{15},$$

якщо

$$\frac{\ddot{\omega}}{P} > 3\left(\mu \left(\frac{1}{8}\right)\right).$$

При $n \leq 500 \frac{\text{об}}{\text{хв}}$ це тихохідні машини.

Варіанти установок:

1) опорні (рис. 3.13);

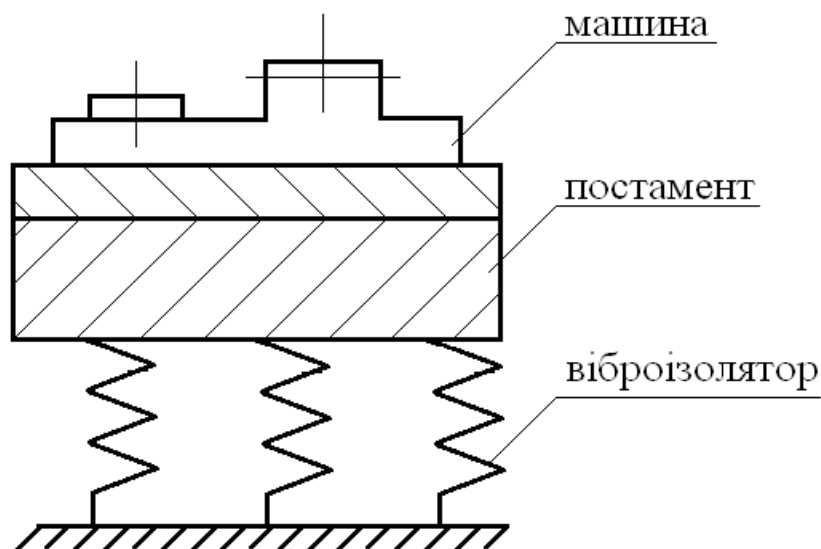


Рис. 3.13. Опорна установка

2) підвісні (вище підошви постаменту (рис. 3.14 3.15)).

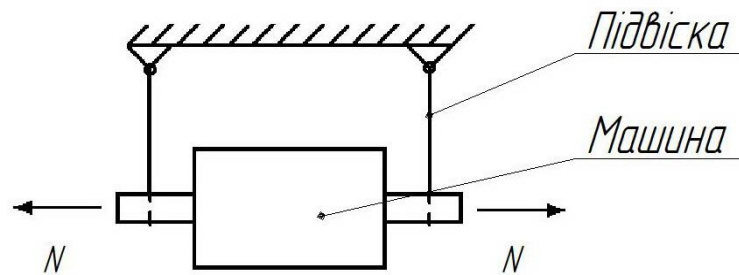


Рис. 3.14. Підвісні установки маятнікового типу

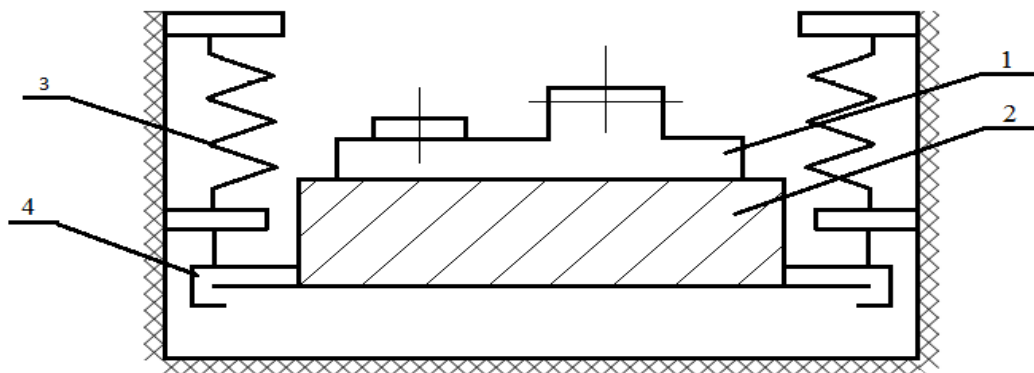


Рис. 3.15. Підвісна установка надпостаментного типу:
1 – машина; 2 – постамент; 3 – віброізолятор; 4 – підвісна опора

Переважають горизонтальні вимушені сили, що відповідають раціональному використанню маятнікового підвішування, наприклад у конструкції вагонів це ударно-центруючий пристрій серійної конструкції автозчепу СА-3 при взаємодії з ударною розеткою, центруючою балочкою та парою маятнікових підвісок; люлькове підвішування пасажирських візків моделей ТВЗ-ЦНДІ (тип I, II) відповідно з опорним пристроєм – люлькою для трирядних пружин центрального підвішування та комплектом з двох підвісок і чотирьох серег.

Чим більше довжина підвішування, тим менше власна частота – підвищується ефект віброізоляції.

Принцип пом'якшування підвішування – її податливість у бік дії $p(t)$ або пари $p(t)$.

Схема однофазного двигуна наведена на рис. 3.16.

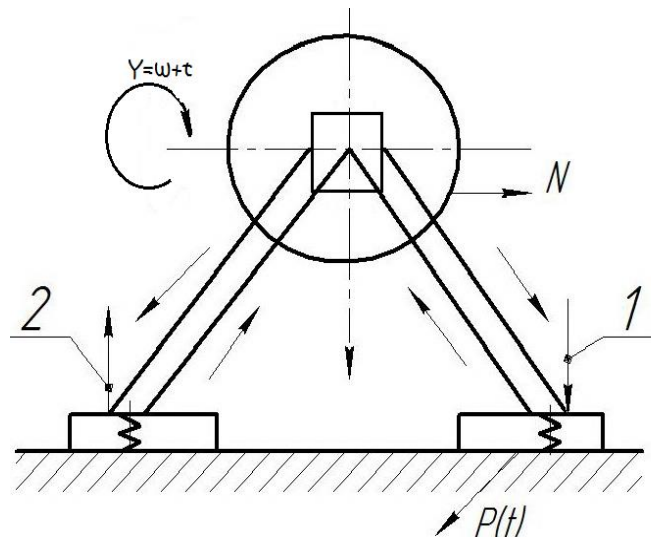


Рис. 3.16. Однофазний двигун: 1 – стиснення; 2 – розтягнення

Поглиначі

Існують різні схеми поглинання крутильних коливань:

а) рідинне тертя (рис. 3.17);

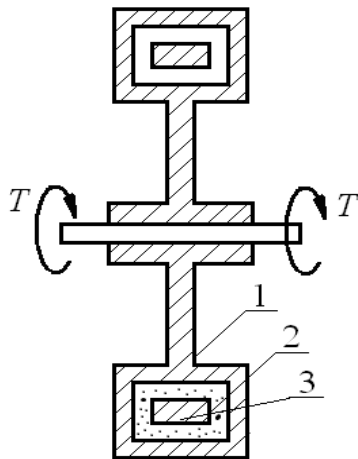


Рис. 3.17. Рідинне тертя:
1 – диск; 2 – тороподібна
складова; 3 – масивне кільце

б) сухе тертя (рис. 3.18).

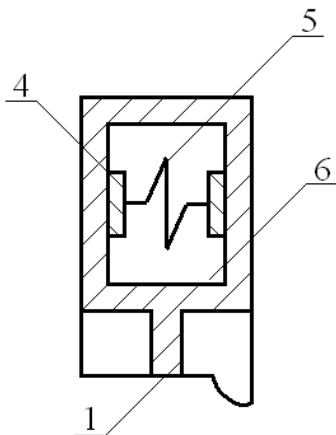


Рис. 3.18. Сухе тертя:
4 – диск; 5 – пружина;
6 – порожнини

Демпфірування утворюється за рахунок притиснення диска до стінок корпусу;

в) гістерезисного типу (рис. 3.19).

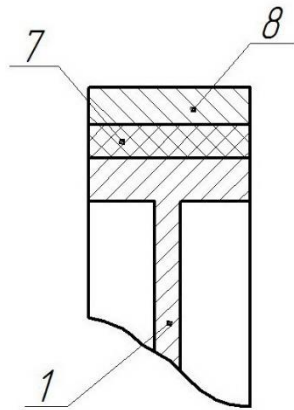


Рис. 3.19. Поглиначі гістерезисного типу:

7 – демпфіруюче кільце; 8 – бандаж

Демпфірування утворюється за рахунок інтенсивного розсіювання енергії в кільці 7.

Існують поглиначі ударної дії:

а) плаваючі (рис. 3.20);

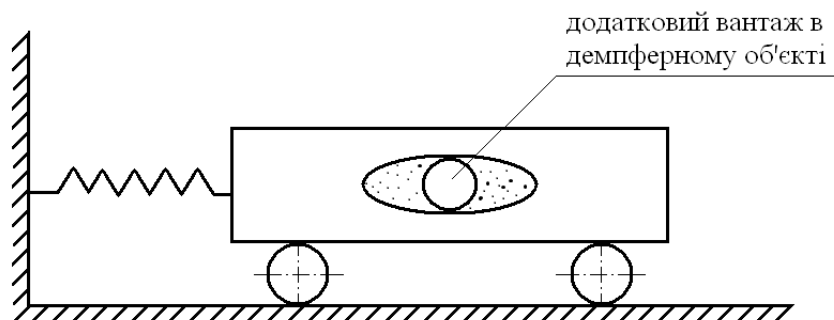


Рис. 3.20. Плаваючі поглиначі

Вони використовуються в тягах органів керування літаків, гелікоптерів, верстатів;

б) маятниковий (рис. 3.21), використувані у висотних конструкціях, баштових спорудах, димових трубах, вітряках;

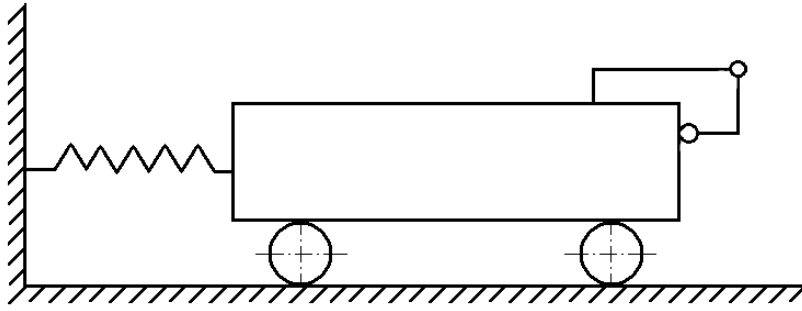


Рис. 3.21. Маятникові поглиначі

в) пружинні (рис. 3.22).

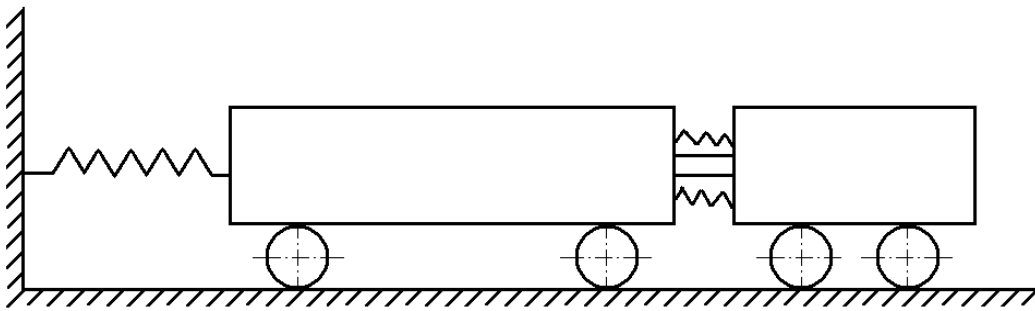


Рис. 3.22. Пружинні поглиначі

Приклад: різці, розточувальні оправки, вібраційні машини для проходження через резонанс.

3.3. Перехідні процеси коливань найпростіших механічних систем

Для визначення властивостей коливальної системи-осцилятора використовується перехідна функція, частотні характеристики і годограф коливальної системи. У загальному випадку властивості коливальної системи визначаються за її реакцією на зовнішнє вільне збурення заданого типу і досліджується реакція системи.

Нехай X_e – збурення (вхідна функція), а X_a – реакція на зовнішнє збурення (вихідна функція), тоді цей процес можна подати як блок-схему, наведену на рис. 3.23.

