ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА. ВИСЛОВЛЮВАННЯ

Конспект лекцій
з дисципліни

«*ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА*»

Частина 1

Харків - 2014

Дискретна математика. Висловлювання: Конспект лекцій / О.О. Думіна, Є.Ю. Колбасіна, О.І. Удодова, Ю.С. Шувалова. – Харків: УкрДАЗТ, 2014. – 20 с.

Конспект лекцій містить основні теоретичні положення класичної логіки розділу «Висловлювання», приклади розв'язання задач з розгорнутими поясненнями, список навчальної літератури. У доступній формі викладені розділи, що традиційно вивчаються в курсі дискретної математики, а саме: алгебра та числення висловлювань, метод математичної індукції, квантори.

Конспект лекцій призначений для студентів денної форми навчання спеціальності СКС.

Бібліогр.: 6 назв.

Конспект лекцій розглянуто й рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 17 квітня 2012 р., протокол № 8.

Рецензент

проф. С.Ю. Фаворов

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА.
ВИСЛОВЛЮВАННЯ

Конспект лекцій з дисципліни
«*ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА*»

Частина 1

Відповідальний за випуск Думіна О.О.

Редактор Решетилова В.В.

Підписано до друку 21.05.12 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 0,5. Тираж 25. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра вищої математики

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА
ВИСЛОВЛЮВАННЯ

Частина 1

Конспект лекцій
з дисципліни «Дискретна математика»
для студентів спеціальності СКС

Харків – 2012

Дискретна математика. Висловлювання: Конспект лекцій / О.О. Думіна, Є.Ю. Колбасіна, О.І. Удодова, Ю.С. Шувалова. – Харків: УкрДАЗТ, 2014. – 20 с.

Конспект лекцій містить основні теоретичні положення класичної логіки розділу «Висловлювання», приклади розв’язання задач з розгорнутими поясненнями, список навчальної літератури. У доступній формі викладені розділи, що традиційно вивчаються в курсі дискретної математики, а саме: алгебра та числення висловлювань, метод математичної індукції, квантори.

Конспект лекцій призначений для студентів денної форми навчання спеціальності СКС.

Бібліогр.: 6 назв.

Конспект лекцій розглянуто й рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики УкрДАЗТ, протокол № 8 від 17 квітня 2012 р.

Рецензент

проф. С.Ю. Фаворов

ВСТУП

Конспект розроблено на основі матеріалів лекційного курсу, який був прочитаний студентам денної форми навчання спеціальності «Спеціалізовані комп'ютерні системи». Конспект лекцій містить основні теоретичні положення класичної логіки розділу «Висловлювання», приклади розв'язання задач з розгорнутими поясненнями, список навчальної літератури. У доступній формі викладені розділи, що традиційно вивчаються в курсі дискретної математики, а саме: алгебра та числення висловлювань, метод математичної індукції, квантори.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ПОНЯТТЯ

1.1 Висловлювання

Логіку як науку, створену Арістотелем (384–322 до н. е.), упродовж століть використовували для розвитку багатьох галузей знань, зокрема філософії та математики. Власне, логіка – це наука про міркування, яка дає змогу визначити істинність або хибність математичного твердження, виходячи з первинних припущень, які називають аксіомами. Логіку також застосовують в інформатиці для побудови комп'ютерних програм і доведення їх коректності. Поняття, методи і засоби логіки покладено в основу сучасних інформаційних технологій.

Висловлювання – це розповідне речення, про яке в даний момент можна сказати, істинне воно чи хибне, але не те й інше одночасно. Висловлювання позначаються малими літерами латинського алфавіту, наприклад, p, q, r.

Розділ логіки, який вивчає висловлювання та їхні властивості, називають пропозиційною логікою або логікою висловлювань.

Приклад 1

Визначити, які з наведених тверджень є висловлюваннями.

1) Учора була чудова погода.
2) Діти люблять грати в ігри.
3) Сьогодні ввечері я піду на дискотеку.

4) $7+3=11$.

5) Який чудовий вечір!

6) Котра година?

7) $2x+3<7(x-1)$.

Твердження з 1 по 4 – все це висловлювання.

