УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

для самостійної роботи студентів освітнього рівня «Бакалавр»

Частина V

Харків – 2021

Методичні вказівки і завдання розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 22 вересня 2020 р., протокол № 2.

Методичні вказівки призначено для студентів освітнього рівня «бакалавр» факультету УПП усіх форм навчання.

Укладачі:

доценти Н. Г. Панченко,
М. Є. Резуненко,
старш. викл. О. В. Рибачук

Рецензент

проф. Р. В. Вовк (ХНУ)

ЗМІСТ

ЗАВДАННЯ 1. Визначений інтеграл

Завдання 1.1. Обчислити визначені інтеграли.

Варіант			
1	**а)** $\int_1^8 \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 1 \right) dx$	**б)** $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1+\sin x}$	**в)** $\int_0^2 x \ln(1+x^2) dx$
	г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}$		
2	**а)** $\int_1^3 (2^x + 1) dx$	**б)** $\int_0^{\pi/4} e^{\cos 2x} \sin 2x dx$	**в)** $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x}$
	г) $\int_0^4 \frac{dx}{4+\sqrt{2x+1}}$		
3	**а)** $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(\sin 3x + \cos \frac{x}{3} \right) dx$	**б)** $\int_{-0,5}^{0,5} \frac{3^x dx}{1+9^x}$	**в)** $\int_0^1 x e^{3x} dx$
	г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+2\sin x + 3\cos x}$		
4	**а)** $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 - 9}$	**б)** $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x} - 4}$	**в)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos 4x dx$
	г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 - \cos x}$		
5	**а)** $\int_0^3 (\cos x - 5^x) dx$	**б)** $\int_0^{\ln 2} e^x \left(\sqrt{e^x + 5} \right) dx$	**в)** $\int_1^{e^2} (x+5) \ln x dx$
	г) $\int_1^4 \frac{\sqrt{1+2x}}{x} dx$		

6	**а)** $\int_0^1 \frac{dx}{x-6}$	**б)** $\int_0^{\pi/2} 6^{\sin x}\cos x dx$	**в)** $\int_0^1 (x+6)e^x dx$
	г) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} ctg^2 x dx$		
7	**а)** $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x + 2x)dx$	**б)** $\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+7}dx$	**в)** $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{7x}{\sin^2 x}dx$
	г) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$		
8	**а)** $\int_1^4 \left(8x + \frac{9}{8}x\sqrt{x}\right)dx$	**б)** $\int_{4\sqrt{2}}^{8} \frac{8xdx}{\sqrt{x^2-16}}$	**в)** $\int_{-\pi}^{\pi} (x+8)\cos 2x dx$
	г) $\int_2^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$		
9	**а)** $\int_{-8}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$	**б)** $\int_0^{\sqrt{5}} x\sqrt{9+x^2}dx$	**в)** $\int_1^{\sqrt[3]{e}} x^2 \ln 9x dx$
	г) $\int_2^3 x\sqrt{x-2}dx$		
10	**а)** $\int_1^4 \left(\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{10}{x^3}\right)dx$	**б)** $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos x dx}{10+\sin^2 x}$	**в)** $\int_0^1 xe^{10x}dx$
	г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$		
11	**а)** $\int_1^2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 11\right)dx$	**б)** $\int_1^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{11\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$	**в)** $\int_{-2}^{2} (11-x)\sin \pi x dx$
	г) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1-\cos x}dx$		

12	**а)** $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$	**б)** $\int\limits_{5}^{10}\frac{dx}{x^2+16x+80}$	**в)** $\int\limits_{0}^{0.1} arctg12xdx$
	г) $\int\limits_{27}^{125}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}-2}$		
13	**а)** $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$	**б)** $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+12}}$	**в)** $\int\limits_{0}^{4}\ln(x+13)dx$
	г) $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x\sqrt[3]{1-x^2}dx$		
14	**а)** $\int\limits_{0}^{\pi/7}\sin^2 14xdx$	**б)** $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}}\frac{14x^3dx}{\left(1+x^4\right)^2}dx$	**в)** $\int\limits_{0}^{1}(14+x)e^x dx$
	г) $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+4x)}$		
15	**а)** $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/3}\cos 4xdx$	**б)** $\int\limits_{1}^{10}\frac{dx}{1-\sqrt{x+15}}$	**в)** $\int\limits_{0}^{1} arctg\frac{x}{15}dx$
	г) $\int\limits_{0}^{2}\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}dx$		
16	**а)** $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{x^2+16}$	**б)** $\int\limits_{1}^{2}\frac{2^x dx}{16+4^x}$	**в)** $\int\limits_{1}^{e}\sqrt{x}\ln 16x\,dx$
	г) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{8+7\cos x-4\sin x}$		
17	**а)** $\int\limits_{7}^{10}\sqrt{x-7}dx$	**б)** $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{17\sin xdx}{1+\cos^2 x}$	**в)** $\int\limits_{1}^{e^2}\ln^2 17x\,dx$
	г) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$		

18	**а)** $\int_{1}^{4}\frac{1+8\sqrt{x}}{x^2}dx$	**б)** $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\sqrt{18+tgx}}{\cos^2 x}dx$	**в)** $\int_{0}^{9}x e^{\frac{x}{18}}dx$
	г) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{3\cos 2x-1}$		
19	**а)** $\int_{-1}^{1}\left(19+\frac{7}{2}x\sqrt[3]{x}\right)dx$	**б)** $\int_{e}^{e^2}\frac{\sqrt{\ln x+19}}{x}dx$	**в)** $\int_{0}^{\pi}(x+19)\cos x dx$
	г) $\int_{0}^{3}\frac{dx}{\sqrt{\left(16+x^2\right)^3}}$		
20	**а)** $\int_{\pi/6}^{\pi/4}ctg^2 x dx$	**б)** $\int_{4}^{20}\frac{\sqrt{x+5}}{x+30}dx$	**в)** $\int_{0}^{1}arctg\,\frac{x}{20}dx$
	г) $\int_{\sqrt{3}}^{3}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$		
21	**а)** $\int_{0}^{\pi/4}(e^x-21tg^2 x)dx$	**б)** $\int_{1}^{8}\frac{x^2dx}{21+x^3}$	**в)** $\int_{-\pi/6}^{\pi/6}(21-x)\sin x dx$
	г) $\int_{15}^{99}\frac{dx}{3-\sqrt{x+1}}$		
22	**а)** $\int_{0}^{4}\frac{x+22}{\sqrt{x}}dx$	**б)** $\int_{\pi/3}^{\pi/2}e^{\cos 2x}\sin 2x dx$	**в)** $\int_{1}^{e}(x+22)\ln x dx$
	г) $\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{(1+\sin x)dx}{1+\sin x+\cos x}$		

23	**а)** $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\left(2\cos x+\frac{3}{x}\right)dx$	**б)** $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\sqrt[3]{ctgx}}$	**в)** $\int\limits_{-1}^{0}(2x+3)e^{-x}dx$
	г) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\cos xdx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$		
24	**а)** $\int\limits_{0}^{9}\frac{dx}{2x^2+4}$	**б)** $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$	**в)** $\int\limits_{1}^{e}(2x-4)^2\ln x\,dx$
	г) $\int\limits_{1}^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$		
25	**а)** $\int\limits_{-5\pi/4}^{5\pi/4}\sin\left(\frac{2}{5}\pi+x\right)dx$	**б)** $\int\limits_{16}^{25}\frac{5^{\sqrt{x}}-1}{2\sqrt{x}}dx$	**в)** $\int\limits_{0}^{\pi}x^2\sin 5x\,dx$
	г) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}\,\pi dx}{\sqrt{arctgx}\left(x^2+1\right)}$		
26	**а)** $\int\limits_{1}^{16}\frac{2x-6\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$	**б)** $\int\limits_{0}^{\pi/6}\frac{\cos xdt}{\sqrt[3]{2\sin x+6}}$	**в)** $\int\limits_{0}^{\pi/2}(2x+6)\sin x\,dx$
	г) $\int\limits_{25}^{36}\frac{dx}{x-4\sqrt{x}}$		
27	**а)** $\int\limits_{0}^{\pi/4}\sin^2\left(2x+\frac{7\pi}{4}\right)dx$	**б)** $\int\limits_{27}^{125}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}-2}$	**в)** $\int\limits_{0}^{1}(2x+7)e^{-x}dx$
	г) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}ctg^2 xdx$		
28	**а)** $\int\limits_{1/4}^{0}(2-8x)^3dx$	**б)** $\int\limits_{0}^{\pi/8}\frac{28\sin 2x}{\cos^3 2x}dx$	**в)** $\int\limits_{1}^{e}\sqrt[4]{x}\ln\frac{x}{28}\,dx$
	г) $\int\limits_{-\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{3}}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$		

29	**а)** $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 11x\,dx$	**б)** $\int\limits_{9}^{16}\frac{\sqrt{x}}{x+29}dx$	**в)** $\int\limits_{-4}^{-3} xe^{2x+9}dx$
	г) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x\,dx}{1+\cos^2 x}$		
30	**а)** $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} tg^2 31x\,dx$	**б)** $\int\limits_{0}^{\pi/4} 7^{30\sin x}\cos x\,dx$	**в)** $\int\limits_{-15}^{0}(1-30x)\,e^{x}dx$
	г) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{1-\cos x}\,dx$		

Завдання 1.2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями.