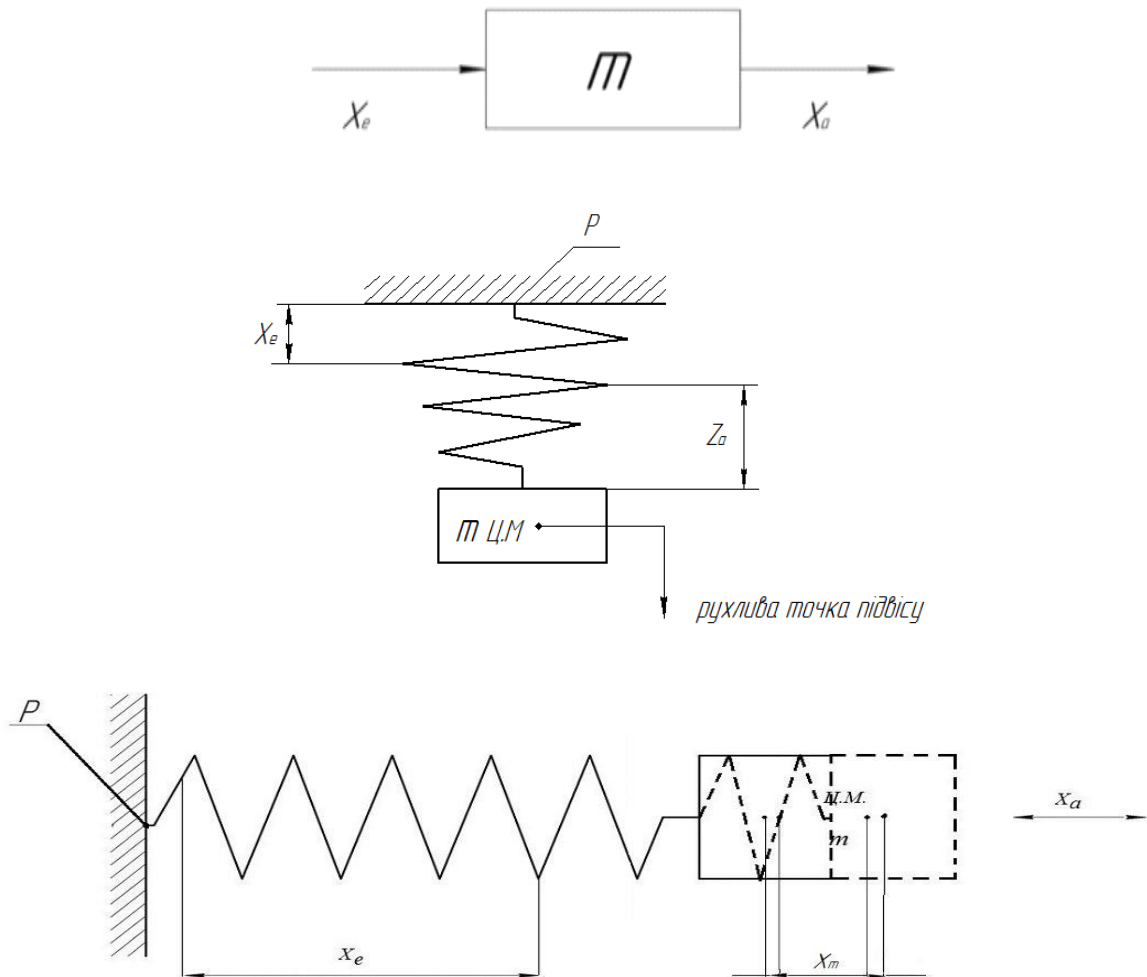


Рис. 3.23. Розрахункова схема

Розглянемо приклад, який ілюструє перехідний процес коливань найпростішої механічної системи.

Приклад. Підвішена маса переміщується горизонтально. Маса знаходиться в стані виведеної з рівноваги і здійснює тривалі коливання. Зміщення викликано швидким переміщенням точки підвісу по вертикалі і горизонталі (P). Зміщення – вхідна функція X_e , реакція на зовнішнє зміщення – коливання маси, а вихідна функція – координата X_a маси.

Найчастіше для опису перехідних процесів використовуються випробувальні функції (рис. 3.24):

а) одинична ступінчаста функція має такі умови:

$$X_e = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq t_0; \\ 1 & \text{при } t \geq t_0. \end{cases}$$

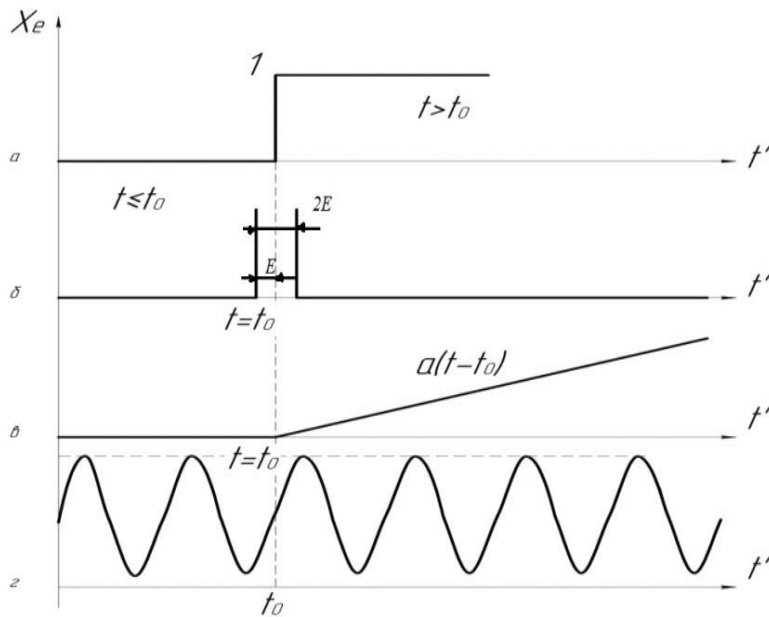


Рис. 3.24. Форми випробувальних (перехідних) функцій для дослідження коливальних систем

Помноживши її ординату на відповідне число, отримаємо ступінчасту функцію з необхідною висотою (переміщенням), сходинки (точок системи) при навантаженнях;

б) імпульсна функція (функція Дірака) відмінна від нуля у вузькій області близько моменту $t = t_0$.

У межі ширини цієї області маємо $2 \cdot \varepsilon \rightarrow 0$ при $t < t_0 - \varepsilon$ та $t > t_0 + \varepsilon$;

в) кусково-лінійна функція, яка збільшується,

$$\int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} x \cdot \varepsilon dt = 1,$$

$$X_e = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq t_0; \\ c^{(t-t_0)} & \text{при } t \geq t_0. \end{cases}$$

г) синусоїдальна випробувальна функція

$$X_e = A \cdot \sin(\omega t) \cdot (-\cos \omega t).$$

Для опису процесів у теорії коливань здійснюється комбінування на основі використання цих функцій. При цьому реакція системи на поодинокі ступінчасті зміщення – перехідна функція (рис. 3.25).

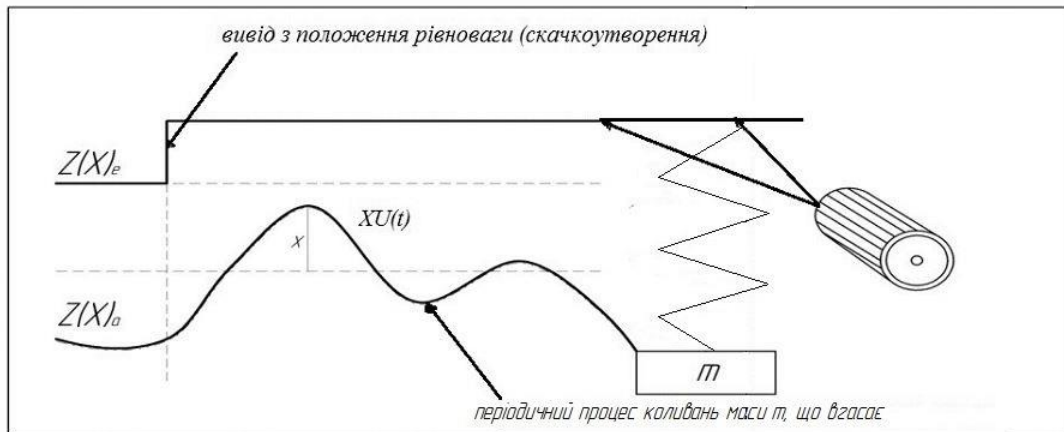


Рис 3.25. Побудова перехідної функції

На практиці можливе використання комплексного способу, що має вигляд $X_e = e^{i\omega t}$; $X_a = V \cdot e^{i(\omega t - \psi)} = V \cdot e^{-i\psi} \cdot e^{i\omega t}$, де V – коефіцієнт посилення, який показує, у скільки разів амплітуда вихідних коливань більше або менше амплітуди вхідних коливань; ψ – зсув за фазою між вхідними та вихідними величинами.

$$F = \frac{X_a}{X_e} = V \cdot e^{-i\psi}.$$

Введемо відношення вхідних і вихідних величин – комплекс коефіцієнтів підсилення коливальної системи, або передавальна функція. Нехай A – амплітуда збурення, тоді F - сила, а також V - швидкість, $\psi = f(A)$, тобто $F = F(A; \omega)$; $V = V(A; \omega)$; $\psi = \psi(A; \omega)$.

Ілюстрація амплітудно-частотної та фазово-частотної характеристик коливального процесу наведена на рис. 3.26. При цьому годограф $F(\omega)$ – амплітудно-фазової (комплексної) характеристика, чи годограф коливальної системи, подано на рис. 3.27.

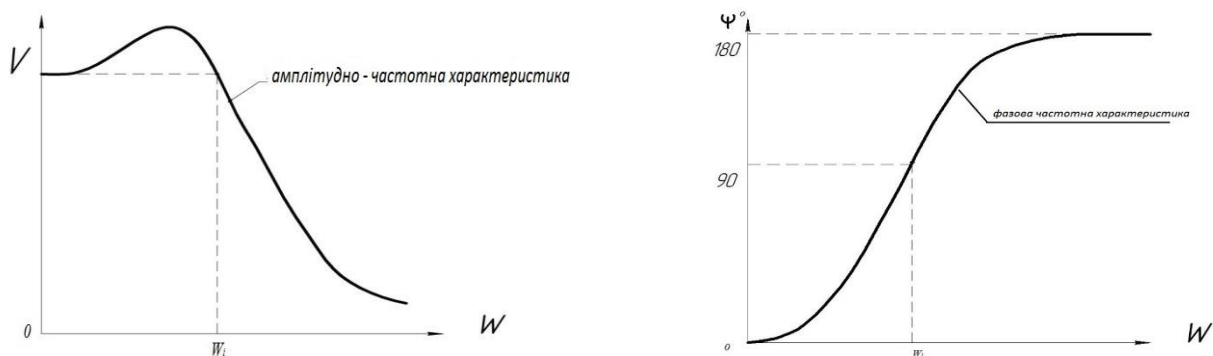


Рис. 3.26. Амплітудно-частотна та фазово-частотна характеристики коливального процесу

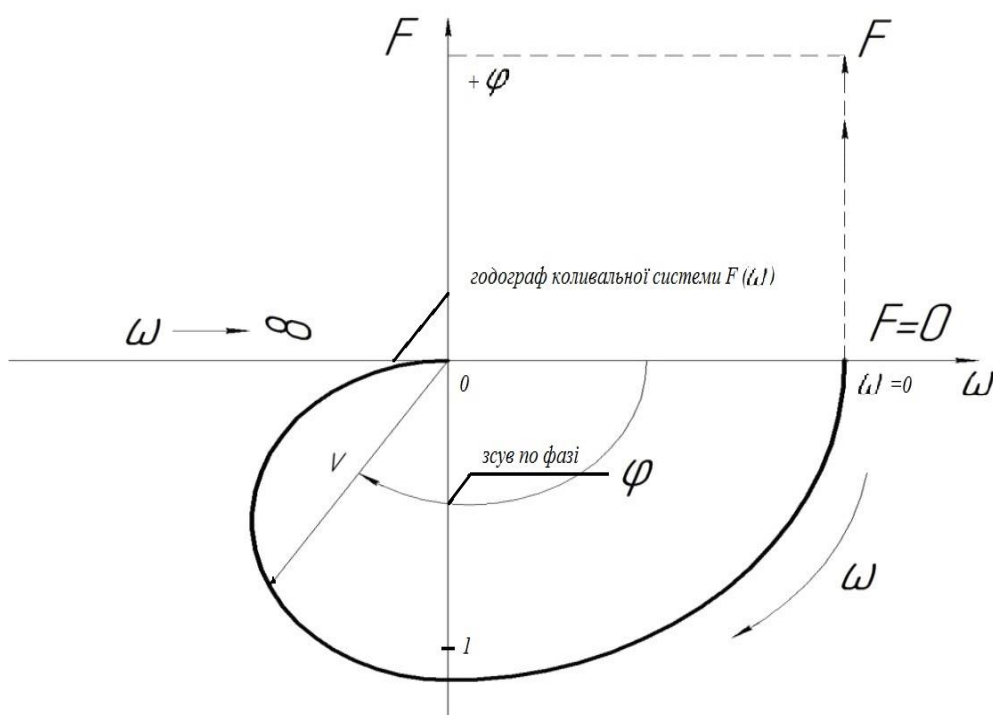


Рис. 3.27. Годограф $F(\omega)$ амплітудно-фазової (комплексної) характеристика, чи годограф коливальної системи

Перехідні процеси виникають при зміні режимів колювання. Наприклад, при русі транспортних засобів (при входженні вагона на стрілочний перевід, рух автомобіля по непрогнозованих нерівностях дорожнього покриття) виникають власне поступальні загасальні і періодичні вимушені колювання – це типовий перехід системи з одного режиму в інший. Він виникає лише в початковий момент входження транспортного засобу на ділянку з