На відміну від цього: «Який чудовий вечір!», «Котра година?» – не висловлювання, оскільки вони не є розповідними реченнями; а про твердження «$2x+3<7(x-1)$» неможливо сказати, істинне воно чи ні, доки замість x не будуть підставлені певні числа і не буде вказано на істинність чи хибність цієї нерівності.

Для позначення «істина» будемо застосовувати символ 1, а для позначення «хибність» – символ 0. Ці символи називаються *значеннями істинності*. Істинність висловлювання – його єдина характеристика.

Визначення. Якщо висловлювання істинне у всіх логічно можливих випадках, то воно називається *тотожно* істинним *висловлюванням* і позначається **1**, якщо воно хибне у всіх логічно можливих випадках, то воно *тотожно хибне*, і позначається символом **О**.

Багато речень утворюють об'єднанням одного чи декількох висловлювань. Отримане висловлювання називають складним. Побудову складних висловлювань уперше було розглянуто в 1854 р. в книзі англійського математика Дж. Буля «Закони мислення». Складне висловлювання утворюють із наявних висловлювань за допомогою логічних операцій – зв'язок. У логіці висловлювань використовують п'ять логічних операцій: кон'юнкцію (читають «і (та)» й позначають знаком «$\wedge$»), диз'юнкцію (читають «або (чи)» та позначають знаком «$\vee$»), заперечення (читають «не» та позначають заперечення висловлювання p як «$\overline{p}$»), імплікацію (читають «якщо..., то…» та позначають знаком «$\Rightarrow$»), еквівалентність (читають «тоді й лише тоді» та позначають знаком «~» або «$\Leftrightarrow$»).

1.2 Зв'язки

1.2.1 Кон’юнкція

Кон'юнкцією (логічним множенням) висловлювань p і q називається висловлювання $p \wedge q$, яке істинне тоді і тільки тоді, коли істинні обидва ці висловлювання.

Приклад 2. Висловлювання p – «Сьогодні понеділок», q – «Я піду на роботу». Тоді висловлювання $p \wedge q$ – «Сьогодні понеділок, і я піду на роботу».

Висловлювання p та q – прості. Висловлювання $p \wedge q$ – складне. Будь-яке складне висловлювання можна задати у вигляді *таблиці істинності*.

Таблиця істинності для кон’юнкції

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

1.2.2 Диз’юнкція

Диз’юнкцією (логічним додаванням) висловлювань p і q називається висловлювання $p \vee q$, яке істинне тоді і тільки тоді, коли істинне або висловлювання p, або висловлювання q, або обидва.

Таблиця істинності для диз'юнкції

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Приклад 3. Задано висловлювання p – «4 – дільник числа 11», q – «6 – просте число», тоді диз’юнкція $p \vee q$ – хибне

висловлювання, тому що обидва висловлювання, що входять у диз'юнкцію, – хибні.

1.2.3 Заперечення

Заперечення (інверсія) – це висловлювання $\overline{p}$, яке істинне, коли p хибне, та хибне, коли p істинне.

Приклад 4. Висловлювання p – «Деякі студенти не склали екзамен з вищої математики», тоді заперечення – $\overline{p}$ – «Всі студенти склали екзамен з вищої математики».

Таблиця істинності для заперечення

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

Приклад 5. Складне висловлення «Сергій сплатить кредит за авто або Сергій втратить своє авто і буде ходити на роботу пішки» складається з таких простих висловлень: p – «Сергій сплатить кредит за авто», q – «Сергій залишиться при своєму авто», r – «Сергій буде ходити на роботу пішки». Дане висловлення можна символічно представити у вигляді

$$p \vee (\overline{q} \wedge r).$$

1.2.4 Імплікація

Імплікація (наслідок) – це висловлювання $p \Rightarrow q$ (читається «якщо p, то q»), яке хибне тоді і тільки тоді, коли p істинно, а q – хибне.

Таблиця істинності для імплікації

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Останні два рядки в цій таблиці називаються *правилом хибної посилки* (p – посилка, q – висновок).

Приклад 6

Нехай задані висловлювання: p – «Велика вологість», q – «Висока температура», r – «Ми почуваємо себе добре». Тоді висловлювання «Якщо вологість велика та температура висока, то ми почуваємо себе погано» можна записати у вигляді формули логіки висловлювань $(p \wedge q) \Rightarrow \overline{r}$.

