

ХАРКІВСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ  
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Резуненко Марина Євгенівна

УДК 624.074.4

Напружено-деформований стан сталевих  
оболонки від'ємної гаусової кривизни

05.23.01-будівельні конструкції, будівлі та споруди

Автореферат  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Харків-2000

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі вищої математики Харківської державної академії залізничного транспорту Міністерства транспорту України та кафедрі вищої математики Харківського державного політехнічного університету Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор  
Ольшанський Василь Павлович,  
начальник кафедри прикладної механіки  
Харківського інституту пожежної безпеки.

Офіційні опоненти : доктор технічних наук, професор  
Шимановський Олександр Віталійович,  
Голова правління відкритого акціонерного товариства  
“Український науково-дослідний інститут  
“Проектстальконструкція”.

кандидат технічних наук, доцент  
Черненко Микола Григорович,  
доцент кафедри будівельної механіки Харківської державної  
академії залізничного транспорту.

Провідна установа : Харківський державний технічний університет будівництва  
та архітектури Міністерства освіти і науки України,  
кафедра залізобетонних і кам'яних конструкцій, кафедра  
будівельної механіки, м. Харків.

Захист відбудеться “ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2000 р. о \_\_\_\_\_ годині на засіданні  
спеціалізованої вченої ради Д 64.820.02 при Харківській державній академії  
залізничного транспорту за адресою: 61050, м.Харків, майд. Фейербаха, 7.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Харківської державної академії  
залізничного транспорту за адресою: 61050, м.Харків, майд.Фейербаха, 7.

Автореферат розісланий “ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2000 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради,  
кандидат технічних наук, доцент

Єрмак Є.М.

**ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ**

**Актуальність теми.** Розвиток сучасних галузей народного господарства таких, як цивільне, промислове і транспортне будівництво та ін., потребує розробки ефективних методів розрахунку напружено-деформованого стану тонкостінних конструкцій оболонкового типу (димові труби, телевізійні вежі, опори мостів, трубопроводи, градирні і інші баштові споруди), які мають широке розповсюдження. Складність розв'язання таких задач зумовлена різноманітністю зовнішніх навантажень, так і самих конструкцій.

Існують різні засоби спрощення обчислень компонент напруженого стану пологих оболонок. Один з них полягає в тому, що замість локально розподілених навантажень обирають зосереджену силу. Необхідно відзначити, що це не завжди виправдано, навіть тоді, коли в реальних умовах оболонки взаємодіють з іншими конструкціями по площадках малих розмірів. Внаслідок сингулярності напруженого стану оболонки в околиці точки прикладання зосередженої сили, доводиться враховувати розміри площадки і характер розподілу зовнішнього навантаження. Це можна зробити за допомогою фундаментальних розв'язків диференціальних рівнянь оболонок.

Тому однією з основних задач механіки оболонок є знаходження фундаментальних розв'язків їх рівнянь при дії зосередженого навантаження, бо знайдені розв'язки дозволяють розраховувати оболонки на дію локалізованих навантажень, а також надають можливість розв'язувати різні задачі контактної взаємодії, зокрема між бетонним ядром та обіймою в сталобетонних конструкціях.

Чисельні методи, які в останній час отримали великий розвиток, при розв'язанні цієї важливої інженерної задачі виявляються малоефективними. Тому, аналітичні методи продовжують відігравати тут головну роль.

Значний внесок у дослідження поведінки оболонок під дією зовнішніх локальних навантажень і розв'язання задач контактної взаємодії внесли Ю.П.Артюхін, В.В.Астанін, П.М.Величко, В.З.Власов, В.О.Воблих, Э.І.Григолюк, В.С.Гудрамович, М.Г.Гурьянов, В.М.Даревський, С.М.Карасьов, Ю.Г.Конопльов, Г.І.Львов, В.І.Моссаковський, Б.В.Нерубайло, В.В.Новожилов, В.М.Толкачев, Л.А.Фільштинський, В.К.Хижняк, О.С.Христенко, Е.Д.Чихладзе, М.Г.Черненко, Г.М.Чернишов, К.Ф.Чорних, Ю.А.Шевляков, В.П.Шевченко, О.В.Шимановський, В.С.Шмуклер та ін. Серед зарубіжних вчених необхідно відмітити С.Юань, Г.Рейснера, У.Фінстервальдера, І.В.Геккелера, С.Лукаевича та ін.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконана здобувачем у межах наукової теми: "Розробка теорії методів розрахунку сталобетонних конструкцій" № Держ. реєстр. 01840075512 та 01870094596.

**Мета і задачі досліджень.** Метою дисертаційної роботи є дослідження напружено-деформованого стану сталевих оболонок нульової і від'ємної гаусової кривизни на локальну дію.

Задача дослідження полягає у розробці ефективного методу розрахунку, проведення аналітичних та чисельних досліджень напружено-деформованого стану будівельних конструкцій у вигляді оболонок від'ємної та нульової гаусової кривизни під дією локального навантаження.

**Об'єкт дослідження** – конструкції сталевих оболонок нульової і від'ємної гаусової кривизни.

**Предмет дослідження** – напружено-деформований стан оболонок нульової і від'ємної гаусової кривизни під дією локального навантаження.

**Методи дослідження.** В роботі були використані наступні методи: метод двомірного перетворення Фур'є для розв'язання рівнянь моментної технічної теорії оболонок; метод інтегральних перетворень для знаходження невластних інтегралів; асимптотичний метод та чисельний метод розв'язання задач контактної взаємодії оболонки та опори; чисельний метод знаходження розподілу силових факторів в конструкціях.

#### **Наукова новизна одержаних результатів.**

1. Запропонований метод, який дозволяє описати напружений стан, що виникає при локальних діях на оболонки від'ємної та нульової гаусової кривизни.
2. Удосконалені вирази для компонент внутрішніх напружень у оболонках нульової або від'ємної гаусової кривизни під дією зосереджених нормальної або дотичної сил.
3. Надані прості асимптотичні формули для прогину, тангенціальних зусиль та згинальних моментів. Ці формули дали можливість аналітично розв'язати задачі контактної взаємодії вищеперелічених конструкцій.
4. Запропонований чисельний метод розрахунку напружено-деформованого стану конструкцій у вигляді трубопроводу або резервуару у формі однопорожнинного гіперболоїда (або циліндру) та опори.

Вірогідність результатів забезпечується відповідністю отриманих результатів із вже відомими, які були знайдені за допомогою інших методів, строгістю застосованого математичного апарату.

**Практичне значення одержаних результатів.** Використання отриманих фундаментальних розв'язків пологих оболонок надало можливість розробки методів розрахунку взаємодії тонкостінних сталевих оболонок нульової та від'ємної гаусових кривизн із іншими конструкціями, зокрема сталобетонними, де необхідно розкрити контакт між обіймою і бетонним ядром. Отримані формули відрізняються більш простим та зручним для інженерних розрахунків виглядом на відміну від уже існуючих.