періодичною нерівністю. Якщо на коливальну систему діє періодичне зовнішнє збурення з частотою ω , то слід припустити, що вимушений рух буде відбуватися з тією самою частотою, а переміщення запишуться формулою

$$z(x) = x_0(z_0) \cdot V \cdot \cos(\eta \cdot \tau - \psi),$$

$$e_i(\varphi \cdot t - \psi) = \cos(\eta \cdot t - \psi) \text{ – комплексна функція.}$$

Залежно від частоти зміщення, власної частоти і виду початкових умов можлива надзвичайно велика кількість типів коливань:

а) накладення вільних і вимушених коливань в разі $\omega < V$, що описується графічною залежністю, наведеною на рис. 3.28;

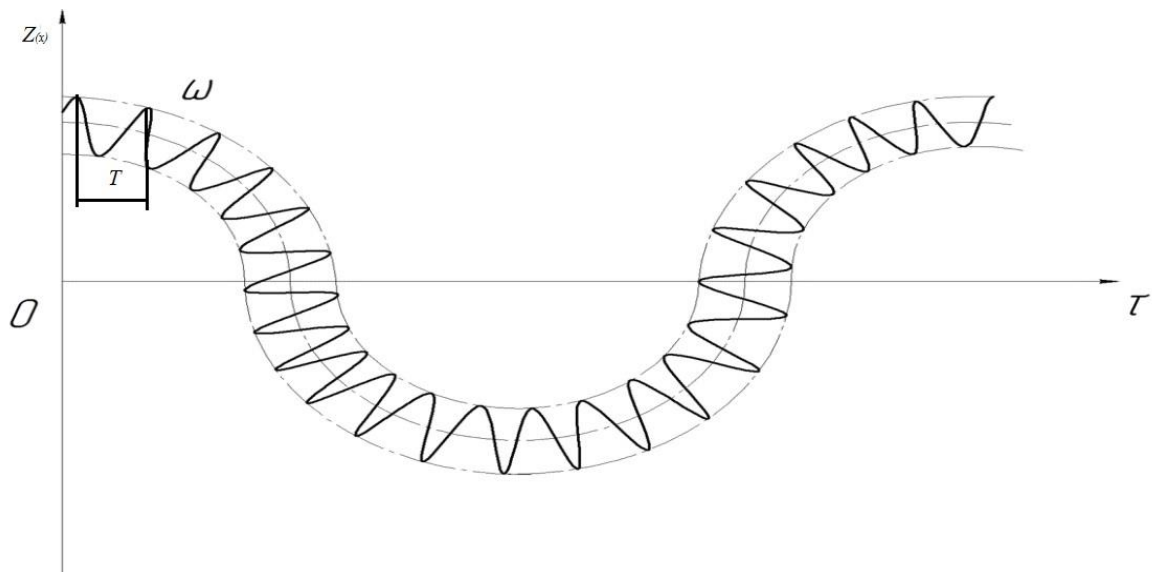


Рис. 3.28. Накладення вільних і вимушених коливань при $\omega < V$

б) накладення вільних і вимушених коливань при $\omega > V$ описується графічною залежністю, наведеною на рис. 3.29;

в) накладення вільних і вимушених коливань при $V \approx \omega$ (коливання типу биття). Ці коливання описуються графічною залежністю, наведеною на рис. 3.30.

$$\begin{cases} x_1 = A \cdot \cos(\omega t); \\ x_2 = A \cdot \cos(\omega + \Delta \cdot \omega) \cdot t. \end{cases}$$

$\Delta\omega \ll \omega$, тобто початкові фази дорівнюють 0.

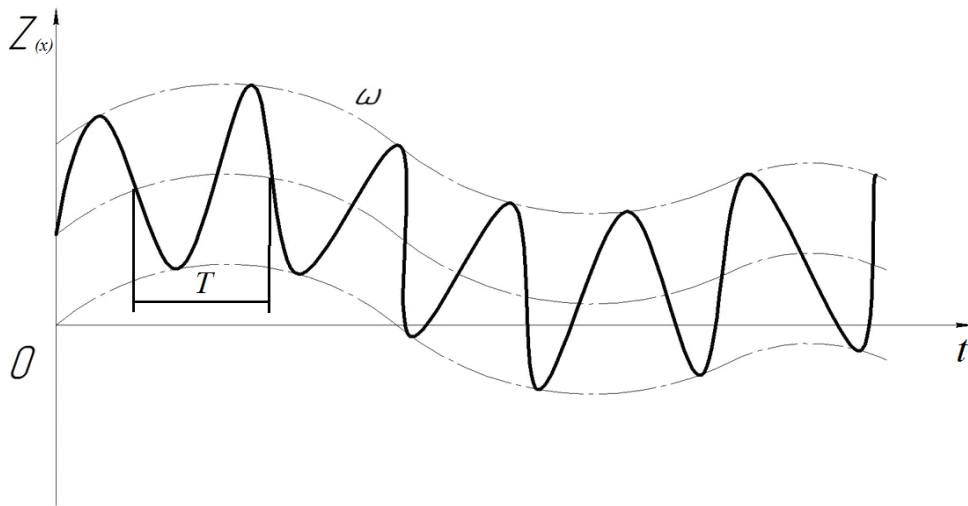


Рис. 3.29. Накладення вільних і вимушених коливань при $\omega > V$

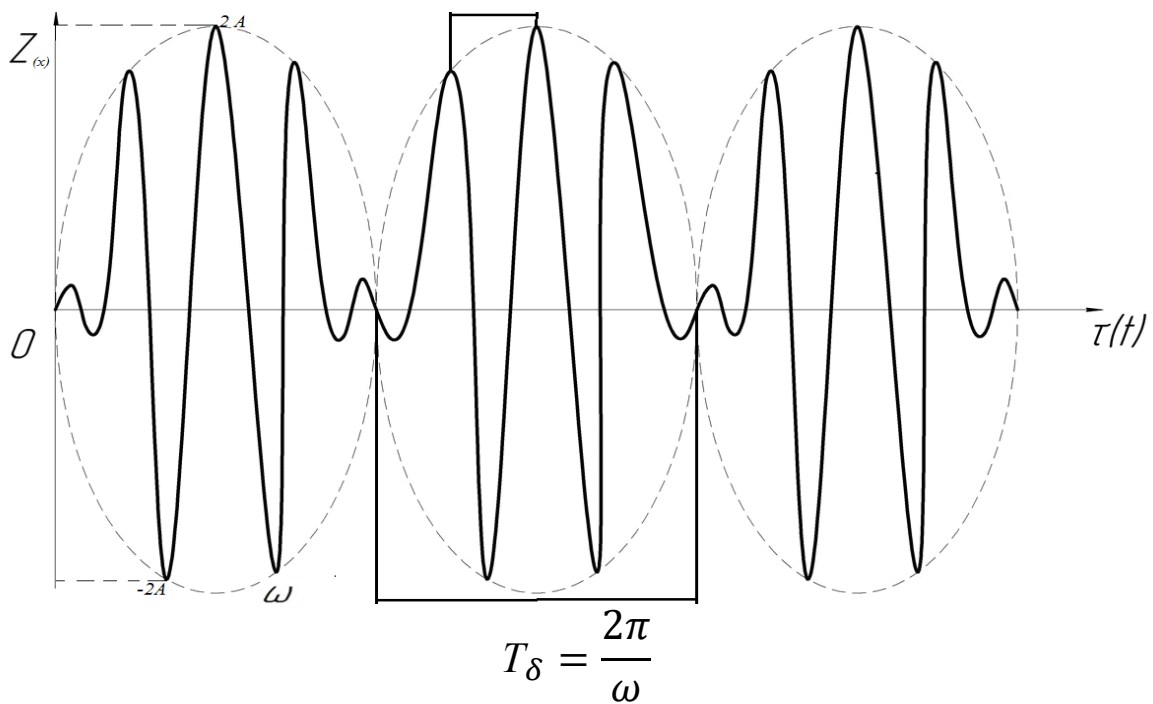


Рис. 3.30. Коливання биття

Результуюче переміщення при коливаннях запишеться як

$$\ll X = \left(2 \cdot A \cdot \cos \frac{\Delta \cdot \omega}{2} \cdot t \right) \cos \omega t, \quad \frac{\Delta \omega}{2} \quad \omega.$$

Амплітуда биття

$$A_b = \left| 2 \cdot A \cdot \cos \frac{\Delta \cdot \omega}{2} \cdot t \right|.$$

Період биття

$$T_{\delta} = \frac{2\pi}{\Delta \cdot \omega}; \quad \int \omega \delta = \omega - V.$$

$$T_{\delta} = \frac{2\pi}{\omega};$$

г) накладення вільних і вимушених коливань при $V = \omega$ (резонанс). Графік, який характеризує явище резонансу має вигляд як на рис. 3.31. При цьому має інтерес особливий випадок переходу при резонансі. Його умова записується як $\eta = 1$, $\omega = \nu$, $\tau \rightarrow \infty$, $\tau = \frac{2\pi}{\omega - \nu}$, тоді переміщення запишуться як $z = \frac{z_0}{2} \cdot \tau \cdot \sin t$, отже $r = \frac{2\pi}{0}$, $\Rightarrow z \rightarrow \infty$, тобто графік необмежено зростає, що остаточно призведе до резонансного режиму і руйнування конструкції.

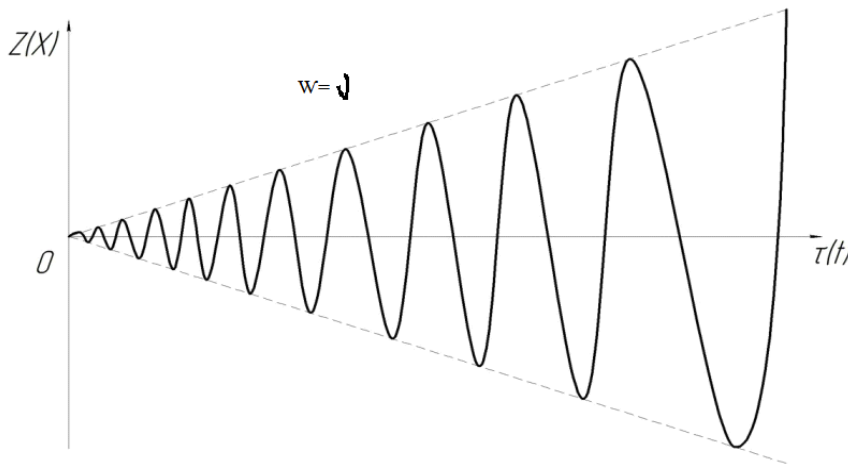


Рис. 3.31. Резонанс

Порівняємо це рівняння з $x'' + 2 \cdot n \cdot x' + p^2 \cdot x = 0$ — рівняння вільного коливання системи при лінійному опорі; $m \cdot x'' = -c \cdot x - k_1 \cdot x'$ і припустимо, що $R'_0 + k = k_1 = K$ — ефективний коефіцієнт в'язкого тертя.

Якщо $R'_0 + k > 0$, то $A \downarrow$ і коливання поступово загасають, якщо $R'_0 + k < 0$, то $A \uparrow$ і коливання будуть зростати, якщо

$R'_0 + k = 0$, загасання зникає і зміщення руху являтимуть собою гармонійні коливання (рис. 3.32).

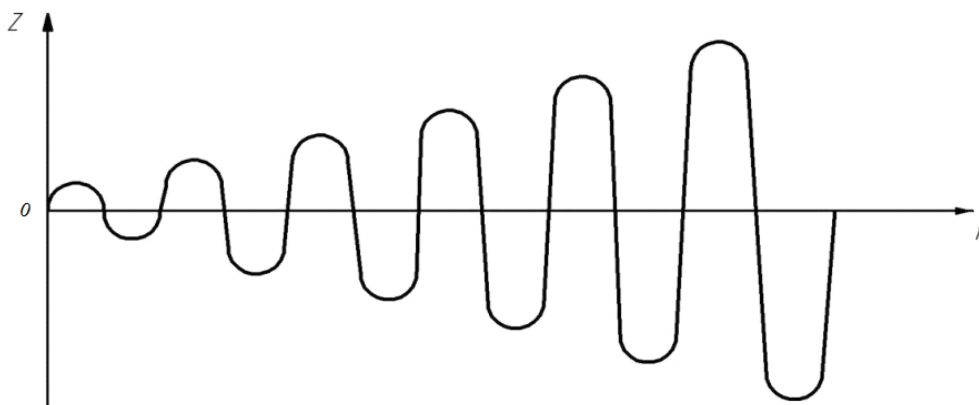


Рис. 3.32. Графік гармонійних коливань

Явище негативних загасань при негативному терті зрозуміти не складно. Коли вантаж рухається вправо, тобто в бік руху стрічки $V_{\text{відн}} \downarrow$, $F_{\text{тр}} \uparrow$ та $\Delta F_{\text{тр}}$ – спрямована праворуч, тобто в бік руху. В іншому інтервалі t , коли під дією жорсткості з пружини вантаж повертається вліво, $\Delta F_{\text{тр}}$ спрямовано так само ліворуч, тобто знову в бік руху. Це і спричинить зростання амплітуд коливань.

