ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

А.О. Дрогаченко, О.В. Рибачук

ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ДЛЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Конспект лекцій з дисципліни

«*МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ*»

Харків - 2014

Дрогаченко А.О., Рибачук О.В. Задачі оптимізації для функцій багатьох змінних: Конспект лекцій. – Харків: УкрДАЗТ, 2014. – 58 с.

Під оптимізацією розуміють процес вибору найкращого варіанта з усіх можливих. З точки зору інженерних розрахунків методи оптимізації дозволяють вибрати найкращий варіант конструкції, найкращий розподіл ресурсів і т. д.

Методів розв'язання задач оптимізації досить багато. Для знаходження оптимальних розв'язків інколи можуть бути застосовані методи відшукання екстремальних значень функцій однієї та багатьох дійсних змінних, але більшість задач оптимізації потребують інших, відмінних від класичних, методів розв'язання.

Конспект лекцій призначено для вивчення (у тому числі і самостійного) таких розділів: екстремум функції n змінних без обмежень, задача знаходження умовних екстремумів, метод Лагранжа, лінійне програмування, найпростіша задача варіаційного числення. Для більш глибокої проробки цих розділів можна використати наведену літературу.

Конспект лекцій призначено для магістрів спеціальності промислове та цивільне будівництво

Іл. 12, табл. 3, бібліогр.: 7 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики УкрДАЗТ 9 жовтня 2012 р., протокол № 3.

Рецензент

доц. О.К. Фурсенко (ХУПС)

А.О. Дрогаченко, О.В. Рибачук

ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ДЛЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Конспект лекцій з дисципліни

«*МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ*»

Відповідальний за випуск Дрогаченко А.О.

Редактор Ібрагімова Н.В.

Підписано до друку 13.11.12 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 2,25. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПП

Кафедра “Вища математика”

ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ДЛЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З ДИСЦИПЛІНИ “МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ”

для магістрів спеціальності промислове та цивільне будівництво.

Харків – 2014

Задачі оптимізації для функцій багатьох змінних: Конспект лекцій / А.О. Дрогаченко, О.В. Рибачук. – Харків: УкрДАЗТ, 2014. – 58 с.

Під оптимізацією розуміють процес вибору найкращого варіанта з усіх можливих. З точки зору інженерних розрахунків методи оптимізації дозволяють вибрати найкращий варіант конструкції, найкращій розподіл ресурсів і т. д.

Методів розв'язання задач оптимізації досить багато. Для знаходження оптимальних розв'язків інколи можуть бути застосовані методи відшукання екстремальних значень функцій однієї та багатьох дійсних змінних, але більшість задач оптимізації потребують інших, відмінних від класичних, методів розв'язання.

Конспект лекцій призначено для вивчення (у тому числі і самостійного) таких розділів: екстремум функції *n* змінних без обмежень, задача знаходження умовних екстремумів, метод Лагранжа, лінійне програмування, найпростіша задача варіаційного числення. Для більш глибокої проробки цих розділів можна використати наведену літературу.

Конспект лекцій призначено для магістрів спеціальності промислове та цивільне будівництво

Іл. 12, табл. 3, бібліогр.: 7 назв.

Конспект лекцій розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики УкрДАЗТ 9 жовтня 2012 р., протокол № 3.

Рецензент
доц. Фурсенко О.К. (ХУПС)

ВСТУП

Часто в промисловості, економічній діяльності, будівництві виникає необхідність максимізувати або мінімізувати деяку величину при деяких обмеженнях. Наприклад, бізнесмен бажає максимізувати прибуток, однак при цьому він обмежений загальною кількістю верстатів, наявністю людей, капіталом та ін. Так само керівник будівництва намагається мінімізувати час будівництва об'єкта, але він обмежений показниками якості та безпеки, кількістю будівельної техніки, пального та ін. Будь-яка стратегія веде до втрат і виграшів і задача – вибрати оптимальну, тобто максимізувати виграш і мінімізувати втрати. Такого роду задачі відносять до задач оптимізації.

Для знаходження оптимальних розв'язків інколи можуть бути застосовані методи класичного математичного аналізу, але більшість задач оптимізації потребують інших, відмінних від класичних, методів розв'язання.

1 ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ n ЗМІННИХ БЕЗ ОБМЕЖЕНЬ

1.1 Екстремум функції n змінних

У випадку диференційованої функції n змінних $(n \geq 2)$ $W = f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$ для відшукання екстремальних точок (тобто точок максимуму і мінімуму) застосовують таку методику.

Спочатку знаходять стаціонарні точки цієї функції, тобто точки, у яких дорівнюють нулю всі її частинні похідні. Для цього потрібно розв'язати систему n рівнянь з n невідомими. Однак стаціонарність точок є лише необхідною умовою екстремуму, їх ще потрібно дослідити на екстремум за допомогою достатніх умов.

Зауваження. Якщо зняти вимогу диференційованості функції, то екстремальними можуть бути і точки, у яких частинні похідні не існують.

Розглянемо приклад у випадку функції двох змінних $z = f\left(x, y\right)$.

Δ Приклад. Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x - 8y + 12 .$$

а) Необхідна умова екстремуму:

$$z'_x = 2x + 2y - 6 = 0,$$

$$z'_y = 2x + 4y - 8 = 0.$$

б) розв'язання системи і знаходження стаціонарних точок:

$\begin{cases} 2x + 2y - 6 = 0, \\ 2x + 4y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ y = 1 \end{matrix}$, точка $M(2, 1)$ – стаціонарна точка;

в) достатні умови: $z''_{xx} = 2 = A, \quad z''_{xy} = 2 = B, \quad z''_{yy} = 4 = C$.

$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 2 \cdot 4 - 2^2 = 4 > 0$, екстремум існує, оскільки $A = 2 > 0$ – це мінімум; $z_{\min} = z(2,1) = 2$. ▲

Розглянута методика пов'язана з необхідністю розв'язання систем n рівнянь з n невідомими. Зі зростанням n і при достатньо складній функції $W = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ ця задача стає громіздкою і складною. До того ж виконується зайва робота зі знаходження стаціонарних точок, у яких екстремуму не існує. Тому виникає необхідність у наближених методах відшукання екстремальних точок функцій багатьох змінних.

Одним з таких методів є градієнтний метод (метод найшвидшого спуску). Ми розглянемо лише ідею методу, не зупиняючись на тонкощах, зокрема на питаннях збіжності.

Відмітимо також, що градієнтний метод застосовується для відшукання екстремумів функцій, заданих в усьому n-вимірному просторі.

1.2 Градієнтний метод відшукання наближеного значення екстремуму у випадку функції двох змінних

Щоб мати можливість геометричної інтерпретації, розглянемо спочатку випадок $n = 2$.

Нехай задана диференційована функція $z = f(x, y)$. Нехай точка $M(a, b)$ – невідома точка мінімуму цієї функції (у випадку максимуму дії аналогічні або його можна звести до випадку мінімуму, розглянувши функцію $z=-f(x,y)$), і нехай у деякій області, що містить точку M, функція $z=f(x,y)$ не має інших стаціонарних точок, крім M.

Виберемо в цій області довільну точку $M_0(x_0,y_0)$ – початкове наближення точки $M(a,b)$ і розглянемо промінь l_0, який виходить із M_0, розташований в площині xOy, і має напрям найшвидшого спуску графіка $z=f(x,y)$. Цей напрям характеризується вектором, протилежним вектору $grad\, z\big|_{M_0}$, тобто вектором $-grad\, z\big|_{M_0}=\left(-z_x'(x_0,y_0);-z_y'(x_0,y_0)\right)$.

Зауваження. Нагадаємо, що вектор $grad\, z\big|_{M_0}=z_x'\big|_{M_0}\vec{i}+z_y'\big|_{M_0}\vec{j}$ завжди спрямований у напрямку найбільшого зростання функції $z=f(x,y)$.

Рівняння проміня (l_0) : $\dfrac{x-x_0}{-f_x'(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{-f_y'(x_0,y_0)}=t$ в параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x=x_0-t\cdot f_x'(x_0,y_0) \\ y=y_0-t\cdot f_y'(x_0,y_0) \end{cases}; \qquad t\ge 0.$$

На промені l_0 будемо обирати наступну апроксимацію точки $M(a,b)$ – точку $M_1(x_1,y_1)$, а саме в якості наступного наближення візьмемо точку мінімуму функції $f(x,y)$ на промені l_0. (Якщо мінімумів декілька, беремо найближчий до точки M_0.) З цією метою розглянемо складну функцію $F_0(t)=f(x,y)$, де $\begin{cases} x=x_0-t\cdot f_x'(x_0,y_0) \\ y=y_0-t\cdot f_y'(x_0,y_0) \end{cases}$, яка залежить від одного параметра t, і для функції однієї змінної $F_0(t)=f\left(x_0-t\cdot f_x'(x_0,y_0),\ y_0-t\cdot f_y'(x_0,y_0)\right)$ знайдемо $t=t_0$, при якому $F_0(t)$ досягає (першого) мінімуму. Поклавши $t=t_0$, знайдемо x_1 і y_1 за формулами $x_1=x_0-t_0\cdot f_x'(x_0,y_0)$; $y_1=y_0-t_0\cdot f_y'(x_0,y_0)$.

Якщо трапиться, що $f'_x(x_1, y_1) = f'_y(x_1, y_1) = 0$, тобто $grad\, f(x_1, y_1) = 0$, це означає, що отримана точка $M_1(x_1, y_1)$ співпадає з точкою мінімуму $M(a,b)$ функції $z = f(x, y)$, яка відшукується. Якщо $grad\, f(x_1, y_1) \neq 0$, то попередню побудову потрібно повторити. А саме із точки $M_1(x_1, y_1)$ провести промінь l_1 в площині xOy, який має напрям $-grad\, f(x_1, y_1)$ - напрям найбільшого спуску поверхні $z = f(x, y)$ в точці M_1. Промінь l_1 має параметричне рівняння $x = x_1 - t \cdot f'_x(x_1, y_1)$; $y = y_1 -$ $- t \cdot f'_y(x_1, y_1)$; $t \geq 0$, і на цьому промені слід знайти таку точку $M_2(x_2, y_2)$ (найближчу до M_1), у якій функція $f(x, y)$ досягає мінімуму.

Координати x_2, y_2 точки M_2 знаходять за формулами $x_2 = x_1 - t_1 \cdot f'_x(x_1, y_1)$; $y_2 = y_1 - t_1 \cdot f'_y(x_1, y_1)$, де t_1 – значення t, при якому складна функція $F_1(t) = f(x, y) = f\left(x_1 - t \cdot f'_x\ (x_1, y_1);\ y_1 - t \cdot f'_y(x_1, y_1)\right)$, $t \geq 0$ має мінімум.

Повторюючи описану процедуру, прийдемо до нескінченної, взагалі кажучи, послідовності точок $M_0, M_1, M_2, ..., M_n, ...$, які необмежено наближаються, як правило, до точки $M(a,b)$ мінімуму функції $z = f(x, y)$. При цьому координати двох послідовних точок $M_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ і $M_n(x_n, y_n)$ пов'язані рівностями $x_{n+1} = x_n - t_n \cdot f'_x(x_n, y_n)$; $y_{n+1} = y_n - t_n \cdot f'_y(x_n, y_n)$, де t_n – значення аргументу t, при якому складна функція $F_n(t) = f(x, y)$ при $x = x_n - t \cdot f'_x(x_n, y_n)$; $y = y_n - t \cdot f'_y(x_n, y_n)$, $t \geq 0$ має мінімум.

Не виключено, що деякий член послідовності $\{M_n\}$ співпаде з $M(a,b)$, у цьому випадку точне значення координат a і b знаходиться за скінченну кількість кроків.

Δ **Приклад.** Використовуючи градієнтний метод**,** знайти наближене значення координат точки мінімуму функції $z = f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x - 8y + 12$.

У якості нульового наближення точки мінімуму візьмемо, наприклад, точку $x_0 = 1, y_0 = 1$.

$$f_x^{'}(x, y) = 2(x + y - 3); \qquad f_y^{'}(x, y) = 2(x + y - 4)$$

$$f_x^{'}(x_0, y_0) = f_x^{'}(1{,}1) = -2; \quad f_y^{'}(x_0, y_0) = f_y^{'}(1{,}1) = -2.$$

Промінь l_0 має параметричне рівняння: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \end{cases}; \ t \ge 0$, тоді

$$F_0(t) = f(1+2t, 1+2t) = (1+2t)^2 + 2(1+2t)(1+2t) + 2(1+2t)^2 -$$

$$-6(1+2t) - 8(1+2t) + 12 = 5(1+2t)^2 - 14(1+2t) + 12 = 20t^2 - 8t + 3.$$

Функція $F_0(t)$ має єдиний мінімум при $F_0^{'}(t) = 40t - 8 = 0; \quad t = t_0 = 0.2$, тоді $x_1 = 1 + 2 \cdot 0.2 = 1.4; \ y_1 = 1 + 2 \cdot 0.2 = 1.4$, тобто $M_1(1.4; 1.4)$. Знайдемо друге наближення $x_2; y_2$. Оскільки $f_x^{'}(x_1, y_1) = f_x^{'}(1.4,\ 1.4) = -0.4; \ \ f_y^{'}(x_1, y_1) = f_y^{'}(1.4,\ 1.4) = 0.4$, то це наближення розташоване на промені l_1, його параметричне рівняння $x = 1.4 + 0.4 \cdot t; \ y = 1.4 - 0.4 \cdot t$, $t \ge 0$. $F_1(t) = f(1.4 + 0.4 \cdot t; 1.4 - 0.4 \cdot t) = 0.16t^2 - 0.32t + 14.2$, має мінімум при $0.32t - 0.32 = 0$, $t = t_1 = 1$; $x_2 = 1.4 + 0.4 \cdot 1 = 1.8; \ \ y_2 = 1.4 - 0.4 \cdot 1 = 1$. Таким чином, $M_2(1.8;\ 1)$.