Варіант	Обмеження	**Варіант**	Обмеження
1	$x=y^2,\ x=1,\ y=0$	**16**	$y=x^2,\ y=4$
2	$y=x^2,\ y=2x+3$	**17**	$y=\sqrt{x},\ x=4,\ y=1$
3	$y=2x^2+1,\ y=x+2$	**18**	$y=\frac{x^2}{2},\ y=2x+\frac{5}{2}$
4	$y=x^2+3x,\ y=2x+2$	**19**	$y^2=9x,\ y=x$
5	$y^2=4x,\ y=4,\ x=0$	**20**	$y=(x-2)^2,\ y=4-x$
6	$y=-x^2+6,\ y=6-3x$	**21**	$y=x^2,\ y=2-x^2$
7	$y=x^2-5,\ y=2x+3$	**22**	$y=\frac{x^2}{9},\ y=\frac{x}{3}+2$
8	$y=\ln x,\ x=1,\ x=e^2$	**23**	$y=2^x,\ y=4,\ x=0$
9	$y=x^2-2x,\ y=8$	**24**	$y=\frac{2}{x},\ y=5-2x$
10	$y=x^2-1,\ y=x+5$	**25**	$y=x^2-x,\ y=0,\ x=2$
11	$y^2=16x,\ y=4x$	**26**	$y=x^2,\ y=2x+8$
12	$y=3^x,\ y=9,\ x=0$	**27**	$xy=5,\ x=5,\ y=5$
13	$y=4-x^2,\ y=3x,\ x\geq 0$	**28**	$y=4x-x^2,\ y=x$

14	$y = 2x^2 + 3x - 6$, $y = 2 - 3x$	**29**	$y = \sqrt{x-2}$, $x = 6$, $y = 0$
15	$y = 6x - x^2$, $y = 3x$	**30**	$y = -x$, $y = 2x - x^2$

Завдання 1.3:

а) обчислити довжину дуги кривої $y = f(x)$, $a \le x \le b$;

Варіант	$y = f(x)$	a	b	**Варіант**	$y = f(x)$	a	b
1	$y = -\sqrt{1 - x^2}$	0	1	**16**	$y = \sqrt{16 - x^2}$	-4	4
2	$y = \sqrt{2 - x^2}$	-1	1	**17**	$y = -\sqrt{17 - x^2}$	$-\sqrt{17}$	0
3	$y = -\sqrt{3 - x^2}$	0	1,5	**18**	$y = \sqrt{18 - x^2}$	-3	3
4	$y = \sqrt{4 - x^2}$	-2	1	**19**	$y = -\sqrt{19 - x^2}$	0	$\sqrt{19}$
5	$y = -\sqrt{5 - x^2}$	$-\sqrt{5}$	0	**20**	$y = \sqrt{20 - x^2}$	$-\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$
6	$y = \sqrt{6 - x^2}$	0	$\sqrt{6}/2$	**21**	$y = -\sqrt{21 - x^2}$	$-\sqrt{21}$	0
7	$y = -\sqrt{7 - x^2}$	$-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	**22**	$y = \sqrt{22 - x^2}$	$-\sqrt{11}$	0
8	$y = \sqrt{8 - x^2}$	$\sqrt{2}$	2	**23**	$y = -\sqrt{23 - x^2}$	0	$\sqrt{23}$
9	$y = -\sqrt{9 - x^2}$	-3	3	**24**	$y = \sqrt{24 - x^2}$	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{6}$
10	$y = \sqrt{10 - x^2}$	0	$\sqrt{5}$	**25**	$y = -\sqrt{25 - x^2}$	-5	0
11	$y = -\sqrt{11 - x^2}$	0	$\sqrt{11}$	**26**	$y = \sqrt{26 - x^2}$	$-\sqrt{26}$	$-\sqrt{13}$
12	$y = \sqrt{12 - x^2}$	-3	3	**27**	$y = -\sqrt{27 - x^2}$	0	$3\sqrt{3}$
13	$y = -\sqrt{13 - x^2}$	$-\sqrt{13}$	0	**28**	$y = \sqrt{28 - x^2}$	$-\sqrt{7}$	$2\sqrt{7}$
14	$y = \sqrt{14 - x^2}$	0	$\sqrt{7}$	**29**	$y = -\sqrt{29 - x^2}$	$-\sqrt{29}$	0
15	$y = -\sqrt{15 - x^2}$	$-\sqrt{15}$	0	**30**	$y = -\sqrt{30 - x^2}$	0	$\sqrt{15}$

б) обчислити довжину дуги кривої, заданої рівнянням, якщо $a \le x \le b$;

Варіант	$y = f(x)$	a	b
1	$y = \ln(3x) - \frac{x^2}{4}$	2	4
2	$y^2 = 4x^3$	0	3

3	$y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$	0	$\frac{11}{25}$
4	$y=\ln(\cos x)+4$	0	$\frac{\pi}{6}$
5	$y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$	3	5
6	$y=\ln(x^2-1)$	2	4
7	$y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$	0,16	0,81
8	$y=4-\sqrt[3]{x^2}$	0	8
9	$y=\arccos(\sin x)+9$	0	$\frac{\pi}{4}$
10	$y=\frac{10-\ln(0{,}25-x^2)}{2}$	0	0,3
11	$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}+11$	0	ln3
12	$y=12+\arcsin(\cos 3x)$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$
13	$y=-\sqrt[3]{x^2}-1$	0	1
14	$(y+1)^2=8(x-2)^3$	2	$\frac{22}{9}$
15	$y=5-\frac{1}{6}(e^{3x}+e^{-3x})$	$-\ln 2$	$\ln 2$
16	$y=\frac{\ln(2x+\sqrt{4x^2-1})}{2}$	0,5	2
17	$y=\sqrt{x-x^2}-\arccos\sqrt{x}$	0,25	0,64
18	$y=2\ln(x^2-4)-18$	3	4
19	$y=9-\sqrt[3]{x^2}$	0	8
20	$(y-5)^2=2(x+1)^3$	-1	$-\frac{1}{3}$
21	$y=\sqrt{e^x}+\frac{1}{\sqrt{e^x}}+21$	0	$\ln 4$
22	$y=-\sqrt[3]{x^2}-22$	1	8
23	$y=23-\arcsin(\cos x)$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
24	$y=6-3\ln(9-x^2)$	1	2

25	$y=\frac{1}{3}\ln(3x+\sqrt{9x^2-1})$	$\frac{1}{3}$	1
26	$y=36-x^{\frac{2}{3}}$	8	27
27	$y=\arccos x-\sqrt{1-x^2}$	0	$\frac{9}{16}$
28	$y=2\sqrt[4]{e^x}+\frac{2}{\sqrt[4]{e^x}}-28$	ln16	ln81
29	$y=\arccos(\sin 2x)+29$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$
30	$y=\ln(\sin x)+2$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

в) обчислити довжину дуги кривої, яка задана параметрично:

$x=\varphi(t), y=\varphi(t),\ t_1\le t\le t_2$.

Варіант	$x=\varphi(t), y=\varphi(t)$	t_1	t_2
1	$\begin{cases}x(t)=1-3t^2,\\ y(t)=2t^3\end{cases}$	0	$\sqrt{3}$
2	$\begin{cases}x(t)=2\cos^3 t,\\ y(t)=2\sin^3 t\end{cases}$	0	π/2
3	$\begin{cases}x(t)=3arctgt,\\ y(t)=1{,}5\ln(t^2+1)\end{cases}$	0	8
4	$\begin{cases}x(t)=4(\cos t+t\sin t),\\ y(t)=4(\sin t-t\cos t)\end{cases}$	0	3
5	$\begin{cases}x(t)=5e^t(\cos t-\sin t),\\ y(t)=5e^t(\sin t+\cos t)\end{cases}$	0	ln3
6	$\begin{cases}x(t)=6(t-\sin t),\\ y(t)=6(1-\cos t)\end{cases}$	0	π
7	$\begin{cases}x(t)=14\cos t-7\cos 2t,\\ y(t)=14\sin t-7\sin 2t\end{cases}$	2π/3	π
8	$\begin{cases}x(t)=8(\sin t-t\cos t),\\ y(t)=8(\cos t+t\sin t)\end{cases}$	1	5

9	$\begin{cases} x(t)=9e^{-t}\sin t, \\ y(t)=9e^{-t}\cos t \end{cases}$	ln 2	ln5
10	$\begin{cases} x(t)=20\arccos t, \\ y(t)=10\ln\left(1-t^2\right) \end{cases}$	-0,5	0,5
11	$\begin{cases} x(t)=11(t-\sin t), \\ y(t)=11(1-\cos t) \end{cases}$	0	2π/3
12	$\begin{cases} x(t)=12t\sin t, \\ y(t)=12t\cos t \end{cases}$	0	$\frac{3}{4}$
13	$\begin{cases} x(t)=13e^{2t}\cos 2t, \\ y(t)=13e^{2t}\sin 2t \end{cases}$	0	ln 2
14	$\begin{cases} x(t)=\arccos\frac{t}{14}, \\ y(t)=\arcsin\frac{t}{14} \end{cases}$	0	7
15	$\begin{cases} x(t)=2t^3, \\ y(t)=15-3t^2 \end{cases}$	0	$\frac{\sqrt{5}}{2}$
16	$\begin{cases} x(t)=16(t-\sin t), \\ y(t)=16(1-\cos t) \end{cases}$	π	2π
17	$\begin{cases} x(t)=\left(t^2-2\right)\cos t+2t\sin t, \\ y(t)=17+\left(2-t^2\right)\sin t+2t\cos t \end{cases}$	1	4
18	$\begin{cases} x(t)=18\sin t-9\sin 2t, \\ y(t)=18\cos t-9\cos 2t \end{cases}$	π	2π
19	$\begin{cases} x(t)=\frac{19-t}{19+t}, \\ y(t)=\frac{t}{19+t} \end{cases}$	0	1
20	$\begin{cases} x(t)=20\sin^3 t, \\ y(t)=20\cos^3 t \end{cases}$	0	π/2
21	$\begin{cases} x(t)=21\cos^2 t, \\ y(t)=21\sin^2 t \end{cases}$	0	π/2

22	$\begin{cases} x(t)=1-\dfrac{22}{22+t}, \\ y(t)=\dfrac{44}{22+t}-1 \end{cases}$	2	3
23	$\begin{cases} x(t)=23(\cos t+t\sin t), \\ y(t)=23(\sin t-t\cos t) \end{cases}$	2	4
24	$\begin{cases} x(t)=12\ln\left(1-t^2\right), \\ y(t)=24\arcsin t \end{cases}$	0	0,2
25	$\begin{cases} x(t)=8t^3, \\ y(t)=25+6t^2-3t^4 \end{cases}$	0	$\sqrt{2}$
26	$\begin{cases} x(t)=13\ln\left(t^2+4\right), \\ y(t)=26\,arctg\,\dfrac{t}{2} \end{cases}$	5	12
27	$\begin{cases} x(t)=arcctg\,\dfrac{t}{27}, \\ y(t)=arctg\,\dfrac{t}{27} \end{cases}$	0	$27\sqrt{3}$
28	$\begin{cases} x(t)=28(t-\sin t), \\ y(t)=28(1-\cos t) \end{cases}$	π	$3\pi/2$
29	$\begin{cases} x(t)=29+\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t, \\ y(t)=\left(t^2-2\right)\cos t-2t\sin t \end{cases}$	0	3
30	$\begin{cases} x(t)=30\sin^2 t, \\ y(t)=30\cos^2 t \end{cases}$	$\pi/2$	π

Завдання 1.4. За допомогою визначеного інтеграла знайти об’єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої заданими лініями, навколо осі Ox.