Енергія системи змінюється внаслідок роботи, здійснюваної різними складовими сил тертя R . Лінійна здійснює позитивну роботу, тобто вносить енергію в систему, а нелінійна – досконалу негативну роботу, тобто зменшує енергію системи.

При стаціонарних автоколиваннях приплив енергії компенсує її витрати (у середньому за один коливальний цикл), і система ніби консервативна (без розсіювання енергії). Амплітуда коливань виражається повністю власними властивостями системи і не залежить від початкових умов, на відміну від амплітуди вільних коливань консервативної системи. Для виявлення параметрів частоти і амплітуди сталих автоколивань необхідний аналіз відповідності нелінійної задачі. Хоча автоколивання відбуваються тільки за наявності зовнішнього збурення $p(t)$, то само джерело не має коливальних властивостей, а коливальний характер відбору енергії від джерела, ніби управляє самим рухом системи.

Питання для самоконтролю

1. Мета і завдання дисципліни «Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу». Загальні відомості з теорії коливань механічних систем та удару. Характеристика елементів коливальної системи.

2. Класифікація сил. Позиційні сили. Сутність дії сили на коливальну систему як фактор часу та її наслідки.

3. Дисипативні сили. Сили, що збуджують. Кількість ступенів вільності.

4. Вільні коливання. Лінійні системи з одним ступенем вільності без непружних опорів.

5. Загальні методи складання рівнянь руху коливальних систем.

6. Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь коливальних систем.

7. Методи розв'язання рівнянь руху механічних систем з використанням програмного забезпечення.

8. Основні характеристики коливального процесу.

9. Вільні коливання механічних систем при в'язкому опорі.

10. Логарифмічний декремент загасання. Коливання вантажу на підвісці як модель пружно-в'язкого зв'язку ресорного підвішування вагонного візка.

11. Змушені коливання системи з одним ступенем вільності.

12. Крутильні коливання валів з дисками. Власні форми коливань.

13. Лінійні системи з кількома ступенями вільності без непружних опорів.

14. Складання рівнянь руху системи з кількома ступенями вільності.

15. Розв'язання рівнянь руху для найпростішої системи.

16. Визначення основних характеристик коливального процесу. Частоти й форми коливань.

17. Перехідні процеси коливань найпростіших механічних систем

18. Змушені коливання систем з кількома ступенями вільності.

19. Коливання стрижнів постійного перерізу.

20. Поперечні згинальні коливання стрижнів.
21. Випадкові коливальні процеси механічних систем.
22. Стійкість руху й автоколивання механічних систем.
23. Згинальні коливання однопрогонової балки з різними межевими умовами.
24. Умови забезпечення стійкості механічної системи.
25. Експериментальне дослідження коливальних процесів механічних систем.

Нормативні посилання

1. ДСТУ ГОСТ 22235-2015. Вагони вантажні магістральних залізничних доріг колії 1520 мм. Загальні вимоги щодо забезпечення збереження під час завантажувально-розвантажувальних та маневрових робіт (ГОСТ 22235-2010, ІДТ). Київ: ДП «УкрНДНЦ», 2015.

2. ГОСТ 15150-69. Машины, приборы и другие технические изделия. Исполнения для различных климатических районов. Категории, условия эксплуатации, хранения и транспортирования в части воздействия климатических факторов внешней среды. Изменение принято Межгосударственным советом по стандартизации, метрологии и сертификации (протокол № 15 от 28.05.1999 г.). Москва: Стандартинформ, 2010.

3. Редукторно-карданные приводы вагонных генераторов пассажирских ЦМВ: Руководство по ремонту Л2.0003/12-4694 РВ. Киев: Укрзалізниця, 2009. 85 с.

4. ГОСТ 12.1.030-81 ССБТ. Электробезопасность. Защитное заземление, зануление (ССБП. Електробезпека. Захисне заземлення, занулення).

5. Т 12.01. № ЦВ-0041. Типовий технологічний процес роботи пунктів технічного обслуговування вагонів. Київ: Укрзалізниця, 2004. 312 с.

Бібліографічний список

1. Анісімов І. О. Коливання та хвилі: підруч. для студ. вищ. навч. закл. Вид. 2-ге, перероб. і доп. Київ: ВПЦ «Київ. ун-т», 2009. 399 с.
2. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Ленинград: Политехника, 1990. 272 с.
3. Магнус К. Колебания: Введение и исследования колебательных систем. Москва: Мир, 1982. 304 с.
4. Лазарян В. А. Динаміка транспортних засобів: Вибіркові твори. Київ: Наукова думка, 1985. 526 с.
5. Дьомін Ю. В. Залізнична техніка міжнародних транспортних систем (вантажні перевезення). Київ: Юнікон-Прес, 2001. 342 с.
6. Вершинский С. В., Данилов В. Н., Хусидов В. Д. Динамика вагона: учеб. для вузов ж.-д. трансп. / под ред. С. В. Вершинского. Изд. 3-е, перераб. и доп. Москва: Транспорт, 1991. 360 с.
7. Дьомін Ю. В., Черняк Г. Ю. Основы динаміки вагонів. Київ: КУЕТТ, 2003. 270 с.
8. Фейгін О. О. Фізика – неймовірно цікава наука. Харків: Видавнича група «Основа», 2010. 160 с.
9. Булгаков В. М. Теоретична механіка. Київ: Центр навчальної літератури, 2018. 640 с.
10. Павловський М. А. Теоретична механіка: підруч. для студ. вищ. навч. закл. Київ: Техніка, 2002. 512 с.
11. Вайнберг Д. В., Писаренко Г. С. Механічні коливання та їх роль у техніці. Київ: Наукова думка, 1985. 276 с.
12. Савельєв І. В. Курс загальної фізики. Книга 1. Механіка. Київ: Вища школа, 2000. 578 с.
13. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. Санкт-Петербург: Лань, 2005. 440 с.
14. Алфутов Н. А., Колесников К. С. Устойчивость движения и равновесия. Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. 256 с.
15. Баженов В. А. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології і моделювання: підруч. для студ. вищ. навч. закл. Київ: ВІПОЛ, 2013. 896 с.

16. Конструирование и расчет вагонов / В. В. Лукин, Л. А. Шадур, В. Н. Котуранов и др.; под ред. В. В. Лукина. Москва: УМК МПС, 2000. 731 с.

17. Енциклопедія Сучасної України / гол. редкол.: І. М. Дзюба, А. І. Жуковський, М. Г. Железняк та ін.; Ін-т енциклопедичних досліджень НАН України. Київ, 2014. Т. 14. 1600 с.

18. Пісаренко Г. С. Опір матеріалів / за ред. Г. С. Пісаренка. Київ: Вища школа, 1986. 775 с.

19. Візник Р. І., Рибін А. В., Куденко І. А. Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу: конспект лекцій. Харків: УрДАЗТ, 2012. Ч. 1. 26 с.

20. Візник Р. І., Рибін А. В. Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу: метод. вказівки до виконання практич. занять і контр. робіт для всіх форм навчання. Харків: УкрДУЗТ, 2017. 42 с.

21. Редукторно-карданні приводи підвагонних генераторів пасажирських ЦМВ: керівництво з ремонту Л2.0003/12-4694 РВ.

22. Борзилов І. Д. Технологія технічного обслуговування та ремонту вагонів. Харків: УкрДАЗТ, 2003. 246 с.

23. Другаль С. А. Исследование и разработка вибрационных погрузочно-разгрузочных машин и нормирование их параметров по условиям взаимодействия с железнодорожными вагонами: дисс. ... д-ра техн. наук: 05.22.07. Москва, 1980. 527 с.

24. Сендеров Г. К., Лосев П. Р., Другаль С. А. Сохранность вагонов при погрузочно-разгрузочных и маневровых работах. Москва: Транспорт, 1984. 158 с.

25. Омельченко О. Д. Організація навантажувально-розвантажувальних робіт: конспект лекцій. Київ : ДЕТУТ, 2008. 286 с.

26. Новіков О. Є. Нові науково-технічні рішення з метою збереження і покращення експлуатації підвагонного генератора з редукторно-карданним приводом. Зб. наук. праць Укр. держ. ун-ту залізнич. трансп. Харків: УкрДУЗТ, 2015. Вип. 158, Т. II. С. 123-125.

Інформаційні ресурси

27. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Колебания>.

28. [http://conspectus.theschool.spb.ru/index.php/ДЗ-Механические колебания](http://conspectus.theschool.spb.ru/index.php/ДЗ-Механические_колебания).

29. <https://topwar.ru/150589>.

30. <http://ec-sport.kz/12045>.

ВИЗНАЧЕННЯ РОЗРАХУНКОВИХ ПАРАМЕТРІВ КОЛИВАЛЬНИХ СИСТЕМ

1. Види з'єднань елементів ресорного підвішування вагонів, їхні власні коливання

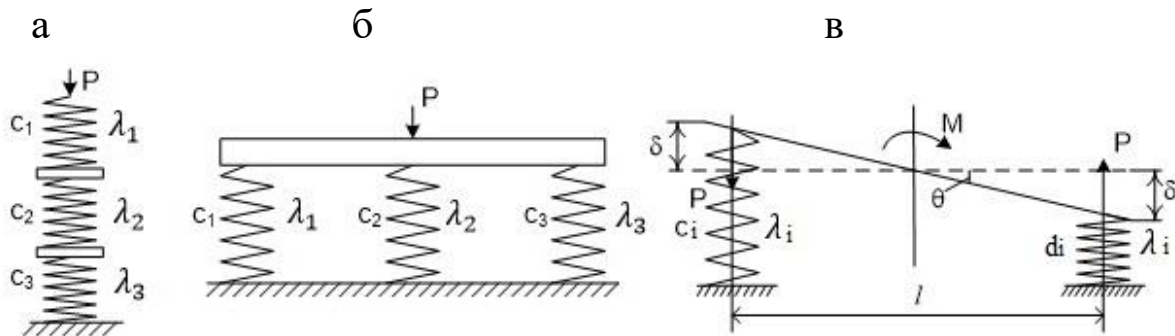


Рис. Д.1. Розрахункові схеми ресорного підвішування вагонів:
 а – послідовне з'єднання; б – паралельне з'єднання;
 в – визначення кутової жорсткості надресорної балки візка

Задача 1. Послідовне з'єднання елементів (рис. Д.1,а).

Для визначення загальної жорсткості системи при послідовному з'єднанні елементів можна скористатися формулами, наведеними нижче.

$$P = P_1 = P_2 = P_3, \quad (\text{Д.1.1})$$

$$f = f_1 + f_2 + f_3, \quad (\text{Д.1.2})$$

$$f = P \cdot \lambda; f_1 = P \cdot \lambda_1; f_2 = P \cdot \lambda_2; f_3 = P \cdot \lambda_3, \quad (\text{Д.1.3})$$

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3. \quad (\text{Д.1.4})$$

Оскільки, $\lambda = \frac{1}{c}$, то

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}, \quad (\text{Д.1.5})$$

або

$$C = \frac{c_1 \cdot c_2 \cdot c_3}{c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3}. \quad (\text{Д.1.6})$$

Приклад. Ресорне підвішування пасажирського вагона складається з чотирьох ресорних комплектів. Кожний ресорний комплект включає центральне й буксове підвішування. Жорсткість пружин одного комплекту центрального підвішування

$$c_p = 60 \text{ кН/м}$$

Жорсткість буксових пружин, встановлених відносно одного буксового вузла,

$$c_b = 1630 \text{ кН/м.}$$

Задача 2. Паралельне з'єднання елементів ресорного підвішування ходової (екіпажної) частини вагона (рис. Д.1, б).

c_1, c_2, c_3 – жорсткість пружин, Н/м;

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – гнучкість пружин, Н/м.

Загальний прогин f дорівнює прогину кожної пружини окремо

$$f = f_1 = f_2 = f_3, \text{ м.} \quad (\text{Д.1.7})$$

Для кожної пружини виконуються умови

$$P_1 = \frac{f_1}{\lambda_1}, P_2 = \frac{f_2}{\lambda_2}, P_3 = \frac{f_3}{\lambda_3}, \text{ Н;} \quad (\text{Д.1.8})$$

Сила P дорівнює загальній сумі сил

$$P = P_1 + P_2 + P_3, \quad (\text{Д.1.9})$$

тоді

$$P = \left(\frac{f_1}{\lambda_1} + \frac{f_2}{\lambda_2} + \frac{f_3}{\lambda_3} \right) = f \cdot \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} \right), \quad (\text{Д.1.10})$$

Оскільки $P = \frac{f}{\lambda}$, то

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}, \lambda = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_1 \cdot \lambda_3 + \lambda_2 \cdot \lambda_3}. \quad (\text{Д.1.11})$$

Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то $\lambda = \frac{\lambda_1^3}{3\lambda_1^2} = \frac{\lambda_1}{3}$.