Також подані асимптотичні формули поведінки фундаментальних розв'язків в малій околиці точки, до якої прикладена зосереджена сила.

Розроблений алгоритм і створене на його базі програмне забезпечення дозволили чисельно розв'язати задачі контакту сталевих оболонок від'ємної або нульової гаусової кривизни із різного типу опорами, в тому числі при наявності пружного шару поміж оболонкою та опорною будовою.

Результати дисертаційної роботи впроваджені в розрахунково-конструкторську практику кафедри “Металеві та дерев'яні конструкції” Харківського державного технічного університету будівництва та архітектури.

#### **Особистий внесок здобувача.**

1. У статті “Об одной форме фундаментального решения уравнений оболочек отрицательной гауссовой кривизны” здобувач обчислює невластні інтеграли, за допомогою яких описується напружено-деформований стан

оболонки, виконав розрахунки компонент напруженого стану в малій околиці точки прикладання зосередженої нормальної сили.

2. У статтях “Автоматизированная система расчета контактной нагрузки ” та “Численное решение задачи контактного взаимодействия оболочки и ложементов” здобувачеві належить розробка математичної моделі розв’язання задачі контактної взаємодії оболонки від’ємної або нульової гаусової кривизни та опори.

3. У статтях “ Взаимодействие оболочки отрицательной гауссовой кривизны с полуплоскостью при наличии упругого слоя между ними ” та “Контактная задача взаимодействия оболочки отрицательной гауссовой кривизны с упругой полуплоскостью ” здобувач аналітично розв’язав задачі, які були поставлені, безпосередньо виконав обчислення.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати, розглянуті в дисертаційній роботі, були оприлюднені на науково-технічних конференціях: Інформаційні технології (MicroCAD) (Харків 1995,1996,1997 рр.), на 60-й науково-технічній конференції кафедр Харківської державної академії залізничного транспорту та спеціалістів залізничного транспорту (Харків, 1998).

Стаття “Про одну форму фундаментального розв’язку рівнянь оболонок від’ємної гаусової кривизни” нагороджена грамотою Національної Академії Наук України у 1999 році.

**Публікації.** Результати дисертації опубліковані у 4 наукових статтях, депонованій праці та 3 матеріалах міжнародних конференцій.

**Структура та обсяг дисертації.** Робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел з 63 найменувань та трьох додатків. Загальний обсяг роботи – 160 сторінок, в тому числі 50 рисунків, 17 таблиць.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

У вступі розкривається стан наукової проблеми, обґрунтовується актуальність теми, сформульовані мета досліджень, наукова новизна, подані практичні та теоретичні значення отриманих результатів.

У першому розділі проведено огляд літератури, обґрунтовано вибір даної теми досліджень.

Дослідження поведінки оболонок від’ємної гаусової кривизни почалися набагато пізніше ніж сфери та циліндру. Це пояснюється складним виглядом диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами. О.Л.Гольденвейзер довів, що ця задача може бути розкладена на складові, які описувалися більш простими диференціальними рівняннями.

Характер особливостей напруженого стану оболонок довільної кривизни вивчали також В.В.Новожилов і К.Ф.Чорних. Вони довели, що область збурення лежить в околиці точки прикладання зосередженої сили. Зважаючи на те, що ця область має малі розміри, напружений стан оболонки можна описати диференціальними рівняннями із сталими коефіцієнтами. Якщо зовнішня локальна сила достатньо віддалена від границь оболонки, то при дослідженні

напруженого стану тонкостінного тіла можна знехтувати крайовими умовами.

Фундаментальний підхід потрібен при розв'язанні задач контактної взаємодії, де фундаментальні розв'язки використовуються як ядра інтегральних рівнянь.

Існували різні методи побудови фундаментальних розв'язків. У цьому розділі проведено аналіз цих методів, показані їх переваги та недоліки. Обґрунтовано вибір методу інтегральних перетворень. Розглянуті різні підходи та відзначена складність розв'язання задач контактної взаємодії, яка є однією з основних задач теорії пружності.

Другий розділ присвячено знаходженню фундаментальних розв'язків напружено-деформованого стану оболонки від'ємної гаусової кривизни. Вирази для силових факторів (за допомогою символу Кронекера  $\delta_{ij}$ ) через невласні інтеграли під дією нормальної сили  $P$  мають вигляд :

для прогину оболонки:

$$w = \frac{P}{4\pi^2 D} B_1;$$

для тангенціальних зусиль:

$$t_j = - \frac{b^4 R_2}{4\pi^2} P B_{j+1}, \quad j=1,2;$$

для згинальних моментів:

$$m_j = \frac{P}{4\pi^2} (\delta_{1j} + \nu\delta_{2j}) B_4 + (\nu\delta_{1j} + \delta_{2j}) B_5, \quad j=1,2 ;$$

де

$$B_j(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^{-1}(\xi, \eta) e^{-i(\xi x + \eta y)} \left[ (\xi^2 + \lambda\eta^2)\eta^2 \delta_{2j} + \right. \\ \left. + (\xi^2 + \lambda\eta^2)\xi^2 \delta_{3j} + (\xi^2 + \eta^2)^2 (\delta_{1j} + \eta^3 \delta_{4j} + \eta \xi^2 \delta_{5j}) \right] d\xi d\eta, \\ \Delta(\xi, \eta) = (\xi^2 + \eta^2)^4 + b^4 (\xi^2 + \lambda\eta^2)^2. \quad (1)$$

Під дією дотичної сили:

$$t_i = \frac{-2X}{1-\nu} \left[ (\delta_{1i} + \nu\delta_{2i}) \frac{1-\nu}{2} C_1 + \left[ \frac{2-\nu-\nu^2}{2} \delta_{1i} + \frac{\nu-1}{2} \delta_{2i} \right] C_2 + \right. \\ \left. + \left[ a_6 + \frac{\lambda+\nu}{1-\nu^2} b^4 a_{10} \right] C_3 + ((\delta_{1i} + \nu\delta_{2i}) a_7 - (\nu\delta_{1i} + \delta_{2i}) a_8 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\lambda+\nu}{1-\nu^2} \delta_{1i} + \frac{1+\lambda\nu}{1-\nu^2} \delta_{2i} \right] b^4 a_9 C_4 \right]; \\ m_i = \frac{2X}{(1-\nu)R_2} \left[ \delta_{1i} (a_{10} C_5 + \nu a_9 C_6) + \nu\delta_{2i} (a_9 + \nu a_{10}) C_7 \right];$$

де  $a_6 - a_{10}$ ,  $b$ ,  $D$ - сталі, які залежать від фізичних параметрів оболонки,

$$C_j(x, 0) = \frac{i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^{-1}(\xi, \eta) \left[ (\delta_{1j} \xi^3 + \delta_{2j} \xi \eta^2) (\xi^2 + \eta^2)^2 + \right. \\ \left. + \delta_{3j} \xi + \delta_{4j} \xi \eta^2 + \delta_{5j} \xi^5 + \delta_{6j} \xi \eta^4 + \delta_{7j} \xi^3 \eta^2 \right] e^{-i\xi x} d\xi d\eta, \quad (2) \\ i = \sqrt{-1},$$

$\lambda$  - кривизна оболонки ( $\lambda = R_1/R_2$ );

$R_1, R_2$  – радіуси головних кривизн оболонки ( $R_1 \leq R_2$ ),

$\nu$  - коефіцієнт Пуассона,

$E$  - модуль пружності матеріалу оболонки.