Аналогічно, третє наближення $x_3 = 1.88; y_3 = 1.08$, а четверте $x_4 = 1.96; y_4 = 1$.

Ми знаємо (див. попередній приклад), що точне значення координат мінімуму $a = 2,\ b = 1$, і бачимо, що відстань між точкою $(2;\ 1)$ і її апроксімацією $(1.96;\ 1)$ на четвертому кроці дорівнює 0,04. ▲

Напрями найшвидшого спуску і апроксімації точки мінімуму можна показати на рисунку 1.1.

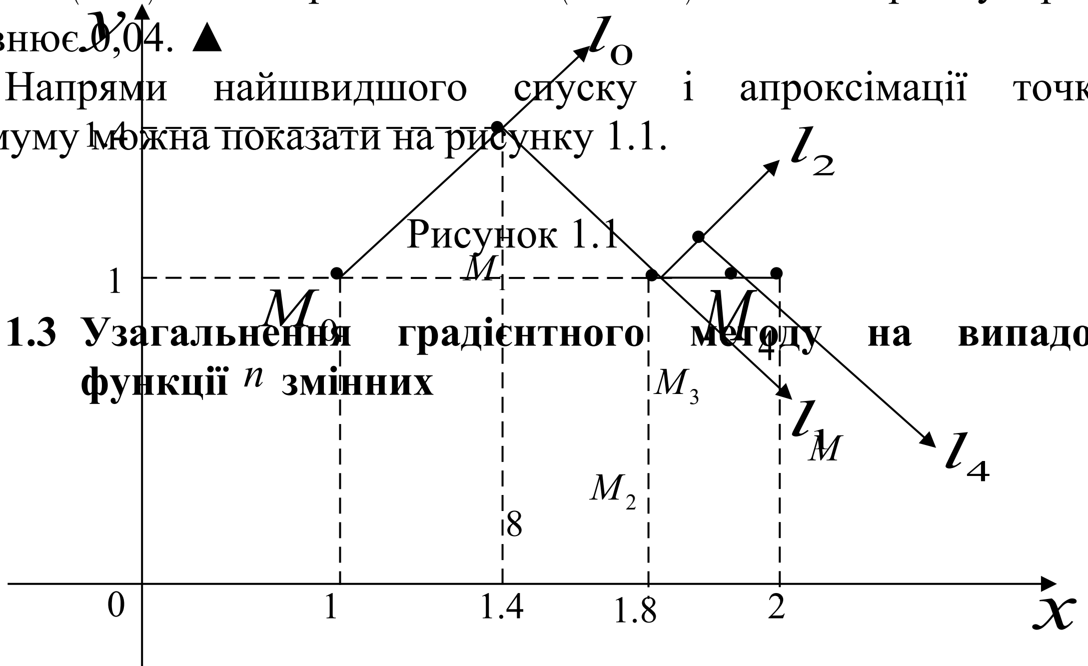


Рисунок 1.1

1.3 Узагальнення градієнтного методу на випадок функції n змінних

Нехай функція $W = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = f\left(X\right)$, де $X = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ є диференційованою і $A = \left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$ – її точка мінімуму; нехай також у деякому околі точки A ніяких стаціонарних точок, крім A, для функції $f\left(X\right)$ немає.

Позначимо через $X^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$ достатньо близьку до A точку і побудуємо послідовність точок: $X^{(0)}$, $X^{(1)}$,..., $X^{(n)}$,... за формулою $X^{(k+1)} = X^{(k)} - t_k \cdot grad\, f\left(X^{(k)}\right)$, $k = 0,1,2,...$, де $grad\, f\left(X^{(k)}\right)$ – градієнт функції $f\left(X\right)$ у точці $X^{(k)}$, а t_k – значення (найменше) аргументу t $\left(t \geq 0\right)$, яке мінімізує функцію $F_k\left(t\right) = f\left(X^{(k)} - t_k \cdot gradf\left(X^{(k)}\right)\right)$.

Тоді (при дотриманні деяких додаткових умов)

$$\lim_{k \to \infty} X^{(k)} = A.$$

Зауважимо, що в координатній формі формули, що пов'язують сусідні точки апроксимації набувають вигляду

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} - t_k \cdot f'_{x_1}\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}\right), \\
x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} - t_k \cdot f'_{x_2}\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}\right), \\
&- - - - - - - - - - - - - - - -, \\
x_n^{(k+1)} &= x_n^{(k)} - t_k \cdot f'_{x_n}\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}\right).
\end{aligned}$$

1.4. Метод покоординатного спуску (МПС) і його порівняння з градієнтним методом

На відміну від градієнтного методу, в МПС наближення до точок екстремуму здійснюється тільки за напрямами, що паралельні координатним осям (а не за напрямками найшвидшого спуску).

МПС приводить до більш низької, взагалі кажучи, швидкості збіжності ітераційного процесу, однак у ряді випадків це компенсується простотою обчислень.

Розглянемо цей метод лише для функції двох змінних. Нехай диференційована функція $z = f(x,y)$ має в площині xOy єдину стаціонарну точку – точку мінімуму $M(a,b)$; нехай також $M_0(x_0, y_0)$ – початкове (нульове) наближення точки M.

Перший крок зробимо в напрямку осі тієї змінної, якій відповідає більше (за модулем) значення частинної похідної (у випадку рівності напрям обирається довільно).

Нехай для визначеності $\left|f_x'(x_0,y_0)\right| > \left|f_y'(x_0,y_0)\right|$, тоді перший крок робимо в напрямку осі x.

Зафіксувавши $y = y_0$, розглянемо функцію $f(x, y_0)$ однієї змінної x і знайдемо її мінімум. Нехай він у точці $x = x_1$. Тоді в якості першого наближення приймаємо точку M_1 з абсцисою $x = x_1$ і ординатою $y = y_1 = y_0$. Зауважимо, що $f_x'(x_1, y_1) = 0$, оскільки при $x = x_1$ функція $f(x, y_1) = f(x, y_0)$ однієї змінної x має мінімум. Якщо і $f_y'(x_1, y_1) = 0$, то M_1 співпадає з M і розв'язання задачі закінчено, якщо $f_y'(x_1, y_1) \neq 0$, то наступний крок робимо в напрямку осі y.

Розглянемо тепер функцію $f(x_1, y)$ аргументу y і знайдемо її мінімум. Нехай він при $y = y_2$. Точка M_2 з абсцисою $x = x_2 = x_1$ і ординатою $y = y_2$ береться в якості другого наближення точки M. Якщо $M_2 = M$, то процес закінчується, якщо ні, аналогічно знаходимо третє наближення $M_3(x_3, y_3)$, $y_3 = y_2$, потім четверте $M_4(x_4, y_4)$, $x_4 = x_3$ і т. ін.

Δ **Приклад.** Використовуючи МПС, знайти наближене значення координат точок мінімуму функції $z = x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x - 8y + 12$ (див. попередній приклад).

Прирівнюючи частинну похідну $f_x'(x,y) = 2(x + y - 3)$ до нуля, знаходимо, що точки мінімуму функції $f(x,y)$ при фіксованому ''y'' розташовані на прямій $x + y - 3 = 0$ або $x = -y + 3$. Так само із $f_y'(x,y) = 2(x + 2y - 4) = 0$ знаходимо, що точки мінімуму функції $f(x,y)$ при фіксованому $''x''$ розташовані на прямій $x+2y-4=0$ або $y=-\frac{x}{2}+2$.

У якості нульового наближення візьмемо точку $M_0(1,1)$, оскільки $\left|f_x'(1,1)\right|=\left|f_y'(1,1)\right|=2$, то напрям першого кроку обираємо довільно, наприклад, по осі Oy (при цьому $x=x_0=1$). Точка мінімуму функції $f(x_0,y)=f(1,y)$ розташована на прямій $y=-\frac{x}{2}+2$, тому з її рівняння знаходимо $y_1=-\frac{x_0}{2}+2=-\frac{1}{2}+2=1.5$. Таким чином, перше наближення M_1 має абсцису $x_1=x_0=1$ і ординату $y_1=1.5$, тобто $M_1(1;\,1.5)$.

Наступний крок по осі Ox. Точка мінімуму функції $f(x,y_1)$ розташована на прямій $x=-y+3$, тому з її рівняння знаходимо $x_2=3-y_1=3-1.5=1.5$ і друге наближення (точка M_2) має координати $x_2=1.5,\ y_2=y_1=1.5$, тобто $M_2(1.5;\,1.5)$; точка M_3 на прямій $y=-\frac{x}{2}+2$ її координати $y_3=-\frac{x_2}{2}+2=-\frac{1.5}{2}+2=1.25,\ x_3=x_2=1.5$ і $M_3(1.5;\,1.5)$; точка M_4 на прямій $x=-y+3$ її координати $x_4=-y_3+3=1.75,\ y_4=1.25$ і $M_4(1.75;\,1.25)$ і т. ін. ▲

Порівнюючи четверті (для визначеності) апроксимації, отримані градієнтним методом і МПС, бачимо, що в першому випадку $M_4(1.96;\,1)$ похибка наближення набагато менша, ніж у другому $M_4(1.75;\,1.25)$. Відстані цих апроксимацій до точки точного мінімуму $M(2,\,1)$ відповідно дорівнюють: 0,04 і $0.25\sqrt{2}\approx 0.35$. Однак у другому випадку обчислення набагато простіші. Апроксимації точки мінімуму для МПС можна показати на рисунку 1.2.

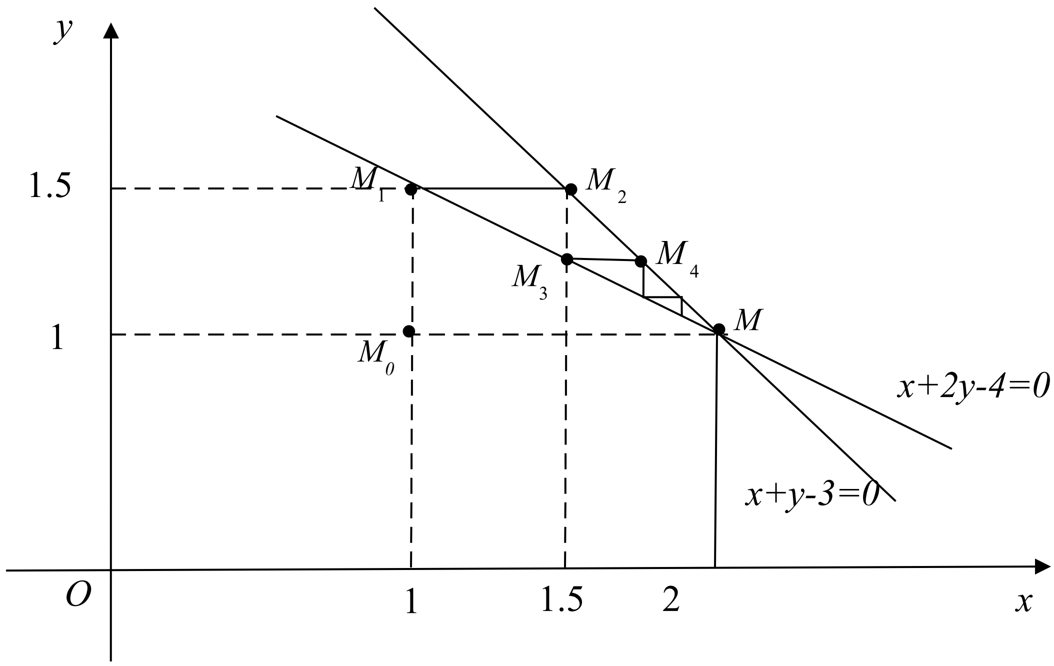


Рисунок 1.2

2 ЗАДАЧА ЗНАХОДЖЕННЯ УМОВНИХ ЕКСТРЕМУМІВ. МЕТОД ЛАГРАНЖА

2.1 Умовний екстремум

Важливу роль у задачах оптимізації відіграють задачі про максимізацію (мінімізацію) функції $W = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ на заданій множині G точок n-вимірного простору.

У випадку $n = 3$ $W = f\left(x_1, x_2, x_3\right)$, а множина G є поверхнею з рівнянням $g\left(x_1, x_2, x_3\right) = 0$ і задача полягає у відшуканні умовного екстремуму функції W за умови $g\left(x_1, x_2, x_3\right) = 0$.

Прикладом такого роду задачі може бути така

З листа жерсті площею $2a$ виготовити закриту ванну в формі прямокутного паралелепіпеда з найбільшим об'ємом.

Математично задача зводиться до відшукання максимуму функції $V = xyz$ за умови $2xy + 2xz + 2yz = 2a$, де x, y, z - довжина, ширина і висота ванни.

Визначення. Точку $M_0 \in G$ будемо називати точкою умовного максимуму функції $W = f\left(x_1, x_2, x_3\right)$ за умови $g\left(x_1, x_2, x_3\right) = 0$, якщо для всіх точок поверхні G, розташованих поблизу M_0 (на відстані від M_0, яка не перебільшує деякої фіксованої величини $\varepsilon > 0$), має місце нерівність $f\left(M\right) \le f\left(M_0\right)$.