1.2.5 Еквівалентність

Еквівалентність (подвійна імплікація) висловлювань $p \Leftrightarrow q$ (читається «p тоді і тільки тоді, коли q», або «для p необхідно й досить q») істинне тоді і тільки тоді, коли p і q одночасно істинні або одночасно хибні.

Таблиця істинності для подвійної імплікації

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Приклад 7. Нехай задані два висловлювання: p – «Вода сьогодні вранці зледеніла», q – «Сьогодні вранці температура була нижче нуля». Тоді мовою логіки висловлювань можна записати $p \Leftrightarrow q$.

Приклад 8. Висловлювання p – «x – дійсне число, більше або рівне 1», а q – «x – дійсне число таке, що $x^2 \geq 1$». Правильна імплікація тільки в один бік $p \Rightarrow q$ («для q досить p» або «для p необхідно q»), але $q \not\Rightarrow p$ («для p не досить q»), отже, $p \not\Leftrightarrow q$.

1.2.6 Стрілка Пірса

Стрілка Пірса – це висловлювання $p \downarrow q$ *(читається «ані p, ані q»),* яке істинне тоді і тільки тоді, коли p і q одночасно хибні.

Таблиця істинності для стрілки Пірса

p	q	$p \downarrow q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

2 ЕКВІВАЛЕНТНІ ВИСЛОВЛЮВАННЯ

Нехай є прості висловлювання $p_1,...,p_n$. За допомогою зв'язок із цих висловлювань утворюються складні висловлювання $F(p_1,...,p_n)$ та $G(p_1,...,p_n)$.

Два складні висловлювання F та G називаються *еквівалентними ($F \equiv G$ або $F \sim G$),* якщо вони мають однакові таблиці істинності.

2.1 Основні еквівалентності

2.1.1 Для кон'юнкції

1) комутативний закон: $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

Довести цей закон можна за допомогою таблиці істинності.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

Оскільки третій і четвертий стовпець збігаються, то закон $p \wedge q \equiv q \wedge p$ доведений;

2) асоціативний закон: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

Доведення

p	q	r	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

Оскільки четвертий та п’ятий стовпці збігаються, то формула $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ правильна;

3) закони нуля та одиниці

$$p \wedge \mathbf{O} \equiv \mathbf{O}. \quad (1)$$

Доведення:

p	**O**	$p \wedge$ **O**
1	0	0
0	0	0

Оскільки в таблиці другий та третій стовпці збігаються, то формула правильна.

$$p \wedge \mathbf{1} \equiv p.$$

Доведення закону одиниці аналогічне доведенню формули (1), залишаємо його для самостійної роботи.

2.1.2 Для диз'юнкції

а) комутативний закон: $p \vee q \equiv q \vee p$.

В таблиці істинності наведено доведення і цієї формули.

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

Останні два стовпці збігаються, формула правильна.

б) асоціативний закон: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$.

Доведення аналогічне доведенню асоціативного закону для кон'юнкції;

в) закони нуля та одиниці:

$$p \vee \mathbf{0} \equiv p, \qquad p \vee \mathbf{1} \equiv \mathbf{1}.$$

Доведення цих формул аналогічне доведенню формули (1), залишаємо його для самостійної роботи.

2.1.3 Загальні еквівалентності

а) дистрибутивні закони

а) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;

б) $p \vee (q \wedge p) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Доведемо лише перший із них, інший доводиться аналогічно.

p	q	r	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0

0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

Однакові останні два стовпці доводять, що закон виконується.

Наступні три закони прості для доведення, пропонуємо читачеві зробити це самостійно.

б) закон подвійного заперечення $\overline{\overline{p}} \equiv p$;

в) закон виключеного третього $p \vee \overline{p} \equiv \mathbf{1}$. (Висловлювання або його заперечення – це тотожно істинне висловлювання.);

г) закон протиріччя $p \wedge \overline{p} \equiv \mathbf{0}$. (Висловлювання та його заперечення – це тотожно хибне висловлювання);

д) подвійна імплікація – це кон'юнкція двох простих імплікацій, тобто $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Доведемо цю формулу.