Для зручності обчислювань система координат  $XOY$  співпадає з лініями головних кривизн.

За допомогою методу, запропонованого Ватсоном, знайдені вирази для компонентів напруженого стану оболонки нульової та від'ємної гаусових кривизн під дією зосередженої нормальної та дотичної сил. Суть цього методу полягає в тому, що до невластних інтегралів (1),(2) застосовується перетворення Меліна та обчислюється отриманий інтеграл. Потім за допомогою обернення перетворення Меліна та теорії лишків одержуємо вирази для прогину, тангенціальних зусиль та згинальних моментів у вигляді степеневих рядів.

На підставі отриманих невластних інтегралів можна одержати відносно прості асимптотичні формули для обчислення прогинів  $w$ , тангенціальних зусиль  $t_1, t_2$  та згинальних моментів  $m_1, m_2$  в околиці точки, до якої прикладене зосереджене навантаження.

На рисунках 1-6 надано графічне зображення для безрозмірних величин компонентів напруженого стану в малій околиці точки прикладання нормального навантаження на підставі отриманих асимптотичних формул.

Необхідно відзначити, що прогин (рис.(1),(2)) в точці прикладання сили має нескінченне значення. Виділивши для зручності сингулярну складову

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{|\cos^2 \varphi + \lambda \sin^2 \varphi|},$$

отримаємо характер поведінки прогину в залежності при віддаленні від точки прикладання зосередженого навантаження. Позначимо

$$w \square = \frac{4\pi^2 D}{P} w - \frac{\pi}{b^2} I,$$

тоді

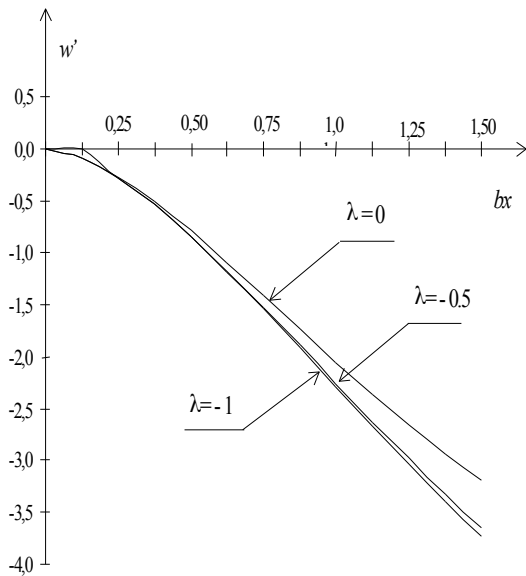


Рисунок 1 – Прогин  $w$  вздовж осі  $OX$

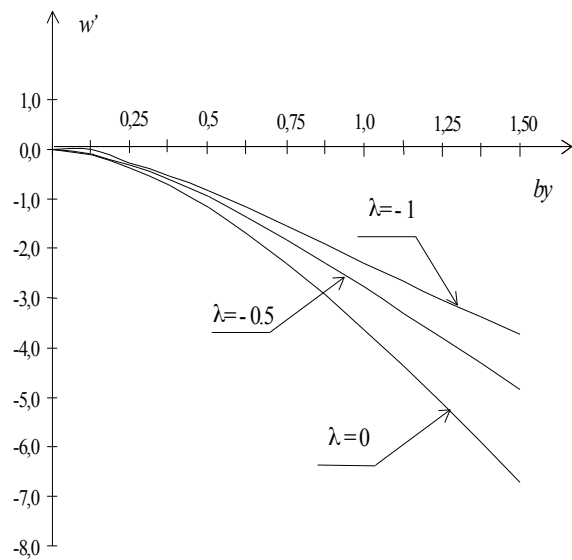


Рисунок 2 – Прогин  $w$  вздовж осі  $OY$

Характерно, що тангенціальні зусилля  $t_1, t_2$  при  $\lambda=-1$  у точці прикладання нормального зосередженого навантаження мають різні знаки, тоді, як при  $\lambda=0$  їх знаки співпадають. Параметр кривизни, коли тангенціальне зусилля  $t_2$  дорівнює нулю, можна отримати із рівняння

$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} + \frac{\sqrt{-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{\pi}{4} = 0,$$

Це приблизно дає  $\lambda \approx -0,1981$ .

На рисунках 3, 4 показано характер спадання тангенціального зусилля  $t'_1$  вздовж ліній головних кривизн:

$$t_1' = \frac{4\pi^2 t_1}{b^2 R_2 P_z}, \quad m_1' = \frac{4\pi^2 m_1}{P_z}.$$

Згинальні моменти  $m_1, m_2$  в точці прикладання навантаження вздовж осей координат  $OX$  та  $OY$  мають особливість порядку  $\ln x$  або  $\ln y$  відповідно. При віддаленні від точки прикладання значення  $m_1, m_2$  швидко спадають.



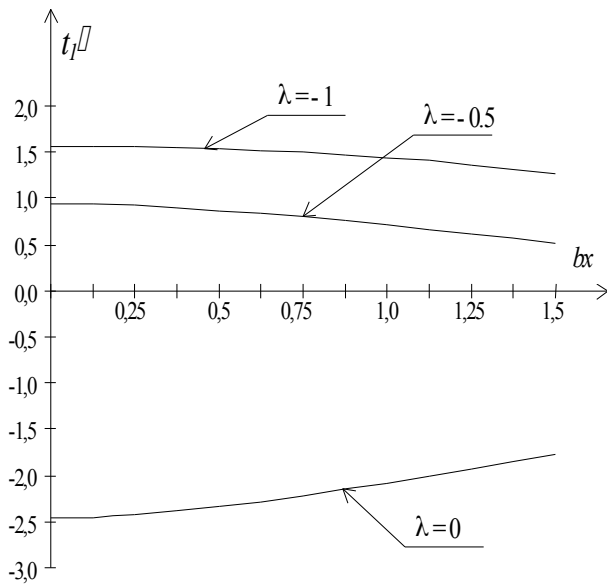


Рисунок 3 - Тангенціальне зусилля  $t_1$  вздовж осі  $OX$ .