Визначення мінімуму аналогічне: знак $\le$ змінюється на $\ge$.

Умовні мінімуми і максимуми називають умовними екстремумами.

Δ **Приклад**. Знайти умовний екстремум функції $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ за умови $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Тут поверхня G є площиною і потрібно знайти на ній точку умовного екстремуму функції f. У такій простій задачі можна виразити, наприклад, x_3 через x_1 і x_2: $x_3 = 1 - x_1 - x_2$ і підставити у функцію $f = x_1^2 + x_2^2 + \left(1 - x_1 - x_2\right)^2$. Задача звелась до знаходження звичайного (безумовного) екстремуму функції двох змінних. Розв'яжемо її:

$$\begin{aligned} f'_{x_1} &= 2x_1 - 2\left(x_1 - x_2\right) = 0 \\ f'_{x_2} &= 2x_2 - 2\left(1 - x_1 - x_2\right) = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 \\ 3x_2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3} \\ x_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}; \qquad M\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

$$f''_{x_1 x_1} = 4 = A, \qquad f''_{x_1 x_2} = 2 = B, \qquad f''_{x_2 x_2} = 4 = C,$$

$AC - B^2 = 4 \cdot 4 - 2^2 = 12 > 0$ – екстремум є, $A = 4 > 0$ – це мінімум.

$f_{\min} = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{3}$. ▲

Очевидно, що таке просте і вичерпне розв'язання можливо не тільки тому, що кількість змінних мала ($n = 3$), але і тому що проста структура функції $g\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1 + x_2 + x_3 - 1$. У більш складних випадках виразити явно x_3 через x_1 і x_2 – непроста задача і звести відшукання умовного екстремуму до відшукання безумовного не вдається.

Більш загальний і ефективний метод відшукання умовного екстремуму – метод множників Лагранжа.

2.2 Метод Лагранжа відшукання умовних екстремумів функції двох змінних

Розглянемо спочатку випадок $n=2$, тобто будемо шукати екстремум функції $z=f(x,y)$ за умови $g(x,y)=0$.

У точці екстремуму $\frac{dz}{dx}=0$. Знайдемо $\frac{dz}{dx}$, пом'ятаючи про те, що y є функцією від x: $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$. Отже, у точці екстремуму

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0. \qquad (2.1)$$

З умови $g(x,y)=0$ випливає $\frac{dg}{dx}=\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$, звідси $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}$ і підставляємо цей вираз у вираз (2.1). Отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial x}}=\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial y}},$$ позначимо ці відношення буквою λ, тоді отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Таким чином, у точці екстремуму задовольняються три рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Ця система є необхідною умовою умовного екстремуму. Параметр λ відіграє допоміжну роль і називається множником Лагранжа.

Неважко бачити, що якщо ввести до розгляду функцію $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, то система буде мати вигляд

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}. \tag{2. 2}$$

Функція $L(x, y, \lambda)$ називається функцією Лагранжа. Далі потрібно дослідити отриманий розв’язок цієї системи на екстремум за допомогою достатніх умов умовного екстремуму. Нехай (x_0, y_0, λ_0) – будь-який розв’язок системи (2.2). Складемо визначник:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & g'_x(x_0, y_0, \lambda_0) & g'_y(x_0, y_0, \lambda_0) \\ g'_x(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ g'_y(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta < 0$, то функція $z = f(x, y)$ має в точці (x_0, y_0) умовний максимум, якщо $\Delta > 0$ – умовний мінімум.

У випадку функції трьох змінних $W = f(x_1, x_2, x_3)$ і $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ функція Лагранжа має вигляд $L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda g(x_1, x_2, x_3)$, система (2.2) набуває вигляду

$$\begin{cases} L'_{x_1}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0 \\ L'_{x_2}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0 \\ L'_{x_3}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0 \\ L'_{\lambda}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0 \end{cases}.$$

Достатні умови умовного екстремуму у випадку $n \geq 3$ достатньо складні і тут ми їх розглядати не будемо. Зауважимо лише, що у випадку, коли про існування екстремуму відомо наперед (наприклад, із геометричних міркувань), ця система дозволяє отримати повний розв'язок.

Δ Приклад. Застосуємо метод Лагранжа до розглянутого раніше прикладу: $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 1$; $L(x, y, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 1)$.

$L'_{x_1} = 2x_1 - \lambda$; $L'_{x_2} = 2x_2 - \lambda$; $L'_{\lambda} = x_1 + x_2 + x_3 - 1$ і система має вигляд

$$\begin{cases} 2x_1 = \lambda \\ 2x_2 = \lambda \\ 2x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3 = \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{3}.$$

Таким чином, умовний екстремум можливий в одній точці $M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Із геометричних міркувань зрозуміло, що $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ – квадрат довжини радіус-вектора змінної точки

(x_1, x_2, x_3) має на площині $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ найменше значення в основі перпендикуляра, що опущений із початку координат на площину (рисунок 1.3).

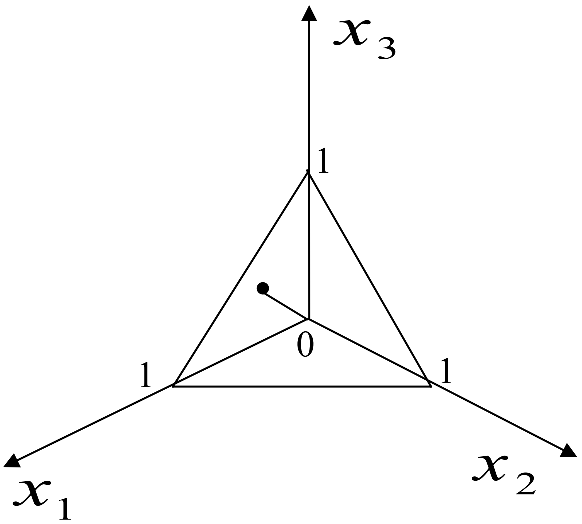


Рисунок 2.1

Тому знайдена точка M є точкою умовного мінімуму. ▲

2.3 Узагальнення методу Лагранжа на випадок n-змінних і m-обмежень

Розглянута задача може бути узагальнена у двох напрямках: по-перше, може бути розглянута функція n змінних $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ і, по-друге, замість однієї умови може бути завдана система обмежень

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}.$$

Тоді функція Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, ..., x_n) +$$

$+\lambda_2 g_2\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) + \cdots + \lambda_m g_m\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, або коротко $L = f + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k$.

Координати $x_1, x_2, ..., x_n$ точок, у яких можливий умовний екстремум, як і величини $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ (множники Лагранжа), можна знайти із системи $n+m$ рівнянь:

$$\begin{cases} L'_{x_1} = 0 \\ L'_{x_2} = 0 \\ \vdots \\ L'_{x_n} = 0 \\ L'_{\lambda_1} = 0 \\ \vdots \\ L'_{\lambda_m} = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f'_{x_1} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \left(g_k\right)'_{x_1} = 0 \\ f'_{x_2} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \left(g_k\right)'_{x_2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f'_{x_n} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \left(g_k\right)'_{x_n} = 0 \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m = 0 \end{cases}$$

3 ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

3.1 Задача математичного програмування

Підлягає знаходженню найбільше або найменше значення функції $W = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ в області (D) n-вимірного простору, завданої нерівностями

$$\begin{cases} g_1\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \le 0 \\ g_2\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \le 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \le 0 \end{cases}. \tag{3.1}$$

Нерівності нестрогі – це означає, що область (D) замкнена (до неї належать точки межі).

Наприклад, 1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1$ – область (D) – куля радіуса 1 з центром у початку координат разом зі сферою;
2) $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \le b$ – область (D) на півпростір у тривимірному просторі разом з площиною.

Задачі такого типу мають такий зміст.

Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ – параметри, які характеризують функціонування деякої системи, при цьому область (D) допустимих значень цих параметрів задається системою (3.1), а якість роботи системи тим вище, чим більше значення має величина $W = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, яка називається цільовою функцією.

Природно, ставиться задача про знаходження допустимого набора параметрів, який максимізує цільову функцію.

Вивчання подібних задач є предметом розділу прикладної математики, який називається математичним програмуванням.

Найбільш розроблений і дуже важливий на практиці той випадок, коли цільова функція f і обмеження (3.1) є лінійними відносно $x_1, x_2, ..., x_n$. Такі задачі належать до лінійного програмування.

3.2 Постановка загальної задачі лінійного програмування (ЗЛП)

Задача полягає в знаходженні найбільшого (найменшого) значення лінійної цільової функції $f = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$ в області $\left(D\right)$ n-вимірного простору, заданою системою нерівностей

$$\begin{array}{l} a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n \le b_i, \qquad i = 1, 2, ..., m \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0 \end{array} . \tag{3.2}$$

Нехай для наочності $n = 3$. Тоді кожна із лінійних нерівностей має вигляд: $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 \le b_i$ і визначає напівпростір з граничною площиною $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 = b_i$.

Перетин m півпросторів (вираз (3.2)) і трьох півпросторів $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$ утворює область (D) – багатогранник, гранями якого є ці площини.

Можна довести, що цей багатогранник є опуклим, тобто, якщо дві будь-які точки M_1 і M_2 належать області (D), то області (D) належить і увесь відрізок M_1M_2.

Все сказане є правильним і при будь-якому $n \geq 2$; при $n = 2$ область (D) є опуклим багатокутником; при $n > 3$ область (D) опуклий n-вимірний багатогранник.

Визначення. Багатогранник (багатокутник при $n = 2$) (D) називається областю допустимих розв'язків (ОДР) задачі лінійного програмування.

Δ Приклад. $n = 2$, (D): $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ -2x_1 - x_2 \leq -1. \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Побудуємо багатокутник (D) (рисунок 3.1).

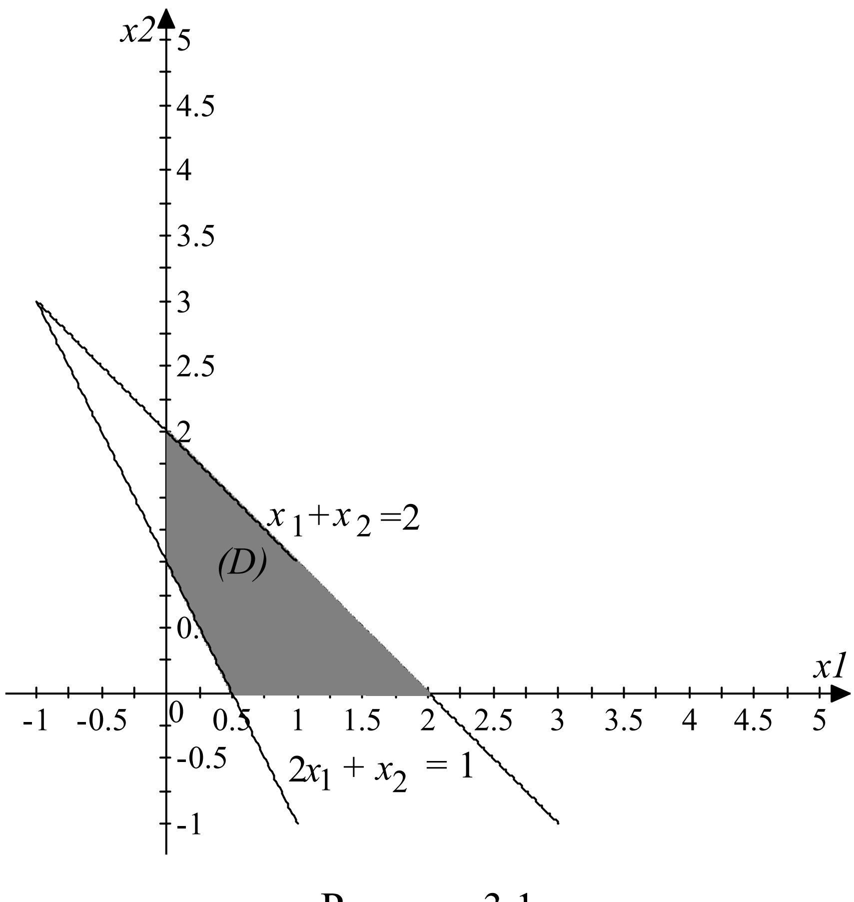


Рисунок 3.1

Якщо функція $f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має в деякій точці M_0 найбільше в (D) значення $f(M_0) \geq f(M)$ для будь-якої точки M із (D), то функція $-f(M) = -f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має в точці M_0 найменше в (D) значення $-f(M_0) \leq -f(M)$. Таким чином, задача на максимум цільової функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ може бути зведена до задачі на мінімум функції $-f(x_1, x_2, ..., x_n)$ і навпаки.

Визначення. Будь-який розв'язок системи лінійних обмежень (3.2) ЗЛП будемо називати *допустимим розв'язком* або *планом* ЗЛП. (Це будь – яка точка області (D).)

Визначення. Допустимий розв'язок ЗЛП, при якому цільова функція набуває шуканого максимуму (мінімуму), називається *оптимальним розв'язком* (*оптимальним планом*).

Основна теорема ЗЛП. Оптимальним планом завжди є кутова точка множини (D) допустимих розв'язків ЗЛП (вершина багатогранника).

Розв'язок ЗЛП, як випливає з теореми, полягає у відшуканні ''найкращої'' з вершин багатогранника (D), тобто в оптимізації функції f на дискретній, при тому скінченній, множині вершин багатогранника (D).

