УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

МЕХАНІКО-ЕНЕРГЕТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра механіки і проектування машин

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
до виконання розрахунково-графічних робіт

з дисципліни
«*ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА*»
(розділ «*ДИНАМІКА*»)

Харків – 2021

Методичні рекомендації розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри механіки і проектування машин 22 лютого 2021 р, протокол № 7.

Методичні рекомендації призначено для студентів усіх форм навчання всіх спеціальностей механіко-енергетичного та будівельного факультетів.

Укладач

доц. Н. А. Аксьонова

Рецензент

проф. О. В. Братченко

ЗМІСТ

ВСТУП

Однією з основних тенденцій розвитку вищої школи є створення та використання методичного забезпечення навчального процесу, яке містить повний комплекс інформації, необхідної для засвоєння теоретичного матеріалу та набуття практичних навичок.

Під час підготовки спеціалістів для залізничного транспорту навчальними планами передбачено вивчення студентами на 1 та 2 курсах дисципліни «Теоретична механіка».

При формуванні теоретичної бази провідна роль відводиться лекційним курсам, які висвітлюють основні питання розділів «Статика», «Кінематика», «Динаміка». З огляду на це курс теоретичної механіки передбачає виконання розрахунково-графічних робіт (РГР) і складання заліків та іспитів. У цих методичних рекомендаціях наведено основні підходи для виконання РГР, розв'язування задач та аналізу отриманих результатів з розділу «Динаміка». Основною задачею динаміки є розв'язання оберненої задачі методом інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, що перебуває під дією сил. Ця процедура залежить від виду й характеру сил, є складною та викликає багато питань.

Вищесказане зумовило необхідність розроблення і введення до навчального процесу методичного забезпечення, яке дає змогу активізувати роботу студентів, сприяє перетворенню самостійної роботи у творчий процес. Математичні моделі та підходи до їх використання надаються у вигляді рекомендацій і схем для виконання індивідуальної роботи за різними варіантами.

Методичне забезпечення призначено для студентів денної та заочної форм навчання всіх спеціальностей (освітніх програм) механіко-енергетичного та будівельного факультетів.

1 Динаміка матеріальної точки

За **основним законом динаміки** прискорення точки пропорційне прикладеній силі та має однаковий з нею напрямок [1, 2]. Іншими словами, добуток маси точки на прискорення, якого вона набуває під дією сили, дорівнює за модулем цій силі та збігається з напрямком сили: $\overline{F} = m \cdot \overline{a}$.

Якщо вільна матеріальна точка М відомої маси m рухається під дією системи сил $\{\overline{F_1}, \overline{F_2}, ... \overline{F_n}\}$, то рівнодійна системі сила визначається як геометрична сума $\overline{F} = \sum_{n=1}^{k} \overline{F_n}$ (рисунок 1). Прискорення, що надає система сил точці, є сумарним вектором $\overline{a} = \sum_{n=1}^{k} \overline{a_n}$, який спрямований за вектором рівнодійної.

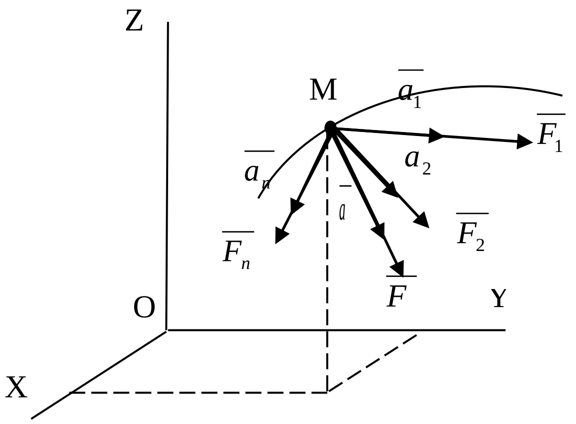


Рисунок 1

Основне рівняння динаміки для системи сил можна подати у вигляді векторного рівняння $m \cdot \overline{a}$ = $\overline{F_1} + \overline{F_2} + ... + \overline{F_n}$. Склавши проекції цього рівняння на координатні осі та враховуючи, що прискорення точки є другою похідною від закону її руху за часом [4], можна скласти **диференціальні рівняння руху матеріальної точки**:

$$
m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = m \cdot \ddot{x} = F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx} = \sum_{n=1}^{k} F_{nx}, \qquad
m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = m \cdot \ddot{y} = F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{ny} = \sum_{n=1}^{k} F_{ny}, \qquad
m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = m \cdot \ddot{z} = F_{1z} + F_{2z} + ... + F_{nz} = \sum_{n=1}^{k} F_{nz},
$$

$$
\left.\begin{aligned}
m \cdot \ddot{x} &= \sum_{n=1}^{k} F_{nx} \\
m \cdot y'' &= \sum_{n=1}^{k} F_{ny} \\
m \cdot \ddot{z} &= \sum_{n=1}^{k} F_{nz}
\end{aligned}\right\} \qquad (1)
$$

У рівняннях $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$, $\frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$ – проекції прискорення $\bar{a}$ на координатні осі;

$F_{1X}, F_{1Y}, F_{1Z}, F_{2X}, F_{2Y}, F_{2z} ....F_{nx}, F_{ny}, F_{nz}$ – проекції сил $\overline{F_1}, \overline{F_2},...\overline{F_n}$ на координатні осі.

2 Дві задачі динаміки точки

Задачі динаміки точки та схеми їх розв'язання розглядаються в загальному вигляді [2, 5].

Перша задача динаміки (пряма)

Знаючи масу точки m та рівняння її руху $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, ***визначити*** модуль і напрямок рівнодійної сил, прикладених до точки.

Перша задача динаміки розв’язується методом подвійного *диференціювання* рівнянь руху за часом.

Отримані диференціальні рівняння руху точки $m \cdot \ddot{x} = \sum_{n=1}^{k} F_{nx} = F_X$, $m \cdot \ddot{y} = \sum_{n=1}^{k} F_{ny} = F_y$, $m \cdot \ddot{z} = \sum_{n=1}^{k} F_{nz} = F_z$ дають можливість визначити модуль рівнодійної як $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$. Напрямок рівнодійної знаходять за напрямними косинусами: $\cos(\overline{F},\overline{i}) = \frac{F_x}{F}$, $\cos(\overline{F},\overline{j}) = \frac{F_y}{F}$, $\cos(\overline{F},\overline{k}) = \frac{F_z}{F}$.

Друга задача динаміки (обернена, основна)

Знаючи масу точки m, сили, що діють на точку, а також початкове положення (X_0, Y_0, Z_0) і початкову швидкість (X_0', Y_0', Z_0'), ***визначити*** закон руху $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$.

Друга задача динаміки розв’язується методом подвійного *інтегрування* за часом диференціальних рівнянь при відомих початкових умовах.

1 Складання диференціальних рівнянь у вигляді (формули (1))

$$m \cdot \ddot{x} = F_X(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$
$$m \cdot \ddot{y} = F_Y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$
$$m \cdot \ddot{z} = F_Z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

2 Інтегрування диференціальних рівнянь руху двічі за часом.