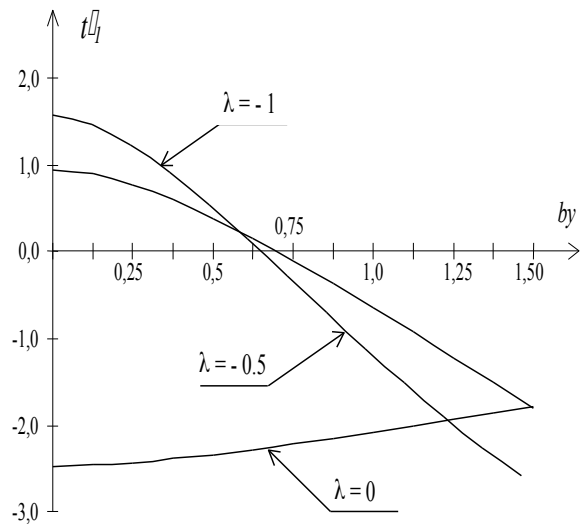


Рисунок 4 - Тангенціальне зусилля  $t_1$  вздовж осі  $OY$ .

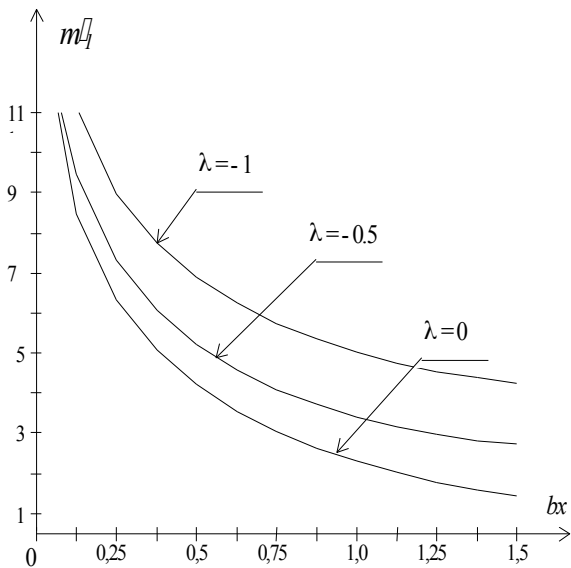


Рисунок 5 - Згинальний момент  $m_1$  вздовж осі  $OX$ .

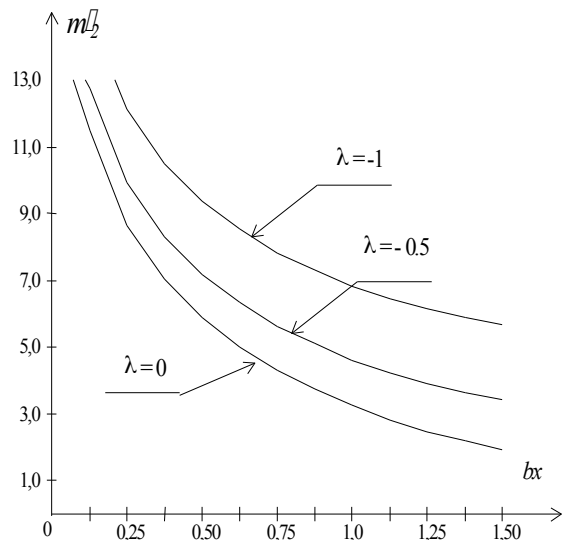


Рисунок 6 - Згинальний момент  $m_2$  вздовж осі  $OX$ .

Тангенціальні зусилля під дією дотичної сили мають особливість порядку  $x^{-1}$ . Згинальні моменти особливостей не мають, тому як  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0$ .

У третьому розділі розглянуто три типи задач контактної взаємодії сталюї оболонки з конструкціями опор, в яких необхідно було визначити контактний тиск  $p(y)$  та довжину зони контакту  $2l$  в залежності від зовнішньої сили  $P$ , яка притискає оболонку до опори. Взаємодія проходить за допомогою нормальних контактних зусиль, дотичними зусиллями нехтуємо. Так, на рис.7 показана модель взаємодії трубопроводу та опори при відсутності чи наявності пружного шару поміж ними.

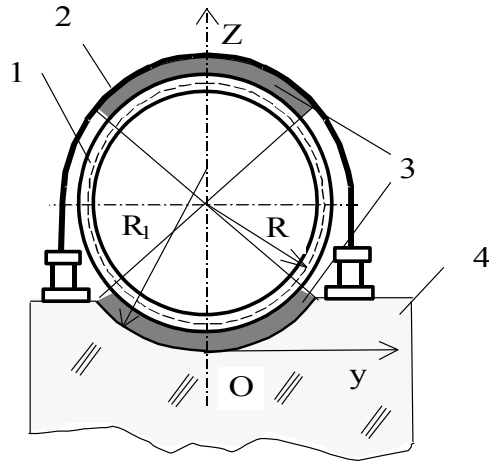


Рисунок 7 - Взаємодія трубопроводу та опори при наявності пружного шару поміж ними:

- 1 – оболонка;
- 2 – стяжний хомут;
- 3 - пружний шар;
- 4 – фундамент.

На рис. 8 показана модель взаємодії оболонки у вигляді однопорожнинного гіперболоїда та опори з виступом.

Для першого типу задач умову сумісності переміщень оболонки  $w(0, y)$  та півплощини  $w_1(y)$  вздовж лінії контакту можна записати у вигляді

$$w(0, y) + w_1(y) = \delta - \frac{1}{2R} - \frac{1}{2R_1} y^2, \quad (3)$$

де  $\delta$  - невідома стала зближення тіл, що контактують.

Так як зона контакту передбачається малою, то в якості фундаментального розв'язку  $w_1(y)$  використовуємо розв'язок для півплощини:

$$w_1(y) = - \frac{2(1 - \nu^2)}{\pi E_1 h_1} \int_{-l}^l p(\xi) \ln|y - \xi| d\xi + P \frac{1}{2(1 - \nu^2)} - \ln R_1,$$

тут  $E_1$ ,  $\nu_1$ ,  $h_1$  - коефіцієнт Пуассона, модуль Юнга, товщина півплощини,  $p(x)$  - контактний тиск.