Звідси випливає, що методи класичного математичного аналізу для таких екстремальних задач (у тому числі і метод Лагранжа) не можуть бути використані, тому що в них для знаходження екстремуму користуються похідною у внутрішніх точках області розв'язків, а тут екстремум – у граничних точках.

Розв'язок ЗЛП можна отримати методом простого перебирання значень цільової функції у вершинах області (D) і вибору з них найбільшого (найменшого). Але при великій кількості змінних n це практично важко зробити.

Розглянемо два ефективних методи розв'язання ЗЛП: геометричний метод (ефективний при $n = 2$) і загальний метод послідовного поліпшення плану (симплексний метод).

3.3 Геометричний метод розв’язання ЗЛП

Розглянемо на прикладі.

Δ Приклад. Знайти максимум функції $z = 2x_1 + 5x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ 5x_1 - 2x_2 \le 10 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

1 Будуємо ОДР ЗЛП, тобто множину точок, координати яких задовольняють систему обмежень (*) (рисунок 3.2). Кожна нерівність (*) визначає на координатній площині x_1Ox_2 деяку півплощину, а система нерівностей (*), у випадку їх сумісності, – їх перетин. Це буде опукла множина. Будуємо спочатку на площині x_1Ox_2 відповідні обмеженням нерівностей граничні прямі:

$$2x_1 + 4x_2 = 4, \quad 5x_1 - 2x_2 = 10, \quad -3x_1 + 2x_2 = 12.$$

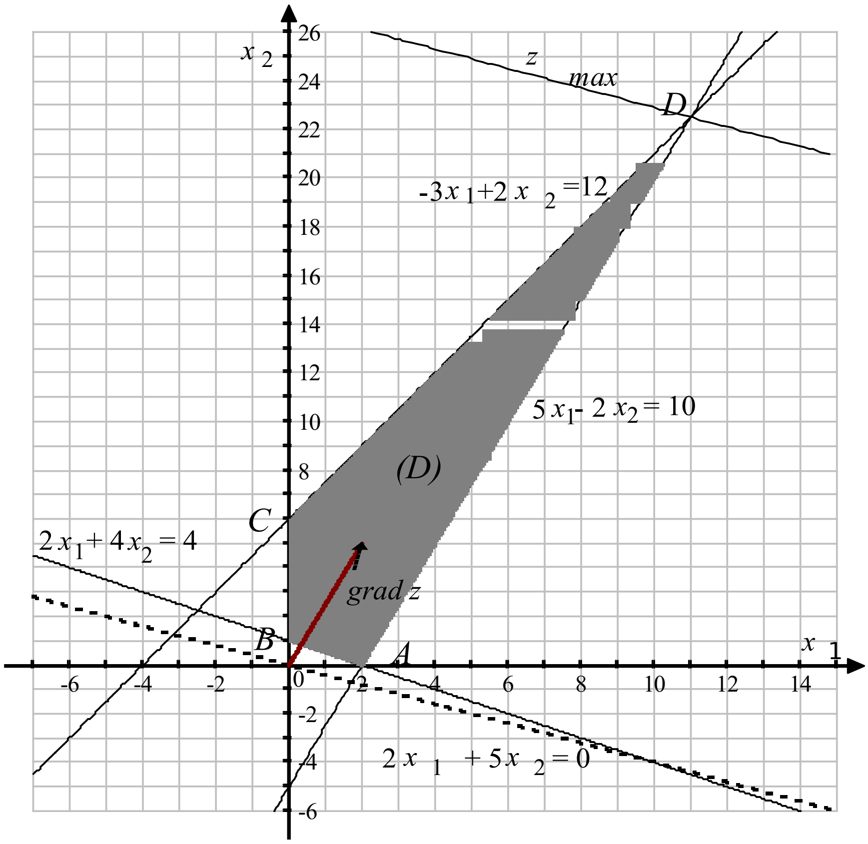


Рисунок 3.2

Знаходимо півплощини, у яких виконуються задані нерівності. Для цього внаслідок опуклості будь-якої півплощини достатньо взяти довільну точку, через яку не проходить відповідна гранична пряма, і перевірити, чи задовольняє ця точка обмеження-нерівності. Якщо задовольняє, то задана нерівність виконується в півплощині, у якій знаходиться пробна точка. В іншому випадку обираємо ту півплощину, у якій пробна точка не лежить. У якості пробної точки зручно брати початок координат. Наприклад, підставимо точку $(0,\ 0)$ у нерівність $2x_1+4x_2\geq 4$, отримаємо $0+0\geq 4$ неправильну числову нерівність, розв'язком нерівності $2x_1+4x_2\geq 4$ буде та півплощина, яка знаходиться вище прямої $2x_1+4x_2=4$ (тобто в якій не належить точка $(0,\ 0)$). Таким чином, отримуємо, що область допустимих розв'язків – чотирикутник $ABCD$ (область (D)).

2 Будуємо деяку лінію рівня цільової функції $z=2x_1+5x_2$ (тобто лінію, на якій z приймає стале значення, наприклад, $z=0$

). $2x_1+5x_2=0$ і вектор градієнта цільової функції $grad\, z\big|_{(0,0)}=\left\{z'_x, z'_y\right\}\Big|_{(0,0)}=\left\{2,\ 5\right\}$. Вектор $grad\, z\big|_{(0,0)}$ перпендикулярний до лінії рівня, що проходить через точку $(0,\ 0)$ і визначає напрям найбільшого зростання цільової функції ($-grad\, z\big|_{(0,0)}$ - напрям найбільшого спадання).

3 Пересуваючи побудовану лінію рівня паралельно самій собі в напрямку $grad\, z\big|_{(0,0)}$, будемо отримувати нові лінії рівня, для яких $2x_1+5x_2>0$, тобто значення цільової функції буде зростати.

4 Оскільки відомо, що максимальне значення функція z приймає в одній із вершин, то ясно, що найбільше значення буде у вершині D (це остання точка, що належить ОДР і значення z в ній найбільше, ніж в інших точках області (D)).

5 Знаходимо координати точки D, тобто розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases}5x_1-2x_2=10\\ -3x_1+2x_2=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x_1=22\\ 2x_2=5x_1-10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=11\\ x_2=\dfrac{45}{2}\end{cases}.$$

Таким чином, $D\left(11,\ \dfrac{45}{2}\right)$ і розв'язок ЗЛП має вигляд

$$z_{\max}=z\left(11,\ \frac{45}{2}\right)=2\cdot 11+5\cdot\frac{45}{2}=\frac{269}{2}=134.5.\ \blacktriangle$$

Зауваження. Залежно від вигляду ОДР можливі випадки:

1) ОДР – замкнений багатокутник і z досягає максимуму і мінімуму в одній із вершин (рисунок 3.3);

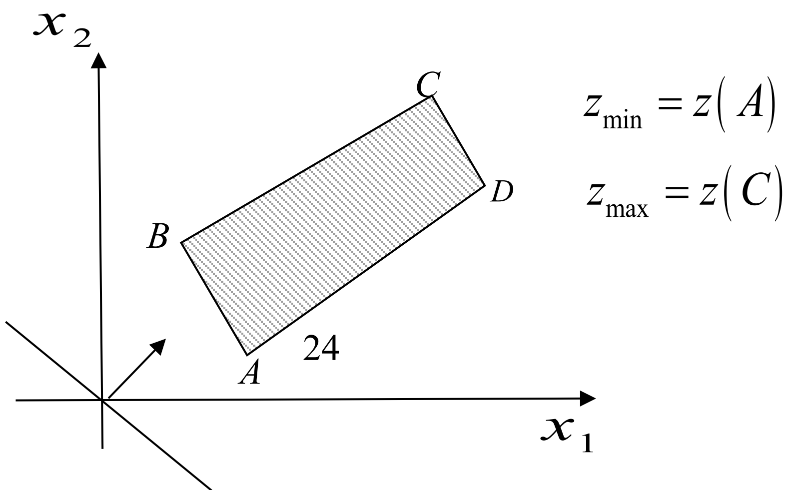
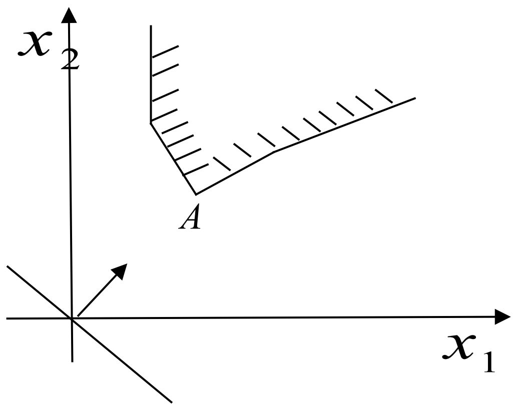


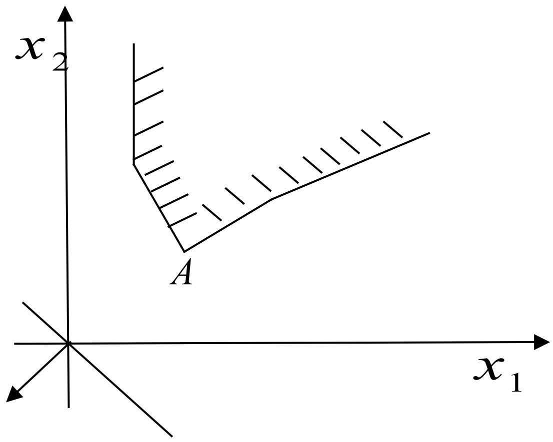
Рисунок 3.3

2) ОДР необмежена (рисунки 3.4, 3.5, 3.6)



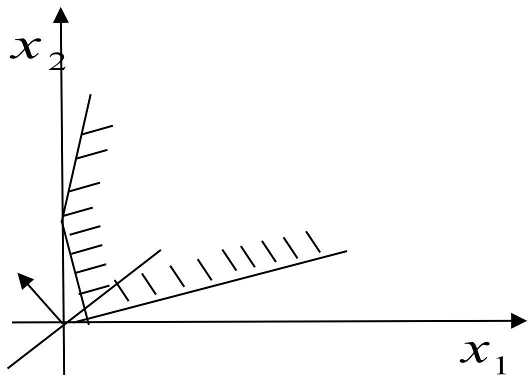
$z_{\min} = z(A) \, z_{\max} = \infty$

Рисунок 3.4



$z_{\max} = z(A) \quad z_{\min} = -\infty$

Рисунок 3.5



$z_{\max} = \infty \quad z_{\min} = -\infty$

Рисунок 3.6

3) ОДР має хоча б одну граничну лінію, яка паралельна лінії рівня (рисунок 3.7).

$z_{\min} = z(A) \quad z_{\max} = z(M)$, де M – будь-яка точка CD. ЗЛП на

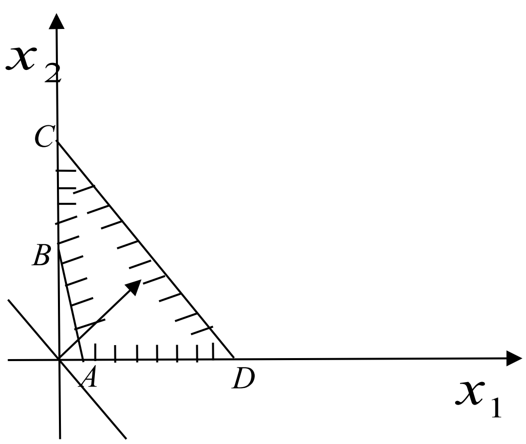


Рисунок 3.7

максимум має нескінчену кількість розв'язків (альтернативний оптимум);

4) ОДР є порожньою множиною (рисунок 3.8).

ЗЛП не має розв'язків.

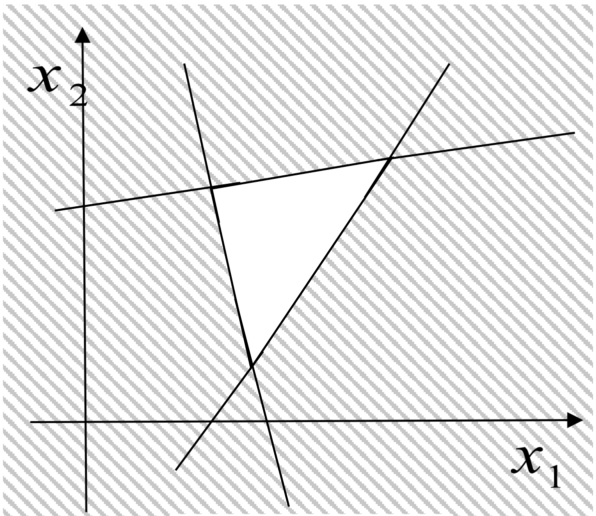


Рисунок 3.8

3.4 Жорданові перетворення

Нехай завдана система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + b_m \end{cases}$$

і нехай потрібно в цій системі поміняти місцями x_i та y_j, тобто розв'язати систему відносно x_i за рахунок y_j.

Звичайна процедура (вираження x_i через y_j з j-го рівняння і підстановка в усі інші) достатньо громіздка. Сформулюємо зручне правило, за допомогою якого цю процедуру легко здійснити.

Для простоти (не втрачаючи загальності) будемо розглядати систему трьох рівнянь з трьома невідомими x_1, x_2, x_3 і запишемо її в вигляді

$$\begin{cases} y_1 = a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + b_1 \\ y_2 = a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + b_2 \\ y_3 = a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 + b_3 \end{cases}. \qquad (3.3)$$

Складемо для цієї системи таблицю 3.1.