Варіант		**Варіант**	
1	$y^2=1-x,\ 0\le x\le 1,$ $y=0$	**16**	$y=2\sin 3x,\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{6},\ y=0$
2	$y=3-x,\ -3\le x\le 0,$ $y=0$	**17**	$y=e^{\frac{x}{2}},\ 1\le x\le 3,\ y=0$

3	$y=2x^2+1,\ 0\le x\le 1,$ $y=0$	**18**	$y=\sqrt{8-\dfrac{x^2}{2}},\ 0\le x\le 4,\ y=0$
4	$y=2x+2,\ -1\le x\le 1,$ $y=0$	**19**	$y=\dfrac{2x}{3}+6,\ -9\le x\le 0,\ y=0$
5	$y=\sqrt{4-x},\ 0\le x\le 4,$ $y=0$	**20**	$y^2=(x+1)^3,\ -1\le x\le 0,$ $y=0$
6	$y=2^x,\ 0\le x\le 1,\ y=0$	**21**	$y=\sqrt[3]{x^2},\ 0\le x\le 8,\ y=0$
7	$y=\dfrac{x^2}{9},\ -3\le x\le 0,\ y=0$	**22**	$y=3^x,\ 0\le x\le 1,\ y=0$
8	$y=\sin 2x,\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{4},$ $y=0$	**23**	$y=\dfrac{2}{x},\ 1\le x\le 2,\ y=0$
9	$y=e^x,\ 0\le x\le 1,\ y=0$	**24**	$y=4^x,\ 0\le x\le 1,\ y=0$
10	$y=\dfrac{x^3}{2},\ 0\le x\le 2,\ y=0$	**25**	$y=3\cos 4x,\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{8},\ y=0$
11	$y^2=(x-2)^3,\ 2\le x\le 4,$ $y=0$	**26**	$y=\sqrt{x-2},\ 2\le x\le 4,\ y=0$
12	$y=\sqrt{3-x},\ 0\le x\le 3,$ $y=0$	**27**	$y=4x-x^2,\ 0\le x\le 2,\ y=0$
13	$y=\cos 2x,\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{4},$ $y=0$	**28**	$y=\dfrac{2x^3}{3},\ 0\le x\le 2,\ y=0$
14	$y=\sqrt{x},\ 0\le x\le 4,\ y=0$	**29**	$y=\dfrac{3}{x},\ 1\le x\le 3,\ y=0$
15	$y=\dfrac{x^2}{2},\ 0\le x\le 4,\ y=0$	**30**	$y=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right),$ $\dfrac{\pi}{4}\le x\le \dfrac{\pi}{3}, y=0$

ЗАВДАННЯ 2. Невласний інтеграл

Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність.

Варіант	а)	б)
1	$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$	$\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\ln^5 x}$
2	$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{(1+x)^6}$	$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$
3	$\int\limits_{2}^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx$	$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{(x-1)^2}$
4	$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-6x+10}$	$\int\limits_{0}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$
5	$\int\limits_{-\infty}^{-3}\frac{dx}{(x+1)^2}$	$\int\limits_{-1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{3-x}}$
6	$\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$	$\int\limits_{-3}^{2}\frac{dx}{(x+2)^2}$
7	$\int\limits_{\sqrt{3}}^{\infty}\frac{xdx}{x^4+9}$	$\int\limits_{5}^{6}\frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)^2}}$
8	$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+16}$	$\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{(x-2)^3}$
9	$\int\limits_{0}^{\infty}xe^{x^2}dx$	$\int\limits_{1}^{2}\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$
10	$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$	$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$
11	$\int\limits_{e}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$	$\int\limits_{-8}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{8+x}}$
12	$\int\limits_{1}^{\infty}e^{-9x}dx$	$\int\limits_{6}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-6}}$
13	$\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+2}}$	$\int\limits_{3}^{5}\frac{dx}{(x-5)^2}$
14	$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^4}$	$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}$

15	$\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$	$\int_{0}^{1} \frac{\ln x}{x} dx$
16	$\int_{0}^{\infty} xe^{-3x^2} dx$	$\int_{-7}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+7}}$
17	$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2-6x+13}$	$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ctgx\, dx$
18	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^4}}$	$\int_{3}^{5} \frac{xdx}{x-3}$
19	$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+7}}$	$\int_{0}^{1} \frac{(2x+1)}{\sqrt[3]{x}} dx$
20	$\int_{1}^{\infty} xe^{-x^2} dx$	$\int_{-4}^{0} \frac{xdx}{(x+4)^2}$
21	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}}$	$\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$
22	$\int_{-\infty}^{0} e^{-6x} dx$	$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} tg2x\, dx$
23	$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+20}$	$\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$
24	$\int_{0}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+5}}$	$\int_{-9}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+9}}$
25	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^5}}$	$\int_{3}^{5} \frac{dx}{(x-3)^3}$
26	$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{4x^2+9}$	$\int_{1}^{7} \frac{dx}{\sqrt{7-x}}$
27	$\int_{1}^{\infty} \frac{x^2dx}{1+x^6}$	$\int_{0}^{5} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$
28	$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x+6}$	$\int_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}$

29	$\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2+x+1}$	$\int\limits_{-6}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+6}}$
30	$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+25}$	$\int\limits_{1}^{5} \frac{xdx}{x-5}$

ЗАВДАННЯ 3. Подвійний інтеграл

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$ за областю (D). Зробити рисунок.

Варіант	Умова завдання
1	$\iint\limits_{(D)} x^3 y^2\, dxdy$, (D): $x^2+y^2 \le R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$
2	$\iint\limits_{(D)} \left(x^2+y\right) dxdy$, (D) − область, обмежена параболами $y=x^2$, $x=y^2$
3	$\iint\limits_{(D)} \frac{x^2}{y^2} dxdy$, (D) − область, обмежена прямими $x=2$, $y=x$ та гіперболою $x\,y=1$
4	$\iint\limits_{(D)} \cos(x+y)\, dxdy$, (D) − область, обмежена прямими $x=0$, $y=\pi, y=x$
5	$\iint\limits_{(D)} (x+y)\, dxdy$, (D) – верхня половина круга $x^2+y^2 \le 1$, $y \ge 0$
6	$\iint\limits_{(D)} \left(x+y^2\right) dxdy$, (D) – область, обмежена параболою $y=x^2$ та прямою $y=x$
7	$\iint\limits_{(D)} \sin(x-y) dxdy$, (D) − область, обмежена прямими $x=0$, $y=\pi/2$, $y=x$
8	$\iint\limits_{(D)} \frac{y^2}{x^2} dxdy$, (D) − область, обмежена прямими $y=2$, $y=x$ та гіперболою $x\,y=1$

9	$\iint\limits_{(D)} \frac{x}{1+y^2}dxdy$, (D) − область, обмежена прямими $x=0$, $y=1$, $y=x$
10	$\iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{(1+x+y)^2}$, (D) − область, обмежена прямими $y=0, x=1, y=x$
11	$\iint\limits_{(D)} x^2 y\,dxdy$, (D): $x^2+y^2\le 4,\ x\le 0, y\le 0$
12	$\iint\limits_{(D)} (2x-y)dxdy$, (D) − область, обмежена параболами $y=-x^2$, $x=2y^2$
13	$\iint\limits_{(D)} \frac{x}{y}dxdy$, (D) − область, обмежена прямими $x=-2, y=-1$ та гіперболою $xy=1$
14	$\iint\limits_{(D)} \cos(x-y)dxdy$, (D) − область, обмежена прямими $x=0$, $y=\pi/2$, $y=x$
15	$\iint\limits_{(D)} (x-3y)dxdy$, (D) – нижня половина круга $x^2+y^2\le 9$, $y\le 0$
16	$\iint\limits_{(D)} \left(xy-y^2\right)dxdy$, (D) – область, обмежена параболою $x=y^2$ та прямою $y=x$
17	$\iint\limits_{(D)} \sin(x+y)dxdy$, (D) − область, обмежена прямими $x=0$, $y=\pi, y=x$
18	$\iint\limits_{(D)} \frac{y}{x}dxdy$, (D) − область, обмежена прямими $y=-2, x=-1$ та гіперболою $xy=1$
19	$\iint\limits_{(D)} \frac{y}{4+x^2}dxdy$, (D) − область, обмежена прямими $y=0$, $x=-1$, $y=x$
20	$\iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{(2+x+y)^2}$, (D) − область, обмежена прямими $x=0$, $y=1$, $y=x$

21	$\iint\limits_{(D)} x\,y\,dxdy$, (D): $x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\le 0$
22	$\iint\limits_{(D)} (x-3y)dxdy$, (D) − область, обмежена параболами $y=x^2$, $x=-y^2$
23	$\iint\limits_{(D)} xy\,dxdy$, (D) − область, обмежена прямими $x=0, y=2$ та кривою $y=e^x$
24	$\iint\limits_{(D)} x\,dxdy$, (D) − область, обмежена прямою $y=0$ та кривою $y=\sin x,\ 0\le x\le\pi$
25	$\iint\limits_{(D)} (2x+y)dxdy$, (D) – верхня половина круга $x^2+y^2\le 4$ ($y\ge 0$)
26	$\iint\limits_{(D)} \left(3x-y^2\right)dxdy$, (D) – область, обмежена параболою $y=-x^2$ та прямою $y=x$
27	$\iint\limits_{(D)} y\,dxdy$, (D) − область, обмежена прямими $x=0,\ x=\pi/2, y=0,$ та кривою $y=\cos x$
28	$\iint\limits_{(D)} \frac{x}{y}dxdy$, (D) − область, обмежена прямими $x=0,\ y=e$ та кривою $y=e^{-x}$
29	$\iint\limits_{(D)} x\,dxdy$, (D) − трикутник ABC: $A(2;3),\ B(2;0),\ C(4;0)$
30	$\iint\limits_{(D)} (x-y)dxdy$, (D) − область, обмежена прямою $y=2x$ та параболою $y=-x^2$

ЗАВДАННЯ 4. Криволінійний інтеграл

Варіант	Умова завдання
1	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} \left(x^2-2xy\right)dx+\left(y^2-2xy\right)dy$ вздовж дуги (L) параболи $y=x^2$ від точки $A(-1;1)$ до точки $B(1;1)$. Зробити рисунок