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1

Бачимо, що третій та останній стовпці збігаються, тому формула $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ правильна;

е) проста імплікація виражається через інверсію та диз'юнкцію $p \Rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q$.

Доведення

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{p} \vee q$
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
0	0	1	1

Бачимо, що третій та четвертий стовпці збігаються, тому формула $p \Rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q$ правильна.

ж) закони де Моргана (формули двоїстості):

заперечення кон'юнкції є диз'юнкція заперечень $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$;
заперечення диз'юнкції є кон'юнкція заперечень $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$.

Доведемо лише перший з них.

p	q	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$
1	1	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	1	1

Третій та четвертий стовпці збігаються. Закон доведено.

к) заперечення імплікації $\overline{p \Rightarrow q} \equiv p \wedge \overline{q}$ (є посилка й відсутній висновок).

Цю формулу можна також довести за допомогою таблиці істинності. Але можна це зробити інакше: скористатися для доведення попередніми законами

$$\overline{p \Rightarrow q} \equiv \overline{\overline{p} \vee q} \equiv \overline{\overline{p}} \wedge \overline{q} \equiv p \wedge \overline{q}.$$

л) заперечення подвійної імплікації $\overline{p \Leftrightarrow q} \equiv (q \vee p) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})$.
Доведемо цю формулу також за допомогою попередніх законів:

$$\overline{p \Leftrightarrow q} \equiv \overline{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)} \equiv \overline{(p \Rightarrow q)} \vee \overline{(q \Rightarrow p)} \equiv (p \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge \overline{p})$$
$$\equiv ((p \wedge \overline{q}) \vee q) \wedge ((p \wedge \overline{q}) \vee \overline{p}) \equiv (q \vee (p \wedge \overline{q})) \wedge (\overline{p} \vee (p \wedge \overline{q})) \equiv$$
$$((q \vee p) \wedge (q \vee \overline{q})) \wedge ((\overline{p} \vee p) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})) \equiv (q \vee p) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q}).$$

м) стрілка Пірса цікава тією властивістю, що через неї можна виразити усі інші логічні операції, наприклад:

$$p \wedge q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q);$$
$$\overline{p} \equiv p \downarrow p;$$
$$p \Rightarrow q \equiv ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q).$$

3 МЕТОДИ ДОВЕДЕННЯ

Багато математичних об’єктів можна зробити більш наочними, якщо користуватись символами і законами логіки. Наприклад, за допомогою логіки були формалізовані і розвинені методи теорії доведень.

Виділяють такі види доведень:

– **пряме доведення.** Правильність розглянутого твердження перевіряється безпосередньо, з використанням визначень або вже доведених тверджень. Простий приклад: «Холодильник є робочим тому, що при ввімкненні в мережу в його камері температура повітря знижується згідно з встановленими виробником параметрами»; «Анатолій Карпов – видатний шахіст світу тому, що він виграв понад 150 турнірів та матчів». При прямому доведенні, щоб довести що з p випливає q, будується ланцюжок імплікацій: $p \Rightarrow r_1 \Rightarrow r_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow r_n \Rightarrow q$, де $r_1, r_2, \ldots, r_n$ – деякі допоміжні висловлювання;

– **непряме доведення** – істинність тези виводиться з деяких інших суджень. Цей вид відрізняється тим, що доводи в ньому обґрунтовують істинність тези опосередковано через обґрунтування хибності іншої, протилежної тези. До непрямого доведення відносяться методи «від протилежного» та метод виключення.

Доведення методом «від протилежного». Розглядається твердження, протилежне тому, що доводиться, та виявляється його неправильність або шляхом міркувань, або побудовою контрприкладу. Цей метод ґрунтується на еквівалентності $p \Rightarrow q \equiv \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$.

Приклад 9. Нехай p – «в будь-якому трикутнику сума всіх трьох кутів дорівнює $180°$», q – «в будь-якому трикутнику принаймні два кути гострі». Доведемо, що q – істинне, користуючись тим, що p – істинне.

Припустимо, що $\overline{q}$ – істинне. Це означає, що в деякому трикутнику тільки один гострий кут або взагалі нема гострих кутів. Тоді в цьому трикутнику є два кути, кожен з яких не менший за $90°$. Сума цих двох кутів не менша за $180°$. Отримали, що виконується $\overline{p}$, що неможливо.