Виражаючи сили через жорсткість пружин, маємо

$$P_1 = f \cdot c_1, \quad P_2 = f \cdot c_2, \quad P_3 = f \cdot c_3, \quad P = f \cdot c, \quad (\text{Д.1.12})$$

тоді

$$c = c_1 + c_2 + c_3, \quad (\text{Д.1.13})$$

Приклад. Ресорне підвішування вагона складається з 4 ресорних комплектів. Жорсткість кожного ресорного комплекту $c_p = 1000$ кН/м.

Визначити сумарну жорсткість підвішування вагона.

Розв'язання:

Сумарна жорсткість $c = 4 \cdot c_p$; $c = 4 \times 10^3$ кН/м.

Визначаємо сумарну гнучкість ресорного підвішування:

$$\lambda = \frac{1}{c}; \lambda = \frac{1}{4 \cdot 10^3} = 0,25 \frac{\text{м}}{\text{кН}}$$

Задача 3. Визначити сумарну жорсткість ресорного підвішування вагона.

Розв'язання:

Сумарна жорсткість буксового ресорного підвішування

$$c_{\text{НБ}} = 8 \cdot c_6; c_{\text{НБ}} = 1.304 \times 10^4 \text{ кН/м.}$$

Сумарна жорсткість пружин центрального підвішування

$$c_{\text{ЦЕН}} = 4 \cdot c_6; c_{\text{ЦЕН}} = 240 \text{ кН/м.}$$

Сумарна жорсткість ресорного підвішування вагона

$$c_{\text{ВАГ}} = \frac{c_{\text{НБ}} \cdot c_{\text{ЦЕН}}}{c_{\text{НБ}} + c_{\text{ЦЕН}}}; c_{\text{ВАГ}} = 235.663 \text{ кН/м.}$$

Сумарна гнучкість ресорного підвішування

$$\lambda_{\text{ВАГ}} = \frac{1}{C_{\text{ВАГ}}}; \lambda_{\text{ВАГ}} = \frac{1}{235,663} = 4,24 \text{ м/МН.}$$

Задача 4. Кутова жорсткість (рис. Д.1, в) – це величина, що чисельно дорівнює моменту, який поверне надресорну балку ходової частини (візка) на кут, що дорівнює умовній одиниці:

$$M = c_{\text{к}} \cdot q, \quad c_{\text{к}} = \frac{M}{q}, \quad (\text{Д.1.14})$$

де q – узагальнена кутова координата.

При дії на балку моменту M на опорні пружини діють зусилля

$$P = \frac{M}{l}, \quad (\text{Д.1.15})$$

Під дією зусиль ресорний комплект стиснеться на величину

$$\delta = \frac{P}{c}, \quad (\text{Д.1.16})$$

або

$$\delta = \frac{l}{2} \cdot \theta, \quad (\text{Д.1.17})$$

де кут повороту балки дорівнює

$$\theta = \frac{2 \cdot \sigma}{l} = \frac{2 \cdot P}{c \cdot l} + \frac{2 \cdot M}{c \cdot l^2}. \quad (\text{Д.1.18})$$

Із цієї рівності одержимо

$$\frac{M}{\theta} = \frac{c \cdot l^2}{2}, \quad \frac{M}{\theta} = c_{\text{к}}. \quad (\text{Д.1.19})$$

Отже

$$c_{\text{к}} = \frac{c \cdot l^2}{2}. \quad (\text{А.20})$$

Приклад.

Вихідні дані: $c = 100000 \text{ кН/м}$, $l = 1.018 \text{ м}$

Рішення: $c_k = \frac{c \cdot l^2}{2}$; $c_k = 5.182 \times 10^4 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Задача 5. Для систем, зображених на рис. Д.1.2, визначити власні лінійні та колові частоти і періоди коливань, побудувати залежності $\nu = f(m; c)$; $T = f(m; c)$; $\omega = f(\nu; T)$.

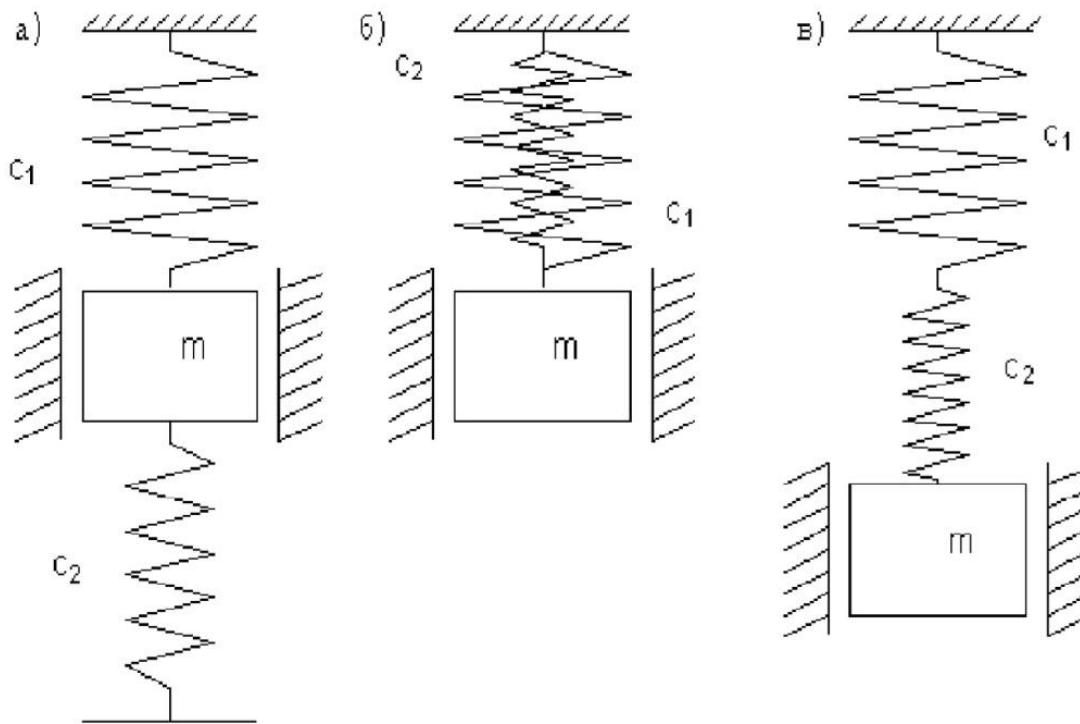


Рис. Д.1.2. Пружні коливальні системи:

а – подвійний двобічний підвіс; б – однобічний подвійний підвіс;

в – подвійний однобічний підвіс

Приклад.

Вихідні дані: $m = 10 \text{ кг}$; $c_1 = 1000 \text{ кН/м}$; $c_2 = 500 \text{ кН/м}$.

Розв'язання:

Для рис. Д.1.2, а

$$c = c_1 + c_2;$$

$$c = 150 \text{ кН/м};$$

Тоді частота власних коливань системи визначається за формулою

$$\nu^* = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad (\text{Д.1.21})$$

$$\nu^* = 12.247 \text{ рад/с.}$$

Відомо, що частота власних коливань ν^* може бути прирівняна до колової (кутової) частоти ω або циклічної частоти за цикл 2π рад, тому

$$\begin{aligned} \omega = \nu^* &= \sqrt{\frac{c}{m}}, \text{ рад/с,} \\ \omega &= 2\pi \cdot \nu, \end{aligned} \quad (\text{Д.1.22})$$

де ν – лінійна частота,

$$\nu = \frac{1}{T}; \quad (\text{Д.1.23})$$

$$\sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{2\pi}{T},$$

де T – період, с.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c}} = 0,51 \text{ с.}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,51} = 1,96 \text{ Гц.}$$

Для рис. Д.1.2, б

$$\begin{aligned} c = c_1 + c_2; \quad c &= 150 \frac{\text{кН}}{\text{м}}; \quad \nu^* = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad \nu^* = 12.247 \text{ рад/с}; \quad T = 0,51 \text{ с}; \\ \nu &= 1,96 \text{ Гц.} \end{aligned}$$

Для рис. Д.1.2, в маємо

$$c = \frac{c_1 + c_2}{c_1 + c_2}; \quad (\text{Д.1.24})$$

$$v = 5,774 \text{ 1/c};$$

$$v^* = \sqrt{\frac{c}{m}};$$

$$T = 1,1 \text{ с}; V = 0,9 \text{ Гц}.$$

З метою отримання аналітичних навичок будуюмо графіки залежностей динамічних характеристик за декількома змінними точками. Прогнозований характер залежностей наведений на рис. Д.1.3.

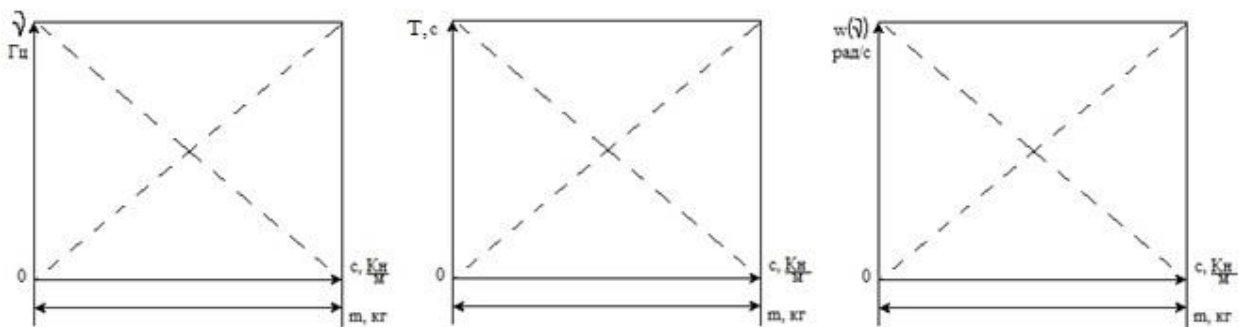


Рис. Д.1.3. Графіки імовірних залежностей динамічних характеристик коливальної системи

2. Вимушені коливання механічних систем

Задача. Дослідимо вимушені коливання механічної системи, наведеної на рис. Д.1.4.

Визначення коефіцієнта кількості витків циліндричної пружини та відцентрової сили.

Приклад. Двигун вагою 24 кН встановлено на 10 однакових пружинах діаметром $D = 12$ см. Діаметр перерізу витка пружини $d = 3$ см; модуль зсуву матеріалу пружини $G = 0,8 \cdot 10^7$ Н/см², $n = 800$ об/хв. Визначити кількість витків пружини, необхідну для того, щоб динамічний коефіцієнт установки дорівнював 0,2; розрахувати відцентрову силу $P_{ц}$, що діє на неврівноважену електричну машину.

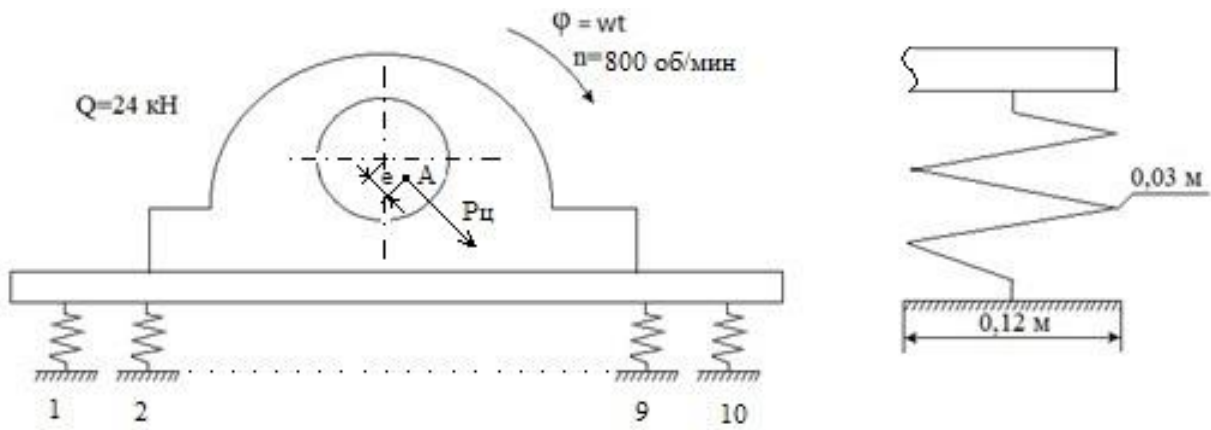


Рис. Д.1.4. Неврівноважена електромеханічна система

Відомо, що коли $\frac{w}{v} = 1$, настає явище резонансу, при якому коефіцієнт динамічності $\mu \rightarrow \infty$, і коливання необмежено зростають, що остаточно призведе до руйнування самої системи в непередбачуваних місцях (зв'язках).

$$\mu = \frac{1}{\left[1 - \frac{w^2}{v^2}\right]} \quad (\text{Д.1.25})$$

Позначимо $\xi = \frac{w}{v}$, тоді $\mu = \frac{1}{1 - \xi^2}$, де w, v – відповідно частоти вимушених і власних коливань.

Необхідно знайти значення ξ при якому $\mu = 0,2$.