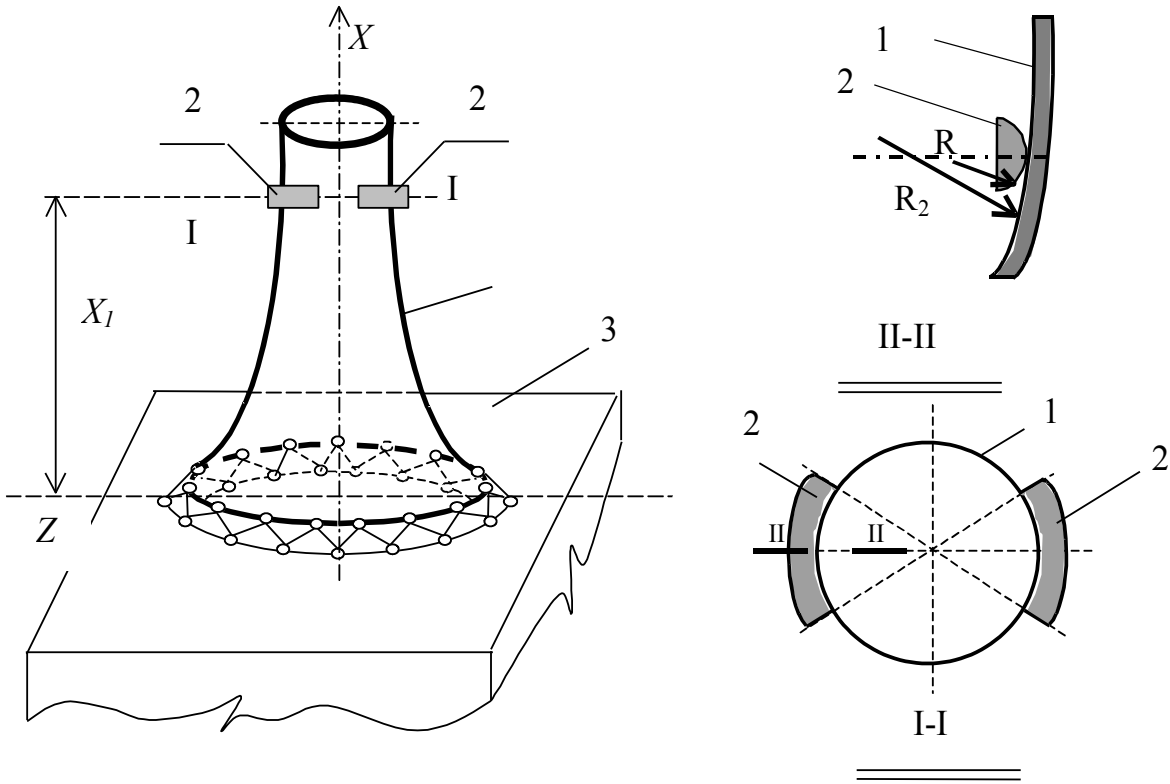


Рисунок 8 - Взаємодія однопорожнинного гіперолоїда та опор:

- 1 – оболонка;
- 2 – опора;
- 3 – фундамент.

Використовуючи асимптотичну формулу для прогину стальної оболонки

$$w(y) = \frac{P}{4\pi D} \frac{I}{b^2} + \frac{y^2}{2} \ln \frac{by\sqrt{1-\lambda}}{4} - \frac{1+\lambda}{2(1-\lambda)} + C - 1, \quad (4)$$

отримаємо

$$\int_{-l}^l p(t) \frac{1}{16D\pi} (y-t)^2 \left[ 2 \ln \frac{b|y-t|\sqrt{1-\lambda}}{2} + 2C - \frac{1+\lambda}{1-\lambda} - 2 \right] dt = C \left[ \frac{1}{2R} - \frac{1}{2R_1} \right] y^2. \quad (5)$$

$$C = C_1(\lambda, E_1, h_1, R_1), \quad L = L(E_1, h_1, \nu),$$

Умова рівноваги опори під дією зовнішньої сили:

$$\int_{-l}^l p(t) dt = P. \quad (6)$$

Розв'язавши інтегральне рівняння (5), ми отримали формулу для визначення контактної тиску:

$$p(y) = \beta \frac{\sqrt{l^2 - y^2}}{L} + \frac{l^2 \pi}{4DL} \frac{1+\lambda}{2(1-\lambda)} + C + \ln \frac{bl\sqrt{1-\lambda}}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \frac{y^2}{l^2};$$

$$\text{де } \beta = \frac{1}{2R} - \frac{1}{2R_1}.$$

Використовуючи рівняння (6), залежність між довжиною зони контакту та величиною сили  $P$  описується формулою

$$P = \beta \frac{l^2 \pi}{L} \left[ 1 + \frac{\pi l^2}{8DL} \left( C + \ln \frac{bl\sqrt{1-\lambda}}{4} + \frac{1+\lambda}{2(1-\lambda)} + 0.25 \right) \right].$$

Для сталених оболонок із параметрами  $\nu=0,3$ ,  $R = 100h$  на рис. 10 показана залежність безрозмірного контактного тиску

$$p_0(t) = \frac{p(y/l)}{b^2 D \beta} 10^5.$$

Криві 1-4 відповідають  $\gamma = 0.25; 0,5; 0,75; 1$ . Безперервні криві відповідають гаусовій кривизні  $\lambda=0$ , а перервні -  $\lambda=-1$ .

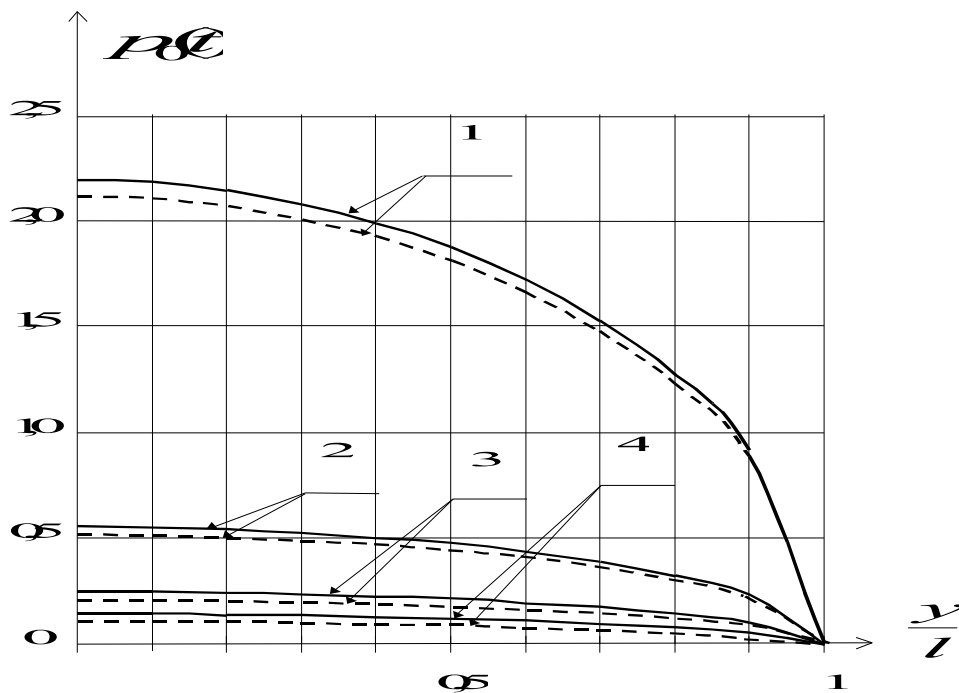


Рисунок 10 - Результат обчислень для гаусової кривизни  $\lambda = 0$  та  $\lambda = -1$

При прикладанні однакового навантаження до оболонок, контактний тиск менше для оболонок з кривизною  $\lambda = -1$  порівняно з циліндричними оболонками.