Таблиця 3.1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1	
y_1	a_1	b_1	c_1	d_1	
y_2	a_2	b_2	c_2	d_2	
y_3	a_3	b_3	c_3	d_3	←Ведучий рядок
		↑ Ведучий стовпчи к			

Поміняємо місцями x_2 і y_3. Коефіцієнт b_3 розташований на перетині рядка y_3 і стовпця x_2, назвемо його „ведучим”.

Із третього рівняння знаходимо x_2:

$$x_2 = \frac{a_3}{b_3}\left(-x_1\right) + \frac{1}{b_3}\left(-y_3\right) + \frac{c_3}{b_3}\left(-x_3\right) + \frac{d_3}{b_3}$$

і підставляємо в перше і друге рівняння замість x_2. Отримаємо

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{a_1b_3 - a_3b_1}{b_3}\left(-x_1\right) + \left(-\dfrac{b_1}{b_3}\right)\left(-y_3\right) + \dfrac{c_1b_3 - c_3b_1}{b_3}\left(-x_3\right) + \dfrac{d_1b_3 - d_3b_1}{b_3} \\ y_2 = \dfrac{a_2b_3 - a_3b_2}{b_3}\left(-x_1\right) + \left(-\dfrac{b_2}{b_3}\right)\left(-y_3\right) + \dfrac{c_2b_3 - c_3b_2}{b_3}\left(-x_3\right) + \dfrac{d_2b_3 - d_3b_2}{b_3} \\ x_2 = \dfrac{a_3}{b_3}\left(-x_1\right) + \dfrac{1}{b_3}\left(-y_3\right) + \dfrac{c_3}{b_3}\left(-x_3\right) + \dfrac{d_3}{b_3} \end{cases}$$

Складемо нову таблицю для коефіцієнтів нової системи, яка еквівалентна системі (3.1).

Таблиця 3. 2

	$-x_1$	$-y_3$	$-x_3$	1
y_1	$\dfrac{a_1b_3 - a_3b_1}{b_3}$	$-\dfrac{b_1}{b_3}$	$\dfrac{c_1b_3 - c_3b_1}{b_3}$	$\dfrac{d_1b_3 - d_3b_1}{b_3}$
y_2	$\dfrac{a_2b_3 - a_3b_2}{b_3}$	$-\dfrac{b_2}{b_3}$	$\dfrac{c_2b_3 - c_3b_2}{b_3}$	$\dfrac{d_2b_3 - d_3b_2}{b_3}$
x_2	$\dfrac{a_3}{b_3}$	$\dfrac{1}{b_3}$	$\dfrac{c_3}{b_3}$	$\dfrac{d_3}{b_3}$

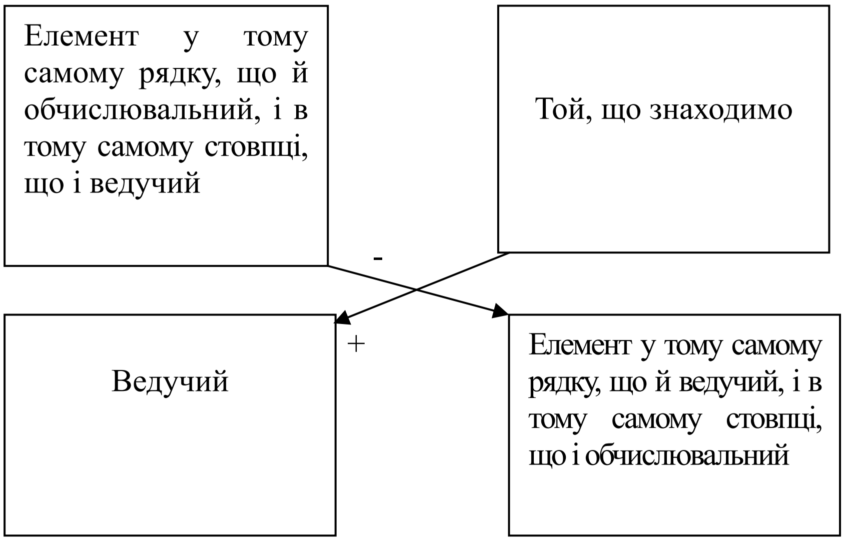
Порівнюючи коефіцієнти таблиці 3.1 з коефіцієнтами таблиці 3.2, сформулюємо правило переходу від таблиці 3.1 до таблиці 3.2.

Розглянемо спочатку чисельники:

1 Елементи ведучого рядка зберігають величину і знак, тільки ведучий елемент замінюється на одиницю.

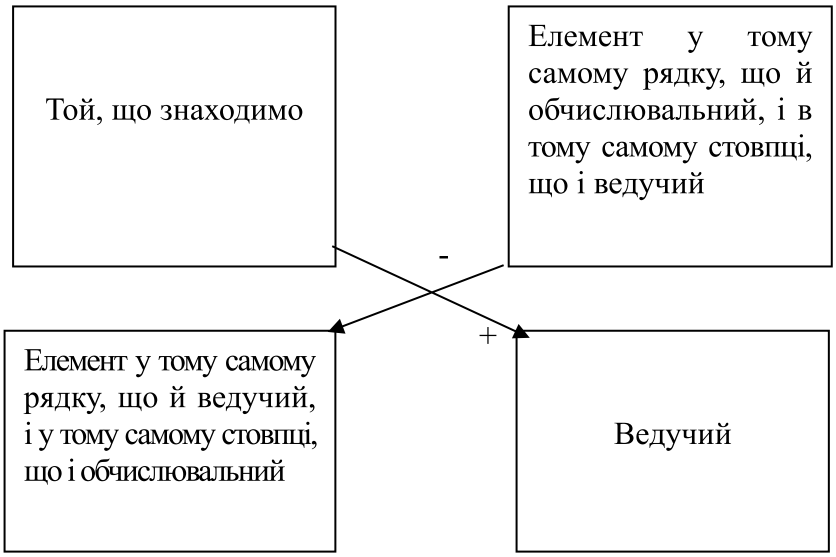
2 Елементи ведучого стовпця змінюють тільки знаки.

3 Всі інші елементи обчислюються за правилом обчислення визначників другого порядку (при цьому обчислення завжди починається з ведучого елемента).



$$\Rightarrow c_1^{'} = c_1 b_3 - b_1 c_3$$

Або



$$\Rightarrow a_2^{'} = a_2 b_3 - b_2 a_3$$

4 Всі елементи нової таблиці діляться на ведучий елемент.

Сформульоване правило називається жордановими перетвореннями.

Δ Приклад. У системі рівнянь поміняти місцями x_1 і y_2.

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 6x_2 + 1 \\ y_2 = -2x_1 - 3x_2 - 7 \end{cases}.$$

Складаємо таблицю.

	$-x_1$	$-x_2$	1
y_1	-5	-6	1
y_2	2	3	-7

Складаємо таблицю.

	$-y_2$	$-x_2$	1
y_1	-5/2	$\frac{-6\cdot 2 - 3\cdot(-5)}{2}$	$\frac{1\cdot 2 - (-5)\cdot(-7)}{2}$
x_1	1/2	3/2	-7/2

Тобто

	$-y_2$	$-x_2$	1
y_1	-5/2	3/2	-33/2
x_1	1/2	3/2	-7/2

Таким чином, нова система, еквівалентна заданій, має вигляд

$$\begin{cases} y_1 = \frac{5}{2}(-y_2) + \frac{3}{2}(-x_2) - \frac{33}{2} \\ x_1 = \frac{1}{2}(-y_2) + \frac{3}{2}(-x_2) - \frac{7}{2} \end{cases} \blacktriangle$$

3.5 Зведення ЗЛП до канонічного вигляду

Вважається, що ЗЛП записана в канонічній формі, якщо вона має вигляд: $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \min$ при

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0, \ \ j = 1,...,n \end{cases} \tag{3.4}$$

де a_{ij}, b_i, c_j – відомі сталі, $i = 1,...,m$.

Будь-яку ЗЛП можна привести до канонічного вигляду:

— якщо в задачі треба знайти максимум z, то вона зводиться до задачі на мінімум $-z$;

— якщо всі (або частина) обмежень мають вигляд нерівностей $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$, то в лівих частинах нерівностей потрібно додати невід'ємну додаткову змінну x_{n+k}, після чого отримаємо рівняння вигляду $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n + x_{n+k} = b_k$ або $x_{n+k} = -a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 - \cdots - a_{kn}x_n + b_k$;

— якщо нерівності мають вигляд $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$, то в лівих частинах нерівностей невід'ємну додаткову змінну потрібно відняти, отримаємо $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n - x_{n+k} = b_k$ або $x_{n+k} = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n - b_k$.

При цьому додаткові змінні входять до цільової функції з нульовими коефіцієнтами.

Δ Приклад. Звести до канонічного вигляду ЗЛП $z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 \to \min$, при

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \le 9 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \ge 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}.$$

Введемо додаткові невід'ємні змінні $x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0$ і систему обмежень запишемо у вигляді

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 9 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_6 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{cases}. \ \blacktriangle$$

Розглянемо систему (3.4) обмежень ЗЛП в канонічному вигляді, тобто систему m лінійних рівнянь з n невідомими.

Визначення. Будь-які m невідомих систем $(m < n)$ називаються базисними, якщо визначник матриці їх коефіцієнтів не дорівнює нулю. Інші $n-m$ невідомих називаються *вільними*. Система (3.4) може мати кілька різних базисів (не більше, ніж C_n^m).

Δ Приклад. Система рівнянь $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$, $n = 4,\ m = 2$. Усі визначники 2-го порядку, які можна скласти з матриці коефіцієнтів $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, відрізняються від нуля і тому будь-які дві зі змінних x_1, x_2, x_3, x_4 утворюють базис. Нижче перераховані всі $C_4^2 = 6$ базисів: (x_1, x_2); (x_1, x_3); (x_1, x_4); (x_2, x_3); (x_2, x_4); (x_3, x_4). Якщо в якості базису вибирати x_1, x_2, то x_3, x_4 - вільні, якщо базис x_1, x_3, то x_2, x_4 – вільні і т. ін. ▲

Серед планів (допустимих розв'язків) ЗЛП особливу роль відіграють *опорні плани* (базисні допустимі розв'язки), які отримують так: обирають будь-який базис задачі, покладають вільні змінні рівними нулю і з системи (3.4) знаходять базисні змінні; якщо знайдені значення базисних змінних невід'ємні (допустимі розв'язки), то отриманий набір значень $x_1, x_2, ..., x_n$ утворює план, який називають опорним.

У розглянутому прикладі опорний план можна отримати, якщо взяти в якості базису змінні x_1 і x_2. Поклавши вільні $x_3 = x_4 = 0$, знаходимо з системи $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7}{5} > 0 \\ x_2 = \frac{1}{3} > 0 \end{cases}$ і остаточно $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{3}, 0, 0\right)$ – опорний план задачі. Якщо в якості базису взяти x_3, x_4 і покласти $x_1 = x_2 = 0$, отримаємо $x_3 = -2 < 0, x_4 = 1 > 0$ і, оскільки $x_3 < 0$, розв'язок $(0, 0, -2, 1)$ не буде опорним планом. Таким чином, не будь-який базис породжує опорний план.

Для вираження базисних змінних через вільні при заміні базису і служать жорданові перетворення.

Геометрично кожний опорний план визначає одну з вершин багатокутника допустимих розв'язків (D) і, навпаки, кожній вершині області (D) відповідає один з опорних планів. Оптимальний план – серед опорних планів задачі (серед вершин багатокутника (D))!

3.6 Симплексний метод розв'язання ЗЛП (СМ)

СМ – універсальний аналітичний метод, яким можна розв'язати будь-яку ЗЛП. Ідея методу полягає в наступному. Використовуючи систему обмежень, приведену до канонічного вигляду (тобто систему рівнянь), знаходять будь-який її базисний розв'язок. Якщо цей розв'язок допустимий (опорний план), його перевіряють на оптимальність. Якщо він не оптимальний, переходять до іншого опорного плану. СМ гарантує, що при новому розв'язку цільова функція, якщо не досягне оптимуму, то принаймні наблизиться до нього. Продовжують такі дії, поки не досягнуть оптимуму.

Якщо початковий базисний розв'язок не є допустимим (не є опорним планом), то за допомогою СМ переходять до іншого базисного розв'язку, який наближається до ОДР, поки на якомусь кроці не отримають допустимий базисний розв'язок. Після чого здійснюють попередній механізм СМ.

Таким чином, СМ складається з двох етапів:

1) знаходження допустимого базисного розв'язку системи обмежень;

2) знаходження оптимального розв'язку. При цьому кожний етап може містити декілька кроків, що відповідають тому чи іншому базисному розв'язку. Оскільки кількість базисних розв'язків скінчена, то і обмежена кількість кроків СМ.

I етап: знаходження допустимого базисного розв'язку (опорного плану)

Якщо базисний розв'язок не є допустимим (ознака цього – наявність від'ємних елементів у стовпці вільних коефіцієнтів симплекс-таблиці, які відповідають значенням базисних змінних), тоді:

1 – й крок: обираємо ведучий елемент:

а) у рядку з від'ємним вільним коефіцієнтом обираємо від'ємний коефіцієнт при вільних змінних – він обирає ведучий стовпець;

б) складаємо невід'ємні відношення елементів останнього стовпця таблиці до відповідних елементів ведучого стовпця і обираємо з них найменше – це визначає ведучий рядок;

2- й крок: виконуємо жорданові перетворення з обраним ведучим елементом.