2	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} \frac{y}{x} dx + x\,dy$ вздовж дуги кривої $y = \ln x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(e;1)$. Зробити рисунок
3	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} xy\,dx + (3x - y^2)\;dy$ вздовж дуги кривої $y = e^x$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(1;e)$. Зробити рисунок
4	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} \frac{x - y^2}{x^2} dx + \frac{3x}{y^2} dy$ вздовж відрізка $(L) = AB$ від точки $A(1;3)$ до точки $B(2;6)$. Зробити рисунок
5	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} \left(x^2 y + 4x\right) dx + \left(y^2 x + 9y\right) dy$ вздовж верхньої половини еліпса $\begin{cases} x(t) = 3\cos t, \\ y(t) = 2\sin t, \end{cases}$ $t \in [0;\pi]$. Зробити рисунок
6	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} x^2 y\,dx - (3x + y)\,dy$ вздовж дуги (L) кубічної параболи $y = 3x^3$ від точки $A(-1;-3)$ до точки $O(0;0)$. Зробити рисунок
7	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy$ вздовж дуги (L) кола $\begin{cases} x(t) = 2\cos t, \\ y(t) = 2\sin t \end{cases}$ при обході його проти годинникової стрілки від точки $A(2;0)$ до точки $B(0;2)$. Зробити рисунок
8	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} (3x - y)\,dx + 2xy\,dy$ вздовж ламаної $(L) = (OAB)$ з вершинами $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(2;-3)$. Зробити рисунок
9	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} \frac{y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$ вздовж межі (L) трикутника ABC при обході її проти годинникової стрілки, якщо відомі його вершини $A(1;0)$, $B(1;1)$, $C(0;1)$. Зробити рисунок

10	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} \left(x^2+y\right)dx-\left(x+y^2\right)dy$ вздовж ламаної $(L)=(ABC)$, де $A(1;3)$, $B(1;5)$, $C(3;5)$. Зробити рисунок
11	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} \frac{y^2+1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy$ вздовж відрізка $(L)=AB$ від точки $A(1;2)$ до точки $B(2;4)$. Зробити рисунок.
12	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} y\,dx-xdy$ вздовж дуги (L) кола $\begin{cases} x(t)=3\cos t, \\ y(t)=3\sin t \end{cases}$ при обході його проти годинникової стрілки від точки $A(3;0)$ до точки $B(0;3)$. Зробити рисунок
13	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} y^2\,dx-(x-2y)dy$ вздовж дуги (L) параболи $x=2y^2$ від точки $A(2;-1)$ до точки $B(2;1)$. Зробити рисунок
14	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} (x^2-3y)dx+(y^2-3x)dy$ вздовж межі (L) трикутника OAB при обході її проти годинникової стрілки, якщо відомі його вершини $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(1;0)$. Зробити рисунок
15	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} \left(x^2y-x\right)dx+3yx\,dy$ вздовж верхньої половини еліпса $\begin{cases} x(t)=5\cos t, \\ y(t)=3\sin t, \end{cases}$ $t\in[0;\pi]$. Зробити рисунок
16	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} \left(x^2-2y\right)dx-(1+xy)dy$ вздовж дуги (L) параболи $y=-x^2+1$ від точки $A(-1;0)$ до точки $B(1;0)$. Зробити рисунок
17	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} xy\,dx-\frac{dy}{3y^2}$ вздовж дуги кривої $y=2^x$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(1;2)$. Зробити рисунок

18	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} \frac{y}{2x}dx - x^2\,dy$ вздовж дуги кривої $\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = \ln t \end{cases}$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(e;1)$. Зробити рисунок
19	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} (x+y)dx - (x-y)dy$ вздовж ламаної $(L) = (OAB)$ з вершинами $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(4;5)$. Зробити рисунок
20	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} \left(xy - x^2\right)dx + x\,dy$ вздовж дуги (L) параболи $y = 2x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $B(1;2)$. Зробити рисунок
21	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} (2x+y)dx - (x+2y)\,dy$ вздовж ламаної $(L) = (OAB)$ з вершинами $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(3;4)$. Зробити рисунок
22	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} xy\,dx - \frac{3}{x}dy$ вздовж дуги кривої $y = \ln x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(e;1)$. Зробити рисунок
23	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} (2xy-1)dx + y^2 dy$ вздовж межі (L) трикутника ABC при обході її проти годинникової стрілки, якщо відомі його вершини $A(1;0)$, $B(1;1)$, $C(2;1)$. Зробити рисунок
24	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} \left(x^2 - 3y\right)dx - (xy+1)dy$ вздовж верхньої половини еліпса $\begin{cases} x(t) = \cos t, \\ y(t) = 2\sin t, \end{cases}$ $t \in [0;\pi]$. Зробити рисунок
25	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} (2xy - x)dx + \left(1 - y^2\right)dy$ вздовж ламаної $(L) = (ABC)$, де $A(5;3)$, $B(2;3)$, $C(1;5)$. Зробити рисунок
26	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} xy^2 dx + y^4\,dy$ вздовж дуги кривої $y = \sqrt{x}$ від точки $A(1;1)$ до точки $B(4;2)$. Зробити рисунок

27	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} \left(x^2 - y\right)dx + xdy$ вздовж дуги (L) кола $\begin{cases} x(t) = 5\cos t, \\ y(t) = 5\sin t \end{cases}$ при обході його проти годинникової стрілки від точки $A(5;0)$ до точки $B(0;5)$. Зробити рисунок
28	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} 3x^2 y\,dx + \left(2x - y^2\right)dy$ вздовж ламаної $(L) = (ABC)$, де $A(0;1)$, $B(2;-1)$, $C(5;-1)$. Зробити рисунок
29	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} x^2 ydx - 2y\,dy$ вздовж дуги кривої $y = -\ln x$ від точки $A(e;-1)$ до точки $B(1;0)$. Зробити рисунок
30	Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} y\,dx + \frac{x}{y}\,dy$ вздовж дуги кривої $y = e^{-x}$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(-1;e)$. Зробити рисунок

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ТА ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТА

Завдання 1.1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int\limits_1^4 \frac{1 + 2\sqrt{x}}{x^2}dx;$

б) $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1 + \ln^2 x}};$

в) $\int\limits_0^1 xarctgxdx$;

г) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}.$

Розв'язання:

а) для обчислення визначених інтегралів використовуємо формулу Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

та властивості визначеного інтеграла (додаток А).

$$\int_1^4 \frac{1+2\sqrt{x}}{x^2}dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2\sqrt{x}}{x^2}\right)dx =$$

$$= \int_1^4 \left(x^{-2} + 2x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = \left(-\frac{1}{x} + 2\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= \left(-\frac{1}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right)\Bigg|_1^4 = \left(-\frac{1}{4} - \frac{4}{\sqrt{4}}\right) - (-1-4) = \frac{11}{4};$$

б) для обчислення цього інтеграла скористаємось формулою заміни змінної для визначеного інтеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1+\ln^2 x}} = \left|\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = (\ln x)'\,dx = \dfrac{dx}{x} \\ x_н = 1 \to t_н = \ln 1 = 0 \\ x_в = e^3 \to t_в = \ln e^3 = 3 \end{array}\right| = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right|\Bigg|_0^3 = \ln\left|3+\sqrt{1+3^2}\right| - \ln\left|0+\sqrt{1+0^2}\right| = \ln\left|3+\sqrt{10}\right| - \ln 1 = \ln\left(3+\sqrt{10}\right);$$

в) інтеграл знаходимо за формулою інтегрування частинами

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du\,.$$

$$\int\limits_0^1 x\,arctgx\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = arctgx & dv = xdx \\ du = (arctgx)'\,dx = \dfrac{dx}{1+x^2} & v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}\cdot arctgx\right)\Bigg|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}arctg1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(x - arctgx)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(1 - arctg1) =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2};$$

г) $$\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{e^x+1} \\ e^x = t^2 - 1 \\ x = \ln(t^2-1) \\ dx = \dfrac{2t}{t^2-1}dt \\ x_н = \ln 3 \to t_н = \sqrt{e^{\ln 3}+1} = 2 \\ x_в = \ln 8 \to t_в = \sqrt{e^{\ln 8}+1} = 3 \end{array} \right| = \int\limits_2^3 \frac{\frac{2t}{t^2-1}}{t}dt =$$

$$= 2\int\limits_2^3 \frac{t}{t(t^2-1)}dt = 2\int\limits_2^3\frac{dt}{t^2-1} = 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^3 = \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3} = \ln\frac{3}{2}.$$

Відповідь: а) $\int\limits_1^4 \frac{1+2\sqrt{x}}{x^2}dx = \frac{11}{4}$; б) $\int\limits_1^{e^3}\frac{dx}{x\cdot\sqrt{1+\ln^2 x}} = \ln\left(3+\sqrt{10}\right)$;

в) $\int\limits_0^1 x\,arctgx\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$; г) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \ln\frac{3}{2}$.

Завдання 1.2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 2x,\ \ y = x + 4$.

Розв'язання. Обчислюємо абсциси точок перетину параболи $y = x^2 - 2x$ і прямої $y = x + 4$:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = x + 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} x^2 - 2x = x + 4, \\ x^2 - 3x - 4 = 0, \end{array}, \left[\begin{array}{l} x_1 = -1, \\ x_2 = 4. \end{array} \right.$$

Фігура, площу якої необхідно знайти, зображена на рисунку 1.

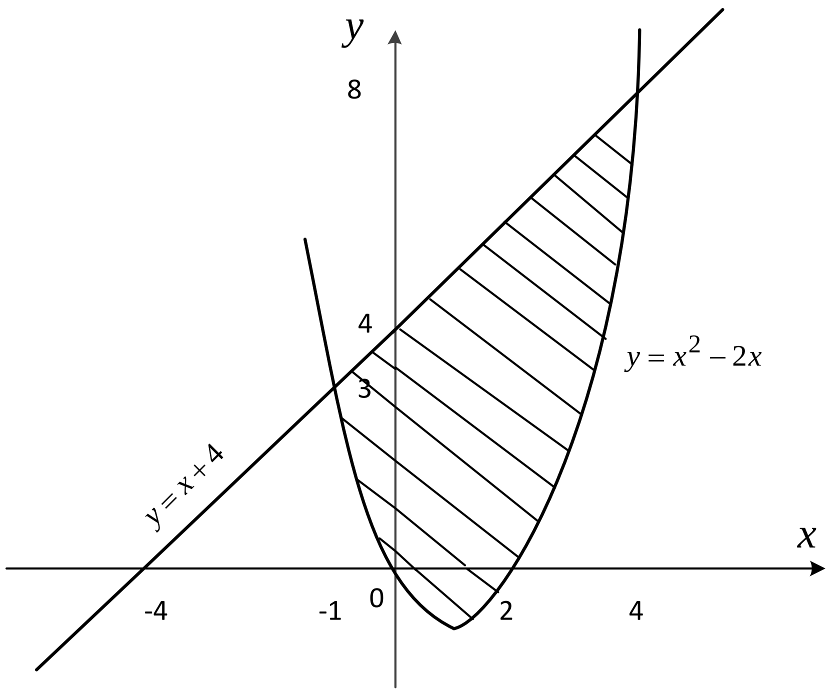


Рисунок 1 – Завдання 1.2

За додатком Б обчислюємо площу.

$$S = \int_{-1}^{4} \left\{ (x+4) - \left(x^2 - 2x\right) \right\} dx = \int_{-1}^{4} \left\{ x + 4 - x^2 + 2x \right\} dx = \int_{-1}^{4} \left\{ 4 + 3x - x^2 \right\} dx =$$

$$= \left\{ 4x + 3 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right\} \Bigg|_{-1}^{4} = \left\{ 4 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{3} \right\} - \left\{ 4 \cdot (-1) + 3 \cdot \frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} \right\} =$$

$$= 18\frac{2}{3} - \left(-2\frac{1}{6} \right) = 20\frac{5}{6}.$$

Відповідь: $S = 20\frac{5}{6}$ **(**кв. од.).