Знаходимо показник резонансу механічної системи методом підбору. Надамо μ ряд значень методом підбору:

$\xi := 2$	$\mu = \frac{1}{1 - \xi^2}$	$\mu = 0,33;$
$\xi := 2,2$	$\mu = \frac{1}{1 - \xi^2}$	$\mu = 0,26;$
$\xi := 2,4$	$\mu = \frac{1}{1 - \xi^2}$	$\mu = 0,21;$
$\xi := 2,5$	$\mu = \frac{1}{1 - \xi^2}$	$\mu = 0,19;$
$\xi := 2,45$	$\mu = \frac{1}{1 - \xi^2}$	$\mu = 0,2.$

Оскільки частота вимушених коливань може бути прирівняна до частоти обертання вала електродвигуна, то запишемо

$$w := \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60}; \quad (\text{Д.1.26})$$

$$w = 83.776 \text{ с}^{-1}.$$

Розрахуємо необхідне значення власної частоти коливань:
 $\xi = \frac{w}{v}; \xi = 2,45.$

$$v = \frac{w}{\xi}, v = 34,194 \frac{1}{\text{с}} \text{ Гц.}$$

Відповідно має виконуватися рівність

$$\sqrt{\frac{c}{m}} = v.$$

Підставимо сюди вираз, отримаємо масу двигуна

$$m = \frac{24000}{9,81} = 2,446 \cdot 10^3 \text{ кг.}$$

Остаточно знаходимо необхідну жорсткість всіх пружин системи:

$$c = v^2 \cdot m = 2,865 \cdot 10^3 \text{ Н/м.}$$

Жорсткість однієї пружини

$$c_1 = \frac{c}{10} \quad c_1 = 286,465 \text{ Н/м,}$$

тобто $c_1 = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n} = 286,465 \text{ Н/м; } n = \frac{(G \cdot d^4)}{(8 \cdot D^3 \cdot 286,465)} = 16,363.$

Слід прийняти принаймні 17 витків, оскільки збільшення кількості витків знижує жорсткість системи і зменшує динамічний коефіцієнт. Якщо прийняти $n < 16,5$, то динамічний коефіцієнт буде більше, ніж задано за умовою.

Визначимо відцентрову силу $P_{\text{ц}}$, що діє на механічну систему, за формулою

$$P_{\text{ц}} = m \cdot w^2 \cdot e, \quad (\text{Д.1.27})$$

де e – зміщення центра обертання (енсцентриситет).

$$P_{\text{ц}} = 2446 \cdot (83,7)^2 \cdot 0,003 = 51,43 \text{ кН.}$$

Тобто вже при $e = 3$ мм невірноважена маса досягає 51,43 кН (5,24 т), що суттєво вплине на характер вимушених коливань і подальше зниження надійності та працездатності динамічної системи.

3. Поздовжні та поперечні коливання стрижнів

Задача 1. Розглянемо власні поздовжні коливання стрижня, на кінці якого підвішений вантаж вагою $P = mg$, де m – маса вантажу, g – прискорення сили ваги. Відхилення центра маси вантажу, викликане деяким початковим впливом, для довільного моменту часу t позначимо як y . При цьому відхиленні виникає пружна сила $P_{\text{пр}}$, що повертає вантаж у стан рівноваги (рис. Д.1.5).

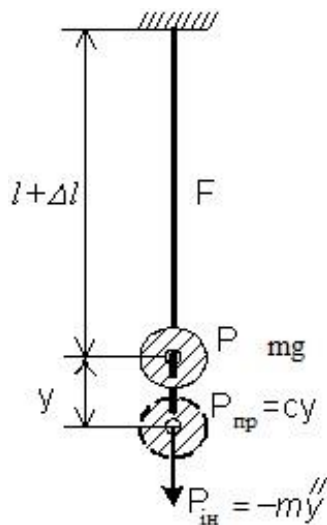


Рис. Д.1.5. Схема дії зусиль на стрижень при поздовжніх коливаннях

Вважаємо, що зв'язок між силою $P_{\text{пр}}$ і динамічним переміщенням y такий самий, що й для статичної задачі, тоді

$$y_{\text{ст}} = P\delta, \quad (\text{Д.1.28})$$

де δ – переміщення точки прикладення вантажу від дії одиничної сили,

$$\delta = \frac{P \cdot l}{E \cdot F}; \quad (\text{Д.1.29})$$

або

$$\delta = \frac{1 \cdot l}{E \cdot F},$$

де E – модуль пружності, $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа;
 F – площа перерізу, м^2 .

Статичне переміщення вантажу $y_{\text{ст}} = P \cdot \frac{1}{c}$ або $P = c \cdot y_{\text{ст}}$, де c – жорсткість системи, тобто сила пружності, що відповідає переміщенню, що дорівнює одиниці.

З цього випливає:

$$c = \frac{1}{\delta}.$$

Відповідно до принципу Даламбера (рис. Д.1.5) складаємо диференціальне рівняння власних коливань стрижня і запишемо як

$$m\ddot{y} + cy = 0; \quad (\text{Д.1.30})$$

Поділимо обидві частини на m і позначимо $\omega^2 = \frac{c}{m}$, одержимо $\omega = \nu^* = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – колова частота власних коливань системи.

Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = A_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + A_2 \sin(\omega \cdot t). \quad (\text{Д.1.31})$$

Вводимо початкові умови задачі.

При $t=0$ $y = y_0$; $\dot{y} = v_0$.

Визначаючи довільні постійні, одержимо

$$y = y_0 \cos(\omega \cdot t) + v_0 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t)}{\omega}. \quad (\text{Д.1.32})$$

Можна записати в іншій формі

$$y = A \sin(\omega \cdot t + a); \quad (\text{Д.1.33})$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}; \quad (\text{Д.1.34})$$

$$a = \text{atan} \left(\frac{A_2}{A_1} \right) = \left(\frac{v_0}{\omega \cdot y_0} \right). \quad (\text{Д.1.35})$$

Приклад:

Довжина стрижня $l = 1$ м;

діаметр стрижня $d = 0.02$ м;

маса вантажу $m = 10$ кг;

модуль пружності $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м²;

початкова швидкість вантажу $v_0 = 0,5$ м/с;

початкове переміщення вантажу $y_0 = 0$.

Розв'язання:

Площа поперечного перерізу стрижня (коло)

$$F = \frac{\pi \cdot d^2}{4}, \quad F = 3.142 \times 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Переміщення точки вантажу від дії одиничної сили $P=1$ Н

$$\delta = \frac{1 \cdot l}{E \cdot F}; \quad \delta = 1.592 \times 10^{-8} \text{ м.}$$

Жорсткість $c = \frac{1}{\delta}; c = 6.283 \times 10^7$ Н/м.

Колова частота власних коливань системи

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad \omega = 2.507 \times 10^3 \frac{1}{\text{с}} \text{ [Гц]}.$$

період коливань $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}; T = 2.504 \times 10^{-3}$, с.

лінійна частота коливань стрижня

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \nu = 398 \text{ Гц}$$

Амплітуда коливань

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = 1.995 \times 10^{-4} \text{ м.}$$

Візьмемо для розрахунку, наприклад $V_0=0,1$ м/с, оскільки початкове переміщення $y_0 = 0$.

Тоді початкова фаза

$$\alpha = \arctg\left(\frac{v_0}{\omega y_0}\right), \quad \alpha = \arctg\left(\frac{0,5}{2,507 \cdot 10^3 \cdot 0,1}\right) = 0,114.$$

Задача 2. Консольна балка з закріпленням на кінці вантажем (рис. Д.1.6).

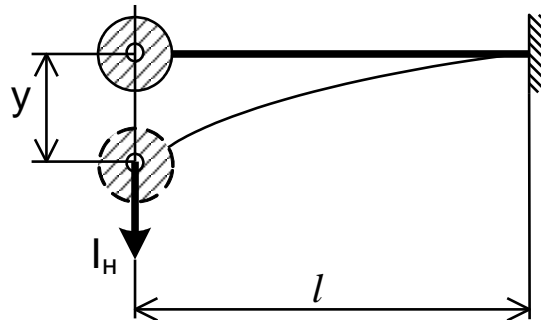


Рис. Д.1.6. Схема консольної балки з вантажем на кінці

Довжина стрижня $l = 1$ м;
модуль пружності $E = 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$.

Балка має прямокутний поперечний переріз:

ширина перерізу $b = 0.03$ м;

висота перерізу $h = 0.07$ м;

маса вантажу $m = 10$ кг;

початкова швидкість вантажу $v_0 = 0.5$ м/с;

початкове переміщення вантажу $y_0 = 0$.

Приклад:

Відомо, що момент інерції поперечного перерізу стрижня

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}, \quad (\text{Д.1.36})$$

тоді отримаємо в чисельному вигляді

$$I = 8.575 \times 10^{-7} \text{ м}^4.$$

Переміщення точки прикладання вантажу від дії одиничної сили $P = 1 \text{ Н}$

$$\delta = \frac{1 \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}; \quad (\text{Д.1.37})$$

$$\delta = 1.944 \times 10^{-6} \text{ м.}$$

Жорсткість дорівнює $c = \frac{1}{\delta}$; $c = 5.145 \times 10^5 \text{ Н/м.}$

Колова частота власних коливань системи

$$\omega = \nu^* = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad \omega = 226.826 \text{ Гц.}$$

Період коливань $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$; $T = 0.028 \text{ с.}$

Лінійна частота $\nu = \frac{1}{T}$; $\nu = 35,71 \text{ Гц;}$

Амплітуда коливань

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \quad A = 2.204 \times 10^{-3} \text{ м.}$$

Статичний прогин $y = \frac{m \cdot 9.81}{c}$, $y = 1.905 \times 10^{-4} \text{ м.}$

Задача 3. Скласти диференціальне рівняння коливань балки з вантажем на жорстко-пружному підвісі (рис. Д.1.7). Визначити колову частоту власних коливань, лінійну частоту і період.

Прогин балки в місці закріплення пружини від дії сили, рівної 1 Н ,

$$\delta = \frac{l^3}{3 \cdot E \cdot I}.$$

Балку можна замінити умовно пружиною, що має жорсткість

$$c_1 = \frac{1}{\delta};$$

$$c_1 = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l^3}. \quad (\text{Д.1.38})$$

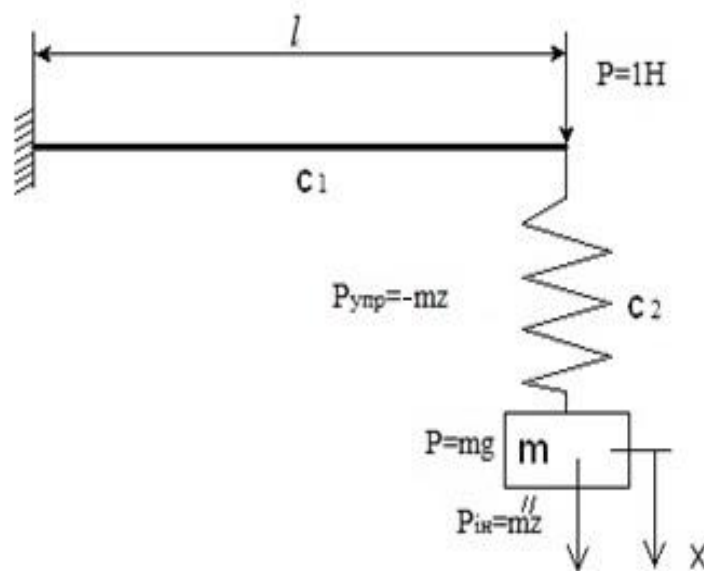


Рис. Д.1.7. Схема дії зусиль на балку з вантажем

Відомо, що при послідовному з'єднанні еквівалентний прогин (гнучкість) дорівнює

$$\delta_e = \frac{1}{c_e} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}. \quad (\text{Д.1.39})$$

Тоді

$$c_e = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2} = \frac{3 \cdot E \cdot I \cdot c_2}{8 \cdot E \cdot I + c_2 \cdot L^3}. \quad (\text{Д.1.40})$$

Визначимо характеристики коливального процесу.

Довжина стрижня $l = 1$ м;

модуль пружності $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Н/м²;

маса вантажу $m = 10$ кг;

момент інерції поперечного перерізу балки $I = 8,6 \cdot 10^{-7}$ м⁴;

жорсткість пружини $c_2 = 200$ кН/м.

Приклад:

Еквівалентна жорсткість

$$c_e = \frac{3 \cdot E \cdot I \cdot c_2}{8 \cdot E \cdot I + c_2 \cdot L^3}, \quad c_e = 6,548 \cdot 10^4 \text{ Н/м.}$$

Диференціальне рівняння коливального руху

$$\ddot{m}x + c_e z = 0.$$

$$\omega = \nu^* = \sqrt{\frac{c_e}{m}}, \quad \nu^* = 80.921 \text{ Гц};$$

$$T = \frac{2\pi}{\nu^*}, \quad T = 0,078 \text{ с};$$

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \nu = 12,82 \text{ Гц}.$$

Задача 4. Балка на двох опорах, завантажена посередині (рис. Д.1.8). Визначити характеристики та побудувати графік коливального процесу.

Довжина стрижня $l = 1 \text{ м}$;

модуль пружності $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}$.