Повторюємо кроки алгоритму, доки в стовпці вільних коефіцієнтів є від'ємні числа.

Δ Приклад. Знайти допустимий базисний розв'язок (опорний план) ЗЛП: $z = x_1 - 2x_2 \to \max$, при

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_2 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Запишемо систему обмежень у канонічному вигляді:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -x_1 + x_2 - 1 \\ x_4 = x_2 - 2 \end{cases}.$$

Складемо симплекс-таблицю

	$-x_1$	$-x_2$	1	
x_3	1	-1	-1	$\rightarrow$
x_4	0	-1	-2	
z	-1	2	0	
		$\uparrow$		

Обидва вільні коефіцієнти від'ємні $-1;\ -2$, тобто базис не є допустимим. Розглянемо, наприклад, перший рядок і виберемо в ньому від'ємний коефіцієнт при x_2, тобто стовпець x_2 буде ведучим. Знайдемо $\min\left\{\frac{-1}{-1}, \frac{-2}{-1}\right\} = \min\{1, 2\} = 1$, тобто рядок x_3 буде ведучим. Виконаємо жорданові перетворення з ведучим елементом, отримаємо таку таблицю:

	$-x_1$	$-x_3$	1	
x_2	-1	-1	1	
x_4	-1	-1	-1	$\rightarrow$
z	1	2	-2	
	$\uparrow$			

У стовпці вільних коефіцієнтів ще залишився від'ємний коефіцієнт (-1). Розглянемо рядок x_4 і виберемо від'ємний коефіцієнт, наприклад, при x_1, тобто стовпець x_1 – ведучий. Знайдемо $\min\left\{\frac{-1}{-1}\right\}=1$, тобто рядок x_4 – ведучий. Виконаємо жорданові перетворенняя

	$-x_4$	$-x_3$	1
x_2	-1	0	2
x_1	-1	1	1
z	1	1	-3

Тепер у стовпці вільних коефіцієнтів усі коефіцієнти додатні: 2, 1. Це означає, що ми отримали допустимий базисний розв'язок (опорний план) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 0$ і далі переходимо до алгоритму СМ. ▲

II етап: знаходження оптимального розв'язку

Почнемо з прикладу.

Δ Приклад. ЗЛП в канонічному вигляді $z = -x_1 + x_2 \to \min$, при

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0, i = 1,..,5 \end{cases}.$$

У якості базису виберемо змінні x_3, x_4, x_5 і виразимо їх через вільні змінні x_1 і x_2:

$$\begin{cases} x_3 = x_1 + 3x_2 + 2 \\ x_4 = -2x_1 - 3x_2 + 7 \\ x_5 = -x_1 - x_2 + 2 \end{cases}.$$

Оскільки $x_i \geq 0$, то найменшими x_1 і x_2 будуть $x_1 = x_2 = 0$, при цьому $x_3 = 2, x_4 = 7, x_5 = 2$ – цей розв'язок є базисним і допустимим (опорний план), при цьому $z = 0$. Чи можна за рахунок x_1 і x_2 зменшити z? Так, якщо збільшити x_1, оскільки він входить у z із знаком „-". Збільшення x_2 призведе до збільшення z, оскільки перед x_2 знак „+", тому залишимо $x_2 = 0$. Необмежено збільшувати x_1 неможна, бо розв'язок припиняє бути допустимим. Якщо урахувати умову невід'ємності змінних і $x_2 = 0$, отримаємо

$$\begin{cases} x_3 = x_1 + 3x_2 + 2 \\ x_4 = -2x_1 - 3x_2 + 7 \\ x_5 = -x_1 - x_2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2 \geq 0 \\ -2x_1 + 7 \geq 0 \\ -x_1 + 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \geq -2 \\ x_1 \leq \dfrac{7}{2} \\ x_1 \leq 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 \leq 2.$$

Тобто найбільше можливе $x_1 = 2$, при цьому $x_5 = 0$. Це означає що x_5 стає вільною змінною, а x_2 – базисною. Отримаємо новий допустимий базисний розв'язок $x_2 = x_5 = 0$, $x_1 = 2, x_3 = 4, x_4 = 3$, значення z при цьому розв'язку $z = -2$ – зменшилось. Знайдемо, як виглядає z через змінні x_2 і x_5, для цього $x_1 = -x_2 - x_5 + 2$ (з третього рівняння) підставимо в z: $z = -\left(-x_2 - x_5 + 2\right) + x_2 = 2x_2 + x_5 - 2$. Оскільки обидві змінні зі знаком „+", ще зменшити z неможливо, тобто ми отримали розв'язок: $z_{\min} = z\left(2, 0\right) = -2$. ▲

Розглянуті дії (перехід від одного базисного розв'язку до іншого) можна подати як таблицю за допомогою жорданових перетворень.

	$-x_1$	$-x_2$	1
x_3	-1	-3	2
x_4	2	3	7
x_5	1	1	2
z	1	-1	0

$\rightarrow$

	$-x_5$	$-x_2$	1
x_3	1	-2	4
x_4	-2	1	3
x_1	1	1	2
z	-1	-2	-2

Правила вибору ведучого елемента (тобто змінних, які переходять із вільних у базисні і навпаки) можна сформулювати у вигляді алгоритму СМ.

III етап: знаходження оптимального розв'язку

Якщо отриманий після I етапу опорний план не є оптимальним (критерій оптимальності: у рядку z коефіцієнти при вільних змінних недодатні), тоді:

1-й крок – вибираємо ведучий елемент:

а) у рядку z вибираємо найбільший додатний коефіцієнт при вільних невідомих – це визначає ведучий стовпець;

б) складаємо невід'ємні відношення (симплексні відношення (СВ)) елементів останнього стовпця до відповідних елементів ведучого стовпця і обираємо найменше – це визначає ведучий рядок;

2-й крок – виконуємо жорданові перетворення з обраним ведучим елементом.

Повторюємо кроки 1 і 2, поки критерій оптимальності буде виконаний.

Зауваження. Якщо задача на максимум, то критерій оптимальності: у рядку z коефіцієнти при невідомих невід'ємні і при виборі ведучого стовпця в рядку z обирають найбільший за модулем від'ємний елемент.

Δ Приклад. Розв'язати СМ ЗЛП: $\max z = 2x_1 + 5x_2$, при

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 10 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Перепишемо обмеження в канонічному вигляді і складемо симплекс-таблицю.

$$\begin{cases} x_3 = 2x_1 + 4x_2 - 4 \\ x_4 = -5x_1 + 2x_2 + 10 \\ x_5 = 3x_1 - 2x_2 + 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

	$-x_1$	$-x_2$	1
x_3	-2	-4	-4
x_4	5	-2	10
x_5	-3	2	12
z	-2	-5	0

Базисний розв'язок $x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = x_4 = 0,\ x_5 = 12$ не є допустимим $x_3 = -4 < 0$, тому:

I етап. Ведучий стовпець x_2, $\min\left\{\frac{-4}{-4}, \frac{12}{2}\right\} = \min\{1,\ 6\} = 1$, тому ведучий елемент „$-4$"; міняємо місцями x_2 і x_3 за допомогою жорданових перетворень.

	$-x_1$	$-x_3$	1
x_2	1/2	-1/4	1
x_4	6	-1/2	12
x_5	-4	1/2	10
z	1/2	-5/4	5

Всі вільні коефіцієнти в останньому стовпці додатні, тому отримали допустимий базисний розв'язок (опорний план) і переходимо до II етапу.

II етап. Отриманий розв'язок не є оптимальним, оскільки $-\dfrac{5}{4} < 0$, тому ведучий стовпець x_3, знаходимо $\min\left\{\cancel{\dfrac{1}{-1/4}}, \cancel{\dfrac{12}{-1/2}}, \dfrac{10}{1/2}\right\} = 20$, тобто ведучий елемент $\dfrac{1}{2}$ і за допомогою жорданових перетворень міняємо місцями x_3 і x_5, отримаємо:

	$-x_1$	$-x_5$	1
x_2	-3/2	1/2	6
x_4	2	1	22
x_3	-8	2	20
z	-19/2	5/2	30

Ще раз поліпшуємо план, оскільки $-\dfrac{19}{2} < 0$ ведучий стовпець x_1, знаходимо $\min\left\{\dfrac{22}{2}\right\} = 11$ і ведучий елемент „2”, міняємо місцями x_1 і x_4.

	$-x_4$	$-x_5$	1
x_2	3/4	5/4	45/2
x_1	1/2	1/2	11
x_3	4	6	108
z	19/4	29/4	269/2

Отриманий план оптимальний $x_1 = 11,\ x_2 = \dfrac{45}{2},\ x_3 = 108,$

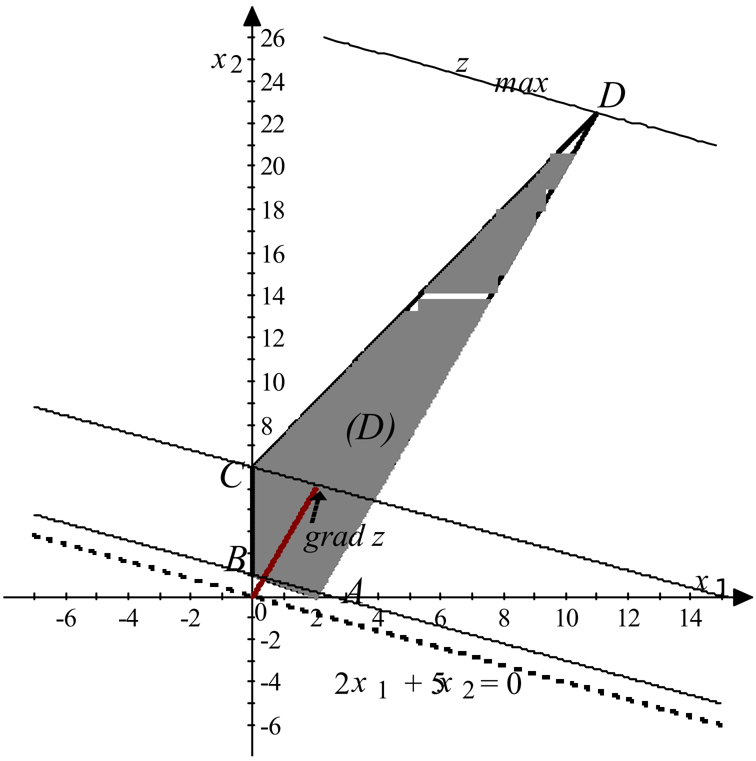
$x_4 = 0,\ x_5 = 0,$

$$z = -\frac{19}{4}x_4 - \frac{29}{4}x_5 + \frac{262}{2}.$$

Таким чином, $z_{max} = z\left(11, \dfrac{45}{2}\right) = \dfrac{269}{2} = 134.5$ (цю задачу ми розв'язували геометричним методом в 3.3).▲

Прокоментуємо симплекс-таблицю та геометричний розв’язок.

З рисунка 3.10 бачимо, що перший базисний розв’язок $x_1 = x_2 = 0$ відповідає початку координат, тобто не належить ОДР, другий базисний розв’язок: $x_1 = 0, x_2 = 1$ на рисунку відповідає точці B, третій $x_1 = 0, x_2 = 6$ відповідає точці C і нарешті четвертий $x_1 = 11,\ x_2 = \frac{45}{2}$ відповідає точці D.



Зауваження. Якщо не існує невід’ємних елементів у вибраному ведучому стовпці, то ЗЛП не має оптимального розв’язку (ОДР і цільова функція на ній необмежені).

3.7 Транспортна задача

Класична транспортна задача – це задача про найдешевший план перевезень однорідного вантажу з пунктів виготовлення до пунктів споживання. Розглянемо транспортну задачу за критерієм вартості.

Нехай на m станціях $A_1, A_2, ..., A_m$ зосереджено $a_1, a_2, ..., a_m$ одиниць деякого однорідного вантажу. Його потрібно перевезти в

n пунктів призначення $B_1, B_2, ..., B_n$, при тому в кожний з них потрібно завезти $b_1, b_2, ..., b_n$ одиниць вантажу. Вартість перевезення одиниці вантажу із A_i в B_j (тариф) дорівнює c_{ij} і вважається відомою. Потрібно скласти план перевезень так, щоб його загальна вартість була мінімальною.

Якщо загальний запас вантажу на всіх станціях дорівнює загальній сумі потреб всіх пунктів призначення, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, таку задачу називають закритою ТЗ. Позначимо x_{ij} – кількість вантажу, що перевозиться із A_i в B_j, і розглянемо закриту ТЗ. Запишемо задачу в вигляді таблиці 3.3.

Таблиця 3.3

Постачальник	споживачі				Запас вантажу
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	….	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреба у вантажі	b_1	b_2		b_n	

Кількість вантажу, вивезеного із 1, 2, ..., m-го пунктів виготовлення, задовольняє умови:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = a_m \end{cases}, \text{ або } \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Кількість вантажу, привезеного в 1, 2, ..., m-й пункт призначення, задовольняє умови:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = b_m \end{cases}, \text{ або } \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Загальна вартість всіх перевезень виражається функцією $z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$. Математична модель задачі: знайти $\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$, при обмеженнях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1, 2, ..., m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, ..., n \end{cases}, \quad x_{ij} \geq 0.$$

Таким чином, ТЗ – це ЗЛП, і її можна розв'язати симплекс методом, але в силу того, що обмеження прості, задача спрощується.