Завдання 1.3. Обчислити довжину дуги кривої.

а) $y = \sqrt{36 - x^2}\ , 0 \le x \le 6$;

б) $y = x^2,\ -1 \le x \le 1$;

в) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t); \end{cases}\ 0 \le t \le 2\pi$.

Розв'язання:

а) знаходимо похідну функції

$$y' = \left(\sqrt{36 - x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{36 - x^2}}.$$

Спрощуємо вираз

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{36 - x^2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{36 - x^2}} = \sqrt{\frac{36}{36 - x^2}} = \frac{6}{\sqrt{36 - x^2}}$$

та за додатком В обчислюємо довжину дуги

$$l = \int_0^6 \frac{6}{\sqrt{36 - x^2}}\,dx = 6\arcsin\left(\frac{x}{6}\right)\Bigg|_0^6 = 6(\arcsin 1 - \arcsin 0) = 6 \cdot \frac{\pi}{2} = 3\pi;$$

б) спочатку обчислюємо $y' = 2x$. За додатком В довжина дуги дорівнює

$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4x^2}\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \sqrt{1 + 4x^2} & & dv = dx \\ du = \left(\sqrt{1 + 4x^2}\right)' dx = \dfrac{4x}{\sqrt{1 + 4x^2}}\,dx & & v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= x\cdot\sqrt{1+4x^2}\Big|_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1}\frac{4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}dx = 2\sqrt{5} - \int\limits_{-1}^{1}\frac{4x^2+1-1}{\sqrt{1+4x^2}}dx =$$

$$= 2\sqrt{5} - \int\limits_{-1}^{1}\left\{\sqrt{1+4x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\right\}dx = 2\sqrt{5} - \int\limits_{-1}^{2}\sqrt{1+4x^2}\,dx + \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= 2\sqrt{5} - l + \frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(-2+\sqrt{5}\right).$$

Таким чином, отримаємо

$$l = 2\sqrt{5} - l + \frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(-2+\sqrt{5}\right).$$

$$2l = 2\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}\right) = 2\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)} = 2\sqrt{5} + \ln\left(2+\sqrt{5}\right).$$

$$l = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right);$$

в) обчислюємо спочатку похідні функцій

$$\begin{cases} x_t' = 2(1-\cos t), \\ y_t' = 2\sin t. \end{cases}$$

Оскільки

$$\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} = \sqrt{(2(1-\cos t))^2 + (2\sin t)^2} = 2\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} =$$

$$= 2\sqrt{2-2\cos t} = 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t} = 2\sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}} = 4\left|\sin\frac{t}{2}\right|,$$

то за додатком В отримаємо

$$l = 4\int\limits_{0}^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt = 4\int\limits_{0}^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 4\cdot 2\cdot\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_{0}^{2\pi} = -8\cdot(-1-1) = 16.$$

Відповідь: а) $l = 3\pi$ (од.); б) $l = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$ (од.); в) $l = 16$ (од.).

Завдання 1.4. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням кривої $y = 2x - x^2$, $y = 0$ навколо осі OX.

Розв’язання. За додатком Г складемо підінтегральну функцію

$$y^2 = \left(2x - x^2\right)^2 = 4x^2 - 4x^3 + x^4$$

та знайдемо об’єм тіла (рисунок 2).

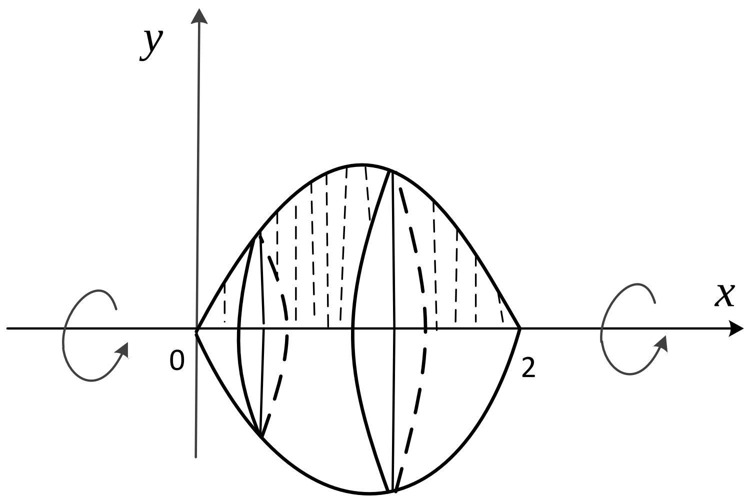


Рисунок 2 – Завдання 1.4

$$V_{OX} = \pi\int_0^2 \left(4x^2 - 4x^3 + x^4\right)dx = \pi\left(\frac{4x^3}{3} - \frac{4x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \pi\left(\frac{4\cdot 2^3}{3} - 2^4 + \frac{2^5}{5}\right) = \frac{16\pi}{15}.$$

Відповідь: $V_{OX} = \dfrac{16\pi}{15}$ (куб. од.).

Завдання 2. Невласний інтеграл

Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

а) $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2 + x - 2}$;

б) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

Розв’язання: а) за додатком Д отримаємо

$$\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{2}^{b}\frac{dx}{x^2+x-2}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{2}^{b}\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} t=x+\dfrac{1}{2} \\ dt=dx \\ x_н=2\to t_н=\dfrac{5}{2} \\ x_в=b\to t_в=b+\dfrac{1}{2} \end{array}\right|=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{\frac{5}{2}}^{b+\frac{1}{2}}\frac{dt}{t^2-\frac{9}{4}}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{t-\frac{3}{2}}{t+\frac{3}{2}}\right|\Bigg|_{\frac{5}{2}}^{b+\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left\{\ln\left|\frac{b+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{b+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\right|-\ln\left|\frac{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}\right|\right\}=\frac{1}{3}\left\{0-\ln\left|\frac{1}{4}\right|\right\}=\frac{1}{3}\ln 4;$$

б) за додатком Е маємо

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\left|\begin{array}{l} x=0-\textit{особлива точка} \\ f(x)=\dfrac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}},\ -1\le x\le 1 \end{array}\right|=\int\limits_{-1}^{0}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx+\int\limits_{0}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$$

Досліджуємо на збіжність кожний інтеграл правої частини виразу окремо.

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{-1}^{0-\varepsilon}\left(3x^{\frac{4}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}+6x^{\frac{1}{3}}\right\}\Bigg|_{-1}^{0-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{9}{7}(0-\varepsilon)^{\frac{7}{3}}+6(0-\varepsilon)^{\frac{1}{3}}-\frac{9}{7}(-1)^{\frac{7}{3}}-6(-1)^{\frac{1}{3}}\right\}=$$

$=\frac{9}{7}+6=\frac{51}{7}$ $\Rightarrow$ даний інтеграл збігається і дорівнює $\frac{51}{7}$.

Аналогічно досліджуємо на збіжність другий інтеграл

$$\int_0^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}+6x^{\frac{1}{3}}\right\}\Bigg|_{0+\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{9}{7}+6-\frac{9}{7}(0+\varepsilon)^{\frac{7}{3}}-6(0+\varepsilon)^{\frac{1}{3}}\right\}=$$

$=\frac{9}{7}+6=\frac{51}{7}$ $\Rightarrow$ даний інтеграл збігається і дорівнює $\frac{51}{7}$.

Отже, отримаємо загальний інтеграл

$$\int_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\frac{51}{7}+\frac{51}{7}=\frac{102}{7}.$$

Відповідь: а) інтеграл збігається і дорівнює $\frac{1}{3}\ln 4$;

б) інтеграл збігається і дорівнює $\frac{102}{7}$.

Завдання 3. Подвійний інтеграл

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)}(1+x-y)dxdy$ за областю (D). Зробити рисунок.

Розв'язання. Побудуємо область (D) (рисунок 3).

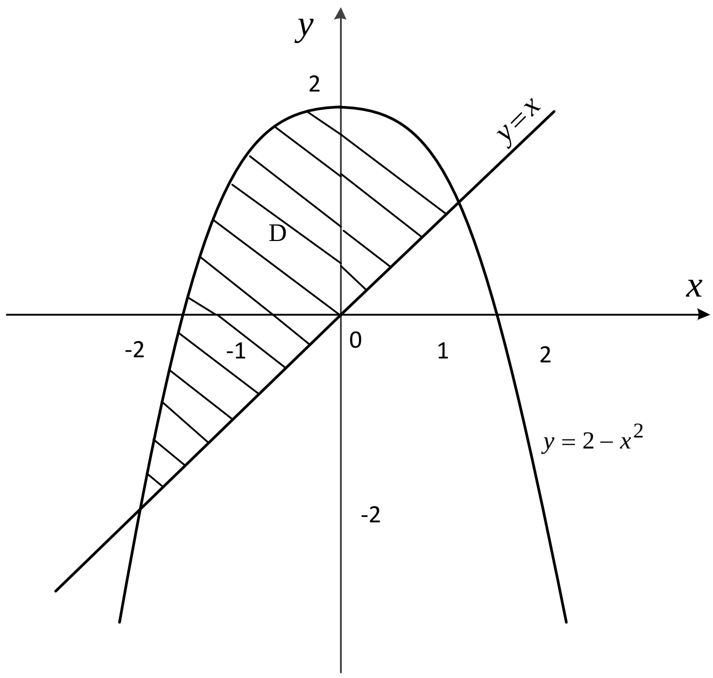


Рисунок 3 – Область інтегрування завдання 3

Обчислюємо координати точок перетину заданих ліній

$$\begin{cases} y = x, \\ y = 2 - x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x^2 = x, \\ y = x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, \\ y = x; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = -2; \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

За рисунком 3 визначаємо, що замкнена область (D) правильна відносно осі OX. Тоді за додатком К обчислюємо подвійний інтеграл

$$\iint\limits_{(D)} (1 + x - y)dxdy = \int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x}^{2-x^2} (1 + x - y)dy = \int\limits_{-2}^{1} \left(\left. \left(y + yx - \frac{y^2}{2} \right) \right|_{x}^{2-x^2} \right) dx =$$

$$= \int\limits_{-2}^{1} \left(2 - x^2 + \left(2 - x^2\right) \cdot x - \frac{\left(2 - x^2\right)^2}{2} - x - x^2 + \frac{x^2}{2} \right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{1}\left(x+\frac{x^2}{2}-x^3-\frac{x^4}{4}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\right)-\left(2-\frac{4}{3}-4+\frac{16}{5}\right)=\frac{9}{20}.$$

Відповідь: $\iint\limits_{(D)}(1+x-y)dxdy=\frac{9}{20}$.