Доведення методом виключення. Істинність доводиться шляхом послідовного доведення хибності всіх складових висловлювання (диз'юнкції), крім одного.

4 МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ

Метод математичної індукції застосовується для доведення тверджень, які залежать від натурального числа n. В основі полягає **принцип повної індукції**: *якщо будь-яке твердження доведене при* $n=1$ *(у випадку, якщо при* $n=1$ *твердження не має сенсу, то перевірку роблять для найменшого значення* n*, при якому воно має сенс) і, якщо з припущення, що воно справедливе для натурального* $n=k$*, випливає, що воно правильно для наступного натурального числа* $n=k+1$*, тоді це твердження правильно для будь-якого натурального числа.*

Перевірка справедливості твердження при $n=1$ називається *базою індукції*. Доведення твердження при $n=k+1$, у припущенні його справедливості при $n=k$, називається *індуктивним переходом* і позначається $k \to k+1$.

Приклад 10. Довести, що $a_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ ділиться на 3.

Розв'язання

1 Перевіримо базу індукції, тобто a_1, $n=1$.

$$a_1 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 9, \text{ ділиться на 3.}$$

База індукції правильна.

2 Індуктивний перехід $k \to k+1$. Припустимо, що для деякого натурального $n=k$ $a_k = k^3 + 3k^2 + 5k$ ділиться на 3. Покажемо, що звідси випливає твердження при $n=k+1$:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1) = \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 5k + 5 = \\ &= \left(k^3 + 3k^2 + 5k\right) + 3k^2 + 9k + 9 = a_k + 3\left(k^2 + 3k + 3\right). \end{aligned}$$

Оскільки a_k ділиться на 3 за індуктивним припущенням, а $3\left(k^2 + 3k + 3\right)$ – має 3 множником, то на підставі принципу математичної індукції можна стверджувати, що $a_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ ділиться на 3 для будь-якого натурального n.

Приклад 11. Довести формулу

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + \left(2n-1\right)^3 = n^2\left(2n^2-1\right).$$

Розв'язання

1 Перевіримо базу індукції: $1^3 = 1^2\left(2\cdot 1^2 - 1\right)$, $1=1$. База індукції правильна.

2 Індуктивний перехід $k \to k+1$.

Припустимо, що для деякого натурального $n=k$ формула правильна, тобто

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + \left(2k-1\right)^3 = k^2\left(2k^2-1\right).$$

Покажемо, що звідси витікає аналогічна рівність при $n = k+1$:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + \left(2k-1\right)^3 + (2(k+1)-1)^3 = k^2\left(2k^2-1\right) + (2k+2-1)^3 =$$
$$= k^2\left(2k^2-1\right) + (2k+1)^3 = 2k^4 - k^2 + 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 =$$
$$= \left(k^2+2k+1\right)\left(2k^2+4k+1\right) = \left(k+1\right)^2\left(2\left(k+1\right)^2 - 1\right).$$

Тепер на підставі принципу математичної індукції можна стверджувати справедливість даної формули для будь-якого натурального n.

Приклад 12. Для будь-яких натуральних n довести нерівність $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^n - 1} \le n$.

Розв'язання

1 Перевіримо базу індукції: $1 \le 1$. База індукції правильна.

2 Індуктивний перехід $k \to k+1$. Припустимо, що при $n=k$ формула правильна, тобто $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^k - 1} \le k$.

Для $n = k+1$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^{k+1}-1}\le k+\frac{1}{2^{k+1}-1}\le k+1,$$

оскільки k – натуральне.

За допомогою принципу математичної індукції ми довели надану нерівність для будь-якого натурального n.

5 ПРЕДИКАТИ, КВАНТОРИ

Предикат – одне із фундаментальних понять математичної логіки, умова, сформульована в термінах деякої точної логіко-математичної або неформальної мови.

Предикат містить позначення для довільних об'єктів певного класу (змінні). При заміщенні змінних іменами об'єктів даного класу предикат задає точно визначене висловлювання.