Методи знаходження початкового опорного плану

Розглянемо два методи: метод північно – західного кута (діагональний) і метод найменшої вартості.

Метод північно – західного кута. Заповнення таблиці починається з лівої верхньої клітинки. Розглянемо на прикладі

Δ Приклад. Скласти початковий опорний план.

Постачальник	споживачі				Запас вантажу
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	2	4	65
A_2	2	4	6	5	80
A_3	1	5	4	5	105
Потреба у вантажі	45	60	80	65	

Далі для зручності будемо записувати таблицю в скороченій формі.

b_j / a_i	45	60	80	65
65	2	3	2	4
80	2	4	6	5
105	1	5	4	5

У першого постачальника 65 одиниць вантажу, а першому споживачу потрібно 45 одиниць. Тому в першу клітинку пишемо поставку $45 = \min\{45; 65\} = 45$. Більше першому споживачу не потрібно, тому клітинки першого стовпця, що залишилися, закреслюємо. Продовжуємо, у верхню ліву клітинку отриманої таблиці пишемо залишок першого постачальника: 20=65-45, і клітинки першого рядка, що залишилися, закреслюємо (у першого постачальника більше немає вантажу). Знову у верхню ліву клітинку пишемо 40, тому що другому споживачу потрібно 60, але 20 вже є і т. ін.

b_j / a_i	45	60	80	65
65	2 **45**	3 **20**	2	4
80	2	4 **40**	6 **40**	5
105	1	5	4 **40**	5 **65**

Завжди слідкуємо щоб сума цифр у заповнених клітинках по рядках дорівнювала запасу вантажу a_i, а сума цифр по стовпцях дорівнювала потребі b_j.

Заповнені клітинки будемо називати *базисними*, а закреслені – *вільними*. Кількість базисних клітинок завжди визначається як $r = m + n - 1$. Якщо заповнених клітинок менше, то отримаємо *вироджений опорний план*. У цьому випадку необхідну кількість клітинок потрібно заповнити нульовими поставками.

Отже, опорний план, знайдений за методом північно-західного кута, має вигляд

$$X^0 = \begin{pmatrix} 45 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 65 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо вартість перевезень: $z = 45 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 4 +$ $= 90 + 60 + 160 + 240 + 160 + 235 = 1035$.

Метод найменшої вартості відрізняється від розглянутого лише послідовністю заповнення клітинок. Починають заповнювати ті клітинки, у яких вартість перевезень c_{ij} найменша.

У розглянутому прикладі найменша вартість $c_{31} = 1$, тому цю клітинку заповнюємо першою. Серед тих, що залишились, найменша вартість $c_{13} = 2$, заповнюємо її. Далі клітинку, де поставка $c_{22} = c_{33} = 4$, заповнюємо ту клітинку, де поставка більша: у c_{22} поставка 60, у c_{33} поставка 15, тому заповнюємо c_{22}. Наступна c_{33}. З двох, що залишилися, обираємо c_{34}, оскільки $x_{34} = 45 > x_{24} = 20$.

b_j / a_i	45	60	80	65
65	2	3	2 **65**	4
80	2	4 **60**	6	5 **20**
105	1 **45**	5	4 **15**	5 **45**

Отже, опорний план за методом найменшої вартості має вигляд

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 65 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 20 \\ 45 & 0 & 15 & 45 \end{pmatrix}.$$

Вартість перевезень при такому плані складає: $z = 65 \cdot 2 + 60 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 45 \cdot 1 + 15 \cdot 4 + 45 \cdot 5 = 130 + 240 + 100 + 45 + 60 + 225 = 800$. $800 < 1035$, тому цей план ближче до оптимального і цей метод будемо використовувати надалі (метод північно-західного кута в основному використовують при розрахунках на ЕОМ).

Метод потенціалів – найбільш зручний метод для перевірки оптимальності початкового опорного плану. Він заснований на теоремі.

Теорема. Щоб опорний план був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

— для базисних клітинок $u_i + v_j = c_{ij}$, де u_i і v_j – потенціали A_i і B_j відповідно ($i = 1,...,m$; $j = 1,...,n$);

— для вільних клітинок $u_i + v_j \le c_{ij}$.

Таким чином, потенціали – це числа, які задовольняють систему лінійних рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, для невиродженої задачі потенціалів $m+n$, а рівнянь $m+n-1$. Така система має безліч розв'язків, але якщо один з потенціалів зафіксувати, всі інші можна знайти з системи однозначно. Потім для знайдених потенціалів перевіряються умови $u_i + v_j \le c_{ij}$ і, якщо вони виконані, – план оптимальний.

Розглянемо приклад. Початковий опорний план отриманий методом найменшої вартості.

a_i \ b_j	45 $v_1 = 1$	60 $v_2 = 4$	80 $v_3 = 4$	65 $v_4 = 5$
65 $u_1 = -2$	2	3	2 **65**	4
80 $u_2 = 0$	2	4 **60**	6	5 **20**
105 $u_3 = 0$	1 **45**	5	4 **15**	5 **45**

Кількість невідомих сім: $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4$. Кількість базисних клітинок – шість. $r = 3 + 4 - 1 = 6$ – задача невироджена. Запишемо рівняння для заповнених (базисних) клітинок: $u_1 + v_3 = 2$,

$$u_2 + v_2 = 4, \quad u_2 + v_4 = 5, \quad u_3 + v_1 = 1, \quad u_3 + v_3 = 4, \quad u_3 + v_4 = 5.$$

Поклавши, наприклад, $u_3 = 0$, знаходимо: $v_1 = 1$, $v_3 = 4$, $v_4 = 5$, $u_1 = 2 - v_3 = 2 - 4 = -2$, $u_2 = 5 - v_4 = 5 - 5 = 0$, $v_2 = 4 - u_2 = 4$. Перевіряємо умови оптимальності для вільних клітинок:

$u_1+v_1=-2+1<2$ – виконано, $u_1+v_2=-2+4<3$ – виконано, $u_1+v_4=-2+5<4$ – виконано, $u_2+v_1=0+1<2$ – виконано, $u_2+v_3=0+4<6$ – виконано, $u_3+v_2=0+4<5$ – виконано. Умови оптимальності виконані, опорний план виявився оптимальним $z_{\min}=800$.

Якщо умови оптимальності не виконані, потрібно поліпшити план, наприклад, за допомогою циклів перерахунку.

Цикл перерахунку

Визначення. Цикл ТЗ – це замкнена ламана, яка задовольняє умови:

1 Ламана розпочинається і закінчується у вільній клітинці, у якій не виконується умова оптимальності. (Якщо таких кілька, вибирають ту, де найбільша різниця $\left|u_i+v_j-c_{ij}\right|$.)

2 Ланки ламаної повертають тільки під прямим кутом.

3 Поворот може бути тільки в базисній клітинці.

Перерахунок по циклу:

1 Вільній клітинці циклу надають знак „+”.

2 При повороті знак змінюється.

3 Серед клітинок зі знаком „-” обирають найменше значення поставки θ.

4 Із поставок у клітинках з „-” віднімають θ одиниць вантажу, а до поставок зі знаком „+” додають θ.

Отриманий план перевіряють на оптимальність і, якщо потрібно, роблять перерахунок по циклу знову.

Δ Приклад. Розв’язати транспортну задачу, задану таблицею.

a_i \ b_j	16	14	10
17	2	1	3
11	4	2	4
12	1	3	5

$\sum_{i=1}^{3} a_i = 17 + 11 + 12 = 40 = \sum_{j=1}^{3} b_j = 16 + 14 + 10$ – отже задача закритого типу.

Складемо початковий опорний план за методом найменшої вартості.

b_j / a_i	16 $v_1 = 2$	14 $v_2 = 1$	10 $v_3 = 2$
17 $u_1 = 0$	2 **3**	1 **14**	3
11 $u_2 = 2$	4 **1**	2	4 **10**
12 $u_3 = -1$	1 **12**	3	5

Вартість перевезень при такому плані складає $z = 6 + 14 + 4 + 40 + 12 = 76$. Перевіримо план на оптимальність. Запишемо систему рівнянь для базисних клітин:

$$u_1 + v_1 = 2,\ u_2 + v_1 = 4,\quad u_3 + v_1 = 1.$$
$$u_1 + v_2 = 1,\ u_2 + v_3 = 4,$$

Знайдемо потенціали.

$$u_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2,$$
$$v_2 = 1,$$
$$u_2 = 4 - v_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad v_3 = 4 - u_2 = 2,$$
$$u_3 = 1 - v_1 = -1.$$

Перевіримо умови оптимальності для вільних клітинок: $u_1 + v_3 = 0 + 2 < 3$ – виконано; $u_2 + v_2 = 2 + 1 = 3 > 2$ – не виконано; $u_3 + v_2 = -1 + 1 = 0 < 3$ – виконано; $u_3 + v_3 = -1 + 2 = 1 < 5$ – виконано. З клітинки, для якої не виконана умова оптимальності (2, 2), починається цикл.

b_j / a_i	16 $v_1 = 2$	14 $v_2 = 1$	10 $v_3 = 2$
17 $u_1 = 0$	2 + **3**	1 **14** -	3

11 $u_2 = 2$	4 **1** **-**	2 +	4 **10**
12 $u_3 = -1$	1 **12**	3	5

Серед клітинок з „-” найменша вартість $\theta = \min(1,14) = 1$, робимо перерахунок по циклу.

b_j / a_i	16 $v_1 = 2$	14 $v_2 = 1$	10 $v_3 = 3$
17 $u_1 = 0$	2 **4**	1 **13**	3
11 $u_2 = 1$	4	2 **1**	4 **10**
12 $u_3 = -1$	1 **12**	3	5

Вартість перевезень цього плану $z = 8 + 13 + 2 + 12 + 40 = 75$ менша на 1, ніж вартість начального плану. Перевіряємо отриманий план на оптимальність:

$$u_1 + v_1 = 2,\ u_2 + v_2 = 2,\quad u_3 + v_1 = 1.$$
$$u_1 + v_2 = 1,\ u_2 + v_3 = 4,$$

Знаходимо потенціали:

$$u_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2,$$
$$v_2 = 1,$$
$$u_2 = 2 - v_2 = 1 \Rightarrow \quad v_3 = 4 - u_2 = 3,$$
$$u_3 = 1 - v_1 = -1.$$

Перевіримо умови оптимальності для вільних клітинок: $u_1 + v_3 = 0 + 3 = 3$ – виконано; $u_2 + v_1 = 2 + 1 = 3 < 4$ – виконано; $u_3 + v_2 = -1 + 1 = 0 < 3$ – виконано; $u_3 + v_3 = -1 + 3 = 2 < 5$ – виконано. Умови оптимальності виконані, тому отриманий план оптимальний. Знайдемо вартість перевезень: $z = 8 + 13 + 2 + 40 +$

$+12=75$. Отже, оптимальний план: $X=\begin{pmatrix} 4 & 13 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \\ 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ▲

Зауважимо, що метод потенціалів приводить до оптимального плану при будь-якому початковому опорному плані.

4 НАЙПРОСТІША ЗАДАЧА ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

4.1 Поняття функціонала

Серед задач оптимізації важливу роль відіграють задачі про екстремум функціонала. Раніше, ніж сформулювати її, введемо поняття функціонала.

Поняття функціонала є розвитком поняття функції. Будемо казати, що на деякій множині G функцій завдано функціонал, якщо вказано правило, за яким кожній функції множини, що розглядається, відповідає число. Іншими словами, функціонал – це функція, незалежним аргументом якої є функції.

Δ Приклад. Нехай G – сукупність неперервних функцій $f(x)$ на відрізку $[0;1]$.

1) завдамо функціонал відповідністю $\varphi : f(x) \to \int\limits_0^1 f(x)\,dx$ або в іншій формі запису $\varphi(f)=\int\limits_0^1 f(x)\,dx$. Якщо взяти, наприклад, $f(x)=x^2$, отримаємо $\varphi(x^2)=\int\limits_0^1 x^2 dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$. Таким чином, значення цього функціонала на функції x^2 дорівнює $\frac{1}{3}$; $\varphi(e^x)=\int\limits_0^1 e^x dx=e-1$; $\varphi\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$ і т. ін.;

2) $\varphi(f)=f\left(\frac{1}{2}\right)$ на G. Цей функціонал співвідносить функції $f(x)$ з їх значеннями при $x=\frac{1}{2}$. Наприклад, $\varphi(e^x)=\sqrt{e}$, $\varphi(x^2)=\frac{1}{4}$ і т. ін.;

3) $\varphi(f)=\max f(x)$ на G. Цей функціонал співвідносить функції з їх максимальним значенням на відрізку $[0;1]$. Наприклад, $\varphi(x-x^2)=\frac{1}{4}$; $\varphi\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)=1$ і т. ін.;

4) нехай функція $F(u,v)$ неперервна, а G - сукупність неперервно диференційованих функцій $f(x)$ на $[0;1]$. Тоді функціонал $\varphi(f)$ можна завдати на G співвідношенням $\varphi(f)=\int_0^1 F\left(f(x),f'(x)\right)dx$. ▲

Методи знаходження найбільшого і найменшого значень функціоналів є предметом вивчення розділу математики, який називається варіаційним численням. Оскільки функцію (із області визначення функціонала) можна визначити, завдавши її значення на нескінченній множині точок, то функціонал можна розглядати як функцію нескінченної кількості змінних, а варіаційне числення – як узагальнення теорії екстремумів функції n змінних. Варіаційне числення має велике прикладне значення. Виявляється, основні принципи механіки та фізики можуть бути сформульовані у вигляді варіаційних принципів.