Балка має прямокутний поперечний переріз:

ширина перерізу $b = 0.03 \text{ м}$;

висота перерізу $h = 0.07 \text{ м}$.

маса вантажу $m = 10 \text{ кг}$;

початкова швидкість вантажу $v_0 = 0 \text{ м/с}$;

початкове переміщення вантажу $y_0 = 0,5 \text{ м}$.

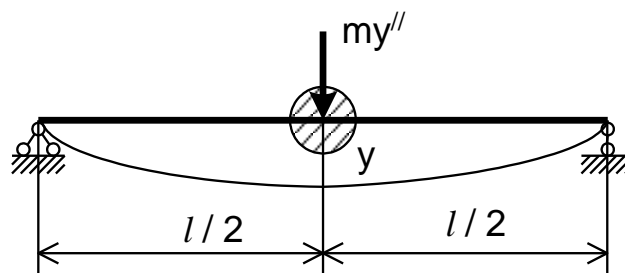


Рис. Д.1.8. Схема балки на двох опорах, завантаженої посередині

Приклад:

Момент інерції поперечного перерізу стрижня

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad I = 8.575 \cdot 10^7 \text{ м}^4.$$

Переміщення точки прикладання вантажу від дії одиничної сили $P = 1 \text{ Н}$

$$\delta = \frac{1 l^3}{48 EI}; \quad (\text{Д.1.41})$$

$$\delta = 1.215 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Жорсткість $c = \frac{1}{\delta}$; $c = 8,232 \cdot 10^6 \text{ Н/м.}$

Колова частота власних коливань системи

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \omega = 907.304 \text{ Гц.}$$

Період коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad T = 6,925 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Лінійна частота

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \nu = 144 \text{ Гц.}$$

Амплітуда коливань

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \quad A = 0,5 \text{ м.}$$

Статичний прогин

$$y = \frac{m \cdot 9.81}{c}; \quad y = 1,19 \cdot 10^{-5} \text{ м;}$$

Початкова фаза

$$\alpha = \arctg\left(\frac{v_0}{\omega \cdot y_0}\right); \quad \alpha = \arctg\left(\frac{0}{907.304 \cdot 0.05}\right) = 0.$$

Візьмемо $v_0 = 0,1 \text{ м/с}$, оскільки при $v_0 = 0$ $\alpha = 0$, тоді остаточно $\alpha = 0,063$.

Переміщення вантажу виконується за наближеним тригонометричним законом і дискретно дорівнює

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha), \quad y(t) = 0,05 \sin(907,304 \cdot 0 + 0) = 0,496 \text{ м.}$$

Задаємо інтервал часу $t = [0, 0.001 \dots 0.1]$ з кроком $p = 0,001 \text{ м.}$

Побудуємо графік зміни переміщень балки з вантажем від часу з використанням програмного комплексу MathCAD (рис. Д.1.9).

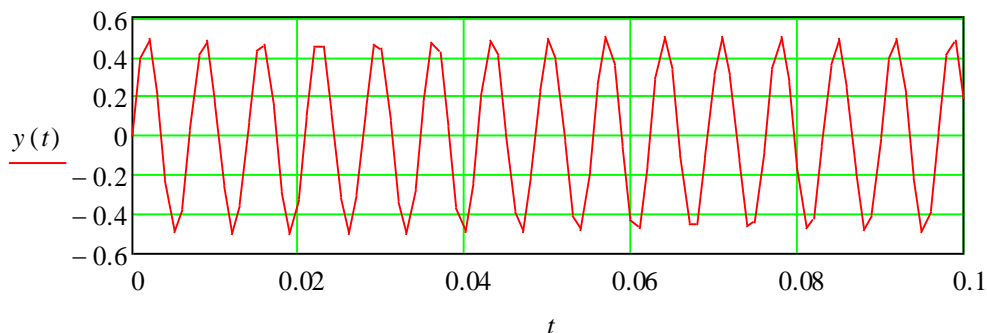


Рис. Д.1.9. Характер коливального руху (графік зміни переміщень балки з вантажем від часу $y(t)$)

Як видно, це гармонійні коливання конструкції з максимальною амплітудою $A = 0,05$ м.

4. Крутильні кутові коливання твердих тіл

Задача 1. Коливання диска (абсолютно жорсткого), закріпленого на пружному стрижні, як одномасової системи.

Диференціальне рівняння обертання тіла навколо нерухомої осі запишемо як

$$I \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi = M, \quad (\text{Д.1.42})$$

де φ – кут повороту;

M – момент прикладених до тіла сил відносно осі обертання;

I – момент інерції відносно тієї самої осі.

Момент M створюється силами пружності стрижня і дорівнює $c \cdot \varphi$

$$c = \frac{GI_p}{l}, \quad (\text{Д.1.43})$$

де l – довжина стрижня;

I_p – полярний момент інерції, м^4 .

Тоді диференціальне рівняння руху диска запишемо як

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi + p^2 \cdot \varphi = 0, \quad (\text{Д.1.44})$$

де $p = \sqrt{\frac{c}{I}}$ - частота власних коливань диска, Гц.

Приклад.

Визначити частоту крутильних коливань системи (рис. Д.1.10) при таких даних:

діаметр диска $d = 0,30$ м;

товщина диска $b = 0,2$ м;

діаметр вала $d_0 = 0,01$ м;

довжина вала $l = 0,8$ м.

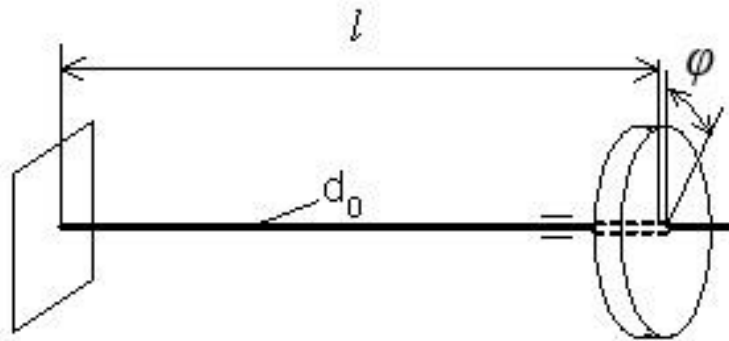


Рис. Д.1.10. Схема одномасової коливальної системи «диск – стрижень»

Приймаємо, що матеріал дисків і самого вала – сталь конструкційна.

$$\gamma = 7800 \text{ кг/м}^3;$$

$$G = 0,85 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2;$$

$$g = 9,81 \text{ м/с}^2.$$

Момент інерції маси диска

$$I = b \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{32} \cdot \frac{y}{g}, \quad (\text{Д.1.45})$$

$$I = 126,5 \text{ с}^2/\text{м}, [\text{м}^4].$$

Полярний момент інерції поперечного перерізу вала

$$I_p = \frac{\pi \cdot d_0^2}{32}; \quad (\text{Д.1.46})$$

$$I_p = 0,098 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Коефіцієнт жорсткості вала при крутінні

$$c = \frac{G \cdot I_p}{l}, \quad c = 98,17 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Частота власних коливань диска

$$p = \sqrt{\frac{c}{I}}; \quad p = 0,881 \text{ м/с (Гц)}.$$

Період і лінійна частота коливань диска відповідно

$$T = \frac{2\pi}{p}; \quad T = 7,12 \text{ с};$$
$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \nu = 0,14 \text{ Гц}.$$

Задача 2. Коливання двохмасової системи.

На диски діють дві рівні і протилежно направлені пари сил, що скручують, які в деяку мить раптово зникають.

Для деякої миті $t > 0$ кути повороту дисків φ_2 і φ_1 , а відносний кут повороту – $\varphi_2 - \varphi_1$. Момент сил пружності валу – $c(\varphi_2 - \varphi_1)$ і діє на кожен з дисків.

Позначивши через I_1 і I_2 моменти інерції мас дисків відносно осі вала, отримаємо диференціальне рівняння руху

$$I_1 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi_1 = c \cdot (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (\text{Д.1.47})$$

$$I_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi_2 = -c \cdot (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (\text{Д.1.48})$$

Мінус у лівій частині другого рівняння поставлений тому, що пружний момент, що діє на другий диск, направлений за стрілкою годинника (негативний момент).

Ділячи перше рівняння на друге і віднімаючи перше рівняння з другого, отримаємо

$$-\left(\frac{c}{I_2} + \frac{c}{I_1}\right) \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{d^2}{dt^2} \varphi_2 - \frac{d^2}{dt^2} \varphi_1. \quad (\text{Д.1.49})$$

Введемо в рівняння відносний кут повороту дисків $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Тоді рівняння набуде вигляду

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi + p^2 \cdot \varphi = 0, \quad (\text{Д.1.50})$$

де

$$p = \sqrt{\frac{c \cdot (I_1 + I_2)}{I_1 \cdot I_2}}. \quad (\text{Д.1.51})$$

Переріз, що не бере участі в коливаннях, називається вузлом коливань. Вище було показано, що

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi_2 - \frac{d^2}{dt^2} \varphi_1 = 0.$$

Позначаючи через a амплітуди кутових переміщень, отримаємо прискорення

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi_1 = -a_1 \cdot p^2 \cdot \sin(p \cdot t + a), \quad (\text{Д.1.52})$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi_2 = -a_2 \cdot p^2 \cdot \sin(p \cdot t + a). \quad (\text{Д.1.53})$$

Тому

$$I_1 \cdot a_1 = I_2 \cdot a_2, \text{ звідки } \frac{a_1}{a_2} = \frac{-I_2}{I_1}.$$

Тобто відношення амплітуд коливань дисків обернено пропорційне відношенню їхніх моментів інерції. Знак мінус

означає, що відхилення відбуваються в різні боки. З рис. Д.1.11 видно, що при цьому відстані від вузла коливань до кінців вала, відповідно складають

$$a = \frac{I_2}{I_1 + I_2} \cdot l; \quad (\text{Д.1.54})$$

$$b = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \cdot l. \quad (\text{Д.1.55})$$

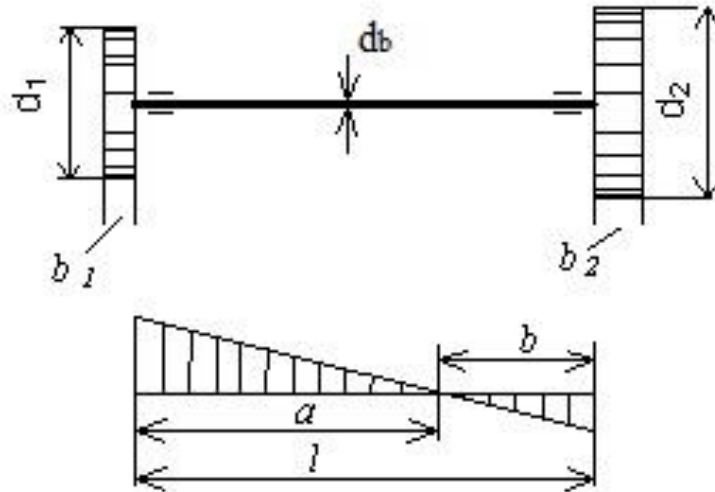


Рис. Д.1.11. Схема двомасової коливальної системи «диски – стрижень»

Приклад:

$$d_1 = 30 \text{ см};$$

$$\gamma = 7800 \text{ кг/м}^3;$$

$$d_1 = 0,20 \text{ м};$$

$$G = 0,85 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$b_1 = 0,02 \text{ м};$$

$$b_2 = 0,015 \text{ м}; \quad d_0 = 0,01 \text{ м};$$

$$l = 0,80 \text{ м}.$$

Момент інерції маси дисків відповідно першого та другого

$$I_1 = b_1 \cdot \frac{\pi \cdot d_1^4}{32} \cdot \frac{\gamma}{g}, \quad I_1 = 126,5 \text{ м}^4;$$

$$I_2 = b_2 \cdot \frac{\pi \cdot d_2^4}{32} \cdot \frac{\gamma}{g}, \quad I_2 = 18.741 \text{ м}^4.$$

Полярний момент інерції поперечного перерізу вала

$$I_p = \frac{\pi \cdot d_0^2}{32}, \quad I_p = 0,098 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Коефіцієнт твердості вала при крутінні

$$c = \frac{GI_p}{l}, \quad c = 98,17 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Власна частота коливань вала з дисками

$$p = \sqrt{\frac{c \cdot (I_1 + I_2) \cdot g}{I_1 \cdot I_2}}, \quad p = 76.801 \text{ Гц}.$$

Вузол коливань розташовується поблизу меншого диска, оскільки $a < b$:

$$a = \frac{I_2}{I_2 + I_1} \cdot l a = 0,10323 \text{ м},$$

$$b = \frac{I_1}{I_2 + I_1} \cdot l b = 0,69677 \text{ м}.$$

Приблизно можна вважати вал затисненим у нерухливому більшому диску. Тоді власні частоти дисків визначаємо за формулами

$$p_1 = \sqrt{\frac{c}{I_1}}, \quad p_1 = \sqrt{\frac{98,17}{126,5}} = 0,881 \text{ Гц},$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{c}{I_2}}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{98,17}{18,741}} = 2,29 \text{ Гц}.$$

Знайдемо власну частоту p з помилкою близько 7 %:

$$T_1 = \frac{2\pi}{p_1}, \quad T_1 = 7,1 \text{ с},$$

$$p_1 = \frac{1}{T_1}, \quad p_1 = 0,14 \text{ Гц},$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{p_2}, \quad T_2 = 2,7 \text{ с},$$

$$p_2 = \frac{1}{T_2}, \quad p_2 = 0,37 \text{ Гц}.$$

Рекомендовані вихідні дані до самостійної роботи

За останньою цифрою навчального шифру залікової книжки студенту треба обрати необхідний варіант завдання, при цьому не має значення скільки цифр у шифрі. Наприклад, якщо номер навчального шифру 345 або 75, треба обирати п'ятий варіант завдання з вихідними даними. Наприклад, за таблицею задачі 1 це $\ell = 3,8$ м, $\rho = 7800$ кг/м³, $G = 0,014$ м². Якщо номер навчального шифру закінчується цифрою 0, тобто 450 або 100, треба обирати десятий варіант завдання з вихідними даними. Наприклад, за таблицею також задачі 1 це такі вихідні дані: $\ell = 5$ м, $\rho = 7800$ кг/м³, $G = 0,03$ м². Так само обираються варіанти інших задач за змістом навчального посібника.