3 Визначення постійних інтегрування за початковими умовами:

$$t = 0, x = x_0, y = y_0, z = z_0, \dot{x} = \dot{x}_0, \dot{y} = \dot{y}_0, \dot{z} = \dot{z}_0;$$

де $t_0 = t = 0$ – початковий момент часу;

x_0, y_0, z_0 – початкові координати;

$\dot{x}_0 = \dfrac{dx}{dt} = v_{0x}$, $\dot{y}_0 = \dfrac{dy}{dt} = v_{0y}$, $\dot{z}_0 = \dfrac{dz}{dt} = v_{0z}$ – проекції початкової швидкості $\overline{v_0}$ (записані як перші похідні за часом від рівнянь руху).

4 Отримання рівнянь руху точки:

$$x = f_1\ (t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0),$$
$$y = f_2\ (t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0),$$
$$z = f_3\ (t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).$$

Основний підхід, власне математична модель та схема розв’язування оберненої задачі динаміки є процедурою стандартною, але залежність від системи сил, що діють на матеріальну точку, впливає на хід розв’язання. Далі буде наведено приклади складання та інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки під дією різних видів сил [5, 6].

3 Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, що перебуває під дією постійних сил

Як приклад розглядається модель залізничного укосу [3]. У залізничних скельних виїмках для захисту кюветів від потрапляння в них з укосів кам'яних осипів споруджується «полиця» безпеки (DC на рисунку 2). Ураховуючи можливість руху каменя з найвищої точки А укосу та вважаючи при цьому його початкову швидкість V_0 рівною нулю, треба визначити мінімальну ширину «полиці» b та швидкість V_C, з якою камінь падає на неї. Уздовж ділянки АВ укосу, яка становить кут α з горизонтом та має довжину l, камінь рухається протягом τ, с. При розв'язанні задачі можна вважати коефіцієнт тертя ковзання f каменя уздовж АВ постійним, а опором повітря знехтувати.

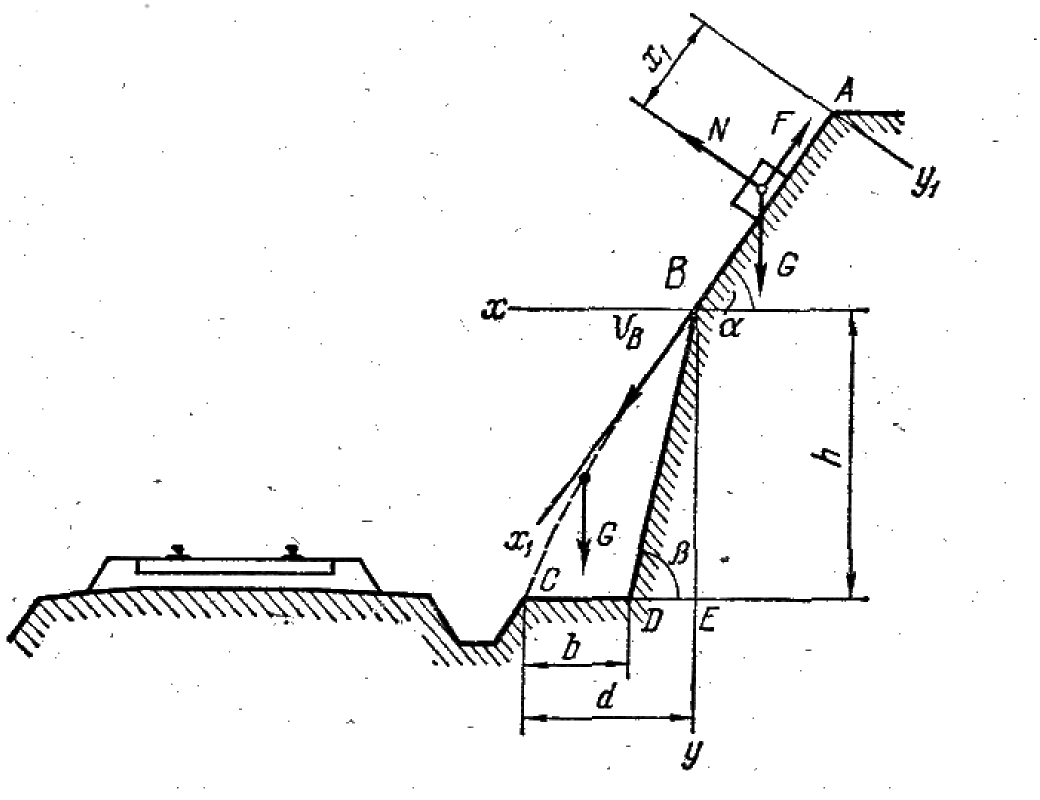


Рисунок 2

Дано: $V_A = 0$, $\alpha = 60^0$, $l = 4\,м$, $\tau = 1\,с$, $f \neq 0$, $h = 5\,м$, $\beta = 75^0$.
Визначити: b та V_C.

Розглянемо рух каменя на ділянці AB як **прямолінійний рух точки під дією постійних сил**.

Вважаючи, що камінь рухається прямолінійно вздовж поверхні AB, оберемо систему відліку ($x_1 y_1$) з початком у точці A в напрямку руху каменя. Приймаючи камінь за матеріальну точку, відобразимо (рисунок 2) сили, що діють на нього: вага $\overline{G}$, нормальна реакція $\overline{N}$ та сила тертя ковзання $\overline{F}$.

Складемо диференціальне рівняння руху каменя вздовж AB:

$$mx_1'' = \sum X_{n1}\,, \qquad mx_1'' = G\sin\alpha - F\,.$$

Сила тертя $F = fN$, де $N = G\cos\alpha$. Таким чином,

$$mx_1'' = G\sin\alpha - fG\cos\alpha \quad \text{або} \quad x_1'' = g\sin\alpha - fg\cos\alpha\,.$$

Інтегруючи диференціальне рівняння двічі за часом, отримаємо:

$$x_1' = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + C_1\,,$$

$$x_1 = (g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2)t^2 + C_1 t + C_2\,.$$

Для визначення постійних інтегрування скористаємось початковими умовами задачі: при $t = 0$ початкове положення $x_{10} = 0$ та початкова швидкість $x_{10}' = 0$. Склавши рівняння, отримані при інтегруванні, для $t = 0$ $x_{10} = C_1$ та $x_{10}' = C_2$, знайдемо постійні: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Тоді

$$x_1' = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t\,,$$

$$x_1 = (g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2)t^2.$$

Для моменту τ, коли камінь залишає ділянку AB $x_1' = V_B$, а $x_1 = l$ (швидкість $x_1' = V_B$ та координата $x_1 = l$ каменя в точці B), тобто

$$V_B = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\tau\,;$$

$$l = (g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2)\tau^2,$$

звідки $V_B = 2l/\tau$, тобто $V_B = (2\cdot 4)/1 = 8\ м/с$.

Розглянемо рух каменя від точки В до точки С [3] як **криволінійний рух точки під дією постійних сил**. У цьому випадку розглядається вільне падіння, тобто без урахування опору середовища (за умовами задачі опором повітря можна знехтувати).