Прикладом задачі варіаційного числення може служити така: як слід керувати локомотивом потяга, щоб привезти його з одного пункту в інший за найкоротший час, або більш загально, як здійснювати маневри потяга, щоб витрати ресурсів були мінімальними.

4.2 Формулювання найпростішої задачі варіаційного числення

Виникнення варіаційного числення відноситься до кінця XVII ст., коли І. Бернуллі поставив задачу про криву найшвидшого спуску (брахістахрону). Ця задача полягає в наступному. У площині xOy (для зручності вісь y спрямуємо вниз) дано дві точки $O(0,0)$ і $A(a,b)\,(a>0, b>0)$ (рисунок 4.1). Якої форми проволокою треба їх з'єднати, щоб матеріальна частина, що ковзає по проволоці під дією лише сили тяжіння, затратила на шлях від O до A найменший час?

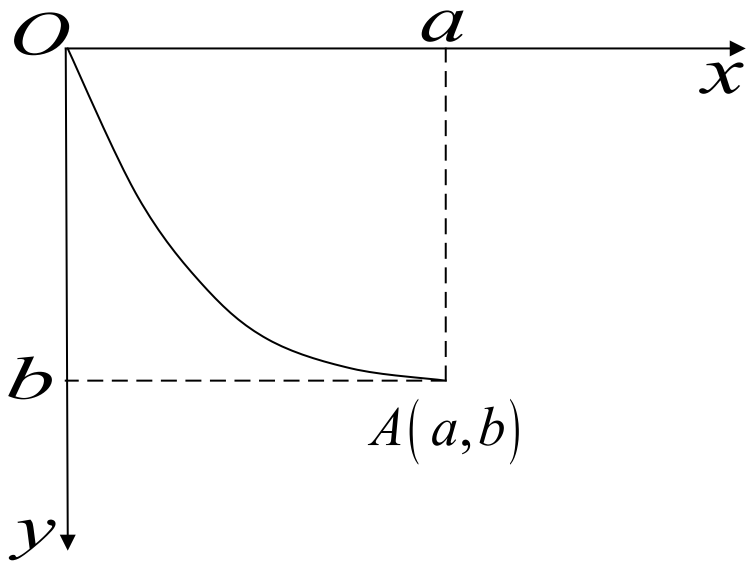


Рисунок 4.1

Із закону збереження енергії: $\frac{mv^2}{2} = mgy \quad \Rightarrow \quad v = \frac{dS}{dt} = \sqrt{2gy}$. Нехай форма кривої завдана рівнянням $y = y(x)$, тоді $dS = \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx$ і $dt = \sqrt{\frac{1+\left(y'\right)^2}{2gy}}dx$.

Час руху частинки вздовж дроту по кривій від O до A дорівнює $\int\limits_0^a \sqrt{\frac{1+\left(y'\right)^2}{2gy}}dx$.

Математична задача полягає в наступному: серед усіх неперервно диференційованих кривих, що задовольняють умови $y(0)=0,\ y(a)=b$, знайти таку, для якої функціонал $T(y) = \int\limits_0^a \sqrt{\frac{1+\left(y'\right)^2}{2gy}}dx$ набуває найменшого значення. Можна довести, що такою кривою є дуга циклоїди: $\begin{cases} x = R(1-\cos t) \\ y = R(t-\sin t) \end{cases}$, що проходить через точки $O(0,\,0)$ і $A(a,\,b)$, розташована між цими точками.

У розглянутій задачі функціонал залежить від y і y', такого роду залежність з'являється в усіх задачах, що спочатку виникли у варіаційному численні, і вони в подальшому були названі найпростішими.

Отже, найпростіша задача варіаційного числення полягає в наступному. Розглядається функціонал $I[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} L(x, y, y')\,dx$, де $L(x, y, y')$ - завдана функція, що має неперервні частинні похідні по всіх аргументах до другого порядку включно. Потрібно серед неперервно диференційованих функцій $y(x)$, що задовольняють граничні умови $y(x_0) = y_0;\ y(x_1) = y_1$, знайти ту, на якій функціонал досягає найменшого або найбільшого значення (у задачі про брахістохрону роль $L(x, y, y')$ відіграє функція $\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}$).

Можна довести, що серед всіх гладких функцій, що задовольняють граничні умови, можуть надати екстремум функціоналу лише ті, які є розв'язками рівняння

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0. \qquad (4.1)$$

Диференціальне рівняння другого порядку (4.1) називається *рівнянням Ейлера*, його загальний розв'язок містить дві константи, які, взагалі кажучи, однозначно визначаються з двох граничних умов.

Кожний розв'язок рівняння Ейлера називається екстремаллю. Кожна функція $y(x)$, на якій функціонал $I[y]$ досягає екстремуму, є екстремаллю, але не кожна екстремаль надає екстремуму функціоналу, тобто це необхідна умова екстремуму функціонала.

Сформулюємо правило розв'язання найпростішої задачі:

1) виписати необхідну умову екстремуму (рівняння Ейлера) $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0$;

2) знайти допустимі екстремалі (розв'язки рівняння Ейлера);

3) довести, що розв'язком задачі є одна із екстремалей, або показати, що розв'язків немає.

Δ Приклад. Знайти екстремуми функціонала.

1 $\quad I[y] = \int_0^1 \left(12xy - \left(y'\right)^2\right)dx, \quad y(0) = 0;\ y(1) = 1.$

1) складаємо рівняння Ейлера: $L\left(x, y, y'\right) = 12xy - \left(y'\right)^2$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 12x,\ \frac{\partial L}{\partial y'} = -2y'$, тоді $12x + \frac{d}{dx}\left(2y'\right) = 0$, або $y'' + 6x = 0$;

2) розв'язуємо отримане ДР 2-го порядку: $y'' = -6x,\ y' = -\frac{6x^2}{2} + C_1,\ y = -x^3 + C_1x + C_2$, C_1 і C_2 – довільні сталі. З граничних умов знайдемо їх: $0 = C_2;\ -1 = -1 + C_1,\ C_1 = 0$. Єдиною допустимою екстремаллю є $y = -x^3$;

3) можна показати, що на екстремалі $y = -x^3$ досягається максимум функціонала $I_{\max} = \int_0^1 \left(-12x^4 - 9x^4\right)dx = -\left(\left.\frac{21x^5}{5}\right|_0^1\right) = -\frac{21}{5}$.

2 $\quad I[y] = \int_0^1 \left(1 + \left(y'\right)^2\right)dx,\ y(0) = y(1) = 0.$

1) $L\left(x, y, y'\right) = 1 + \left(y'\right)^2$; $\frac{\partial L}{\partial y} = 0;\quad \frac{\partial L}{\partial y'} = 2y'$, тому рівняння Ейлера $y'' = 0$;

2) $y = C_1x + C_2$, з граничних умов $C_1 = C_2 = 0,\quad y = 0$ - єдина екстремаль;

3) оскільки для будь-яких кривих, що поєднують точки $(0,\ 0)$ і $(1, 0)$, справедлива нерівність $1 + \left(y'\right)^2 \ge 1$ (знак рівності

лише на кривій $y = 0$), то функціонал на усій кривій досягає мінімуму.

3 $\quad I[y] = \int_0^1 \left(\left(y' \right)^2 + y^2 \right) dx; \qquad y(0) = 1, \quad y(1) = e.$

1) $L(x, y, y') = (y')^2 + y^2; \qquad \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y; \quad \dfrac{\partial L}{\partial y'} = 2y'$, рівняння Ейлера $2y = \dfrac{d}{dx}\left(2y'\right)$ або $y'' - y = 0$;

2) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ - загальний розв'язок, з граничних умов $\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ e = C_1 e + C_2 e^{-1} \end{cases}$ знаходимо $C_1 = 1,\ C_2 = 0$ і $y = e^x$ – єдина екстремаль;

3) покажемо, що функціонал досягає найменшого значення на $y = e^x$.

Нехай $\tilde{y}(x)$ – будь-яка функція для порівняння, $u(x) = \tilde{y}(x) - y(x)$. Розглянемо приріст $\Delta I = I\left[\tilde{y}(x)\right] - I\left[y(x)\right] = I\left[y(x) + u(x)\right] - I\left[y(x)\right] =$

$$= \int_0^1 \left[\left(e^x + u' \right)^2 + \left(e^x + u \right)^2 \right] dx - \int_0^1 2e^{2x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\left(u' \right)^2 + u^2 + 2e^x u' + 2e^x u \right) dx = \int_0^1 \left(\left(u' \right)^2 + u^2 \right) dx +$$

$$+2\int_0^1 e^x u' dx + 2\int_0^1 e^x u dx = \int_0^1 \left(\left(u' \right)^2 + u^2 \right) dx > 0,$$

оскільки сума двох останніх інтегралів дорівнює нулю, дійсно, $\int_0^1 e^x u' dx = \int_0^1 e^x du \overset{\text{÷àñò èí àì è}}{==} e^x u \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x u dx = -\int_0^1 e^x u dx$. Отже, $\Delta I > 0$, тому $I\left[\tilde{y}(x)\right] > I\left[y(x)\right]$, що і треба було довести. ▲

Зауваження. Ми користувалися штучними прийомами, щоб показати, що на екстремалях досягаються максимуми (мінімуми) функціонала. У варіаційному численні, як і в теорії екстремумів функцій однієї і кількох змінних, існують загальні достатні умови екстремумів функціоналів, але ми їх не розглядаємо.

4.3 Деякі узагальнення найпростішої задачі

Результати, що отримані при розв'язанні найпростішої задачі, можуть бути узагальнені на випадки, коли функціонал залежить не лише від y', але і від похідних вищих порядків або на випадок декількох функцій.

У першому випадку функціонал має вигляд

$$I[y]=\int_{x_0}^{x_1} L\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)dx.$$

У другому $I[y]=\int_{x_0}^{x_1} L\left(x,y,z,y',z'\right)dx$. Розглянемо цей випадок подробніше. Потрібно серед достатньо гладких функцій $y(x)$ і $z(x)$, що задовольняють граничні умови $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$ і $z(x_0)=z_0$, $z(x_1)=z_1$, знайти ті, на яких функціонал досягає екстремуму. На відміну від найпростішої задачі тут для відшукання екстремалей потрібно розв'язати систему рівнянь Ейлера:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial L}{\partial y'}-\dfrac{\partial L}{\partial y}=0 \\ \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial L}{\partial z'}-\dfrac{\partial L}{\partial z}=0 \end{cases}.$$

Δ Приклад. Знайти екстремалі функціонала: $I[y]=\int_{-1}^{1}\left(2xy-\left(y'\right)^2-\frac{1}{3}\left(z'\right)^3\right)dx$, $y(-1)=2$, $y(1)=0$, $z(-1)=-1$, $z(1)=1$.

Система рівнянь Ейлера має вигляд $L\left(x,y,y',z,z'\right)=2xy-\left(y'\right)^2-\frac{1}{3}\left(z'\right)^3$.

$\frac{\partial L}{\partial y}=2x;\ \frac{\partial L}{\partial y'}=-2y';\ \frac{\partial L}{\partial z}=0;\ \frac{\partial L}{\partial z'}=-\left(z'\right)^2$, тому $\begin{cases}-2y''-2x=0\\ \left(\left(z'\right)^2\right)'=0\end{cases}$.

З другого рівняння $z'=C_1,\ z=C_1x+C_2$. З першого $y'=-\frac{x^2}{2}+C_3,\quad y=-\frac{x^3}{6}+C_3x+C_4$. Із граничних умов знайдемо константи $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$: $\begin{cases}C_1+C_2=1\\ -C_1+C_2=-1\end{cases}$ $\Rightarrow$ $C_2=0,\ C_1=1$ і

$\begin{cases}0=-\frac{1}{6}+C_3+C_4\\ 2=\frac{1}{6}-C_3+C_4\end{cases}$ $\Rightarrow$ $C_3=1,\ C_4=-\frac{5}{6}$. Остаточно отримаємо рівняння екстремалей:

$$\begin{matrix}y=-\frac{x^3}{6}-\frac{5}{6}x+1\\ z=x\end{matrix}.\ \blacktriangle$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление [Текст]: учеб. для втузов / Н.С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2001. – Т. 1. – 416 с.

2 Сборник задач по математике для втузов; Ч. II. Специальные разделы математического анализа [Текст] / В.А.Болгов, Б.П.Демидович, А.В.Ефимов [и др.]; под общ. ред.

А.В. Ефимова, А.Б. Демидовича. – М.: ООО "Издательский дом Альянс", 2010. – 368 с.

3 Военно-технические вопросы высшей математики и математические основы военной кибернетики [Текст] / под ред. И.В. Сухаревского. – Харьков: ВИРТА, 1982. – 382 с.

4 Думіна, О.О. Математичне програмування [Текст] / О.О. Думіна, О.І. Удодова. – Харків: УкрДАЗТ, 2007. – 52 с.

5 Могульский, Е.З. Некоторые задачи оптимизации [Текст] / Е.З. Могульский. – Харьков: ХВВАУРЭ, 1986. – 107 с.

6 Могульский, Е.З. Методы оптимизации [Текст]: конспект лекций / Е.З. Могульський, И.В. Сухаревский. – Харьков: ВИРТА. – 83 с.

7 Ковалішина, І.В. Математичне програмування [Текст] / І.В. Ковалішина. – Харків: УкрДАЗТ, 1999. – 48 с.