Прикладами предикатів можуть бути вирази (x > 2), (x+3) = y, (x > 3 та y < x). При заміщенні x на 2 та y на 5 другий з предикатів визначає істинне висловлення, а інші два – хибні.

Можливі й інші варіанти визначення предиката. Так, іноді роблять природнє ототожнення, вважаючи, що сімейство рівносильних умов задає один і той самий предикат. Висловлювання можна розглядати як окремий випадок предикатів з «фіктивними» змінними і тому подібне.

Як з елементарних висловлень за допомогою логічних операцій можна утворювати складені висловлення, так і, використовуючи прості (елементарні) предикати і логічні зв’язки (операції), можна будувати складені предикати або предикатні формули.

Додатково в логіці предикатів використовують дві спеціальні операції, які називають *кванторами*. За допомогою цих операцій, по-перше, пропозиційні форми можна перетворювати у висловлення, і, по-друге, теорія предикатів стає значно гнучкішою, глибшою і багатшою, ніж теорія висловлень.

Найпопулярнішими і найбільш часто вживаними виразами у математиці є фрази або формулювання типу «для всіх» і «існує». Вони входять до більшості проміжних і остаточних тверджень, висновків, лем або теорем при проведенні математичних міркувань або доведень.

Перш ніж ввести поняття квантора, розглянемо поняття *множини*. Більш докладно про множини мова піде у другій частині цього конспекту, а поки що зазначимо, що множина – це невизначуване поняття. Можна говорити, що *множина – це сукупність об'єктів, які мисляться як єдине ціле*. Множини позначаються великими латинськими літерами, а об'єкти, що до них входять, – маленькими латинськими літерами.

Наприклад, зі шкільного курсу алгебри добре відома множина цілих чисел – $\boldsymbol{Z}$, множина дійсних чисел – $\boldsymbol{R}$. Можна розглянути також множину, що складається з чотирьох елементів $A = \{$5; тролейбус № 2; факультет АТЗ; людина$\}$, або множину, що задовольняє деяке обмеження: нехай $P(x)$ – це деяка властивість x, тоді $A = \{x : P(x)\}$ – це множина тих x, що мають властивість $P(x)$.

1) *Квантор* (символ) *загальності* $\forall$. Запис $\forall x$ читається так: «для будь-якого x», «для всіх x», «для кожного x».
$(\forall\, x \in A)(P(x))$ – для всіх x з множини A правильна властивість $P(x)$,

2) *Квантор* (символ) *існування* $\exists$. Запис $\exists x$ означає «існує x», «знайдеться x».
$(\exists\, x \in A)(P(x))$ – існує x з множини A, таке, що виконується властивість $P(x)$, тобто знайдеться хоча б один елемент x з множини A, для якого $P(x)$ – істинне.

3) *Квантор існування та єдиності* $\exists!$ – «існує та єдиний».
$(\exists!\, x \in A)(P(x))$ – існує та єдине x з множини A таке, що виконується властивість $P(x)$, тобто знайдеться один та тільки один елемент x з множини A, для якого $P(x)$ – істинне.

Приклад 13. Запишемо висловлювання «Всі студенти повинні вчитися» мовою логіки.

Розглянемо множину A – студенти, та властивість $B(x)$ – людина повинна вчитися, тоді $(\forall x \in A)(B(x))$ – будь-яка людина, що є студентом, повинна вчитися.

Приклад 14. Висловлювання «Через будь-які три різні точки простору можна провести єдину площину» запишеться так:

$$(\forall\ A \in R^3,\ \forall\ B \in R^3,\ \forall\ C \in R^3) : (A \neq B \neq C)(\exists!\ P(A,B,C)) .$$

Приклад 15. Запишемо висловлювання «Для будь-якого натурального x існує дійсний y такий, що їх частка дорівнює цілому числу» мовою логіки.

$\forall\ x \in N\ \ \exists\ \ y \in R : \dfrac{x}{y} \in Z$ – це висловлювання істинне. (Будь-яке натуральне число, принаймні, при діленні само на себе, дає цілу частку.)

5.1 Зв'язок між кванторами

Розглянемо правила переходу від одних формул до рівносильних їм.