Розміри основних частин – вузлів рами, бокових стін, торцевих стін, бортів, бункерів, а також вантажу (вантажопідйомність вагона заданого типу) – прийняти за технічними характеристиками і техніко-економічними параметрами («Галузевий каталог вантажних вагонів» залізничної колії 1520 мм).

1. Види з'єднань елементів ресорного підвішування вагонів, їхні власні коливання

Задача 1. Для підвішування вантажного візка ЦНДІ-ХЗ (18-100 і модифікації) (рис. Д.1.1,б).

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$C_p, \frac{\text{кН}}{\text{м}}$	10000	9000	9800	10500	11000	8850	9500	9900	10250	8900

Задача 2. Для підвішування візка КВЗ (ТВЗ) – ЦНДІ(І,ІІ) пасажирського вагона (рис. Д.1.1,а):

а) центрального;

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$C_p, \frac{\text{кН}}{\text{м}}$	750	755	765	770	775	745	740	780	800	

б) буксового.

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_6	1325	1350	1335	1340	1345	1350	1320	1315	1350	1370

Задача 3. Кутова жорсткість надресорної балки візка КВЗ (ТВЗ) – ЦНДІ(I,II) пасажирського вагона (рис. Д.1.1, в).

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$C, \frac{\text{кН}}{\text{м}}$	100	110	120	95	90	85	80	115	125	98
$\ell, \text{м}$	2,036	2,040	2,050	2,060	2,045	2,030	2,010	2,020	1,95	1,9

Задача 4. Визначення частот і періодів коливань механічних систем для систем на рис. Д.1.2, Д.1.3.

Визначити задані характеристики. Побудувати графік залежностей $\nu = f(m; C)$; $T = f(m; C)$; $\omega = f(\nu; T)$.

Варіант	$m, \text{кг}$	$C_1, \text{кН/м}$	$C_2, \text{кН/м}$
1	10	1000	550
2	15	1050	600
3	20	1100	650
4	25	1150	700
5	30	1200	750
6	35	1250	800
7	40	1300	850
8	45	1350	900
9	50	1400	950
10	55	1450	1000

2. Вимушені коливання механічних систем

Задача 1. Вимушені коливання механічної системи. Визначення коефіцієнта динамічності кількості витків циліндричної пружини та відцентрової сили (рис. Д.1.4).

Варіант	Q, кг	D, м	d, м	n, об/хв	E, мПа	e, м
1	24	0,12	0,03	800	$8 \cdot 10^5$	0,005
2	25	0,13	0,032	600	$8 \cdot 10^5$	0,002
3	20	0,14	0,035	400	$8 \cdot 10^5$	0,0025
4	21	0,15	0,04	500	$8 \cdot 10^5$	0,0045
5	23	0,17	0,043	1000	$8 \cdot 10^5$	0,006
6	22	0,16	0,045	900	$8 \cdot 10^5$	0,01
7	26	0,11	0,023	1100	$8 \cdot 10^5$	0,015
8	28	0,17	0,025	850	$8 \cdot 10^5$	0,007
9	27	0,18	0,038	1200	$8 \cdot 10^5$	0,012
10	30	0,2	0,042	1150	$8 \cdot 10^5$	0,02

3. Поздовжні та поперечні коливання стрижнів

Визначити δ , c , v^* , T , ω (власну колову частоту, лінійну частоту і період коливань).

Задача 1. Поздовжні та поперечні коливання стрижнів (рис. Д.1.5).

Варіант	m, кг	ℓ, м	d, м	v_0 , м/с	y_0 , м	E, мПа
1	10	1	0,02	0,5	0	$2,1 \cdot 10^5$
2	11	1,5	0,03	0,6	0,1	$2,1 \cdot 10^5$
3	12	2	0,04	0,65	0,05	$2,1 \cdot 10^5$
4	13	2,5	0,05	0,4	0,06	$2,1 \cdot 10^5$
5	14	3	0,06	0,45	0,025	$2,1 \cdot 10^5$
6	15	3,5	0,07	0,55	0,03	$2,1 \cdot 10^5$
7	16	4	0,08	0,52	0,035	$2,1 \cdot 10^5$
8	17	4,5	0,09	0,48	0,015	$2,1 \cdot 10^5$
9	18	5	0,1	0,4	0,02	$2,1 \cdot 10^5$
10	20	6	0,12	0,35	0,04	$2,1 \cdot 10^5$

Задача 2. Консольна балка, що несе на кінці вантаж (рис. Д.1.6).

Визначити v^* , T , ω , A , y – статичний прогин.

Варіант	m, кг	b, м	h, м	V_0 , м/с	y_0 , м	E, мПа	ℓ , м
1	10	0,08	0,07	0,5	0	$2,1 \cdot 10^5$	2,5
2	9	0,04	0,08	0,6	0,1	$2,1 \cdot 10^5$	2,0
3	8	0,05	0,09	0,65	0,05	$2,1 \cdot 10^5$	1,8
4	7	0,02	0,04	0,4	0,06	$2,1 \cdot 10^5$	1,7
5	6	0,01	0,03	0,45	0,025	$2,1 \cdot 10^5$	1,6
6	12	0,07	0,1	0,55	0,03	$2,1 \cdot 10^5$	3,0
7	11	0,035	0,075	0,52	0,035	$2,1 \cdot 10^5$	2,8
8	8,5	0,04	0,08	0,48	0,015	$2,1 \cdot 10^5$	1,9
9	10,5	0,075	0,1	0,4	0,02	$2,1 \cdot 10^5$	2,8
10	15	0,08	0,12	0,35	0,04	$2,1 \cdot 10^5$	3,5

Задача 3. Коливання балки з вантажем на жорстко-пружному підвісі (рис. Д.1.7).

Визначити момент інерції та жорсткість балки, а також жорсткість підвісу.

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}, \text{ м}^4;$$

$$C_{б(балки)} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{\ell^3}, \text{ Н/м};$$

$$C_{п(подвеса)} = \frac{6 \cdot d^4}{8 \cdot h \cdot D^3}, \text{ Н/м}.$$

Еквівалентна жорсткість визначається як

$$C_e = \frac{C_{б} \cdot C_{п}}{C_{б} + C_{п}}, \text{ Н/м}.$$

Задача 4. Балка на двох опорах, що несе посередині вантаж (рис. Д.1.8).

Варіант	m, кг	ℓ, м	b, м	h, м	d, м	D, м	n	Б, МПа
1	10	1	0,02	0,03	0,01	0,1	10	$2,2 \cdot 10^5$
2	11	1,1	0,025	0,04	0,015	0,12	9	$2,2 \cdot 10^5$
3	12	1,2	0,03	0,05	0,02	0,15	8	$2,2 \cdot 10^5$
4	13	1,3	0,035	0,06	0,025	0,17	7	$2,2 \cdot 10^5$
5	14	1,4	0,04	0,065	0,03	0,2	6	$2,2 \cdot 10^5$
6	15	1,5	0,045	0,07	0,035	0,22	7	$2,2 \cdot 10^5$
7	16	1,6	0,05	0,075	0,04	0,25	5	$2,2 \cdot 10^5$
8	17	1,7	0,055	0,08	0,045	0,27	8	$2,2 \cdot 10^5$
9	18	1,8	0,06	0,085	0,05	0,3	6	$2,2 \cdot 10^5$
10	20	2	0,08	0,1	0,055	0,35	4	$2,2 \cdot 10^5$

Визначити основні характеристики коливального процесу

v^* , T, A, y , α , $y(t)$.

$t = 0 \dots 0,1$, step $1 \cdot 10^{-3}$.

Варіант	m, кг	ℓ, м	b, м	h, м	V_0 , м/с	y_0 , м	E, МПа
1	10	1	0,03	0,07	0	0,05	$2,1 \cdot 10^5$
2	11	1,5	0,04	0,08	0,1	0,055	$2,1 \cdot 10^5$
3	12	2	0,05	0,1	0,15	0,06	$2,1 \cdot 10^5$
4	12,5	2,5	0,06	0,12	0,2	0,065	$2,1 \cdot 10^5$
5	13	3	0,07	0,15	0,25	0,07	$2,1 \cdot 10^5$
6	13,5	3,5	0,08	0,17	0,3	0,075	$2,1 \cdot 10^5$
7	14	4	0,09	0,19	0,35	0,08	$2,1 \cdot 10^5$
8	14,5	4,5	0,01	0,2	0,4	0,085	$2,1 \cdot 10^5$
9	15	5	0,015	0,25	0,45	0,09	$2,1 \cdot 10^5$
10	16	6	0,02	0,3	0,5	0,1	$2,1 \cdot 10^5$

4. Крутильні кутові коливання твердих тіл

Задача 1. Абсолютно жорсткий диск, закріплений на пружному стрижні (одномасова система) (рис. Д.1.10).

Як позначення власної частоти при пружних коливаннях дисків на стрижні замість ϑ^* прийнято ρ .

Визначити I , I_p , C , $\rho \sim \nu^*(\omega)$ (власна колова частота), T , ϑ .

Варіант	d, м	b, м	d ₀ , м	ℓ, м	γ, т/м ³	E, мПа
1	0,3	0,02	0,01	0,8	7,85	0,85·10 ⁵
2	0,35	0,025	0,015	0,95	7,85	0,85·10 ⁵
3	0,4	0,03	0,02	0,9	7,85	0,85·10 ⁵
4	0,45	0,035	0,025	0,95	7,85	0,85·10 ⁵
5	0,5	0,04	0,03	1,0	7,85	0,85·10 ⁵
6	0,55	0,045	0,035	1,5	7,85	0,85·10 ⁵
7	0,6	0,05	0,04	2	7,85	0,85·10 ⁵
8	0,65	0,055	0,045	2,5	7,85	0,85·10 ⁵
9	0,7	0,06	0,05	3	7,85	0,85·10 ⁵
10	0,75	0,065	0,055	3,5	7,85	0,85·10 ⁵

Задача 2. Абсолютно жорсткий диск, закріплений на пружному стрижні (двомасова система) (рис. Д.1.11).

Визначити I , I_p , C , $\rho \sim \nu^*(\omega)$, T , ϑ , а і b – вузол коливань, м.

Варіант	d ₁ , м	d ₂ , м	b ₁ , м	b ₂ , м	d ₀ , м	ℓ, м	γ, т/м ³	E, мПа
1	0,3	0,35	0,02	0,01	0,01	0,8	7,85	0,85·10 ⁵
2	0,35	0,4	0,025	0,015	0,015	0,85	7,85	0,85·10 ⁵
3	0,4	0,45	0,03	0,02	0,02	0,9	7,85	0,85·10 ⁵
4	0,45	0,5	0,035	0,025	0,025	0,95	7,85	0,85·10 ⁵
5	0,5	0,55	0,04	0,03	0,03	1,0	7,85	0,85·10 ⁵
6	0,55	0,6	0,045	0,035	0,035	1,5	7,85	0,85·10 ⁵
7	0,6	0,65	0,05	0,04	0,04	2	7,85	0,85·10 ⁵
8	0,65	0,7	0,055	0,045	0,045	2,5	7,85	0,85·10 ⁵
9	0,7	0,75	0,06	0,05	0,5	3	7,85	0,85·10 ⁵
10	0,75	0,8	0,065	0,06	0,055	3,5	7,85	0,85·10 ⁵

Навчальний посібник

Устенко Олександр Васильович,
Візняк Руслан Іванович,
Ловська Альона Олександрівна
та ін.

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ ТА СТІЙКОСТІ РУХОМОГО СКЛАДУ

Відповідальний за випуск Ловська А. О.

Редактор Ібрагімова Н. В.

Підписано до друку 25.06.20 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк. арк. 7,5. Тираж . Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.