Якщо між оболонкою та опорою є пружний шар, то умову сумісності переміщень можна записати у вигляді

$$w(0, y) + w_1(y) + w_2(y) = \delta - \beta y^2,$$

де  $w_2(y)$  - переміщення серединної поверхні пружного шару. Тоді інтегральне рівняння має вигляд

$$\int_{-l}^l p(t) \left[ \frac{1}{16D\pi} (y-t)^2 \left[ 2 \ln \frac{b|y-t|\sqrt{1-\lambda}}{2} + 2C + \frac{1+\lambda}{1-\lambda} - 2 \right] + \frac{1}{k} - \frac{L}{\pi} \ln|y-t| \right] dt = C_1 - \beta y^2$$

де

$$k = \frac{E_3 h_3 (1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$E_3, h_3$ -фізичні сталі пружного шару.

Тоді для контактної тиску та зовнішньої сили отримаємо наступні вирази:

$$p(y) = \beta \frac{\sqrt{l^2 - y^2}}{L} \left[ 2 + \frac{l^2 \pi}{4DL} \frac{1 + \lambda}{2(1 - \lambda)} + C + \ln \frac{bl\sqrt{1 - \lambda}}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{k} + \frac{1}{3} \frac{y^2}{l} \right],$$

$$P = \beta \frac{l^2 \pi}{L} \left[ 1 + \frac{\pi l^2}{8DL} \left( C + \ln \frac{bl\sqrt{1 - \lambda}}{4} + \frac{1 + \lambda}{2(1 - \lambda)} + \frac{1}{k} + 0.25 \right) \right].$$

Аналізуючи результат обчислень величини контактної навантаження або при відсутності, можна зробити наступний висновок: при наявності пружного шару контактний тиск на одиницю довжини зони контакту зменшується порівняно з випадком, коли оболонка безпосередньо контактує з опорою. Контактне навантаження обернено - пропорційно модулю пружності прокладки.

В третьому типі задач (рис.8) розглянемо дію кожної опори окремо. Цей випадок описується таким рівнянням

$$w(x,0) + w_1(x) = \delta + \left[ \frac{1}{2R} - \frac{1}{2R_2} \right] x^2.$$

Прогин оболонки береться вздовж осі ОХ. Використовуючи метод розв'язання попередньої задачі, отримуємо для контактної тиску:

$$p(x) = -\beta \frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{L} \left[ 2 + \frac{l^2 \pi}{4DL} \frac{1 + \lambda}{2(1 - \lambda)} + C + \ln \frac{bl\sqrt{1 - \lambda}}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \frac{x^2}{l} \right];$$

для зовнішньої сили Р:

$$P = -\beta \frac{l^2 \pi}{L} \left[ 1 + \frac{\pi l^2}{8DL} \left( C + \ln \frac{bl\sqrt{1 - \lambda}}{4} - \frac{1 + \lambda}{2(1 - \lambda)} + 0.25 \right) \right].$$

У третьому розділі також подані графіки для другого та третього типу задач при різних значеннях параметрів оболонки, опори та пружного шару.

Четвертий розділ присвячено чисельному методу розв'язання задач, які були розглянуті у третьому розділі. Різниця між аналітичним та чисельним методами полягає у тому, що замість асимптотичної формули для прогину оболонки береться фундаментальний розв'язок  $\Phi(t)$ , отриманий у другому розділі у вигляді степеневих ряду. Кількість членів суми обумовлюється можливостями ПЕОМ.

Враховуючи, що контактний тиск  $p(\xi)$  є парною функцією, тобто  $p(\xi) = p(-\xi)$ , можна розглядати тільки інтервал  $(0, l)$ . Тоді рівняння (3) буде мати вигляд

$$C_1 - \beta y^2 = \int_{-l}^l p(t) \left[ \Phi(y - t) - L \ln |y - t| \right] dt = \quad (7)$$

$$= a \int_0^1 p(a\tau) \left[ \Phi(y - a\tau) - L \ln \left| \frac{y}{a} - \tau \right| + \Phi(y + a\tau) - 2L \ln a - L \ln \left| \frac{y}{a} + \tau \right| \right] d\tau ;$$

Розбиваючи інтервал  $(0,1)$  на  $n$  рівних частин, на кожній з яких функції  $\Phi(y - a\tau), \Phi(y + a\tau), p(a\tau)$  будемо вважати зберігаючими постійне значення  $\Phi_k(y - a\tau), \Phi_k(y + a\tau), p_k$  відповідно ( $k = \overline{1, n}$ ). Для цього значення змінної  $y$ , будемо брати в вузлових точках  $y = \frac{m}{n}, m = \overline{0, n}$ , а змінну  $\xi$  в серединах цих інтервалів  $\tau = \frac{(2s-1)}{2n}, s = \overline{1, n}$ . Тоді, для контактної тиску отримаємо такий вираз

$$p(a\tau) = p_k a \sqrt{1 - \left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2}, \quad \frac{k-1}{n} < \tau < \frac{k}{n},$$

Інтегральне рівняння (7) перетворюється у систему  $n+1$  лінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $n$  невідомих  $p_k$  невідомої  $C_1$ .

$$a^2 \sum_{s=1}^n p_s \sqrt{1 - \left(\frac{2s-1}{2n}\right)^2} \Phi_s \left(\frac{2m-2n+1}{2n}\right) - L \int_{\frac{s-1}{n}}^{\frac{s}{n}} \ln \left| \frac{m}{n} - \tau \right| d\tau + \quad (8)$$

$$+ \Phi_s \left(\frac{2m+2n-1}{2n}\right) - 2L \ln a - \int_{\frac{s-1}{n}}^{\frac{s}{n}} \ln \left| \frac{m}{n} + \tau \right| d\tau = C_1 - \beta \left(\frac{m}{n} a\right)^2.$$

Інтеграли в (8) обчислюються аналітично методом інтегрування частинами.

$$\int_{\frac{s-1}{n}}^{\frac{s}{n}} \ln \left| \frac{m}{n} \pm \tau \right| d\tau = \frac{s \pm m}{n} \ln \left| \frac{s \pm m}{n} \right| - \frac{m \pm s \mp 1}{n} \ln \left| \frac{m \pm s \mp 1}{n} \right| - \frac{1}{n}.$$

У випадку, коли  $s=m$

$$\int_{\frac{s-1}{n}}^{\frac{s}{n}} \ln \left| \frac{m}{n} - \tau \right| d\tau = \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} - \frac{1}{n}.$$

Перша частина програми обчислює коефіцієнти  $\Phi_s \left(\frac{2m-2n+1}{2n}\right), \Phi_s \left(\frac{2m+2n-1}{2n}\right)$ . Далі за допомогою методу Гауса розв'язується система рівнянь (8).