Зауваження. Даний подвійний інтеграл можна обчислити іншим способом, змінивши порядок інтегрування у повторному інтегралі.

Завдання 4. Криволінійний інтеграл

Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} xy\,dx+y\,dy$ вздовж замкненого контура, утвореного лініями: $y=x^2, y=4, x=0$. Зробити рисунок.

Розв'язання. Побудуємо контур (L) (рисунок 4).

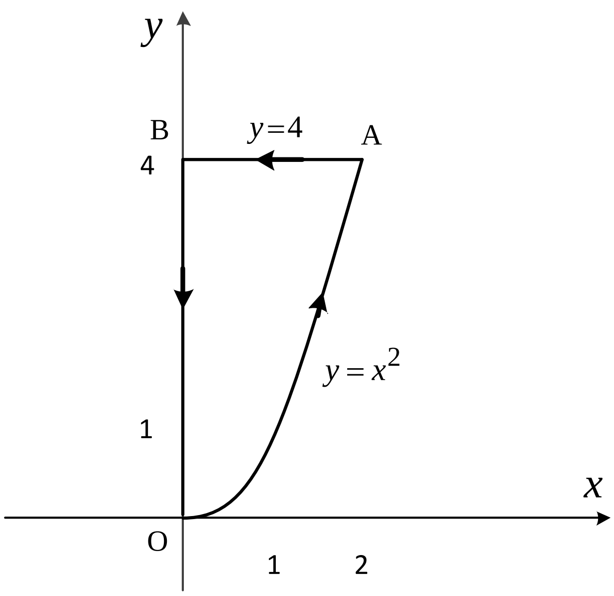


Рисунок 4 – Контур інтегрування завдання 4

Застосовуючи адитивність криволінійного інтеграла другого роду (додаток Л), маємо

$$\int\limits_{(L)} xy\,dx + y\,dy = \int\limits_{OA} xydx + ydy + \int\limits_{AB} xydx + ydy + \int\limits_{BO} xydx + ydy .$$

Розглянемо кожен інтеграл окремо ($O(0;0), A(2;4), B(0;4)$).

$$\int\limits_{OA} xydx + ydy = \left| \begin{array}{l} y = x^2 \\ dy = 2xdx \\ x_O = 0; x_A = 2 \end{array} \right| = \int\limits_0^2 \left(x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x \right) dx = \int\limits_0^2 3x^3 dx = \frac{3}{4} x^4 \Big|_0^2 = 12 ;$$

$$\int\limits_{AB} xydx + ydy = \left| \begin{array}{l} y = 4 \\ dy = 0 \\ x_A = 2; x_B = 0 \end{array} \right| = \int\limits_2^0 4xdx = 2x^2 \Big|_2^0 = -8 ;$$

$$\int\limits_{BO} xydx + ydy = \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ dx = 0 \\ y_B = 4; y_B = 0 \end{array} \right| = \int\limits_4^0 ydy = \frac{y^2}{2} \Big|_4^0 = -8 .$$

Таким чином, в результаті отримаємо

$$\int\limits_{(L)} xy\,dx + y\,dy = 12 - 8 - 8 = -4 .$$

Відповідь: $\int\limits_{(L)} xy\,dx + y\,dy = -4$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1 Поняття про визначений інтеграл.
2 Геометрична інтерпретація визначеного інтеграла.
3 Властивості визначеного інтеграла.
4 Формула Ньютона-Лейбніца.
5 Метод заміни змінної.
6 Метод інтегрування частинами.
7 Геометричне застосування визначеного інтеграла. Обчислення площ плоских фігур. Обчислення довжини дуги. Обчислення об’єму тіла обертання.
8 Невласні інтеграли першого роду.
9 Невласні інтеграли другого роду.
10 Подвійні інтеграли.
11 Криволінійні інтеграли другого роду.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1 Обчислити $\int\limits_{-1}^{2}(3x-5)^2\,dx$.

A	B	C	D	E
147	-54	57	21	Інша відповідь

2 Обчислити $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x\cos 4x\,dx$.

A	B	C	D	E
1.25	$\dfrac{3-4\sqrt{3}\pi}{96}$	5	0	Інша відповідь

3 Знайти площу фігури, яка обмежена лініями $xy=5,\ x+y=6$.

A	B	C	D	E
10.125	0.95	5	$12-5\ln 5$	Інша відповідь

4 Знайти довжину дуги кривої $y^2=(x-5)^3,\, 9\le x\le 12$.

A	B	C	D	E
21.255	9.95	52	3.95	Інша відповідь

5 Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої лініями $y=3x-x^2, y=0$, навколо осі Ox.

A	B	C	D	E
8.1π	9.8π	2.59π	9π	Інша відповідь

6 Невласний інтеграл першого роду – це … .

A	B	C	D	E
$\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$	$\int_2^5 \frac{dx}{(x-1)^2}$	$\int_2^\infty \frac{dx}{x-1}$	$\int_1^2 \frac{dx}{x^2+5}$	Інша відповідь

7 Знайти $\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{x-1}dx$.

A	B	C	D	E
1	1.614	0	Інтеграл розбігається	Інша відповідь

8 Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність $\int_{-\infty}^{-3} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$.

A	B	C	D	E
-0.05	-4	Інтеграл розбігається	2	Інша відповідь

9 Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{y} f(x;y)dx + \int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{1} f(x;y)dx$.

A	B	C	D	E
$\int\limits_0^3 dy \int\limits_{3x}^{1} f(x;y)dx$	$\int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{3x} f(x;y)dy$	$\int\limits_0^3 dx \int\limits_{3x}^{x} f(x;y)dy$	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{3x} f(x;y)dy$	Інша відповідь

10 Обчислити $\int\limits_{(AB)} (2x+y)dx + \left(y^2 - 3x\right)dy$, якщо (AB) дуга кривої $y = \sqrt{x}$, $A(1;1)$, $B(4;2)$.

A	B	C	D	E
10	15	113	11.36	Інша відповідь

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. Київ : А. С. К., 2001. 648 с.

2 Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: Збірник задач : навч. посіб. Київ : А.С.К., 2005. 480 с.

3 Вища математика : підручник. У 2 ч. Ч. 1. Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення / П. П. Овчинніков, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко; за заг. ред. П. П. Овчиннікова. Київ : Техніка, 2003. 600 с.

4 Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах Невизначений, визначений та невласні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі : навч. посіб. Київ : Книги України ЛТД, 2010. 470 с.

5 Коляда Р. В., Мельник І. О., Мельник О. М. Вища математика : навч. посіб. для ВНЗ. Вид. 2-ге, випр. та доп. Львів : Магнолія 2006, 2015. 342 с.

6 Демидович Б. П., Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики. Москва : Астрель; АСТ, 2001. 656 с.

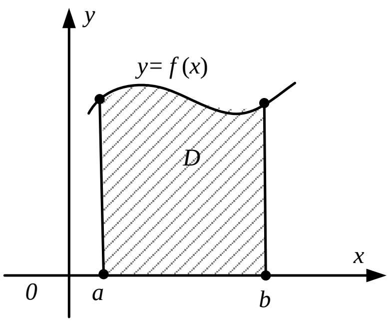
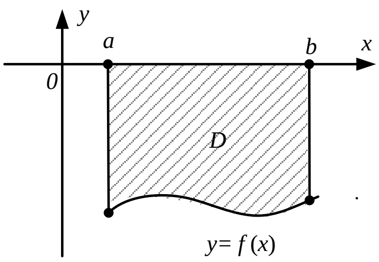
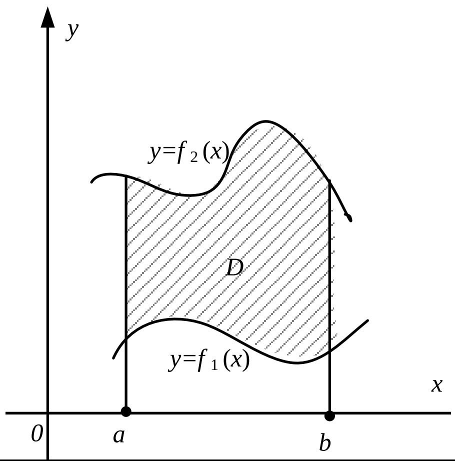
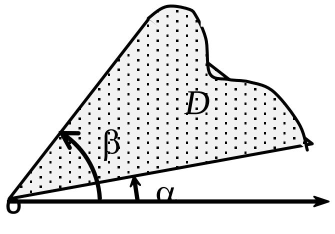
7 Вища математика : підручник / В. А. Домбровський, І. М. Крижанівський, Р. С. Мацьків, Ф. М. Мигович, В. М. Неміш, Б. С. Окрепкий, Г. П. Хома, М. Я. Шелестовська; за ред. М. І. Шинкарика. Тернопіль : Видавництво Карп’юка, 2003. 480 с.

8 Юрчак Н. С., Волохова Н. І., Панченко Н. Г. Завдання до контрольних робіт з дисципліни «Вища математика» для студентів факультету ОПУТ заочної форми навчання. Харків : УкрДАЗТ, 2009. Ч. ІІ. 50 с.