Перестановка однойменних кванторів

$$\left(\exists x\right)\left(\exists y\right)\Phi(x,y) \equiv \left(\exists y\right)\left(\exists x\right)\Phi(x,y),$$
$$\left(\forall x\right)\left(\forall y\right)\Phi(x,y) \equiv \left(\forall y\right)\left(\forall x\right)\Phi(x,y).$$

Перенесення квантора через заперечення

$$\overline{\exists x(\Phi(x))} \equiv \forall x(\overline{\Phi(x)}),$$
$$\overline{\forall x(\Phi(x))} \equiv \exists x(\overline{\Phi(x)}).$$

Приклад 16. Висловлювання «Не всі студенти вчаться» рівносильне висловлюванню «Існує студент, який не вчиться». Мовою логіки, використовуючи позначення, введені в прикладі 13, це висловлювання можна записати так:

$$\overline{\left(\forall\ x \in A\right)\left(B(x)\right)} = \left(\exists\ x \in A\right)\left(\overline{B(x)}\right).$$

Приклад 17. Побудувати заперечення для кожного з таких висловлювань:

а) хибне висловлювання: «Деякі люди безсмертні». Заперечення: «Всі люди смертні» – істинне висловлювання;

б) істинне висловлювання: $\forall\, x \in (2;+\infty)$: $x^2 > 4$. (Читається так: для будь-якого x, більшого за двійку, його квадрат більше чотирьох).

Заперечення: $\exists x \in (2;+\infty)$: $x^2 \le 4$ – хибне висловлювання. (Читається так: існує x більший за двійку, такий що його квадрат менше чотирьох).

Взагалі, для кожного висловлювання можна записати еквівалентне висловлювання, в якому будуть використані лише операції кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення. При цьому знаки заперечення будуть стосуватися лише елементарних предікатів та висловлювань.

Приклад 18. Розглянемо множину A – студенти та такі властивості: $B_1(x)$ – студент вміє розв'язувати задачі з математики, $B_2(x)$ – студент проспить у день іспиту, $B_3(x)$ – студент отримуватиме стипендію у наступному семестрі. Тоді висловлювання «Кожен студент, який вміє розв'язувати задачі з математики і не проспить у день іспиту, отримуватиме стипендію у наступному семестрі» запишеться таким чином:

$$\forall\, x \in A \left(B_1(x) \wedge \overline{B_2(x)}\right) \Rightarrow B_3(x).$$

Користуючись загальними еквівалентностями 2, 6 і 7, отримаємо

$$\left(\left(B_1(x) \wedge \overline{B_2(x)}\right) \Rightarrow B_3(x)\right) \equiv \left(\overline{\left(B_1(x) \wedge \overline{B_2(x)}\right)} \vee B_3(x)\right) \equiv$$
$$\equiv \left(\left(\overline{B_1(x)} \vee \overline{\overline{B_2(x)}}\right) \vee B_3(x)\right) \equiv \left(\left(\overline{B_1(x)} \vee B_2(x)\right) \vee B_3(x)\right).$$

Остаточно, маємо

$$\forall\, x \in A \left(\overline{B_1(x)} \vee B_2(x)\right) \vee B_3(x).$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Авсеев, Г.Г. Дискретная математика [Текст]: учеб. пособие / Г.Г. Авсеев, О.М. Абрамов, Д.Э. Ситников. – Харьков: Торсинг, 2003. – 143 с.

2 Гончарова, Г.А. Элементы дискретной математики [Текст]: учеб. пособие / Г.А. Гончарова, А. А. Мочалин. – М.: Форум-Инфра-М, 2005. – 127 с.

3 Основи дискретної математики [Текст]: навч. посібник / Ю.В. Капітонова, С.Л. Кривий [та ін.]. – К.: Наукова думка, 2002. – 579 с.

4 Кемени, Дж. Введение в конечную математику [Текст] / Дж. Кемени, Снелл Дж., Томпсон Дж. – М.: Мир, 1965. – 486 с.

5 Новиков, Ф.А. Дискретная математика для программистов [Текст] / Ф.А. Новиков. – С.Пб.: Питер, 2005. – 364 с.

6 Трохимчук, Р.М. Основи дискретної математики. Практикум [Текст]: навч. посібник / Р.М. Трохимчик. – К.: МАУП, 2004. – 163 с.