Після знаходження невідомих  $p_k$ , було побудовано графік функції  $p(t)$ , яка є наближеним розв'язком рівняння (7).

Результатом роботи програми є графічне зображення розподілу контактної тиску та знаходження довжини лінії контакту в залежності від зовнішньої сили, яка прикладена, і параметрів моделі. Проведені тестові розрахунки, на підставі яких зроблено аналіз залежності довжини зони контакту від гаусової кривизни оболонки, радіусів і фізичних сталих її та опори, кількості членів ряду для прогину.

Далі розглядається конструкція у вигляді однопорожнинного гіперболоїда обертання довжиною  $l$  (або циліндра). Ця конструкція стискається двома опорами, навантаженими силами  $P$  по двох дугах довжиною  $2r$ . Розглядається контактний тиск, який виникає під дією опори в перерізі  $x=x_l$ .

Вирази для компонентів напруженого стану мають вигляд

$$t_1 = a_5 \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - a_3 w \right]; \quad t_2 = a_5 \left[ \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - a_4 w \right];$$

$$m_1 = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]; \quad m_2 = -D \left[ \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right];$$

$a_3, a_4, a_5$  - сталі, які залежать від фізичних параметрів оболонки.

Інтенсивність навантаження представимо у вигляді

$$p(x, y) = q(y) \delta(x - x_1),$$

де  $\delta(x - x_1)$  - дельта - функція,

$$q(y) = \sum_{k=1}^n q_k(y), \quad q_k(y) = \begin{cases} q_k, & y \in \left[ \frac{k-1}{n}r, \frac{k}{n}r \right] \\ 0, & y \notin \left[ \frac{k-1}{n}r, \frac{k}{n}r \right] \end{cases},$$

$q_k(y)$  знайдені чисельним методом за допомогою першої програми.

За допомогою двомірного розкладання в ряд Фур'є отримаємо

$$p(x, y) = \frac{4}{\pi l} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q_k}{(\delta_{m0} + 1) m(1 - \delta_{m0}) + \frac{Rn}{r} \delta_{m0}} \sin \frac{s\pi x_1}{l} \times$$

$$\times \sin \frac{rm}{Rn} \cos \frac{rm}{Rn} (2k - 1) \sin \frac{s\pi x}{l} \cos \frac{2m}{R} y,$$

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{ms} \cos \frac{2my}{R} \cos \frac{\pi s x}{l}, \quad (9)$$

$$v = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} B_{ms} \sin \frac{2my}{R} \sin \frac{\pi s x}{l}, \quad (10)$$

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} C_{ms} \cos \frac{2my}{R} \sin \frac{\pi s x}{l}, \quad (11)$$

де  $u, v, w$  - переміщення серединної поверхні.

Використовуючи рівняння моментної технічної теорії оболонок під дією нормальної сили

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - a_3 \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$a_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - a_4 \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{12}{h^2 R_2} (a_4 + \lambda a_3) w - \frac{12}{h^2} \left[ a_4 \frac{\partial v}{\partial y} + a_3 \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{p_3(x, y)}{D},$$

і, знайшовши часткові похідні функцій (9), (10), (11), отримаємо систему лінійних рівнянь відносно змінних  $A_{ms}, B_{ms}, C_{ms}$ . Після розв'язання цієї системи було знайдено вирази для прогину, тангенціальних зусиль та згинальних моментів у вигляді подвійних степеневих рядів. Для обчислення значень компонент напруженого стану в залежності від точки прикладання сили до оболонки створена програма.

При зростанні  $s$  коефіцієнти розкладання швидко спадають. Тому, при чисельному обчисленні можна обмежитись 5 членами кожного ряду. Результати подані у графічному вигляді.

## ВИСНОВКИ

1. Розв'язані диференціальні рівняння моментної технічної теорії, якими описується напружено-деформований стан вищеперелічених конструкцій. Отримані вирази для прогину, тангенціальних зусиль та згинальних моментів відповідають вже існуючим, проте, на відміну від них, мають більш простий вигляд.
2. Проведено аналіз компонент напруженого стану оболонок від'ємної та нульової гаусових кривизн вздовж ліній головних кривизн під дією зосереджених зовнішніх навантажень.
3. Надані асимптотичні формули компонент напруженого стану для малого околу точки прикладання нормальної і дотичної зосереджених сил. Дано графічне зображення компонент напруженого стану.
4. Аналітично розв'язані три типи задач взаємодії трубопроводу або резервуару та опори, на базі отриманих асимптотичних формул. Результати обчислень показують, що для циліндричної оболонки контактний тиск більше, ніж для оболонок від'ємної гаусової кривизни.
5. Порівнюючи результати обчислень двох задач взаємодії, можна відзначити, що істотне значення грає лінія головної кривизни, вздовж якої відбувається взаємодія оболонки та опори. Так, при контакті вздовж лінії найменшої кривизни (зокрема утворюючої циліндра) контактний тиск на одиницю довжини більше в порівнянні з взаємодією тіл вздовж лінії найбільшої кривизни.
6. При прокладанні пружного шару між оболонкою та опорою контактний тиск на опору зменшується.
7. Контактний тиск також залежить і від модуля пружності та товщини шару, тобто, чим більше товщина або модуль пружності, тем менше навантаження.
8. Запропоновано чисельний метод розрахунку розподілу контактного тиску та довжини зони контакту, а також компонентів напружено - деформованого стану розглянутих конструкцій в залежності від зовнішньої сили та точки її прикладання.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Б.В.Нерубайло, В.П.Ольшанский, М.Е.Резуненко. Об одной форме фундаментального решения уравнений оболочек отрицательной гауссовой кривизны// Известия Академии Наук. Механика твердого тела. -№4. – Москва, 1997–С.144-149.