Систему відліку (xy) обираємо в напрямку падіння каменя з початком у точці В. Показавши силу тяжіння $\overline{G}$, що діє на камінь, складемо диференціальні рівняння його руху:

$$mx'' = 0, \quad my'' = G.$$

Інтегруємо перше рівняння $mx'' = 0$: $x' = C_3$, $x = C_3 t + C_4$.

Постійні інтегрування C_3 та C_4 визначимо з використанням початкових умов: при $t = 0$ $x_0 = 0$, $x_0' = V_B\cos\alpha$.

За допомогою рівнянь, отриманих при інтегруванні та складених для $t = 0$: $x_0' = C_3$, $x_0 = C_4$, знайдемо, що $C_3 = V_B\cos\alpha$ та $C_4 = 0$. Тоді $x' = V_B\cos\alpha$, $x = V_B\cos\alpha\cdot t$.

Інтегруємо друге рівняння $my'' = G$:

$$y' = gt + C_5, \quad y = \frac{gt^2}{2} + C_5 t + C_6.$$

Початкові умови: при $t = 0$ $y_0 = 0$, $y_0' = V_B\sin\alpha$. Із рівнянь, отриманих інтегруванням та складених для $t = 0$, $y_0' = C_5$, $y_0 = C_6$, знайдемо, що постійні інтегрування дорівнюють: $C_5 = V_B\sin\alpha$ та $C_6 = 0$. Остаточно $y' = gt + V_B\sin\alpha$, $y = \frac{gt^2}{2} + V_B\sin\alpha\cdot t$.

Таким чином, рівняння руху каменя мають вигляд

$$x = V_B\cos\alpha\cdot t,$$

$$y = \frac{gt^2}{2} + V_B \sin\alpha \cdot t .$$

Рівняння траєкторії каменя знайдемо, виключивши параметр t (час) з рівнянь руху. Визначивши t з першого рівняння та підставивши його в друге, отримаємо рівняння параболи:

$$y = \frac{gx^2}{2V_B^2 \cos^2\alpha} + x \cdot tg\alpha .$$

У момент падіння, коли $y = h = 5 м$, а $x = d$, $y = \frac{9{,}81 \cdot d^2}{2 \cdot 8^2 \cdot 0{,}5^2} + d \cdot \sqrt{3}$, звідки $d_{1,2} = -2{,}82 \pm 4{,}93$, тобто

$$d_1 = 2{,}11 \text{ м}, \quad d_2 = -7{,}75 \text{ м}.$$

Оскільки траєкторією руху каменя є гілка параболи з додатними абсцисами її точок, то $d_1 = 2{,}11$ м.

Мінімальна ширина «полиці»

$$b = d - ED = d - \frac{h}{tg45^0} = 2{,}11 - \frac{5}{3{,}73} = 0{,}77 \text{ м}.$$

Скориставшись рівнянням руху каменя $x = V_B \cos\alpha \cdot t$, знайдемо час Т руху каменя від точки В до точки С: $2{,}11 = 8 \cdot 0{,}5 \cdot T$, звідки $T = 0{,}53$ с.

Швидкість каменя при падінні знайдемо через проекції швидкості на осі координат: $x' = V_B \cos\alpha$, $y' = gt + V_B \sin\alpha$.

Далі за формулою $V = \sqrt{x'^2 + y'^2}$.

Для моменту падіння $(t = T = 0{,}53\ c)$

$$V_C = \sqrt{(V_B \cos\alpha)^2 + (gT + V_B \sin\alpha)^2} = \sqrt{(8 \cdot 0{,}5)^2 + (9{,}81 \cdot 0{,}53 + 8 \cdot 0{,}87)^2} = 12{,}8 \text{ м/с}.$$

4 Інтегрування диференціальних рівнянь руху точки з урахуванням сили опору (яка залежить від швидкості)

На вертикальній ділянці *AB* труби (рисунок 3) на вантаж *D* масою *m* діють постійна сила ваги P і сила опору *R* (яка залежить від швидкості); відстань від точки *A*, де $V = V_0$, до точки *B* дорівнює *l*.

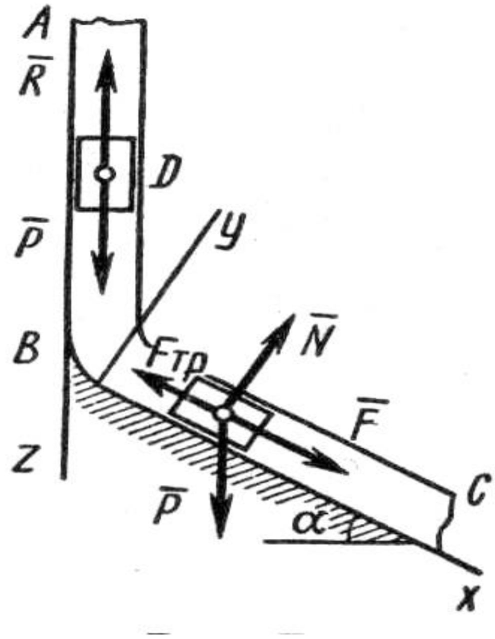


Рисунок 3

Дано: $m = 2\ кг$;
Ділянка AB: сила опору руху $R = \mu V^2$, коефіцієнт опору $\mu = 0{,}4\ \frac{кг}{м}$; швидкість $V_0 = 5\ \frac{м}{с}$; відстань AB $l = 2{,}5\ м$;
Ділянка BC:
коефіцієнт тертя ковзання вантажу *f = 0,2,*
змінна сила $F_x = 16\sin(4t)$.

Визначити:
$x = f(t)$ – закон руху вантажу на ділянках AB і *BC*.

Розв'язання

Зображуємо вантаж (у вільному положенні) та сили, що діють на нього, $\bar{P} = m\bar{g}$ і $\bar{R}$. Проводимо вісь *Az* і складаємо диференціальне рівняння руху вантажу [7] і проекції на цю вісь:

$$m\frac{dV_z}{dt} = \sum F_{kz} \text{ чи } mV_z\frac{dV_z}{dz} = P_z + R_z\,.$$

Далі знаходимо проекції сил ваги $P_z = P = mg$, опору $R_z = -R = -\mu V^2$; підкреслюємо, що в рівнянні всі змінні сили треба обов'язково виразити через величини, від яких вони залежать. Ураховуючи ще, що $V_z = V$, отримаємо

$$mV\frac{dV}{dz} = mg - \mu V^2 \text{ чи } V\frac{dV}{dz} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{mg}{\mu} - V^2\right).$$

Введемо для скорочення записів позначення $k = \frac{\mu}{m} = 0{,}2\ м^{-1}$, $n = \frac{mg}{\mu} = 50\ \frac{м^2}{с^2}$, де при підрахунку прийнято $g \approx 10\ \frac{м}{с^2}$. Тоді отримане рівняння можна подати у вигляді $2V \cdot \frac{dV}{dz} = -2k\left(V^2 - n\right)$.

Поділяючи змінні, а потім взявши від обох частин інтеграли, отримаємо

$$\frac{2VdV}{V^2 - n} = -2kdz \quad \text{та} \quad \ln\left(V^2 - n\right) = -2kz + C_1.$$

За початковими умовами при $z = 0$ $V = V_0$, що дає $C_1 = \ln\left(V_0^2 - n\right)$, і знаходимо $\ln\left(V^2 - n\right) - \ln\left(V_0^2 - n\right) = -2kz$.

Звідси $\ln\frac{V^2 - n}{V_0^2 - n} = -2kz$ та $\frac{V^2 - n}{V_0^2 - n} = e^{-2kz}$.

У результаті знаходимо $V^2 = n + \left(V_0^2 - n\right)e^{-2kz}$.

Вважаючи, що $z = l = 2{,}5\ м$ і замінюючи k та n їх значеннями, визначаємо швидкість v_B вантажу в точці В ($V_0 = 5\ \frac{м}{с}$, число $e = 2{,}7$): $V_B^2 = 50 - \frac{25}{e} = 40{,}7$ та $V_B = 6{,}4\ \frac{м}{с}$.

5 Інтегрування диференціальних рівнянь руху точки під дією змінної сили, що залежить від часу

На похилій ділянці ВС (рисунок 3) на вантаж діють постійна сила ваги Р та змінна сила $F = F(t)$, яка задана в ньютонах. Знайдена швидкість V_B ($V_B = 6{,}4\ \frac{м}{с}$) буде для руху на цій ділянці початковою швидкістю ($V_0 = V_B$). Зобразимо вантаж (у вільному положенні) та сили, що діють на нього, $\overline{P} = m\overline{g}$, $\overline{N}$, $\overline{F}_{тр}$ і $\overline{F}$. Проведемо з точки *B* осі *Bx* і *By* та складемо диференціальне рівняння руху вантажу в проекції на вісь *Bx*:

$$m\frac{dV_x}{dt} = P_x + N_x + F_{mp\,x} + F_x \text{ чи } m\frac{dV_x}{dt} = mg\sin\alpha - F_{mp} + F_x, \text{ де } F_{mp} = fN.$$

Для визначення N складемо рівняння в проекції на вісь Ву. Оскільки $a_y = 0$, отримуємо $N - mg\cos\alpha = 0$, звідки $N = mg\cos\alpha$. Отже, $F_{mp} = fmg\cos\alpha$, крім того, $F_x = 16\sin(4t)$ і відповідно диференціальне рівняння набуває вигляду

$$m\frac{dV_x}{dt} = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 16\sin(4t).$$

Поділивши обидві частини рівності на m, обчислимо $g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = g(\sin 30^0 - 0{,}2\cos 30^0) = 3{,}2$; $\frac{16}{m} = 8$, підставимо ці значення в рівняння та отримаємо: $\frac{dV_x}{dt} = 3{,}2 + 8\sin(4t)$.

Помноживши обидві частини рівняння на dt та інтегруючи, знайдемо $V_x = 3{,}2t - 2\cos(4t) + C_2$.

Тепер будемо відраховувати час від моменту, коли вантаж перебуває в точці В, ураховуючи в цей момент $t = 0$. Тоді при $t = 0$ $V = V_0 = V_B$, де $V_B = 6{,}4\ \frac{м}{c}$. Підставляючи ці величини, отримаємо постійну інтегрування $C_2 = V_B + 2\cos 0 = 6{,}4 + 2 = 8{,}4$.

При знайденому значенні C_2 швидкість визначається як

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 3{,}2t - 2\cos(4t) + 8{,}4.$$

Помноживши обидві частини на dt і знову інтегруючи, знайдемо закон руху точки

$$x = 1{,}6t^2 - 0{,}5\sin(4t) + 8{,}4t + C_3.$$

Оскільки при $t = 0$ $x = 0$, то $C_3 = 0$ і остаточно шуканий закон руху вантажу буде

$$x = 1{,}6t^2 + 8{,}4t - 0{,}5\sin(4t),$$

де x – в метрах, t – в секундах.

6 Розрахунково-графічна робота для студентів денної форми навчання

За робочою програмою дисципліни «Теоретична механіка» студенти денної форми навчання всіх спеціальностей механіко-енергетичного та будівельного факультетів мають виконати РГР з розділу «Динаміка». На основі наведеного вище теоретичного матеріалу виконується задача за темою «Динаміка точки. Інтегрування диференційних рівнянь руху матеріальної точки» [3]. Варіанти індивідуальних задач (подано нижче) можна виконати базуючись на рекомендаціях попередніх пунктів.

Варіант 1–5 (рисунок 4). Тіло рухається із точки A по ділянці AB (довжиною l) похилої площини, яка становить кут α з горизонтом, протягом часу τ, с. Його початкова швидкість υ_A. Коефіцієнт тертя ковзання тіла по площині дорівнює f.

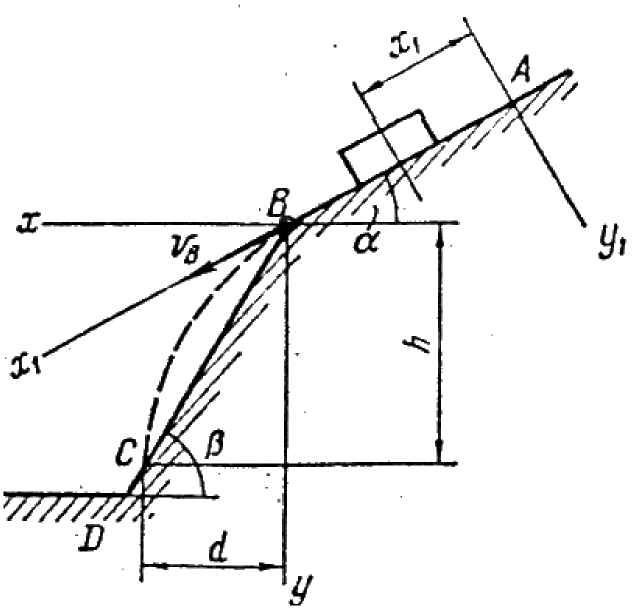


Рисунок 4

У точці B тіло залишає площину зі швидкістю υ_B та влучає зі швидкістю υ_C у точку C площини BD, похилої під кутом β до горизонту. Тіло перебувало в повітрі T, с.

При розв'язанні задачі тіло прийняти за матеріальну точку [2]; опір повітря не враховувати.

Варіант 1. Дано: $\alpha = 30^o$, $\upsilon_A = 0$, $f = 0{,}2$, $l = 10$ м, $\beta = 60^o$.
Визначити τ *і* h.

Варіант 2. Дано: $\alpha = 15^o$, $\upsilon_A = 2$ м/с, $f = 0{,}2$, $h = 4$ м, $\beta = 45^o$.
Визначити l та рівняння траєкторії точки на відрізку BC.

Варіант 3. Дано: $\alpha = 30^o$, $\upsilon_A = 2{,}5$ м/с, $f \neq 0$, $l = 8$ м, $d = 10$ м, $\beta = 60^o$.
Визначити τ *і* υ_B.

Варіант 4. Дано: υ_A. = 0, f = 0, τ= 2 с, l = 9,8 м, β = 60°.
Визначити α і T.

Варіант 5. Дано: α = 30°, υ_A. = 0, l = 9,8 м,τ= 3 с, β = 45°.
Визначити f i υ_C.

Варіант 6–10 (рисунок 5).

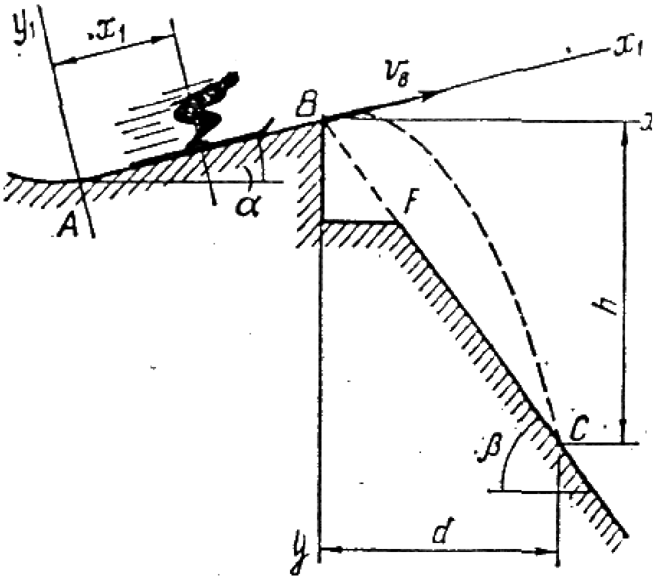


Рисунок 5

Лижник наближається до точки А ділянки трампліна АВ, похилого до горизонту під кутом α, зі швидкістю υ_A. Довжина трампліна АВ дорівнює l. Коефіцієнт тертя ковзання лиж на відрізку АВ дорівнює f. Лижник від А до В рухається τ, с, у точці В зі швидкістю υ_B він залишає трамплін. Через T, с, лижник приземляється зі швидкістю υ_C в точці С гори, яка становить кут β з горизонтом.

При розв'язанні задачі прийняти лижника за матеріальну точку і не враховувати опір повітря.

Варіант 6. Дано: α = 20°, f = 0,1, τ= 0,2 с, β = 30° . h= 40 м.
Визначити l i υ_C.

Варіант 7. Дано: α = 15°, f = 0,1, l = 5 м, υ_A. = 16 м/с, β = 45°.
Визначити T i υ_B.

Варіант 8. Дано: υ_A. = 21 м/с, f = 0, τ= 0,3 с, υ_B = 20 м/с, β = 60.
Визначити α i d.

Варіант 9. Дано: α = 15°, τ= 0,3 с, f = 0,1, h= $30\sqrt{2}$ м, β = 45°.
Визначити υ_A i υ_B.

Варіант 10. Дано: α = 15°, f = 0, υ_A = 12 м/с, d = 50 м, β = 60°.
Визначити τ та рівняння траєкторії точки на відрізку ВС.

Варіант 11–15 (рисунок 6).

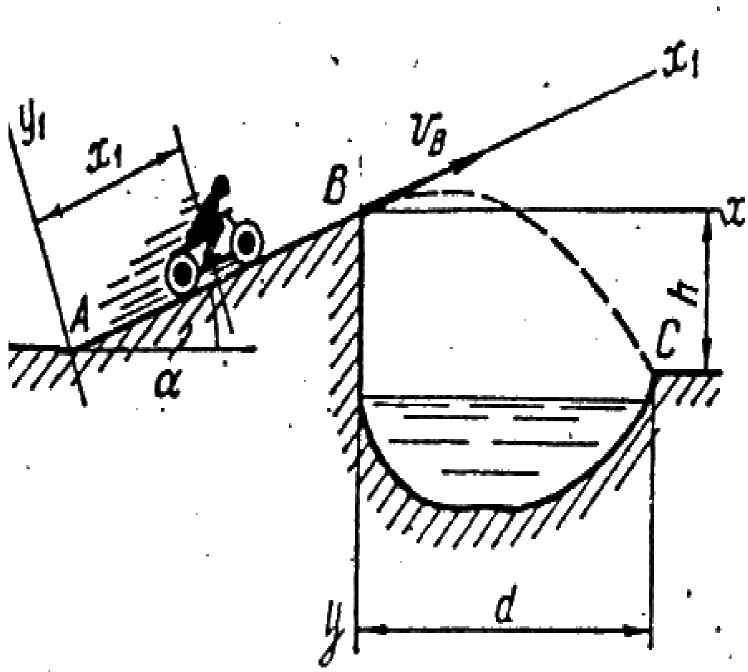


Рисунок 6

Маючи в точці A швидкість υ_A, мотоцикл піднімається τ, с, по відрізку AB довжиною l, який становить з горизонтом кут α. При постійній на всьому відрізку AB рушійній силі P мотоцикл у точці B набуває швидкості υ_B та перелітає через рів шириною d, перебуваючи у повітрі T, с, і приземляючись у точці C зі швидкістю υ_C.

Маса мотоцикла з мотоциклістом дорівнює m.

При розв'язанні задачі вважати мотоцикл з мотоциклістом за матеріальну точку і не враховувати сили опору руху.

Варіант 11. Дано: $\alpha = 30^o$, $P \neq 0$, $l = 40$ м, $\upsilon_A = 0$, $\upsilon_B = 4{,}5$ м/с, $d = 3$ м.

Визначити τ і h.

Варіант 12. Дано: $\alpha = 30^o$, $P = 0$, $l = 40$ м, $\upsilon_B = 4{,}5$ м/с, $h = 1{,}5$ м.

Визначити υ_A. і d.

Варіант 13. Дано: $\alpha = 30^o$, m=400 кг, $\upsilon_A = 0$, $\tau = 20$ с, $d = 3$ м, $h = 1{,}5$ м.

Визначити l і P.

Варіант 14. Дано: $\alpha = 30^o$, m=400 кг, P=2,2 кН, $l = 40$ м, $\upsilon_A = 0$, $d = 5$ м.

Визначити υ_B і υ_C.

Варіант 15. Дано: $\alpha = 30^o$, P =2 кН, $l = 50$ м, $\upsilon_A = 0$, $d = 4$ м, $h = 2$ м.

Визначити T і m.

Варіант 16–20 (рисунок 7).

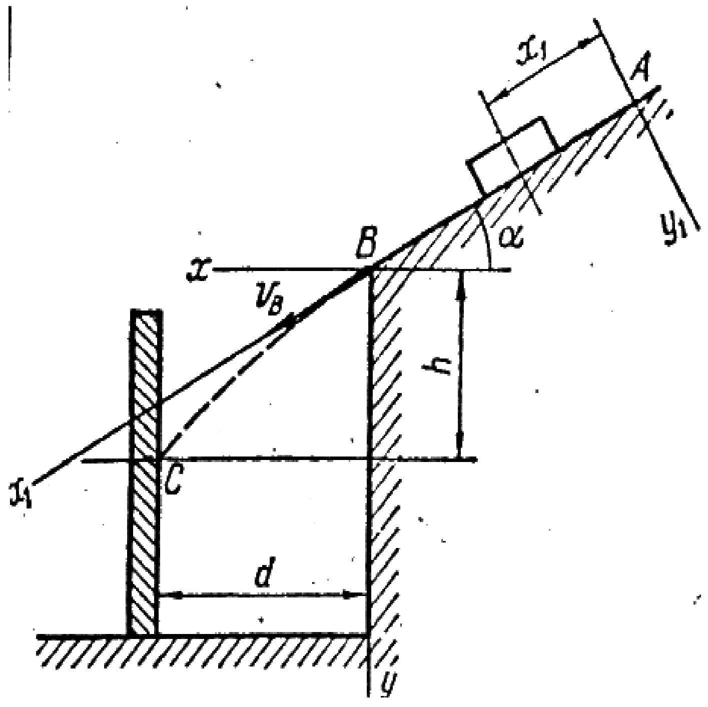


Рисунок 7

Камінь сковзає за період часу τ, с, по відрізку АВ похилої площини, яка становить кут α з горизонтом та має довжину l. Його початкова швидкість υ_A.

Коефіцієнт тертя ковзання каменя позначається f.

У точці В камінь мав швидкість υ_B. Через Т, *с*, він ударяється в точці С об вертикальну захисну стіну.

При розв'язанні задачі вважати камінь за матеріальну точку; опір повітря не враховувати.

Варіант 16. Дано: $\alpha = 30^o$, υ_A. = 1 м/с, $l = 3$ м, f =0,2, $d = 2{,}5$ м.
Визначити Т і h.

Варіант 17. Дано: $\alpha = 45^o$, $l = 6$ м, υ_B. = $2\upsilon_A$, τ = 1с, $h = 6$ м.
Визначити f і d .

Варіант 18. Дано: $\alpha = 30^o$, $l = 2$ м, υ_A. = 0, f =0,1, $d = 3$ м.
Визначити τ і h.

Варіант 19. Дано: $\alpha = 15^o$, $l = 3$ м, υ_B. = 3 м/с, $f \neq 0$, $d = 2$ м, τ = 1,5 с.
Визначити υ_A. і h.

Варіант 20. Дано: $\alpha = 45^o$, υ_A. = 0, f =0,3, $d = 2$ м, h = 4 м.
Визначити τ і l .

Варіант 21–25 (рисунок 8).

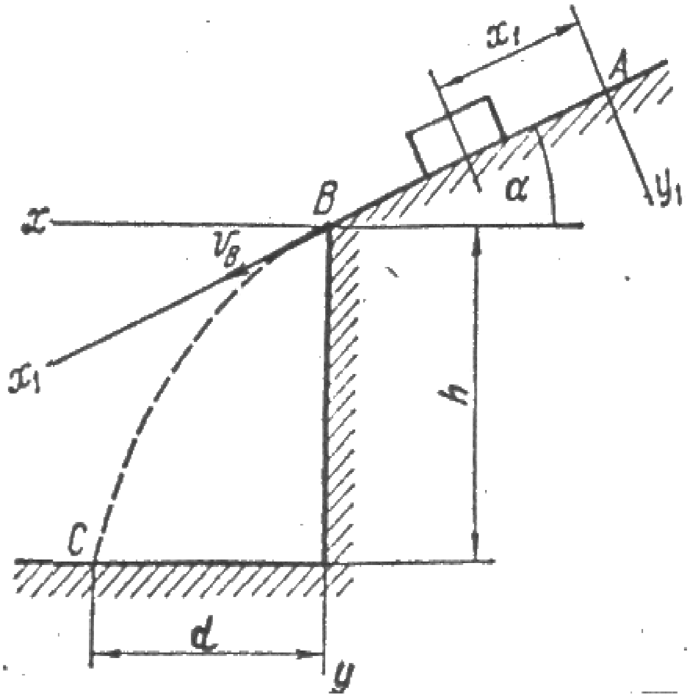


Рисунок 8

Тіло рухається із точки А по відрізку АВ (довжиною l) похилої площини, яка становить кут α з горизонтом. Його початкова швидкість υ_A. Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює f. Через τ, с, тіло в точці В зі швидкістю υ_B. залишає похилу площину та падає на горизонтальну площину в точку С зі швидкістю υ_C; при цьому воно перебуває у повітрі Т, с.

При розв'язанні задачі вважати тіло матеріальною точкою; опір повітря не враховувати.

Варіант 21. Дано: $\alpha = 30^o$, $f = 0{,}1$, υ_A. = 1 м/с, $\tau = 1{,}5$ с, $h = 10$ м.
Визначити d і υ_B..

Варіант 22. Дано: $\alpha = 45^o$, υ_A. = 0, $l = 10$ м, $\tau = 2$ с.
Визначити f і рівняння траєкторії на ділянці ВС.

Варіант 23. Дано: $f = 0$, υ_A. = 0, $l = 9{,}81$ м, $\tau = 2$ с, $h = 20$ м.
Визначити α і Т.

Варіант 24. Дано: $\alpha = 30^o$, υ_A. = 0, $f = 0{,}2$, $d = 12$ м, $l = 10$ м.
Визначити τ і h .

Варіант 25. Дано: $\alpha = 30^o$, υ_A. = 0, $f = 0{,}2$, $l = 6$ м, $h = 4{,}5$ м.
Визначити τ і υ_C .

Варіант 26–30 (рисунок 9).

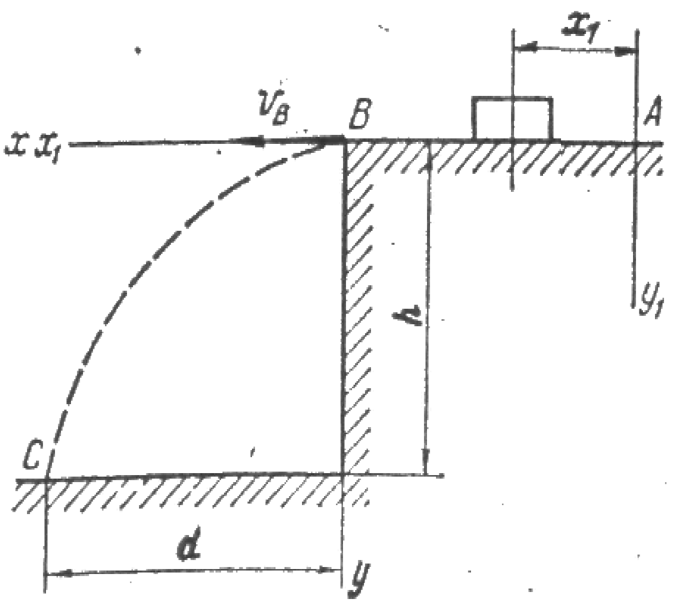


Рисунок 9

Маючи в точці А швидкість υ_A, тіло рухається по горизонтальному відрізку АВ довжиною l протягом часу τ, с.

Коефіцієнт тертя ковзання тіла по площині дорівнює f. Зі швидкістю υ_B тіло в точці В залишає площину і потрапляє в точку С зі швидкістю υ_C, перебуваючи у повітрі Т, с.

При розв'язанні задачі вважати тіло за матеріальну точку, опором повітря знехтувати

Варіант 26. Дано: υ_A. = 7 м/с, f =0,2, l = 8 м, $h = 20$ м.

Визначити d і υ_C .

Варіант 27. Дано: υ_A. = 4 м/с, f =0,1, τ = 2 с, d = 2 м.

Визначити υ_B і h.

Варіант 28. Дано: υ_B. = 3 м/с, f =0,3, l = 3 м, $h = 5$ м.

Визначити υ_A. і Т.

Варіант 29. Дано: υ_A. = 3 м/с, υ_B = 1 м/с, l = 2,5 м, $h = 20$ м.

Визначити f і d.

Варіант 30. Дано: f = 0,25, l = 4 м, d = 3 м, $h = 5$ м.

Визначити υ_A. і τ.

7 Розрахунково-графічна (контрольна) робота для студентів заочної форми навчання

За робочою програмою дисципліни «Теоретична механіка» студенти заочної форми навчання всіх спеціальностей механіко-енергетичного та будівельного факультетів виконують контрольну роботу (КР) з розділу «Динаміка» – Д1. На основі наведеного вище теоретичного матеріалу виконується завдання за темою «Динаміка точки. Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки» [2]. Варіанти індивідуальних завдань (подано нижче) можна виконати базуючись на рекомендаціях попередніх пунктів.

Вантаж D масою m, отримавши в точці A початкову швидкість V_0, рухається по вигнутій трубі ABC, яка розташована у вертикальній площині; ділянки труби чи обидві похилі, чи одна горизонтальна, а друга похила (рисунки 10–12 (Д1.0-9), таблиця 1).

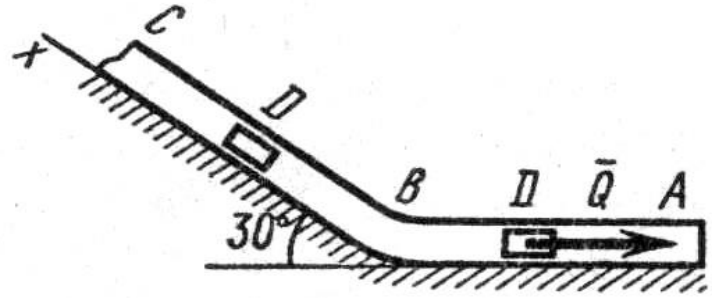
На ділянці AB на вантаж крім сили ваги діють постійні сила $\vec{Q}$ (її напрямок показаний на рисунках) і сила опору середовища $\vec{R}$, яка залежить від швидкості $\vec{V}$ вантажу (спрямована проти руху); тертям вантажу об трубу на ділянці AB знехтувати. У точці B вантаж , не змінюючи своєї швидкості, переходить на ділянку BC труби, де на нього крім сили ваги діють сила тертя (коефіцієнт тертя вантажу f = 0,2) і змінна сила $\vec{F}$, проекція якої F_x на вісь x задана в таблиці 1. Вважаючи вантаж матеріальною точкою і знаючи відстань $AB = l$ чи час t_1 руху вантажу від точки A до точки B, знайти закон руху вантажу на ділянці BC, тобто $x = f(t)$, до x = BD .

Таблиця 1

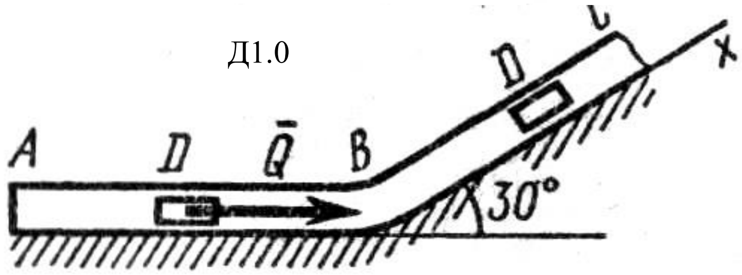
Номер	m, кг	$V_0, \frac{м}{с}$	Q, Н	R, Н	l, м	t1, с	F_x, Н
1	2	3	4	5	6	7	8
0	2,0	20	6	0,4V	–	2.5	$2\sin(4t)$
1	2,4	12	6	0,8V2	1.5	–	6t
2	4,5	24	9	0,5V	–	3	$3\sin(2t)$
3	6,0	14	22	0,6V2	5	–	$-3\cos(2t)$

Продовження таблиці 1

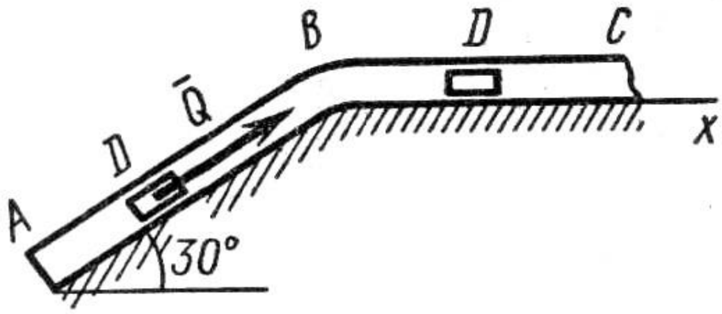
1	2	3	4	5	6	7	8
4	1,6	18	4	0,4V	–	2	$4\cos(4t)$
5	8,0	10	16	0,5V2	4	–	_$6\sin(2t)$
6	1,8	24	5	0,6V	–	2	9t2
7	4,0	12	12	0,8V2	2.5	–	_$8\cos(4t)$
8	3,0	22	9	0,5V	–4	3	$2\cos(2t)$
9	4,8	10	12	0,2V2		–	_$6\sin(2t)$



Д1.0

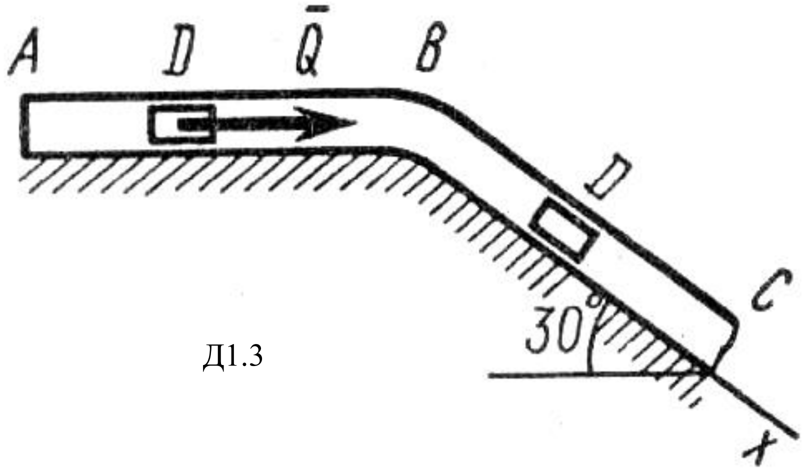


Д1.1

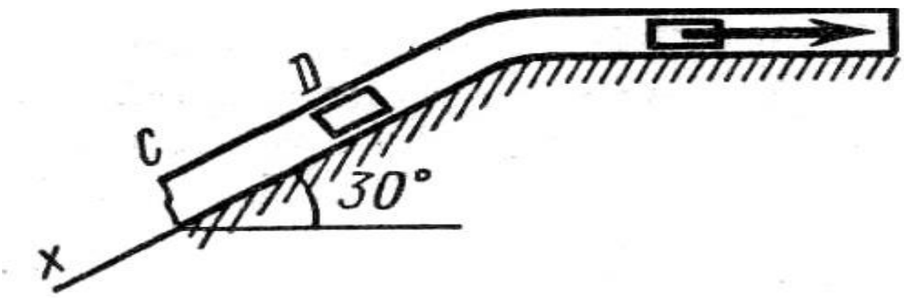


Д1.2

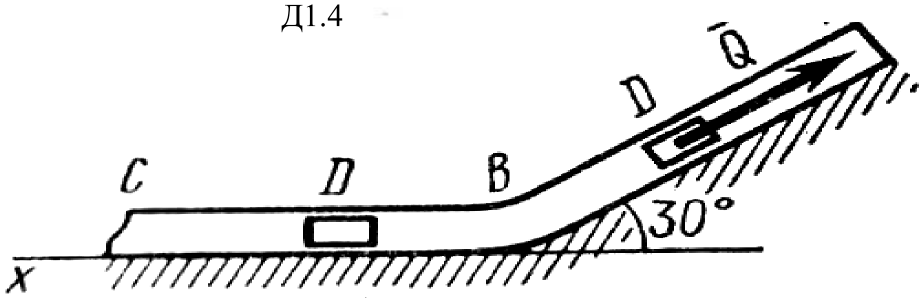
Рисунок 10



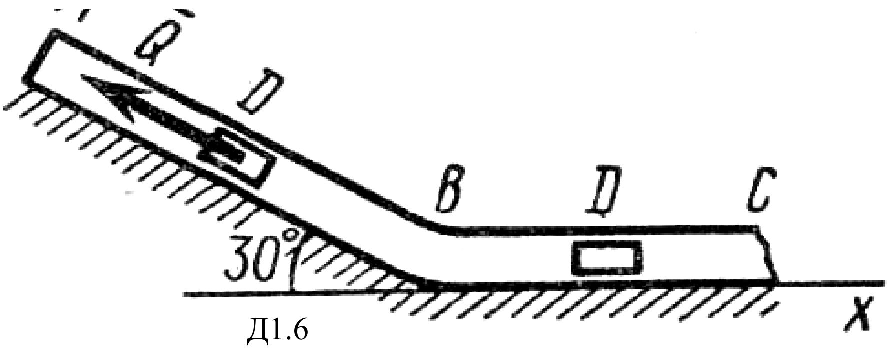
Д1.3



Д1.4

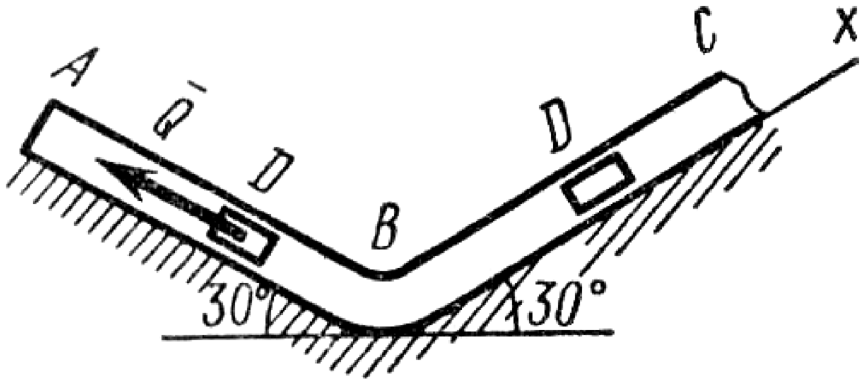


Д1.5

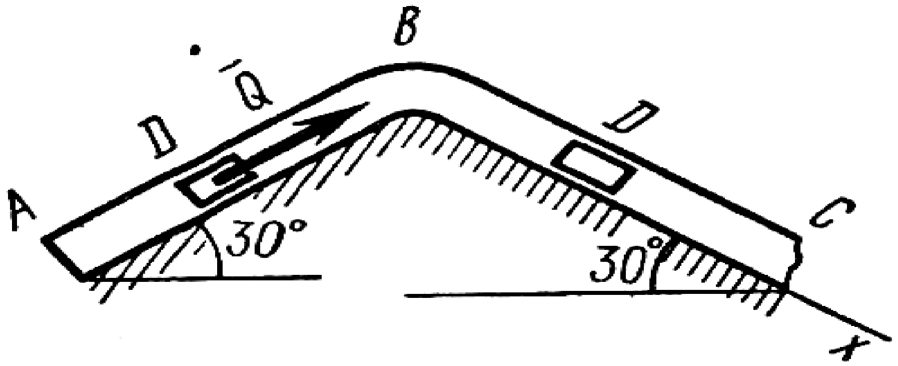


Д1.6

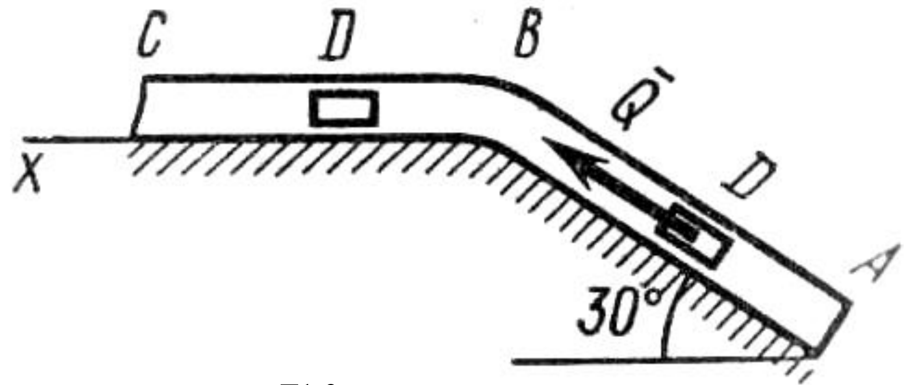
Рисунок 11



Д1.7



Д1.8



Д1.9

Рисунок 12

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Аксьонова Н. А. Теоретична механіка : робочий конспект лекцій. Харків : УкрДАЗТ, 2005. 122 с.

2 Аксьонова Н. А., Оробінський О. В. Теоретична механіка : конспект лекцій. Харків : УкрДАЗТ, 2015. 152 с.

3 Аксьонова Н. А., Дунай Л. М. Комплексне методичне забезпечення до виконання розрахунково-графічних робіт з дисципліни «Теоретична механіка». Харків : УкрДАЗТ, 2013. 70 с.

4 Бондаренко А. А. Теоретична механіка : підручник: у 2 ч. Ч. 1. Статика. Кінематика. Київ : Знання, 2004. 599 с.

5 Бондаренко А. А. Теоретична механіка: підручник : у 2 ч. Ч. 2. Динаміка. Київ : Знання, 2004. 590 с.

6 Теоретична механіка : навч. посіб. Ч. 1. Статика, кінематика / В. Векерик, М. Лисканич, Я. Капелюх, О. Петрук, І. Цідило. Івано-Франківськ : Факел, 2002. 273 с.

7 Теоретична механіка : навч. посіб. Ч. 2. Динаміка. / В. Векерик, М. Лисканич, Я. Капелюх, О. Петрук, І. Цідило. Івано-Франківськ : Факел, 2002. 342 с.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
до виконання розрахунково-графічних робіт

з дисципліни
«*ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА*»
(розділ «*ДИНАМІКА*»)

Відповідальний за випуск Аксьонова Н. А.

Редактор Еткало О. О.

Підписано до друку 05.04.21 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 1,75. Тираж 5. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.