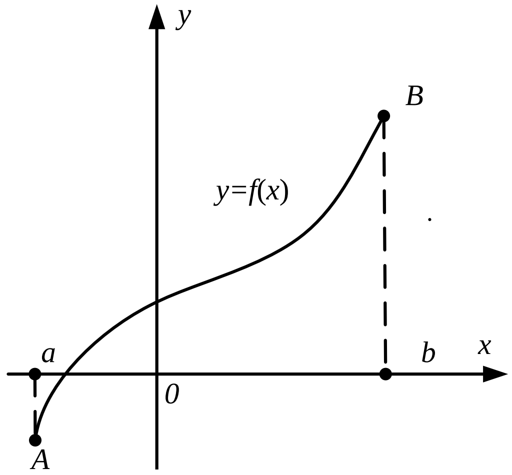
ДОДАТОК А

Властивості визначеного інтеграла
1) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$
2) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$
3) якщо $f(x) = 0$ для $x \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$
4) $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$, $k = const$, $k \in R$
5) $\int\limits_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)\,dx$
6) якщо $f(x) \geq 0$ для $x \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$
7) якщо $f(x) \leq \varphi(x)$ для $x \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b \varphi(x)dx$
8) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$
9) якщо m і M - найменше та найбільше значення функції $y = f(x)$ на $[a;b]$ відповідно, то $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$
10) якщо $f(x)$ - неперервна на $[a;b]$, то на цьому інтервалі існує хоча б одна точка $x = c$ ($a \leq c \leq b$), така, що $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

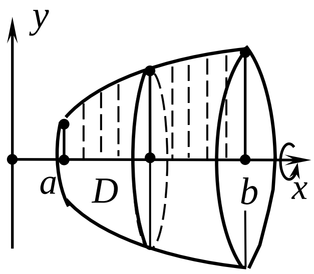
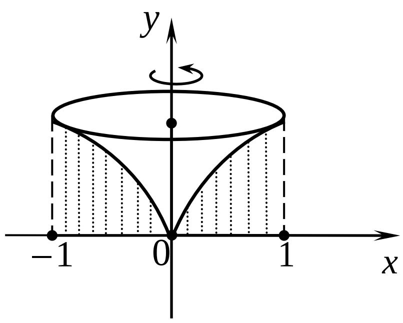
ДОДАТОК Б

<table>
<tr><th colspan="2">Площа фігури</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$$S_D=\int\limits_a^b f(x)dx,\ \ f(x)\geq 0$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$S_D=-\int\limits_a^b f(x)dx,\ \ f(x)\leq 0$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$S_D=\int\limits_a^b\{f_2(x)-f_1(x)\}dx,$$ $$f_2(x)\geq f_1(x)$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$D=\{(\rho;\varphi):\alpha\leq\varphi\leq\beta,\ 0\leq\rho\leq\rho(\varphi)\}$ – сектор у полярних координатах, обмежений неперервною лінією $\rho=\rho(\varphi)$,
$$S_D=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$$</td></tr>
</table>

ДОДАТОК В

<table>
<tr><th colspan="2">Довжина дуги кривої</th></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>Крива задана явно:
$y = f(x),\ \ x \in [a;b],$
$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$</td></tr>
<tr><td>Крива задана параметрично:
$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t); \end{cases}\ t \in [t_1; t_2],$
$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt$</td></tr>
</table>

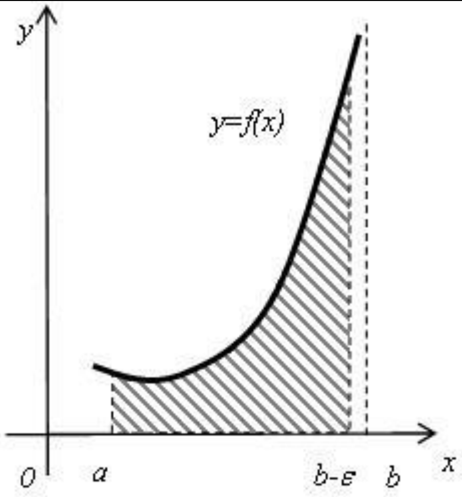
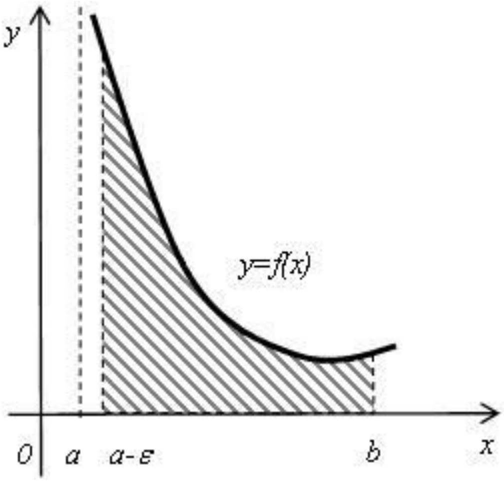
ДОДАТОК Г

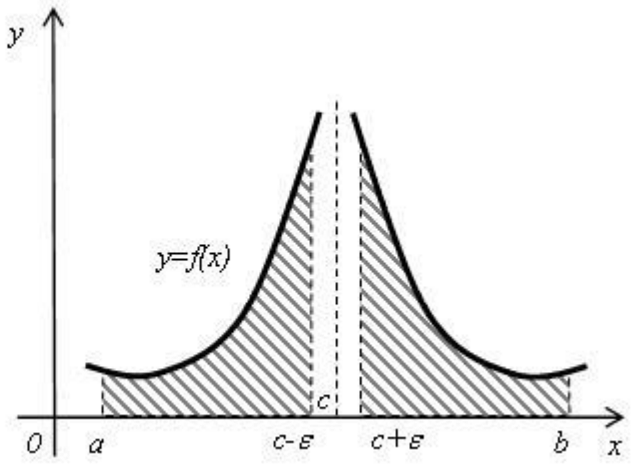
Об’єм тіла обертання	
	$V_{Ox} = \pi \cdot \int\limits_a^b f^2(x)dx$
	$V_{Oy} = 2\pi \cdot \int\limits_a^b xf(x)dx$

ДОДАТОК Д

Невласні інтеграли I роду (невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування)
Функція $f(x)$ визначена на $[a;+\infty)$ та інтегрована на будь-якому відрізку $[a;b]$, $-\infty < a < b < +\infty$. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то її називають невласним інтегралом I роду і позначають $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$
За визначенням: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$: 1) якщо границя скінченна, то невласний інтеграл називається *збіжним*, а підінтегральну функцію $f(x)$ називають інтегрованою на проміжку $[a;+\infty)$; 2) якщо границя не існує або нескінченна, то невласний інтеграл називається *розбіжним*, а $f(x)$ називається неінтегрованою на $[a;+\infty)$
Аналогічно визначається невласний інтеграл на проміжку $(-\infty;b]$: $$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$$
Невласний інтеграл з двома нескінченними межами. $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$ де c – довільне число, є *збіжним* лише тоді, коли є збіжними обидва невласних інтеграли у правій частині
$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \textit{збігається при } \alpha > 1, \\ \textit{розбігається при } \alpha \le 1 \end{cases}$$
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{\pi}$, де $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ - функція Гаусса

ДОДАТОК Е

<table>
<tr><th colspan="2">Невласні інтеграли II роду (невласні інтеграли від необмежених функцій)</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Функція $f(x)$ визначена на $[a;b)$, має в $x=b$ особливу точку ($f(x) \underset{x \to b-0}{\to} \infty$) та інтегрована на відрізку $[a;b-\varepsilon]$,($\varepsilon > 0, b-\varepsilon > a$).
Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то її називають невласним інтегралом II роду і позначають $\int\limits_a^b f(x)dx$. За визначенням $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Аналогічно, якщо $x=a$ - особлива точка:
$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">1 Якщо границя скінченна, то невласний інтеграл збігається.
2 Якщо границя не існує або нескінченна, то невласний інтеграл розбігається</td></tr>
</table>

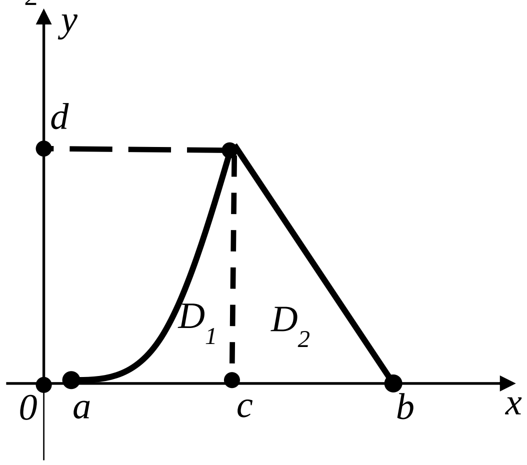
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Якщо $f(x)$ необмежена в околі точки $c \in (a;b)$, то невласний інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

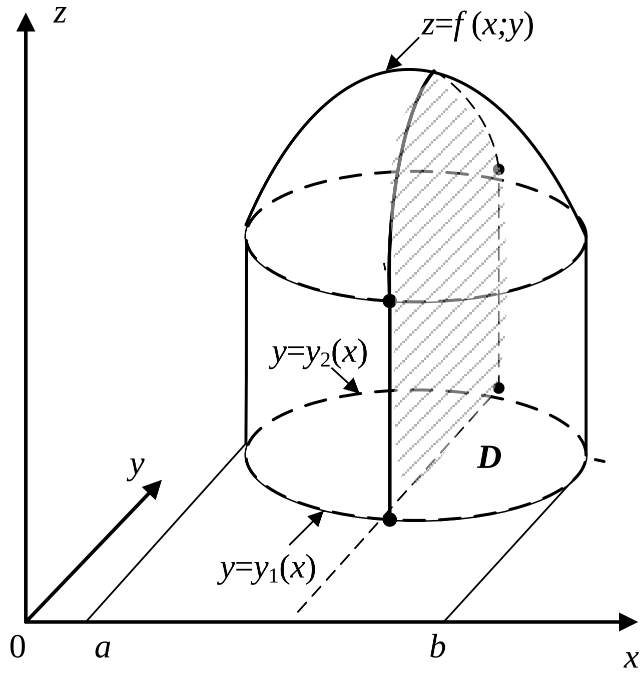
є *збіжним* лише тоді, коли є збіжними обидва невласних інтеграли у правій частині</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \textit{збігається при } \alpha < 1, \\ \textit{розбігається при } \alpha \geq 1 \end{cases}$$</td>
</tr>
</table>