2. М.Е.Главчева (М.Е.Резуненко), М.И.Главчев. Автоматизированная система расчета контактной нагрузки// Применение вычислительных систем. - Вестник Харьк. гос. политехн. университета, вып.2. -№21. -Харьков, 1997. - С.15-17.
3. М.Е.Балака (М.Е.Резуненко). Взаимодействие оболочки отрицательной гауссовой кривизны с полуплоскостью при наличии упругого слоя между ними. // Механика. Машиностроение.- Вестник Харьк. гос. политехн. университета, вып.7, часть 2. -Харьков, 1997. -С.3-5.
4. М.Е.Главчева (М.Е.Резуненко), В.П.Ольшанский. Контактная задача взаимодействия оболочки отрицательной гауссовой кривизны с упругой полуплоскостью// R-функции в задачах математической физики и прикладной геометрии.- Сборник научных трудов. ХИПБ.--Харьков. -1996. -С.49-53.
5. М.Е.Балака (М.Е.Резуненко), В.П.Ольшанский. Численное решение задачи контактного взаимодействия оболочки и ложементы. // Труды международной научно-технической конференции (Microcad ' 97). - Харьков. -1997. -С.137-140.
6. М.Е.Балака (М.Е.Резуненко). Расчет деформируемого состояния оболочек отрицательной гауссовой кривизны с использованием ЭВМ.// Материалы международной научно-технической конференции (Microcad ' 95). - Харьков. -1995. -С.116.
7. М.Е.Главчева (М.Е.Резуненко), В.П.Ольшанский. Изучение деформируемого состояния оболочек отрицательной гауссовой кривизны под воздействием локальной нагрузки. // Материалы международной научно-технической конференции (Microcad ' 96). - Харьков. -1996. -С.17.
9. М.Е.Главчева (М.Е.Резуненко). Фундаментальные решения пологих оболочек под воздействием сосредоточенной нагрузки. Харьк. гос. политехн. ун-т. — Харьков, 1996 –10с. –Рус. –Деп. в ГНТБ Украины 12.08.96. №1656– Ук 96.

## АНОТАЦІЯ

Резуненко М.Є. Напружено-деформований стан сталних оболонок від'ємної гаусової кривизни. - Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.23.01-будівельні конструкції, будівлі та споруди. Харківська державна академія залізничного транспорту, Харків, 2000.

Дисертацію присвячено дослідженню напруженого стану оболонок від'ємної та нульової гаусової кривизни під дією зосереджених навантажень. Для знаходження фундаментальних розв'язків рівнянь оболонок використовувався метод інтегральних перетворювань. Запропоновано асимптотичні формули для силових факторів у формі, зручній для інженерних розрахунків. Аналітично розв'язано три типи задач контактної взаємодії сталюї оболонки та опори. Запропоновано чисельний метод розрахунку напружено - деформованого стану конструкцій оболонкового типу, а також розподілу контактного тиску та довжини зони контакту в залежності від зовнішньої сили та точки її прикладання. Вірогідність результатів підтверджується порівнянням з даними, отриманими аналітичним методом.

ВІД'ЄМНА ГАУСОВА КРИВИЗНА, ОБОЛОНКИ, ІНТЕГРАЛЬНІ  
ПЕРЕТВОРЮВАННЯ, КОНТАКТНА ЗАДАЧА, НАПРУЖЕНО-  
ДЕФОРМОВАНІЙ СТАН.

**ANNOTATION**

Rezunenko M.E.- Strain- stress state of steel shallow shells of negative Gauss curvature. –Manuscript.

Thesis for the scientific degree of the candidate of technical sciences by speciality 05.23.01 - building constructions, buildings and structures-Kharkov state academy of railway transport, Kharkov, 2000.

The dissertation is devoted to find of fundamental solutions for components of strain state of shallow shells of negative Gauss curvature under an act of concentrated loads. To this goal the method of integral transformations is used. Asymptotical formulas for force factors in a form which is convenient for engineering computing are given. It is analytically solved three types of a problem of contact interaction of a shallow shell and a stamp. There is elaborated numerical method of solving of contact problems. On the base of this method it is proposed an algorithm of computing of the strain -stress state of steel shallow shells of negative Gauss curvature. Realiability of results is confirmed by a comparison with results obtained by the analytical method.

NEGATIVE GAUSS CURVATURE, SHALLOW SHELLS, INTEGRAL TRANSFORMATIONS, CONTACT PROBLEMS, STRAIN- STRESS STATE.

**АННОТАЦИЯ**

Резуненко М.Е. Напряженно-деформированное состояние стальных оболочек отрицательной гауссовой кривизны. - Рукопись.

Диссертация на соискание научной степени кандидата технических наук по специальности 05.23.01-строительные конструкции, здания и сооружения. Харьковская государственная академия железнодорожного транспорта, Харьков, 2000.

Целью проведенной работы является исследование напряженно-деформированного состояния конструкций оболочечного типа. Задача состоит в разработке эффективного метода нахождения фундаментальных решений уравнений оболочек отрицательной гауссовой кривизны, подверженных воздействию сосредоточенных нормальной и касательной нагрузок вдоль линий главных кривизн, что дает возможность решать разнообразные задачи контактного взаимодействия. В частности рассматривается конструкция в виде однополостного гиперблоида вращения длиной  $l$ , подверженного воздействию контактной нагрузки со стороны двух опор.

Для нахождения фундаментальных решений к уравнениям оболочек отрицательной гауссовой кривизны применен метод интегральных преобразований, предложенный Ватсоном. Суть его состоит в том, что к несобственным интегралам применяется преобразование Меллина - Бернса, после чего вычисляются полученные интегралы. Затем, к ним применяется

обращение преобразования Меллина, и, используя теорию вычетов функции комплексной переменной, находятся выражения для силовых факторов. Это дает возможность усовершенствовать выражения для компонент внутренних напряжений вдоль линий главных кривизн. Формулы для прогиба, тангенциальных усилий и изгибающих моментов получены в более простой форме по сравнению с уже существующими, что значительно упрощает инженерные вычисления. Даны асимптотические формулы для силовых факторов поведения фундаментального решения в окрестности точки приложения сосредоточенной силы. Дано графическое представление поведения компонент напряженного состояния в малой окрестности точки приложения сосредоточенной силы.

Использование полученных фундаментальных решений пологих оболочек дает возможность разработки методов расчета взаимодействия тонкостенных тел нулевой и отрицательной гауссовой кривизны с упругими опорами.

На основе полученных выражений для прогиба оболочки аналитически решены задачи взаимодействия оболочки отрицательной или нулевой гауссовой кривизны с опорой с выемкой, с выступом, задачу контакта оболочки с опорой и упругим слоем между ними, учитывая физические и геометрические характеристики контактирующих тел. Проведен анализ зависимости контактного давления от кривизны оболочки и ее физических характеристик, что представлено графически.

Разработан численный метод решения расчета напряженно-деформированного состояния конструкций оболочечного типа, а также распределения контактного давления и длины зоны контакта в зависимости от прилагаемой силы и точки её приложения.

ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ ГАУССОВАЯ КРИВИЗНА, ОБОЛОЧКИ,  
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА,  
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ.