

№ 393

Санкт-Петербург  
Издательство  
Московской

# Т Е О Р И Я

## ФУНКЦІЙ КОМІЛЛЕРСНОГО ПРЕВЕННАГО.



ЛЕКЦІИ

С. Є. Савіца.



САНКТ-ПЕТЕРБУРГЪ.

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЇ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

Вас. Остр., 9 лин., № 12.

1906.

# СОДЕРЖАНИЕ

1—2.	Определение комплексного и атомарного чисел и их видов	18
3.	Сложение и умножение комплексных чисел	19
4—8.	Числа в полярной форме	20—22
9—10.	Вещественная и мнимая части к. числа; представление к. чисел точками плоскости	23
11.	Возведение к. числа в вещественную степень	24
12.	Представление к. чисел точками на сфере	25

## ОГЛАВЛЕНИЕ.

### ГЛАВА I. Комплексные числа и функции.

#### I. Простейшие операции над комплексными числами.

Стран.:

Введение . . . . .	III—IX
1. Понятие о комплексномъ числѣ; модуль и аргументъ его . . . . .	1
2—4. Сложение и умножение комплексныхъ чиселъ . . . . .	3—7
5. Вычитаніе и дѣленіе комплексныхъ чиселъ; сопряженныя числа	9
6. Вещественная и мнимая часть к. числа; представление к. чиселъ точками плоскости . . . . .	10
7. Возведеніе к. числа въ вещественную степень . . . . .	13
8. Представление к. чиселъ точками на сфере . . . . .	15

#### II. Безконечные ряды комплексныхъ чиселъ.

9—10. Перемѣнныя к. числа; предѣлы ихъ . . . . .	16—18
11—12. Безконечный рядъ к. чиселъ; сумма ряда; безусловно сходящіеся ряды . . . . .	18—19
13. Зависимость суммы бесконечного ряда отъ порядка слагаемыхъ	16—21
14—15. Сложение и умножение рядовъ . . . . .	22—24
16. Равномѣрно сходящіеся ряды . . . . .	26
17. Кругъ и радиусъ сходимости степенного ряда . . . . .	27
Упражненія . . . . .	31

#### III. Безконечные произведения.

18—19. Безконечные произведения к. чиселъ; безусловно сходящіеся произведения . . . . .	31—33
20. Измененіе порядка множителей въ бесконечномъ произведениі	35

**IV. Простейшія функції комплексного перемінного.**

Стран.:

21. Функції к. числа; непрерывность и равномѣрная непрерывность ф-їи . . . . .	37
22—25. Показательныя, тригонометрическія, логарифмическая, степен- ная и круговая ф-їи к. перемінного . . . . .	39—46
Упражненія . . . . .	46

**ГЛАВА II. Производные и интегралы функций комп-  
лексного перемінного.****I. Производные функций комплексного перемінного.**

26. Понятіе о производной ф-їи к. перемінного; условие ея сущес- твования . . . . .	47
27. Геометрическое значеніе условия существования производной . . . . .	50
28—30. Преобразование фигуръ съ сохраненіемъ подобія въ бесконеч- но-малыхъ частяхъ . . . . .	52
31. Правила составленія производныхъ . . . . .	55
32. Аналитическая ф-їи к. перемінного . . . . .	57

**II. Интегралы отъ функций комплексного перемінного.**

33. Понятіе обѣ интегралѣ ф-їи к. перемінного, взятое по кривой . . . . .	58
34. Приведеніе интеграла ф-їи к. перемінного къ вещественнымъ интеграламъ . . . . .	60
35. Вычислениe нѣкоторыхъ простейшихъ интеграловъ ф-їи к. перемінного . . . . .	62
36. Главнейшія свойства интеграловъ ф-їи к. перемінного; фор- мула Дарбу . . . . .	64
37. Преобразование перемінной подъ знакомъ интеграла . . . . .	66
38—40. Теорема Коши относительно интеграла, взятаго по замкнутому контуру . . . . .	68—75
41. Формула Коши для выражения ф-їи к. перемінного въ видѣ интеграла . . . . .	78
42. Теорема Ліувіля . . . . .	79
43. Производная высшаго порядка отъ аналитической ф-їи . . . . .	80
44. Существование производной для отдельныхъ точекъ въ области непрерывности аналитической ф-їи . . . . .	81

**III. Дифференцированіе и интегрированіе рядовъ.**

45. Интегрированіе равномѣрно-сходящихся рядовъ . . . . .	82
46. Производная отъ равномѣрно-сходящагося ряда . . . . .	83

Стран.:

**IV. Приложение свойствъ интеграловъ функций комплексного перемінного  
къ вычислению определенныхъ интеграловъ отъ вещественныхъ функций.**

47—48. Приложение теоремы Коши къ вычислению нѣкоторыхъ ин- теграловъ . . . . .	92
49. Выводъ общихъ формулъ Пуассона и Абеля . . . . .	92
Упражненія . . . . .	94

**ГЛАВА III. Разложение однозначныхъ функций на  
простейшіе элементы при конечномъ числѣ особыхъ  
точекъ.****I. Ряды Коши - Тэйлора и Лорана.**

50. Разложение въ ряды Тэйлора и Маклорена . . . . .	96
51. Цѣлые трансцендентныя ф-їи . . . . .	97
52. Нули цѣлыхъ трансцендентныхъ ф-їи . . . . .	99
53. Разложение Лорана . . . . .	101
54. Разложение ф-їи въ области, заключающей конечное число особенныхъ точекъ . . . . .	103
55. Главная часть разложения ф-їи въ области особенной точки	106

**II. Особенная точки функций комплексного перемінного.**

56. Полюсы . . . . .	107
57. Существенно особенные точки . . . . .	108

**III. Простейшія свойства однозначныхъ функций.**

58—59. Цѣлые и рациональные ф-їи . . . . .	109—110
60. Число нулей и полюсовъ однозначной ф-їи внутри даннаго контура . . . . .	111

**IV. Интегральные вычеты функций комплексного перемінного. (61)****ГЛАВА IV. Разложение однозначныхъ функций на  
простейшіе элементы при бесконечномъ числѣ ну-  
лей и особыхъ точекъ.****I. Общія разложения.**

62. Отдельно лежащія особенные точки . . . . .	117
63. Разложение Миттаг-Леффлера для ф-їи, имѣющихъ безко- лическое множество отдельно лежащихъ особенныхъ то- чекъ . . . . .	118
64—65. Разложение однозначной ф-їи въ бесконечное произведение	120

<b>II. Разложение периодическихъ функций на простѣйшіе элементы.</b>	
66—67. Разложение на простѣйшіе элементы $\frac{\operatorname{ctg} z}{z}$ и $\operatorname{ctg} z$ . . . . .	125—129
68. Разложение $\sin z$ и $\cos z$ въ бесконечныя произведения . . . . .	129
<b>III. Разложение эллиптическихъ функций.</b>	
69—70. Общія опредѣленія. Параллелограммы періодовъ . . . . .	131—133
71. Изслѣдованіе сходимости двойного ряда . . . . .	134
72. Функции $\rho(z)$ , $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$ . . . . .	137
74—74. Общий видъ двойно-періодической ф-їи . . . . .	140—141

## ГЛАВА V. Линії и площади разрыва. Аналитическое продолженіе функций.

<b>I. Линії и площади разрыва однозначныхъ функций.</b>	
75—76. Примѣры линій и площадей разрыва . . . . .	143—145
77. Примѣръ ф-їи, не имѣющей производной . . . . .	148

## II. Аналитическое продолженіе функций.

78—81. Общія положенія . . . . .	151—156
82. Теорема Шварца о продолженіи ф-їи . . . . .	157

## ГЛАВА VI. Многозначныя функции комплекснаго переменнаго.

<b>I. Общія положенія.</b>	
83—84. Опредѣленіе; вѣтви, особенные точки и петли многозначныхъ ф-їи . . . . .	160—163
85. Купюры многозначной ф-їи . . . . .	165
86. Геометрическое представлениe многозначныхъ ф-їи по Риману . . . . .	167
87—88. Вычислениe нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ на основаніи свойствъ многозначныхъ ф-їи (форм. Куммера) . . . . .	169—171

## II. Алгебраическая функции.

89. Общія положенія . . . . .	172
90—91. Теорема Коши о непрерывности вѣтвей алгебраическихъ ф-їи и ея слѣдствіе . . . . .	174—177

92—93. Распределеніе вѣтвей въ круговой системѣ въ области особенныхъ точекъ . . . . .	178—180
94—97. Опредѣленіе круговыхъ системъ; параллелограммъ Ньютона . . . . .	180—187
98. Примѣры . . . . .	189

## III. Интегралы отъ алгебраическихъ функций.

99. Интегралъ ф-їи $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ . . . . .	192
100—101. Интегралъ ф-їи $\frac{1}{\sqrt{z-u}(z-b)(z-c)}$ и $\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ . . . . .	196—198