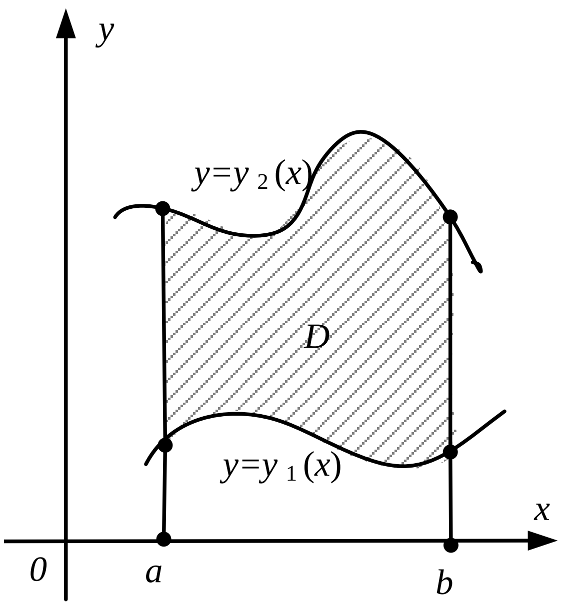
ДОДАТОК Ж

Подвійний інтеграл

Властивості подвійних інтегралів	
Сталу можна виносити за знак інтеграла	$\iint\limits_D Cf(x,y)dxdy = C\iint\limits_D f(x,y)dxdy$
Інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій	$\iint\limits_D [f(x,y)+g(x,y)]dxdy =$ $= \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy$
Якщо область D можна подати як суму (об'єднання) двох частин D_1 та D_2 $(D = D_1 \cup D_2)$, то інтеграл по області D дорівнює сумі інтегралів за частинами D_1 та D_2 	$\iint\limits_{D=D_1\cup D_2} f(x,y)dxdy =$ $= \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$
Теорема про середнє: якщо функція $z = f(x,y)$ неперервна в замкненій області D, тоді існує принаймні одна точка $M_0 \in D$ така, що справедлива рівність $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(M_0)S_D$, де S_D – площа області D. Значення $f(M_0) = \bar{f}$ називають середнім	

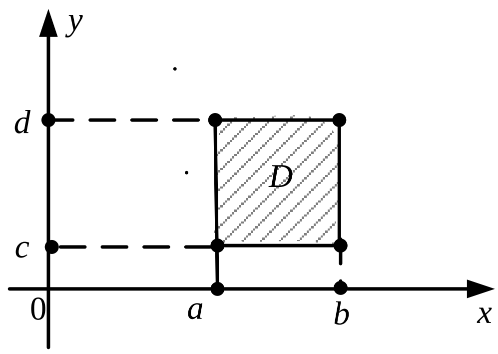
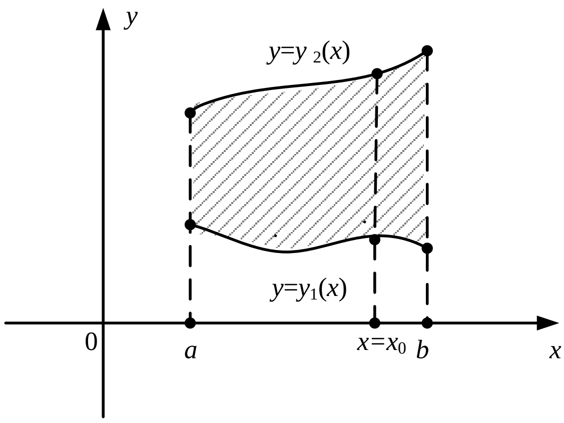
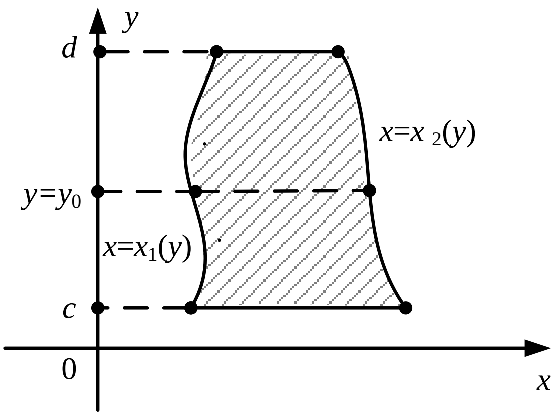
ДОДАТОК И

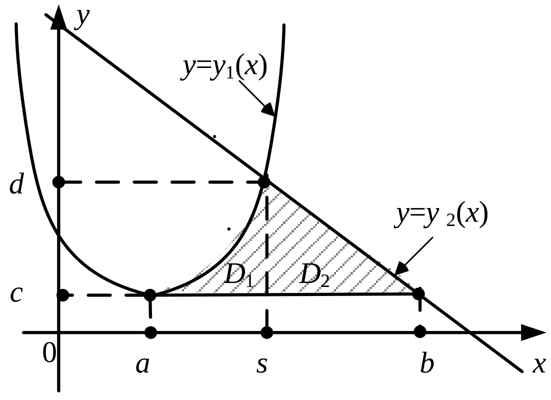
<table>
<tr><th colspan="2">Застосування подвійного інтеграла</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Подвійний інтеграл дорівнює об’єму тіла, обмеженого областю D на площині $z=0$, циліндричною поверхнею (для якої твірна паралельна осі OZ, а напрямна збігається з контуром області D) і поверхнею з рівнянням $z=f(x,y)$ ($f(x,y)\geq 0$ в області D)

$$V=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=$$
$$=\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f\left(x;y\right)dy$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Якщо $f(x,y)=1$, то подвійний інтеграл дорівнює площі області D

$$S_D=\iint\limits_{D} dxdy=\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy$$</td></tr>
</table>

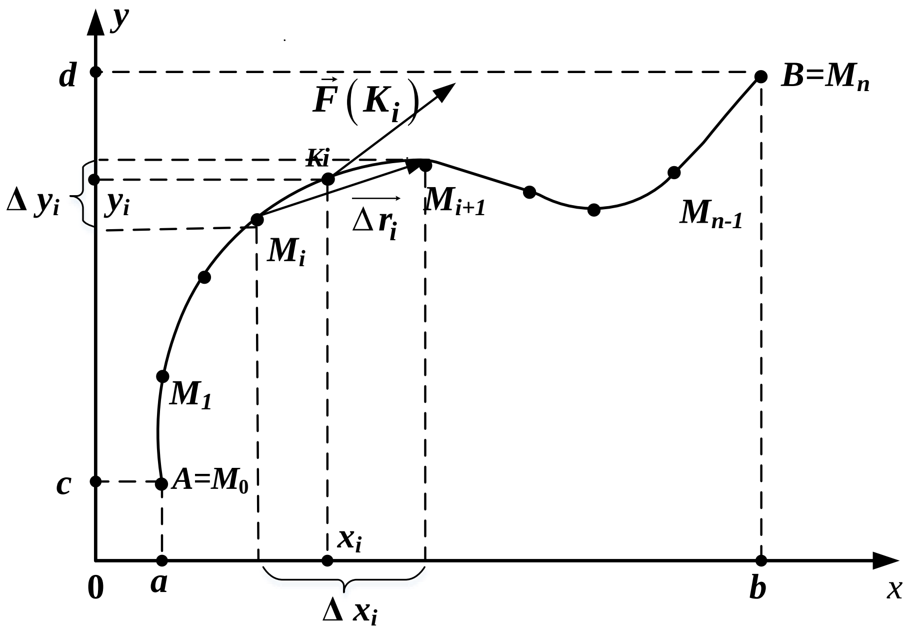
ДОДАТОК К

Обчислення подвійних інтегралів	
	Для прямокутної області інтегрування справедлива рівність $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x;y)dy =$$ $$= \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x;y)dx$$
	Для області D, правильної відносно осі OX, тобто області, для якої будь-яка горизонтальна пряма, що проходить через внутрішню точку області, перетинає межу області не більше як у двох точках: $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy =$$ $$= \underbrace{\int\limits_a^b \underbrace{\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right)}_{\text{внутрішній інтеграл}} dx}_{\text{зовнішній інтеграл}}$$
	Для області D, правильної відносно осі OY, тобто області, для якої будь-яка горизонтальна пряма, що проходить через внутрішню точку області, перетинає межу області не більше як у двох точках: $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy =$$ $$= \underbrace{\int\limits_c^d \underbrace{\left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right)}_{\text{внутрішній інтеграл}} dy}_{\text{зовнішній інтеграл}}$$

	$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^s dx \int\limits_c^{y_1(x)} f(x;y)dy + \int\limits_s^b dx \int\limits_c^{y_2(x)} f(x;y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)dx$

ДОДАТОК Л

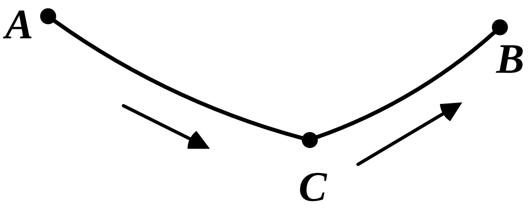
Криволінійний інтеграл II роду



Криволінійним інтегралом II роду від функції $\vec{F}(x;y)$ вздовж кривої *AB* називається скінченна границя інтегральної суми

$$\lim_{\left|\overline{\Delta r_i}\right|}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(C_i)\overline{\Delta r_i}=\int_{AB}\vec{F}\cdot d\vec{r},$$

яка не залежить від розбиття кривої *AB* і вибору точок $K_i(x_i;y_i)$

Властивості криволінійного інтеграла II роду	
1	Сталу можна виносити за знак інтеграла $$\int\limits_{AB} C\big(P(x;y)dx+Q(x;y)dy\big)=C\int\limits_{AB}\big(P(x;y)dx+Q(x;y)dy\big)$$
2	Інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій $$\int\limits_{AB}\big(P_1(x;y)+P_2(x;y)\big)dx+\big(Q_1(x;y)+Q_2(x;y)\big)dy=$$ $$=\int\limits_{AB} P_1(x;y)dx+Q_1(x;y)dy+\int\limits_{AB} P_2(x;y)dx+Q_2(x;y)dy$$
3	Якщо дугу AB кривої L можна подати як суму (об’єднання) двох частин AC та CB ($AB=AC\bigcup CB$), тоді  $$\int\limits_{AC\bigcup CB} P(x;y)dx+Q(x;y)dy=$$ $$=\int\limits_{AC} P(x;y)dx+Q(x;y)dy+\int\limits_{CB} P(x;y)dx+Q(x;y)dy$$

Формули для обчислення криволінійного інтеграла II роду	
Якщо крива AB задана параметрично: $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad \alpha\le t\le\beta$	$$\int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy=$$ $$=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Big[P\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big]dt$$
Якщо крива AB задана явно: $y=y(x),\ a\le x\le b$	$$\int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy=$$ $$=\int\limits_{a}^{b}\Big[P\big(x,y(x)\big)+Q\big(x,y(x)\big)y'(x)\Big]dx$$

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

для самостійної роботи студентів освітнього рівня «Бакалавр»

Частина V

Відповідальний за випуск Панченко Н. Г.

Редактор Третьякова К. А.

Підписано до друку 30.10.20 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 3,0. Тираж 5. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.